

# まえがき

この文書は、裳華房から出版されている加藤岳生著「電磁気学入門」の補足説明および Training, Practice の詳細な解説が含まれています。

正誤表および本 PDF は、サポートページ

<https://github.com/takeokato719/Electromagnetics>

においても公開しています。もし、テキストや本 PDF に誤りを見つけたら、上記のサポートページの Issues から報告してください。なるべく早めに正誤表をアップデートしたいと思います。



# 目次

<b>第 1 章</b>	<b>数学の準備：微分編（テキストの第 A 章）</b>	<b>1</b>
1.1	補足説明: 全微分公式の証明 . . . . .	1
1.2	補足説明: $\text{rot } \mathbf{A}$ の覚え方 . . . . .	2
1.3	Training の解答 . . . . .	3
1.4	Practice の解答 . . . . .	5
<b>第 2 章</b>	<b>数学の準備：積分編（テキストの第 B 章）</b>	<b>9</b>
2.1	補足説明: ストークスの定理の証明 (ステップ 3) . . . . .	9
2.2	Training の解答 . . . . .	10
2.3	Practice の解答 . . . . .	12
<b>第 3 章</b>	<b>静電場 I – 電場と電位 –（テキストの第 1 章）</b>	<b>17</b>
3.1	Training の解答 . . . . .	17
3.2	Practice の解答 . . . . .	19
<b>第 4 章</b>	<b>静電場 II – 導体とコンデンサー –（テキストの第 2 章）</b>	<b>23</b>
4.1	補足説明: 電場のもつエネルギー . . . . .	23
4.2	Training の解答 . . . . .	26
4.3	Practice の解答 . . . . .	27
<b>第 5 章</b>	<b>電流（テキストの第 3 章）</b>	<b>31</b>
5.1	Training の解答 . . . . .	31
5.2	Practice の解答 . . . . .	32
<b>第 6 章</b>	<b>静磁場（テキストの第 4 章）</b>	<b>35</b>
6.1	補足説明: アンペールの法則の直線電流への適用方法 . . . . .	35
6.2	補足説明: アンペールの法則のソレノイドへの適用方法 . . . . .	36
6.3	Training の解答 . . . . .	37
6.4	Practice の解答 . . . . .	41
<b>第 7 章</b>	<b>電磁誘導（テキストの第 5 章）</b>	<b>43</b>
7.1	補足説明: 回路が動くときのファラデーの法則の証明 . . . . .	43
7.2	Training の解答 . . . . .	44
7.3	Practice の解答 . . . . .	45

---

第 8 章	マクスウェル方程式 (テキストの第 6 章)	47
8.1	Training の解答 . . . . .	47
8.2	Practice の解答 . . . . .	47

## 第 1 章

# 数学の準備：微分編（テキストの第 A 章）

### 1.1 補足説明：全微分公式の証明

全微分公式の厳密な証明は数学の教科書に任せるとして、直感的な意味がわかりやすい大まかな証明だけ示します。

まず 2 変数関数から考えてみましょう。2 変数関数  $f(x, y)$  に対して、以下の公式が成り立ちます：

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + (\Delta x, \Delta y \text{ の 2 次以上の項}).\end{aligned}\quad (1.1)$$

この式が証明できれば、3 変数関数への拡張は簡単だろう、というわけです。さて、 $z = f(x, y)$  のグラフを考えてみましょう。これは  $(x, y)$  に対して高さ  $z = f(x, y)$  の点の集合を考えればよく、3 次元空間中で曲面を表します (図 1.1)。このとき  $\Delta f$  は、 $(x, y)$  から  $(x + \Delta x, y + \Delta y)$  へと位置を変化させたときの曲面  $z = f(x, y)$  の高さの差にあたります (図 1.1 の拡大図)。もし、 $\Delta x, \Delta y$  が十分小さければ、 $(x, y)$  付近の曲面を拡大して考えればよく、このとき曲面はほぼ平面とみなして構いません。このとき、図 1.1 の拡

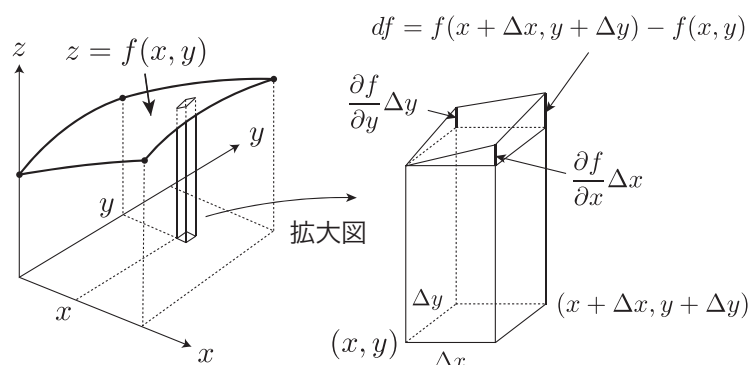


図 1.1 全微分公式の直感的な証明のための図。

大図より  $\Delta f$  を

$$\Delta f \simeq \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y. \quad (1.2)$$

と近似的に表現することができます (一次近似の式)。実際には曲面は曲がっているのですが、その効果でこの近似にはわずかなズレが生じますが、これは  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  についての 2 次以上の項となります。よって、式 (1.1) が成り立つことがわかります。最後に式 (1.1) で  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  を微小量  $dx$ ,  $dy$  に置き換えることで、2 変数関数の全微分公式

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy, \quad (1.3)$$

が得られます。

以上の議論を 3 変数に拡張するのは簡単です。一次近似の式は、

$$\Delta f \simeq \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z. \quad (1.4)$$

となり、全微分公式は

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (1.5)$$

となります。

ちなみに 1 変数関数  $f(x)$  に対して、一次近似の公式は以下のように与えられます：

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \quad (1.6)$$

$$= \frac{df}{dx} \Delta x + (\Delta x \text{ の 2 次以上の項}) \quad (1.7)$$

この公式の意味は明快ですね。  $x$  から  $x + \Delta x$  に変化したときの  $f(x)$  の値の変化  $\Delta f$  を考えたいわけですが、  $\Delta x$  が十分小さいときは  $y = f(x)$  のグラフは  $x$  から  $x + \Delta x$  の区間でほぼ直線に見えるはずです。よって、  $\Delta f$  は、そこでの  $f(x)$  の傾きに  $\Delta x$  を掛けたもので近似できます。  $f(x)$  の傾きは導関数  $f'(x) = \frac{df}{dx}$  であるので、

$$\Delta f \simeq \frac{df}{dx} \Delta x \quad (1.8)$$

が成り立ちます<sup>\*1</sup>。これが一次の式となっており、  $\Delta x$  を微小量  $dx$  に置き換えることで、全微分公式の 1 変数版

$$\Delta f = \frac{df}{dx} dx \quad (1.9)$$

が成り立ちます。

## 1.2 補足説明: $\text{rot } \mathbf{A}$ の覚え方

$\text{rot } \mathbf{A}$  の定義ですが、込み入っているので覚えるのが大変そうですが、慣れるとそれほどありません。覚え方の一つは、ベクトルの外積の公式をよく覚えておくことです。そうすれば、  $\text{rot } \mathbf{A}$  はナブラ記号で  $\nabla \times \mathbf{A}$  と書けることさえ覚えておけば、あとは外積

<sup>\*1</sup> ここで微分が通常の記号  $\frac{df}{dx}$  となっているのは、  $f(x)$  が 1 変数関数なので他に固定すべき変数がないからです

の定義式に当てはめるだけで済みます。別の覚え方として、普段私が使っているものも紹介しましょう。

rot の定義式

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

をもう一度よく見てください。rot  $\mathbf{A}$  の  $x$  成分には、 $x$  が含まれていないので、ここは  $\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, A_y, A_z$  を組み合わせた式がきます。そして、これらの文字  $y, z$  のうち、 $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$  の向きで指定した順番にしたとき、**先に現れるもので後に現れる成分を偏微分した式**を書きます。今の場合は、 $y \rightarrow z$  の順番に並べて、先に現れる  $y$  で後に現れる  $z$  成分 (つまり  $A_z$ ) を偏微分すればいいわけです。これで、まず  $\frac{\partial A_z}{\partial y}$  ができます。あとはこれにマイナス符号を付けて、 $y$  と  $z$  をひっくり返した式  $-\frac{\partial A_y}{\partial z}$  を続けてかけば、 $x$  成分が終了です。あとは、同じルールです。例えば  $y$  成分であれば、ここには  $y$  は含まれず、 $z \rightarrow x$  の順で先にくるのは  $z$  だから、 $z$  の偏微分を  $A_x$  に作用した式をまず書き、そのあとに  $z$  と  $x$  をひっくり返した式を差し引けばよいのです\*2。

### 1.3 Training の解答

Training A.1 次の 3 変数関数に対して、 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$  を求めなさい。

- (1)  $f(x, y, z) = 2x - y + z$       (2)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$   
 (3)  $f(x, y, z) = \cos(ax + by + cz)$  ( $a, b, c$  は定数)

解答 (1)  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2$     $\frac{\partial f}{\partial y} = -1$     $\frac{\partial f}{\partial z} = 1$    (2)  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$     $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$     $\frac{\partial f}{\partial z} = 2z$

(3)  $\frac{\partial f}{\partial x} = -a \sin(ax + by + cz)$     $\frac{\partial f}{\partial y} = -b \sin(ax + by + cz)$   
 $\frac{\partial f}{\partial z} = -c \sin(ax + by + cz)$

Training A.2  $f(x, y, z) = x^2 y z^3$  に対して、 $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$  を計算し、微分の順番を交換しても同じ結果となることを確かめなさい。

解答  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 y z^2) = 3x^2 z^2$     $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} (x^2 z^3) = 3x^2 z^2$   
 $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z} (2x y z^3) = 6x y z^2$     $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2 y z^2) = 6x y z^2$

Training A.3  $f(x, y, z) = x^2 y z^3$  に対して、 $(x, y, z) = (1, 1, 1)$  から  $(x, y, z) = (1.01, 1.02, 0.99)$  へと変化したときの  $f$  の値の変化を、1 次近似の範囲で求めなさい。

\*2 私はいつもこうやっていますが、もちろん皆さんが一番わかり易い覚え方を使えばよいと思います。

**解答**  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xyz^3$ 、 $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2z^3$ 、 $\frac{\partial f}{\partial z} = 3x^2yz^2$  となるので、 $(x, y, z) = (1, 1, 1)$  のとき、 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2$ 、 $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$ 、 $\frac{\partial f}{\partial z} = 3$  である。全微分公式より、

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 2dx + dy + 3dz \\ &= 2 \times 0.01 + 0.02 - 3 \times 0.01 = 0.01 \end{aligned}$$

**Training A.4** 次の3変数関数  $f(x, y, z)$  に対して、 $df$  を  $dx, dy, dz$  を用いて表しなさい。

(1)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$       (2)  $f(x, y, z) = xyz$

**解答** (1)  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z} = 2z$  より、 $df = 2x dx + 2y dy + 2z dz$

(2)  $\frac{\partial f}{\partial x} = yz$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = xz$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z} = xy$  より、 $df = yz dx + xz dy + xy dz$   
これは積の微分の公式  $d(xy) = y dx + x dy$  の拡張版とみなすこともできます。

**Training A.5** スカラー場  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  に対して、 $\text{grad } f$  を求めなさい。

**解答**  $\text{grad } f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$

**Training A.6** スカラー場  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  に対して、その等高面の形状はどのようなのでしょうか。また、 $\text{grad } f$  と等高面が直交することを確認なさい。

**解答** 等高面  $x^2 + y^2 + z^2 = C$  は原点を中心とする球面である。また、 $\text{grad } f = (2x, 2y, 2z)$  は原点から  $(x, y, z)$  を結ぶ線の方角を向くので、 $(x, y, z)$  を通る原点を中心とする球面とは直交する。よって、等高面と  $\text{grad } f$  は直交する。

**Training A.7**  $C$  の値を一定間隔で変化させながら等高面  $f(x, y, z) = C$  を描いていったとき、等高面の間隔が狭くなった場所で  $|\text{grad } f|$  が大きな値をもつ理由を説明しなさい。

**解答** 等高面の間隔が狭くなった場所では、等高面に直交する方向で  $f(x, y, z)$  の値の変化の割合が大きい。 $\text{grad } f$  の大きさは、 $\text{grad } f$  の向き (=等高面に直交する向き) に動いたときの  $f$  の変化の割合となるので、等高面の間隔が狭くなった場所で  $\text{grad } f$  の大きさは大きくなる。

**Training A.8**  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$  のとき、次の問いに答えなさい。

(1)  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = 0$  および  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$  を成分表示によって証明しなさい。

(2) 次の恒等式を証明しなさい。

$$\begin{aligned} &(a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2 \\ &= (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2 \end{aligned}$$



(3) (2) の恒等式を用いて、 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta$  を示しなさい。ただし、 $\theta$  は  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  の成す角とします。

**解答** (1)  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$  より、

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} &= \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) a_x + (a_z b_x - a_x b_z) a_y + (a_x b_y - a_y b_x) a_z = 0 \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} &= \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) b_x + (a_z b_x - a_x b_z) b_y + (a_x b_y - a_y b_x) b_z = 0 \end{aligned}$$

(2) 右辺を式変形していくと、

$$\begin{aligned} &(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2 \\ &= a_x^2 b_x^2 + a_x^2 b_y^2 + a_x^2 b_z^2 + a_y^2 b_x^2 + a_y^2 b_y^2 + a_y^2 b_z^2 + a_z^2 b_x^2 + a_z^2 b_y^2 + a_z^2 b_z^2 \\ &\quad - a_x^2 b_x^2 - a_y^2 b_y^2 - a_z^2 b_z^2 - 2a_x a_y b_x b_y - 2a_y a_z b_y b_z - 2a_z a_x b_z b_x \\ &= (a_y^2 b_z^2 + a_z^2 b_y^2 - 2a_y a_z b_y b_z) + (a_z^2 b_x^2 + a_x^2 b_z^2 - 2a_z a_x b_z b_x) \\ &\quad + (a_x^2 b_y^2 + a_y^2 b_x^2 - 2a_x a_y b_x b_y) \\ &= (a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2 \end{aligned}$$

(3) (2) で導いた式を用いると、

$$|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2$$

がいえる。内積の公式  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta$  を用いると、

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 &= |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \cos^2 \theta = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2 \theta \\ \Rightarrow |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| &= |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta \end{aligned}$$

となる。

## 1.4 Practice の解答

[A.1] **全微分公式** 3変数関数  $f(x, y, z) = xy + yz + zx$  に対して、全微分公式を書き下しなさい。

**解答**  $df = (y + z) dx + (z + x) dy + (x + y) dz$  となる。

[A.2] **grad の計算** スカラー場  $f(x, y, z) = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  に対して、 $\text{grad } f$  を計算しなさい。

**解答**  $x$  で偏微分するときは  $y, z$  を定数と見なして  $x$  で微分すればよく、

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = -\frac{2x}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

同様にして

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

以上より、

$$\text{grad } f = -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

となる。

[A.3] **div の計算** ベクトル場  $\mathbf{A} = (x/r^3, y/r^3, z/r^3)$  に対して、原点  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  を除いて  $\text{div } \mathbf{A}$  がゼロになることを示しなさい。ただし、 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  とします。

**解答**  $x$  で偏微分するときは  $y, z$  を定数と見なして  $x$  で微分すればよく、

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_x}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) \\ &= \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + x \left( -\frac{3}{2} \right) \frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \\ &= \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}\end{aligned}$$

となる。同様にして、

$$\frac{\partial A_y}{\partial y} = \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5} \quad \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}$$

となる。これらより、

$$\begin{aligned}\text{div } \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ &= \frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0\end{aligned}$$

となる。

[A.4] **rot の計算** ベクトル場  $\mathbf{A} = (x/r^3, y/r^3, z/r^3)$  に対して、 $\text{rot } \mathbf{A}$  がゼロになることを示しなさい。ただし、 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  とします。

**解答** まず  $\text{rot } \mathbf{A}$  の  $z$  成分から計算する：

$$(\text{rot } \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

$\frac{\partial A_y}{\partial x}$  を具体的に計算すると、 $y, z$  を定数とみなすことで、

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_y}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) = y \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) \\ &= y \times \left( -\frac{3}{2} \right) \frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = -\frac{3xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}\end{aligned}$$

となる。同様にして、

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} = x \times \left( -\frac{3}{2} \right) \frac{2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = -\frac{3xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

となるので、

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0 \quad (1.11)$$

が結論される。他の成分も同様の計算によりゼロになることがわかるので、 $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{0}$  となる。

[A.5] 微分公式 微分公式 (i)~(v) を示しなさい。ただし、偏微分の順番が交換できること

(例:  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ) は用いて構いません。

(微分公式)

$\mathbf{A}, \mathbf{B}$  をベクトル場、 $f, g$  をスカラー場としたとき、以下の式が成り立つ。

- (i)  $\operatorname{grad}(f + g) = \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g \quad (\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla \cdot g)$
- (ii)  $\operatorname{div}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \operatorname{div} \mathbf{A} + \operatorname{div} \mathbf{B} \quad (\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B})$
- (iii)  $\operatorname{rot}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{rot} \mathbf{B} \quad (\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B})$
- (iv)  $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \mathbf{0} \quad (\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0})$
- (v)  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) = 0 \quad (\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0)$

解答

(i)  $f = f(x, y, z), g = g(x, y, z)$  をスカラー場として、

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(f + g) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(f + g) \\ \frac{\partial}{\partial y}(f + g) \\ \frac{\partial}{\partial z}(f + g) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} = \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g\end{aligned}$$

(ii)  $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z), \mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$  として、

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \frac{\partial}{\partial x}(A_x + B_x) + \frac{\partial}{\partial y}(A_y + B_y) + \frac{\partial}{\partial z}(A_z + B_z) \\ &= \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \\ &= \operatorname{div} \mathbf{A} + \operatorname{div} \mathbf{B}\end{aligned}$$

(iii)  $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ ,  $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$  として、

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(A_z + B_z) - \frac{\partial}{\partial z}(A_y + B_y) \\ \frac{\partial}{\partial z}(A_x + B_x) - \frac{\partial}{\partial x}(A_z + B_z) \\ \frac{\partial}{\partial x}(A_y + B_y) - \frac{\partial}{\partial y}(A_x + B_x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \text{rot} \mathbf{A} + \text{rot} \mathbf{B} \end{aligned}$$

(iv)  $\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$  を用いると、 $\text{rot}(\text{grad } f)$  の  $z$  成分は、

$$\left( \text{rot}(\text{grad } f) \right)_z = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

となる。ここで偏微分の順番が交換できることを用いると、 $(\text{rot}(\text{grad } f))_z = 0$  となる。

同様に、 $x$  成分や  $y$  成分もゼロとなることが示せるので、 $\text{rot}(\text{grad } f) = \mathbf{0}$  である。

(iv)  $\text{rot} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$  を用いると、偏微分が交換できることを用いて、

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{rot} \mathbf{A}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。

## 第 2 章

# 数学の準備：積分編（テキストの第 B 章）

### 2.1 補足説明: ストークスの定理の証明 (ステップ 3)

テキストでは、 $xy$  平面に平行な面に対してストークスの定理を証明しましたが、曲面が  $xy$  平面に平行でない場合の証明は省略しました。以下、その証明の概略を説明します。

まず、図 2.1 のように周回経路  $C$  の内部を  $N$  分割して微小周回経路  $C_i$  に分けるところまでは同じです。この小さな周回経路  $C_i$  と、それに囲まれる面  $A_i$  に対して、

$$\int_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}_i, \quad (2.1)$$

が成り立てば、あとはこれをすべての領域  $A_i$  について足し合わせることで証明が完了します。ただし、今回は面  $A_i$  の法線が  $z$  方向を向いていない (=面  $A_i$  が  $xy$  平面に平行ではない) ことだけが違うので、ステップ 2 で  $xy$  面内を周回するような経路に対して行った証明を、少し回転させて同じように行いたいわけです。そこで座標軸を回転させて、座標を  $(x, y, z)$  から  $(x', y', z')$  へと変換し、図 2.1 のように  $z'$  軸が面  $A_i$  の法線になるようにしてみましょう。このとき、線積分や面積分は変わるのでしょうか？

座標回転によって、微小経路  $d\mathbf{r}$  や微小面積ベクトル  $d\mathbf{S}$ 、ベクトル場  $\mathbf{A}$  の成分が変化します。しかし、微小経路での線積分  $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$  や微小領域での面積分  $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$  は、ベクトルの内積の形で表されていますが、座標回転によってベクトルの長さや 2 つのベクトルの成す角度が変化しないことから、それらを足し合わせた線積分や面積分も変化しないことになります (実際そうならないと困ります)。なぜなら、すでに説明したように、仕事  $W$  や磁束  $\Phi$  は線積分および面積分で記述できますが、これは座標軸のとり方には依らない量であってほしいからです。よって、座標  $(x', y', z')$  で式 (2.1) を示せばよいことになります。

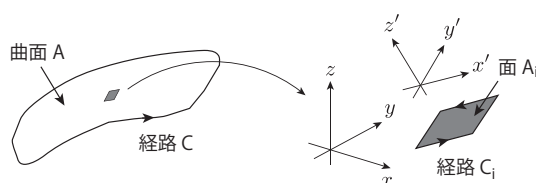


図 2.1 曲面  $A$  の分割と微小領域における座標回転。

ますが、この場合は微小経路  $C_i$  および微小面  $A_i$  が  $x'y'$  平面と平行になるので、ステップ2までで行っていた証明方法をそのまま使うことができることになり、証明完了となります。

## 2.2 Training の解答

Training B.1 Exercise B.1 と同じベクトル場  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$  に対して、次の経路における線積分を求めよ。

- (1)  $(0, 1)$  から  $(1, 0)$  へ向かう半径1の  $1/4$  円弧 (経路  $C_1$  と逆向きの経路)。
- (2)  $(1, 0)$  から原点へ向かった後、さらに  $(1, 0)$  へ向かう折れ線の経路。

**解答** (1) 経路は媒介変数  $\theta$  を用いて、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\theta = \pi/2 \rightarrow \theta = 0)$$

と書き表される。これより微小変位は、

$$d\mathbf{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta d\theta \\ \cos \theta d\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} d\theta$$

となるので、線積分は

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\pi/2}^0 \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} d\theta \\ &= \int_{\pi/2}^0 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta = \int_{\pi/2}^0 d\theta \\ &= [\theta]_{\pi/2}^0 = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

となる。

- (2) 常に経路とベクトル場  $\mathbf{A}$  の値が直交するので、 $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0$  が常に成り立ち、線積分はゼロになる。

Training B.2 ベクトル場  $\mathbf{A} = (x, y, 0)$  に対して、次の問いに答えなさい。

- (1)  $A(1, 0, 0)$  から  $B(2, 2, 0)$  へ向かう直線経路を経路  $C$  とするとき、線積分  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$  を Exercise B.1 にならって求めなさい。
- (2)  $f(x, y, z) = x^2/2 + y^2/2$  に対して、 $\mathbf{A} = \text{grad } f$  を確かめなさい。
- (3) (1) で求めた線積分が、 $f(\mathbf{r}_B) - f(\mathbf{r}_A)$  と一致することを確かめなさい。

**解答** (1)  $A$  から  $B$  へ向かう経路は、経路は媒介変数  $t$  を用いて、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t = 0 \rightarrow t = 1)$$

と書き表される。微小変位は、

$$d\mathbf{r} = \begin{pmatrix} dt \\ 2dt \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

となるので、線積分は、

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 1+t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 (1+t+4t) dt = \int_0^1 (1+5t) dt \\ &= \left[ t + \frac{5}{2}t^2 \right]_0^1 = \left( 1 + \frac{5}{2} \right) - 0 = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad \text{より、} \quad \text{grad } f = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \quad \text{となる。}$$

(3)  $f(\mathbf{r}_B) - f(\mathbf{r}_A) = f(2, 2, 0) - f(1, 0, 0) = \frac{1}{2}(2^2 + 2^2) - \frac{1}{2}(1^2 + 0^2) = \frac{7}{2}$  となるので、たしかに (1) の線積分と一致する。この結果は、始点  $\mathbf{r}_A$  から終点  $\mathbf{r}_B$  へ向かう経路 C、および、 $\mathbf{A} = \text{grad } f$  に対する線積分の基本定理

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}_B) - f(\mathbf{r}_A)$$

が確かに成り立つことを示している。

Training B.3 地上で鉛直上向きに  $z$  軸をとったときに、質量  $m$  の物体の位置エネルギーは  $V(\mathbf{r}) = mgz$  と書き表されます ( $g$  は重力加速度)。

(1) 物体に加わる重力を  $\mathbf{f}$  としたとき、 $\mathbf{f} = -\text{grad } V$  となることを示しなさい。

(2) 重力とつり合うような外力  $\mathbf{F}$  を加えながら、始点  $P(x_1, y_1, z_1)$  と終点  $Q(x_2, y_2, z_2)$  を結ぶ経路 C に沿って物体を動かしたとき、経路 C で外力  $\mathbf{F}$  がした仕事を求めなさい。また、得られた式の物理的な意味を答えなさい。

解答 (1) 物体に加わる重力は  $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$  となる。一方、

$$-\text{grad } V = - \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} = \mathbf{f}$$

(2) 重力と釣り合うような外力は  $\mathbf{F} = -\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} = \text{grad } V$  となる。このとき、

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C (\text{grad } V) \cdot d\mathbf{r} \\ &= V(x_2, y_2, z_2) - V(x_1, y_1, z_1) \\ &= mgz_2 - mgz_1 \end{aligned}$$

となる。この式は、外力  $\mathbf{F}$  が物体に対してした仕事の分だけ、位置エネルギー  $mgz$  が増加することを意味する。

**Training B.4** ベクトル場  $\mathbf{A} = (x/R^2, y/R^2, 0)$  ( $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ ) に対して、 $z$  軸を中心軸とする半径  $a$ 、高さ  $h$  の円柱の表面  $A$  での面積分を求めなさい。ただし、面の内側から外側へ向かう向きを表面  $A$  の正の向きとします。

**解答** ベクトル場  $\mathbf{A}$  は常に円柱の側面の法線ベクトルと平行であるので、

$$\begin{aligned} \int_{\text{円柱の側面}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= |\mathbf{A}| \int_{\text{円柱の側面}} dS = |\mathbf{A}| \times (\text{円柱の側面積}) \\ &= \frac{1}{a} \times 2\pi ah = 2\pi h \end{aligned}$$

となる。また円柱の上面・下面では、面の法線ベクトルと  $\mathbf{A}$  が直交するので、

$$\int_{\text{円柱の上面・下面}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

となる。以上より、

$$\int_A \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi h$$

## 2.3 Practice の解答

**[B.1] 線積分とストークスの定理** ベクトル場  $\mathbf{A} = (-y, x, 0)$  に対して、次の問いに答えなさい。

- (1)  $z = 0$  平面上の4点  $P(0, 0, 0)$ ,  $Q(a, 0, 0)$ ,  $R(a, b, 0)$ ,  $S(0, b, 0)$  をこの順で周回する長方形の経路を  $C$  とします ( $a, b$  は正の定数)。このとき、線積分  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$  を求めなさい。
- (2)  $\text{rot } \mathbf{A}$  を計算しなさい。
- (3) (1) と (2) を用いて、ストークスの定理が成り立っていることを示しなさい。

**解答** (1) それぞれの辺は  $x$  軸に平行 (もしくは  $y$  軸に平行) であるので、変位ベクト



ルは  $d\mathbf{r} = (dx, 0, 0)$  (もしくは  $d\mathbf{r} = (0, dy, 0)$ ) で与えられる。それぞれの辺の線積分は、

$$\begin{aligned}\int_{P \rightarrow Q} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^a \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \int_0^a 0 \, dx = 0 \\ \int_{Q \rightarrow R} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^b \begin{pmatrix} -y \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ dy \\ 0 \end{pmatrix} = \int_0^b a \, dy = ab \\ \int_{R \rightarrow S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^0 \begin{pmatrix} -b \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \int_a^0 (-b) \, dx = ab \\ \int_{S \rightarrow P} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_b^0 \begin{pmatrix} -y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ dy \\ 0 \end{pmatrix} = \int_b^0 0 \, dy = 0\end{aligned}$$

となる。よって、長方形を周回する経路 C について、

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0 + ab + ab + 0 = 2ab$$

となる。

$$(2) \operatorname{rot} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(3) ストークスの定理より、A を経路 C に囲まれる長方形の平面として、

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_A (\operatorname{rot} \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

が成り立つはずである。左辺は (1) より  $2ab$  となり、右辺は長方形の法線ベクトルが  $z$  方向にあり、微小面積ベクトルが  $d\mathbf{S} = (0, 0, dS)$  とかけることから、

$$\int_A (\operatorname{rot} \mathbf{A})_z \, dS = \int_A 2 \, dS = 2 \int_A dS = 2 \times (\text{長方形の面積}) = 2ab$$

となる。よって、たしかにストークスの定理が成り立つ。

[B.2] **定理 2 の証明** ベクトル場  $\mathbf{A}$  の経路 C における線積分  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$  が、経路 C の始点と終点にのみよるとします。このとき、通常の設定積分と同じように線積分を  $\int_{r_A}^{r_B} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$  と表記することが可能です (積分の下限と上限は経路の始点および終点の位置ベクトルを表します)。スカラー場  $f(\mathbf{r})$  を  $f(\mathbf{r}) = \int_{r_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$  によって定義したとき、 $\mathbf{A} = \operatorname{grad} f$  となることを証明しなさい。

**解答** 線積分について、

$$\begin{aligned}\int_{r_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}+d\mathbf{r}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{r_0}^{\mathbf{r}+d\mathbf{r}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \\ \Rightarrow \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}+d\mathbf{r}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{r_0}^{\mathbf{r}+d\mathbf{r}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} - \int_{r_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}\end{aligned}$$

が成り立つ。さらにスカラー場  $f(\mathbf{r})$  の定義を使うと、

$$\int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}+d\mathbf{r}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - f(\mathbf{r})$$

となる。この式の右辺は、位置  $\mathbf{r}$  から位置  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  までの微小区間での線積分なので、定義より

$$\int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}+d\mathbf{r}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

となる。一方、右辺は全微分の公式より、

$$f(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = (\text{grad } f) \cdot d\mathbf{r}$$

となる。よって、

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = (\text{grad } f) \cdot d\mathbf{r}$$

となり、これが任意の  $d\mathbf{r}$  で成り立つことから、 $\mathbf{A} = \text{grad } f$  が導かれる。

[B.3] **面積分とガウスの定理** ベクトル場  $\mathbf{A} = (x, y, z)$  に対して、次の問いに答えなさい。

- (1) 原点を中心とする半径  $a$  の球面を  $A$  としたとき、面積分  $\int_A \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$  を求めなさい。
- (2)  $\text{div } \mathbf{A}$  を計算しなさい。
- (3) (1) と (2) を用いて、ガウスの定理が成り立っていることを示しなさい。

**解答** (1) ベクトル場  $\mathbf{A}$  と原点を中心とする球面は常に直交しているので、微小面積ベクトル  $d\mathbf{S}$  と  $\mathbf{A}$  は常に平行となっており、原点から距離  $a$  で  $|\mathbf{A}| = a$  であることを使って、

$$\begin{aligned} \int_A \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \int_A |\mathbf{A}| dS = \int_A a dS = a \int_A dS = a \times (A \text{ の面積}) \\ &= a \times 4\pi a^2 = 4\pi a^3 \end{aligned}$$

$$(2) \text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$

(3) ガウスの定理は、原点を中心とする半径  $a$  の球の内部を  $V$  として、

$$\int_A \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \text{div } \mathbf{A} dV$$

で与えられる。左辺は (1) より  $4\pi a^3$  となる。右辺は (2) を用いると、

$$\begin{aligned} \int_V \text{div } \mathbf{A} dV &= \int_V 3 dV = 3 \int_V dV = 3 \times (\text{半径 } a \text{ の球の体積}) \\ &= 3 \times \frac{4\pi a^3}{3} = 4\pi a^3 \end{aligned}$$

となる。よって、確かにガウスの定理が成り立っていることがわかる。

[B.4] **線積分の経路依存性** 次のベクトル場  $\mathbf{A}$  のうち、経路  $C$  に関する線積分  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$  が経路  $C$  の始点と終点の位置にのみ依存し、途中の経路の形状によらなくなるものはどれでしょうか。

(i)  $\mathbf{A} = (x, 0, 0)$ , (ii)  $\mathbf{A} = (0, x, 0)$ , (iii)  $\mathbf{A} = (x, y, z)$ .

**解答** それぞれのベクトル場に対して、 $\text{rot } \mathbf{A}$  を計算してみると、

$$(i) \text{rot } \mathbf{A} = (0, 0, 0), \quad (ii) \text{rot } \mathbf{A} = (0, 0, 1), \quad (iii) \text{rot } \mathbf{A} = (0, 0, 0),$$

となる。B.3.6 項で導いたように、 $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{0}$  のとき、線積分  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$  が途中の経路によらなくなるので、答えは (i) と (iii) となる。

[B.5] **閉じた曲面の面積分** 閉じた曲面  $A$  (空間中の領域を取り囲むような曲面) を考えます。次のベクトル場  $\mathbf{A}$  のうち、曲面  $A$  の形状によらずに面積分  $\int_A \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$  がゼロとなるようなものはどれでしょうか。

(i)  $\mathbf{A} = (x, 0, 0)$ , (ii)  $\mathbf{A} = (0, x, 0)$ , (iii)  $\mathbf{A} = (x, y, z)$ .

**解答** それぞれのベクトル場に対して、 $\text{div } \mathbf{A}$  を計算してみると、

$$(i) \text{div } \mathbf{A} = 1, \quad (ii) \text{div } \mathbf{A} = 0, \quad (iii) \text{div } \mathbf{A} = 3,$$

となる。ガウスの定理から、

$$\int_A \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{A \text{ の内部}} \text{div } \mathbf{A} dV \quad (2.2)$$

となるので、 $\text{div } \mathbf{A} = 0$  のとき、曲面  $A$  に関する面積分  $\int_A \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$  が  $A$  の形状によらずゼロとなる。よって、答えは (ii) となる。



## 第 3 章

# 静電場 I—電場と電位—（テキストの第 1 章）

### 3.1 Training の解答

Training 1.1 ヒトを構成する原子や分子に含まれる電子数は、およそ  $N = 2 \times 10^{28}$  個です。そのうちの 1% の電子がヒトの体から出ていったとき、ヒトに蓄えられる電荷  $Q$  を求めなさい。また、これと同じ電荷  $Q$  に帯電した 2 人の人間を 100 m だけ離して配置したときに生じるクーロン力の大きさを求めなさい。

**解答**  $Q = 2 \times 10^{28} \times 0.01 \times e = 2 \times 10^{26} \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} = 3.2 \times 10^7 \text{ C}$  となる。また電荷  $Q$  を  $r = 100 \text{ m}$  だけ離して配置したときのクーロン力  $F$  は、

$$\begin{aligned} F &= k \frac{Q^2}{r^2} = 9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2 \times \frac{(3.2 \times 10^7 \text{ C})^2}{(100 \text{ m})^2} \\ &= 9.2 \times 10^{20} \text{ N} \end{aligned}$$

となる。これはおよそ  $10^{20} \text{ kg}$  の物体に働く重力に等しく、巨大な力になる。

Training 1.2  $z = 0$  の平面内に置かれた原点を中心とする半径  $r$  の円状の細線が一様に帯電していて、その円全体の電荷が  $q$  であったとき、位置  $(0, 0, a)$  につくる電場の向きと大きさを求めなさい。ただし、細線は十分細く、その太さは無視できるとします。

**解答** 円周を媒介変数表示すると、 $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) となる。 $\theta$  から  $\theta + d\theta$  の間の円周の微小区間に含まれる電荷  $dq$  は

$$dq = \frac{r d\theta}{2\pi r} q = \frac{q}{2\pi} d\theta$$

であり、この電荷が位置  $(0, 0, a)$  に作る電場は、電荷からの距離が一定値  $\sqrt{a^2 + r^2}$  とな

ることに注意して、

$$\begin{aligned} d\mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0(a^2 + r^2)^{3/2}} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \right] \frac{q}{2\pi} d\theta \\ &= \frac{q/2\pi}{4\pi\epsilon_0(a^2 + r^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} -r \cos \theta \\ -r \sin \theta \\ a \end{pmatrix} d\theta \end{aligned}$$

となる。これを  $\theta$  について 0 から  $2\pi$  まで積分すればよい。 $x$  成分と  $y$  成分は、 $\theta$  の積分によってゼロになるので、電場は  $z$  成分のみを持つ。計算すると、

$$\begin{aligned} E_z &= \int dE_z = \int_0^{2\pi} \frac{(q/2\pi)a}{4\pi\epsilon_0(a^2 + r^2)^{3/2}} d\theta \\ &= \frac{(q/2\pi)a}{4\pi\epsilon_0(a^2 + r^2)^{3/2}} \times 2\pi = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0(a^2 + r^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

となる。

**Training 1.3**  $z = 0$  に置かれた無限に広い平面状の物質が単位面積当たり電荷  $\sigma$  で一様に帯電している (これを面電荷という) とき、次の問いに答えなさい。ただし、厚みは無視できるとします。

- (1) 原点を中心とした半径  $r$  の円と半径  $r + dr$  の円に囲まれた領域内の電荷が位置  $(0, 0, a)$  につくる電場の向きと大きさを、Training 1.2 の結果を用いて求めなさい。
- (2) (1) で求めた電場を  $r = 0$  から  $r = \infty$  まで積分することで、面電荷が位置  $(0, 0, a)$  につくる電場の向きと大きさを求めなさい。

**解答** (1)  $r$  から  $r + dr$  の円の間にある電荷の大きさは  $dQ = 2\pi r \times dr \times \sigma = 2\pi\sigma r dr$  となる。Training 1.2 の結果より、この電荷が位置  $(0, 0, a)$  に作る電場は  $z$  方向を向いており、

$$dE_z = \frac{(2\pi\sigma r dr)a}{4\pi\epsilon_0(a^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma ra}{2\epsilon_0(a^2 + r^2)^{3/2}} dr$$

となる。

- (2) (1) の結果を、 $r$  について  $r = 0$  から  $r = \infty$  まで積分することによって、面密度  $\sigma$  の平面状の電荷が作る電場を求めることができ、

$$\begin{aligned} E_z &= \int dE_z = \int_0^{\infty} \frac{\sigma ra}{2\epsilon_0(a^2 + r^2)^{3/2}} dr \\ &= \frac{\sigma a}{2\epsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{r}{(a^2 + r^2)^{3/2}} dr = \frac{\sigma a}{2\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{(a^2 + r^2)^{1/2}} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{\sigma a}{2\epsilon_0} (-0 + a) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

となる。

**Training 1.4** 半径  $a$  の円を断面とする無限に長い直線状の物体が、一定の電荷密度  $\rho$  ( $> 0$ ) で一様に帯電しているとき、棒の中心軸から距離  $r$  の点における電場の大きさを、 $r > a$  と  $r < a$  で場合分けして求めなさい。ただし、電場は常に棒から遠ざかる向きを向くとしします。

**解答** 棒の中心軸を共有する高さ  $h$ , 半径  $r$  の円柱を考える。円柱の上面と下面では、面の法線と  $\mathbf{E}$  が直交するので、

$$\int_{\text{円柱の上面・下面}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

となる。また円柱の側面と  $\mathbf{E}$  は常に直交し、面の法線と  $\mathbf{E}$  は平行となるため、

$$\begin{aligned} \int_{\text{円柱の側面}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \int_{\text{円柱の側面}} |\mathbf{E}| dS = |\mathbf{E}| \int_{\text{円柱の側面}} dS \\ &= E(r) \times 2\pi rh \end{aligned}$$

となる。最後の式では、距離  $r$  での電場の大きさを  $E(r)$  とした。ガウスの法則は、 $Q$  を円柱内に含まれる電荷として、

$$\int_{\text{円柱}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

となる。 $r < a$  のときには、 $Q = \pi r^2 h \rho$  となるので、ガウスの定理から

$$E(r) \times 2\pi rh = \frac{\pi r^2 h \rho}{\epsilon_0} \implies E(r) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$$

となる。一方、 $r > a$  のときには、円柱に含まれる電荷は  $Q = \pi a^2 h \rho$  となるので、ガウスの定理から

$$E(r) \times 2\pi rh = \frac{\pi a^2 h \rho}{\epsilon_0} \implies E(r) = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 r}$$

となる。

## 3.2 Practice の解答

[1.1] **クーロン力と万有引力** 水素原子の原子核 (陽子) と電子の間にはたらく万有引力とクーロン力の大きさの比を求めなさい。ただし、陽子の質量を  $m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ 、電子の質量を  $m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ 、万有引力定数を  $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$  とします。

**解答** クーロン力を  $F_C$ 、万有引力を  $F_G$ 、電子と陽子の間の距離を  $r$  とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{F_C}{F_G} &= \frac{ke^2/r^2}{Gm_em_p/r^2} \\ &= \frac{9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \times (1.6 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \times 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg} \times 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}} \\ &= 2.3 \times 10^{39} \end{aligned}$$

となる。クーロン力のほうが圧倒的に大きいことがわかる。

[1.2] **電場の重ね合わせ** 図 1.23 のように点  $(a, 0)$  と点  $(-a, 0)$  に、単位長さ当たり  $\lambda$  の電荷をもつ紙面に垂直な無限に長い直線状の電荷 (直線電荷) があります。これらの 2 つの

直線電荷が点  $(0, a)$  につくる電場  $\mathbf{E}$  を求めなさい。Exercise 1.3 の解答を用いて構いません。

**解答** 点  $(a, 0)$ ,  $(-a, 0)$  に置かれた 2 本の直線状の電荷が点  $(0, a)$  に作る電場をそれぞれ  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_2$  と置く。点  $(0, a)$  は 2 つの直線状の電荷から距離  $\sqrt{2}a$  の位置にあるので、Exercise 1.3 の解答より 2 つの電場の大きさは等しく、

$$|\mathbf{E}_1| = |\mathbf{E}_2| = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\sqrt{2}a}$$

となる。さらに電場の向きは直線状の電荷から離れる向きとなるので、

$$\mathbf{E}_1 = |\mathbf{E}_1| \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{E}_2 = |\mathbf{E}_1| \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{4\pi a} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

となる。電場の重ね合わせより、 $(0, a)$  での電荷を  $\mathbf{E}$  とすると、

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。

[1.3] **帯電した中空の円筒がつくる電場** 半径  $a$  の無限に長い中空の円筒物体が、一定の面密度  $\sigma (> 0)$  で一様に帯電しています。ガウスの法則を使って、棒の中心軸から距離  $r$  の点における電場の大きさ  $E$  を  $r > a$  と  $r < a$  で場合分けして求めなさい。ただし、円筒の厚みは無視できるものとします。

**解答** 棒の中心軸を共有する高さ  $h$ , 半径  $r$  の円柱を考える。Training 1.4 で考えたように、円柱の表面についての電場  $\mathbf{E}$  の面積分は、

$$\int_{\text{円柱の側面}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E(r) \times 2\pi rh$$

となる。最後の式では、距離  $r$  での電場の大きさを  $E(r)$  とした。 $r < a$  のとき、円柱内に含まれる電荷はゼロなので、ガウスの法則より、

$$\int_{\text{円柱}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E(r) \times 2\pi rh = 0 \implies E(r) = 0$$

となる。 $r > a$  のとき、円柱内に含まれる電荷は  $\sigma \times 2\pi ah = 2\pi ah\sigma$  なので、ガウスの法則より、

$$\int_{\text{円柱}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E(r) \times 2\pi rh = \frac{2\pi ah\sigma}{\epsilon_0} \implies E(r) = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 r}$$

となる。

[1.4] **等電位面** 電位が位置  $(x, y, z)$  の関数として  $\phi = 3x + 2y$  と与えられるとします (位置の単位は m, 電位の単位は V)。5 つの等電位面  $\phi = -2\text{V}, -1\text{V}, 0\text{V}, 1\text{V}, 2\text{V}$  を図示しなさい。また電場  $\mathbf{E}$  を求め、等電位面との関係を述べなさい。



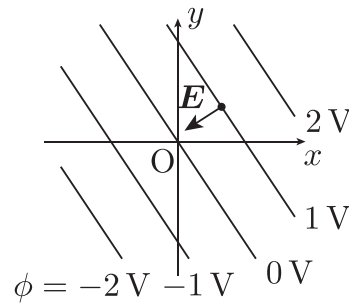


図 3.1 [1.4] の解答

**解答** 等電位面を図示すると、図のようになる。また、電場  $\mathbf{E}$  は

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi = \left( -\frac{\partial \phi}{\partial x}, -\frac{\partial \phi}{\partial y}, -\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = (-3, -2, 0)$$

となる (単位は V/m)。図に示すように電場  $\mathbf{E}$  は等電位面と直交する。

[1.5] **電位と電場の関係**  $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$  を用いて、(1.66) で定義される  $W_{1 \rightarrow 2}$  が位置エネルギーの差  $q\{\phi(\mathbf{r}_2) - \phi(\mathbf{r}_1)\}$  となることを証明しなさい。

**解答**  $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$  を使うと、

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (-q\mathbf{E}) \cdot d\mathbf{r} = q \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (\text{grad } \phi) \cdot d\mathbf{r} \quad (3.3)$$

となる。線積分の基本定理を用いると、

$$W_{1 \rightarrow 2} = q[\phi(\mathbf{r}_2) - \phi(\mathbf{r}_1)] \quad (3.4)$$

となって、証明が完了する。



## 第 4 章

# 静電場 II – 導体とコンデンサー – (テキストの第 2 章)

### 4.1 補足説明: 電場のもつエネルギー

2.2.3 項で金属やコンデンサーの持つ静電エネルギーは、「単位体積あたり電場のもつエネルギーは  $\epsilon_0 \mathbf{E}^2/2$  である」と解釈することができることを紹介しました\*1。ここでは、その証明を詳しく説明しますが、やや難しいのですぐに理解できなくても焦ることはありません。

まず、位置  $\mathbf{r}_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, N$ ) の位置に電荷  $q_i$  が置かれているとき、電荷間のクーロン力による位置エネルギーの和は

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (4.1)$$

と書き表せます。和の記号  $\sum_{i \neq j}^N$  は、 $1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N$  の範囲で  $i = j$  の場合を除くすべての  $(i, j)$  の組についての和をとることを意味しています。また、 $a, b$  を 1 以上  $N$  以下の異なる 2 つの整数としたとき、和のなかで  $(i, j) = (a, b)$  の項と  $(i, j) = (b, a)$  の項は同じ電荷の組からの寄与であり、 $i, j$  についてすべての和を取ってしまうとダブルカウントしてしまうので、はじめに  $1/2$  の因子をつけてダブルカウントを打ち消しています。この電荷間のクーロン力による位置エネルギーは、静電エネルギーとも呼ばれます。

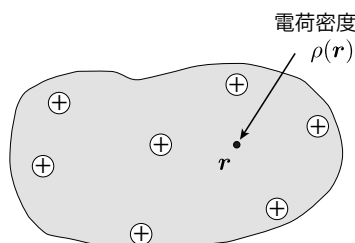


図 4.1 電荷密度  $\rho(\mathbf{r})$  の電荷分布を持つ物体。

\*1  $\mathbf{E}^2$  は  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = |\mathbf{E}|^2$  を表します。

次に、図 4.1 のように帯電した物体\*<sup>2</sup>において、物体内の電荷密度を  $\rho(\mathbf{r})$  とし、そのとき静電エネルギーを考えてみます。このように電荷が連続的に分布している場合には、まず位置  $\mathbf{r}_1$  の近傍の微小体積  $dV_1$  と、位置  $\mathbf{r}_2$  の近傍の微小体積  $dV_2$  を考えます。それらの中に含まれる微小電荷がそれぞれ  $\rho(\mathbf{r}_1) dV_1$ ,  $\rho(\mathbf{r}_2) dV_2$  となることから、これら 2 つの微小電荷による静電エネルギーは、

$$\frac{\rho(\mathbf{r}_1)dV_1\rho(\mathbf{r}_2)dV_2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|} \quad (4.2)$$

となります。これをすべての可能な組み合わせ  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  について足し合わせればよいので、

$$U = \frac{1}{2} \int dV_1 \int dV_2 \frac{\rho(\mathbf{r}_1)\rho(\mathbf{r}_2)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|} \quad (4.3)$$

と書き表せます。ここで  $\int dV_1 \int dV_2$  は、体積積分を 2 回行うことを表しています。

この静電エネルギーの形は少々複雑ですが、整理すると納得できる形になります。もう少し計算を進めてみましょう。

電荷分布が位置  $\mathbf{r}_1$  に作る電位を考えてみましょう。位置  $\mathbf{r}_2$  の微小体積  $dV_2$  に含まれる電荷  $\rho(\mathbf{r}_2)dV_2$  が位置  $\mathbf{r}_1$  に作る電位は、

$$\frac{\rho(\mathbf{r}_2)dV_2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|} \quad (4.4)$$

となります。よって、電荷密度  $\rho(\mathbf{r})$  をもつ物体によって作られる電位は、電位の重ね合わせにより、

$$\phi(\mathbf{r}_1) = \int dV_2 \frac{\rho(\mathbf{r}_2)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|} \quad (4.5)$$

のように体積積分で表されます。これを使うと、物体のもつ静電エネルギーは、

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int dV_1 \rho(\mathbf{r}_1) \left[ \int dV_2 \frac{\rho(\mathbf{r}_2)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|} \right] \\ &= \frac{1}{2} \int dV_1 \rho(\mathbf{r}_1) \phi(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{2} \int dV \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

と書き直すことができます。最後の等式では、積分変数を  $\mathbf{r}_1$  から  $\mathbf{r}$  に変えました。

この形であれば、少しわかりやすいですね。電位  $\phi(\mathbf{r})$  の位置に電荷  $\rho(\mathbf{r})dV$  があるときの微小体積がもつ静電エネルギーは、確かに  $[\rho(\mathbf{r})dV]\phi(\mathbf{r})$  になるからです。因子  $1/2$  はダブルカウントを取り除くためについています。特に電位  $\phi$  の金属が一つあるときには、金属中で電位  $\phi$  は一定なので、

$$U = \frac{\phi}{2} \int_{\text{金属}} dV \rho(\mathbf{r}) = \frac{\phi Q}{2} \quad (4.7)$$

となり、金属が蓄える静電エネルギーの式を再現します。

\*<sup>2</sup> しばらくは物体が絶縁体だと思っておくとうわかりやすいと思いますが、導出される式は、物体が金属でも成り立ちます。

さて、いよいよ電場のもつエネルギーの式を導出してみましょう。式 (4.6) にポアソン方程式  $\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0$  を代入すると

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int dV \rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{2} \int dV (-\epsilon_0 \nabla^2\phi(\mathbf{r}))\phi(\mathbf{r}) \\ &= -\frac{\epsilon_0}{2} \int dV (\nabla^2\phi(\mathbf{r}))\phi(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

となるので、この式をさらに変形するために、ここで公式を作っておきましょう。 $\nabla \cdot (\phi \nabla \phi)$  の計算をしてみると、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) &= \text{div} (\phi \text{grad} \phi) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \\ &= \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \\ &= (\nabla \phi)^2 + \phi \nabla^2 \phi \end{aligned} \quad (4.9)$$

となり、公式

$$\phi \nabla^2 \phi = (\nabla^2 \phi) \phi = \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) - (\nabla \phi)^2 \quad (4.10)$$

が得られます。そこで、これを式 (4.8) に代入すると、物体のもつ静電エネルギーは

$$U = -\frac{\epsilon_0}{2} \int \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) dV + \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla \phi)^2 dV \quad (4.11)$$

となります。

(4.11) の第一項は、結論から言えばゼロになります。以下でその理由を述べますが、ややテクニカルですので、難しければ読み飛ばしても構いません。今考えている物体を含んだ十分大きい体積領域を  $V$ 、その表面を  $A$  としてみましよう\*<sup>3</sup>。このとき、ガウスの法則より

$$\begin{aligned} (\text{第一項}) &= -\frac{\epsilon_0}{2} \int_V \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) dV = -\frac{\epsilon_0}{2} \int_V \text{div} (\phi \text{grad} \phi) dV \\ &= -\frac{\epsilon_0}{2} \int_A (\phi \text{grad} \phi) \cdot d\mathbf{S}_1 \end{aligned} \quad (4.12)$$

のように、曲面  $A$  についての面積分になります。

いま、曲面  $A$  が半径  $R$  の十分大きな球面であると考え、 $\phi$  は曲面  $A$  上で  $1/R$  程度、 $|\text{grad} \phi| = |\mathbf{E}|$  は曲面  $A$  上で  $1/R^2$  程度の大きさになります。一方、表面積は  $R^2$  に比例するので、

$$(\text{第一項}) \sim \frac{1}{R^3} \times R^2 = \frac{1}{R} \quad (4.13)$$

となり、十分大きな曲面 ( $R \rightarrow \infty$ ) をとると、この面積分はゼロになります。

\*<sup>3</sup> 大きな領域  $V$  を設定する意味がよくわからないかもしれませんが、領域を十分大きくとると、その表面で電位は限りなく 0 に近づいていくことが証明の鍵になっています。「領域  $V$  は地球を含む全宇宙だと思ってもいいが、宇宙の果てでは地球で起きたことなどほとんど影響を与えないであろう」くらいの意味だと思って構いません。

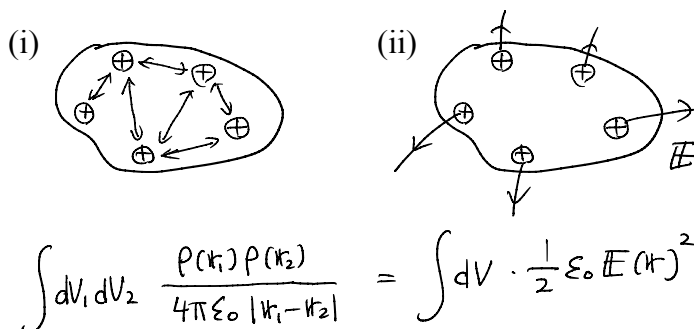


図 4.2 静電エネルギーの 2 つの見方: (i) 電荷を主役とする見方, (ii) 電場を主役とする見方。

さらに第二項で、電位と電場の関係式  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  を使うと、

$$U = \int \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 dV \quad (4.14)$$

となり、確かに物体のもつ静電エネルギーは、「単位体積あたり電場のもつエネルギーは  $\epsilon_0 \mathbf{E}^2/2$ 」と解釈することができますね。

繰り返しますが、あくまで静電エネルギーを「電場のもつエネルギー」と言い換えているだけであり、これまでにでてきた静電エネルギーとは別のエネルギーがでてきたわけでは「ない」ことを強調しておきます。

図 4.2 に、式とそのイメージ図を示しました。静電場のエネルギーには 2 つの見方があり、(i) 異なる位置に置かれた電荷の組の間でクーロンエネルギーが生じる、という見方 (電荷が主役の見方) と、(ii) 電場  $\mathbf{E}$  がエネルギーをもつ、という見方 (電場が主役の見方) があり、どちらで計算しても同じ静電エネルギーが得られる、ということです。くれぐれも、同じエネルギーを重複して考えないようにしましょう。

ここまで来ると、電場というのは「そう考えると便利なもの」という思考上の単なる「ツール」ではなく、物理的な「実体」のように見えてきませんか？つまり、主役は「電荷とクーロン力」ではなく「電荷と電場」なのだ、という気がしてきます。実際に、より学びが進んでいくと、「電場」を主役として考えたほうがよい例がたくさんでできます。本書でも出てくるので、お楽しみに。

## 4.2 Training の解答

**Training 2.1** 半径 10 cm の導体球の自己電気容量を求めなさい。また、この導体に  $1 \times 10^{-6}$  C の電荷を帯電させたとき、導体球の電位を求めなさい。ただし、無限遠点を電位の基準点とします。

**解答**  $C_0 = 4\pi\epsilon_0 a = 4 \times 3.14 \times 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m} \times 0.1 \text{ m} = 1.1 \times 10^{-11} \text{ F}$  となる。  
 $Q = 1 \times 10^{-6} \text{ C}$  の電荷を帯電させたときには、 $V = Q/C_0 = 10^{-6} \text{ C} / 1.1 \times 10^{-11} \text{ F} = 9 \times 10^4 \text{ V}$  となり、非常に高電位となる。一般に導体の電気容量は小さいので、僅かな電荷が帯電するだけで高電位となる。これが静電気が比較的高い電圧を生じさせる理由となっている。

Training 2.2 自己電気容量が  $5 \times 10^{-12} \text{ F}$  の導体に  $2 \times 10^{-6} \text{ C}$  の電荷を帯電させたとき、導体の電位および導体が蓄える静電エネルギーを求めなさい。

**解答** 電位は  $V = Q/C_0 = 2 \times 10^{-6} \text{ C} / 5 \times 10^{-12} \text{ F} = 4 \times 10^5 \text{ V}$  となり、静電エネルギーは  $U = Q^2 / (2C_0) = (2 \times 10^{-6} \text{ C})^2 / (2 \times 5 \times 10^{-12} \text{ F}) = 0.4 \text{ J}$  となる。

Training 2.3 1 辺が  $1 \text{ cm}$  の正方形の導体平板を間隔  $1 \text{ mm}$  で置いたときの平板コンデンサーの電気容量を求めなさい。

**解答**  $C = \epsilon_0 S / d = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m} \times (0.01)^2 \text{ m}^2 / (10^{-3} \text{ m}) = 9 \times 10^{-13} \text{ F}$

Training 2.4 1 辺が  $1 \text{ cm}$  の正方形の導体平板を間隔  $1 \text{ mm}$  だけ離れた構造をもつコンデンサーに、外部から  $10 \text{ V}$  の電圧を加えたとき、コンデンサーに蓄えられる静電エネルギーを求めなさい。

**解答** コンデンサーの電気容量は Training 4.3 と同じで  $C = 9 \times 10^{-13} \text{ F}$  である。コンデンサーが蓄える静電エネルギーは  $U = CV^2 / 2 = 9 \times 10^{-13} \text{ F} \times (10 \text{ V})^2 / 2 = 4.5 \times 10^{-11} \text{ J}$  となる。

## 4.3 Practice の解答

[2-1] 平板コンデンサーの電気容量 面積  $S$ 、電極間距離  $d$  の平板コンデンサーの電極間に図 2.13 のように厚さ  $d/2$  の平板導体を挿入したとき、コンデンサーの電気容量を求めなさい。

**解答** 平板コンデンサーに蓄えられている電荷を  $Q$  とすると、平板導体を挿入する前の電極間の電場は  $E = Q / \epsilon_0 S$  となる。平板導体を挿入すると、平板導体内部の電場をゼロにするように表面に電荷  $\pm Q$  が現れる。その結果、平板金属内部の電場はゼロとなるが、導体平板間の空間の電場は  $E = Q / \epsilon_0 S$  のままである。よって、平板コンデンサーの電極間の電位差は  $V = E \times d/2 = Qd / 2\epsilon_0 S$  となる。これより、電気容量は  $C = Q/V = 2\epsilon_0 S / d$  となる。

[2-2] 中空円筒コンデンサーの電気容量 図 2.14 に示すような共通の中心軸をもつ半径  $a$ 、 $b$ 、長さ  $l$  の 2 つの中空円筒状の導体からなるコンデンサーの電気容量を求めなさい。ただし、導体円筒の厚さ、および、円筒の端の電場分布の効果は無視できるものとします。[ヒント: Practice 1.3 の答えを用いてもよいです。]

**解答** 円筒コンデンサーの内側の導体に  $+Q$  の、外側の導体に  $-Q$  の電荷を帯電させる。円筒コンデンサーと共通の中心軸を持ち、長さ  $l$  で  $a < r < b$  を満たす半径  $r$  の円

柱の表面を  $A$  として、ガウスの法則を適用すると、

$$\begin{aligned} \int_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} &= \frac{(A \text{ の内部の電荷})}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow |\mathbf{E}| \times 2\pi r l &= \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = |\mathbf{E}| = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r l} \end{aligned}$$

となる。これより、内側と外側の導体間の電位差は、

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b E(r) dr = \int_a^b \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r l} dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \int_a^b \frac{dr}{r} \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} [\log r]_a^b = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \log\left(\frac{b}{a}\right) \end{aligned}$$

となる。これより、電気容量は  $C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\log(b/a)}$  となる。

[2.3] **2本の長い導体棒の電気容量** 図 2.15 のように半径  $a$ 、長さ  $L (\gg a)$  の細い導体棒 2 本を距離  $d$  ( $a \ll d \ll L$ ) だけ離して平行に置きます。この 2 つの導体棒間の (相互) 電気容量  $C$  を求めなさい。ただし、導体棒の端における電場分布の変化は無視できるとします。また、一方の導体棒に蓄えられた電荷が他方の導体棒付近につくる電場は弱いため、他方の導体棒における電荷分布は変えないものとします。(Exercise 1.3 の解答を用いて構いません。)

**解答** 片方の導体棒に電荷  $+Q$  を帯電させると、帯電棒の単位体積あたりの電荷は  $\lambda Q/l$  となる。この導体棒間で距離  $r$  の位置につくる電場の大きさ  $E_1$  は、Exercise 1.3 の解答より、

$$E_1 = \frac{Q/l}{2\pi\epsilon_0 r}$$

である (棒の端の効果は無視できるとした)。同様にして、もう片方の棒に電荷  $-Q$  を帯電させて、同じ位置での電場の大きさ  $E_2$  を考えると、

$$E_2 = \frac{Q/l}{2\pi\epsilon_0(d-r)}$$

となる。この 2 つの電場は同じ向きを向いているので、電場の重ね合わせから、

$$E = E_1 + E_2 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{d-r} \right)$$

となる。これを用いて、2 つの金属間の電位差  $V$  を計算すると、

$$\begin{aligned} V &= \int_a^{d-a} E dr \simeq \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \left( \int_a^d \frac{dr}{r} + \int_0^{d-a} \frac{dr}{d-r} \right) \\ &= \frac{Q}{\pi\epsilon_0 l} \log(d/a) \end{aligned}$$

となる (途中で  $d$  が  $a$  に比べて十分大きいことを用いた)。これより、(相互) 電気容量は、

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\pi\epsilon_0 l}{\log(d/a)}$$

となる。



[2-4] **ポアソン方程式** 電位が  $\phi(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$  ( $a, b, c$  は定数) で与えられるとき、 $a, b, c$  が満たすべき条件を求めなさい。

**解答** ポアソン方程式に代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= 2(a + b + c) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow a + b + c &= -\frac{\rho}{2\epsilon_0}\end{aligned}$$

となる。ちなみに真空中 ( $\rho = 0$ ) を考えて、 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  に正の電荷  $q$  を置いたときに、そこが安定である (位置エネルギー  $q\phi(x, y, z)$  が最小となる) ためには、 $a, b, c$  がすべて正でなくては行けないが、上述の方程式から  $a + b + c = 0$  がわかるので、それは実現不可能であることがわかる。一般に、真空中の一点に電荷を安定して静止させ続けることは不可能である。

[2-5] **鏡映法** 以下の問いに答えなさい。

- (1) 位置  $(0, 0, a)$  と  $(0, 0, -a)$  にそれぞれ点電荷  $q, -q$  を置いたとき、 $z = 0$  での電位がゼロになることを示しなさい。ただし、電位は無限遠点を基準とします。
- (2)  $z \leq 0$  の領域に金属が置かれており、 $(0, 0, a)$  に点電荷  $q$  を置いたとき、 $z \geq 0$  の領域での電場は (1) で考えた 2 つの電荷がつくる電場と同じになることが知られています。 $(x, 0, 0)$  における電場  $\mathbf{E}$  の大きさを求めなさい。また  $\mathbf{E}$  が金属の表面  $z = 0$  と常に直交することを示しなさい。
- (3) 位置  $(x, 0, 0)$  における導体表面での電荷の面密度  $\sigma$  を  $x$  の関数として求めなさい。

**解答** (1) 位置  $(x, y, 0)$  での電位は、

$$\phi(x, y, 0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (a-0)^2}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (a+0)^2}} = 0$$

となる。

(2) 電場の重ね合わせにより、位置  $(x, 0, 0)$  での電場  $\mathbf{E}$  は、

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0(x^2 + a^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} + \frac{(-q)}{4\pi\epsilon_0(x^2 + a^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \\ &= \frac{qa}{2\pi\epsilon_0(x^2 + a^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。これは  $z$  軸の負方向を向いているので、金属表面と直交する。

(3)  $(x, 0, 0)$  近傍で、この点を含む上面・下面 (面積  $dS$ ) が  $xy$  平面に平行で、高さが  $dh$  の小さな柱を考える。柱の内部の電荷は  $\sigma dS$  で与えられ、電場は  $z > 0$  の領域では  $-z$  方向を向いており、 $z < 0$  の金属領域では電場  $\mathbf{E}$  はゼロになっている。ガウスの法則より、

$$\begin{aligned}\int_{\text{柱の表面}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} &= -|\mathbf{E}| dS = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow \sigma &= -\epsilon_0 |\mathbf{E}|\end{aligned}$$

となる。ここで電場は柱の上面を外側から内側へ貫くので面積分の値が負となることに注意。(2)の解答を用いて、

$$\sigma = -\epsilon_0 |\mathbf{E}| = -\frac{qa}{2\pi(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

となる。

## 第 5 章

# 電流（テキストの第 3 章）

### 5.1 Training の解答

Training 3.1 長さ 5 cm の導体棒の両端を、起電力 1.5 V の電池と導線で接続したとき、導体棒の内部に生じる電場の大きさを求めなさい。

解答  $E = V/l = 1.5 \text{ V} / 0.05 \text{ m} = 30 \text{ V/m}$

Training 3.2 断面積  $1 \text{ mm}^2$  の銅線に 1 A の電流を流した時の金属中の自由電子の速さを求めなさい。銅の自由電子の密度は  $n = 8.5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$  とします。

解答  $I = envS$  より、 $v = I/(enS) = 1 \text{ A} / (1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \times 8.5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3} \times 10^{-6} \text{ m}^2) = 7.4 \times 10^{-5} \text{ m/s}$  となる。これはおよそ毎秒 0.07 mm の速さであり、とても遅いことがわかる。

Training 3.3 図 3.6 のように、厚さ  $d$  の平板上の点 A に電流  $I$  が流れこんでいます。点 A から距離  $r$  の位置における電流密度の大きさを求めなさい。ただし、平板は十分薄くて一様な材質でできており、流れ込んだ電流は点 A から放射状に広がっていくとします。

解答 点 A を通る板に垂直な線を中心軸とした半径  $r$ 、高さ  $d$  の円柱を考える。点 A で入ってきた電流は、すべて円柱の側面から出ていくので、

$$\int_{\text{円柱の側面}} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = I$$

となる。電流は点 A から放射状に広がるので、電流密度  $\mathbf{j}$  は円柱の側面と常に直交しており、大きさは一定であるので、

$$\begin{aligned} \int_{\text{円柱の側面}} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} &= |\mathbf{j}| \times (\text{円柱の側面積}) = |\mathbf{j}| \times 2\pi r d = I \\ \Rightarrow |\mathbf{j}| &= \frac{I}{2\pi r d} \end{aligned}$$

となる。

Training 3.4 銅の電気伝導度は  $\sigma = 6.5 \times 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$  で与えられます。長さ 1 m、断面積  $1 \text{ mm}^2$  の銅線の電気抵抗を求めなさい。

**解答**  $R = l/\sigma S = 1\text{ m}/(6.5 \times 10^7 \Omega^{-1}\text{m}^{-1} \times 10^{-6}\text{ m}^2) = 1.5 \times 10^{-2} \Omega$

**Training 3.5** 消費電力 1250 W の電子ケトルを用いて、摂氏 20 度の 1 リットルの水を沸騰させるのに必要な時間を求めなさい。ただし、1 リットルの水の温度を 1 度上昇させるのに必要なエネルギーは  $4.2\text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$  であるとしなさい。

**解答**  $4.2 \times 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{K} \times 1\text{ kg} \times (100 - 20) \text{ K} / 1250 \text{ W} = 270 \text{ s}$  となる。およそ 4 分強となり、電子ケトルを使っている人は妥当な値だと納得できるだろう。

**Training 3.6** 電気容量  $C = 10 \mu\text{F}$  のコンデンサーと電気抵抗  $R = 1\text{ k}\Omega$  の直列回路における時定数を求めなさい。

**解答** 時定数は  $\tau = RC = 10 \times 10^{-6} \text{ F} \times 10^3 \Omega = 10^{-2} \text{ s} = 10 \text{ ms}$

## 5.2 Practice の解答

**[3.1] 導体半球の電気抵抗** 図 3.14 のように同じ中心をもつ半径  $a, b$  ( $b > a$ ) の半球に挟まれた領域が電気伝導度  $\sigma$  の導体となっており、内側の半径  $a$  の半球表面から電流  $I$  を流す。電流は常に半球の中心から放射状に均等に流れるとしたとき、半球面の間の電位差を求めなさい。また、この導体の電気抵抗を求めなさい。

**解答** 電流は放射状に流れているので、半球の中心から半径  $r$  の半球面  $A$  を考えると、 $A$  を貫く電流密度  $\mathbf{j}$  は  $A$  上で一定であり、常に  $A$  と直交する。よって、

$$\begin{aligned} \int_A \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} &= |\mathbf{j}| \times (\text{半球面の面積}) = |\mathbf{j}| \times 2\pi r^2 = I \\ \Rightarrow |\mathbf{j}| &= \frac{I}{2\pi r^2} \end{aligned}$$

となる。オームの法則より、中心から距離  $r$  の位置における電場の大きさは  $E(r) = |\mathbf{E}| = \sigma^{-1}|\mathbf{j}|$  であり、半球の中心と球面の間の電位差は、 $\mathbf{E}$  が常に半球の中心から離れる向きを向くことを用いて、

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b E(r) dr = \int_a^b \frac{1}{\sigma} \frac{I}{2\pi r^2} dr = \frac{I}{2\pi\sigma} \int_a^b \frac{1}{r^2} dr = \frac{I}{2\pi\sigma} \left[ -\frac{1}{r} \right]_a^b \\ &= \frac{I}{2\pi\sigma} \left( -\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) = \frac{(b-a)I}{2\pi\sigma ab} \\ \Rightarrow R = V/I &= \frac{(b-a)}{2\pi\sigma ab} \end{aligned}$$

となる。

**[3.2] 抵抗と電池を含む電気回路** 図 3.15 のように、起電力 16 V と 10 V の 2 つの電池と電気抵抗から成る回路があります。2 つの電池を流れる電流を  $I_1, I_2$  としたとき、これらを具体的に求めなさい。

**解答** 中央の抵抗に流れる電流はキルヒホッフの第一法則より  $I_1 + I_2$  となる。左側

の周回経路でキルヒホッフの第二法則を用いると、

$$5I_1 + 2(I_1 + I_2) = 16$$

右側の周回経路でキルヒホッフの第二法則を用いると、

$$4I_2 + 2(I_1 + I_2) = 10$$

となる (両辺の単位は V(ボルト) である)。この連立方程式を解くことにより、 $I_1 = 2\text{ A}$  および  $I_2 = 1\text{ A}$  が得られる。

[3.3] **発光ダイオード** 図 3.16 (a) のような電流-電圧特性をもつ発光ダイオードを考えます。発光ダイオードは、ある電圧から急激に電流が流れるので、直接電池に接続すると電流が流れ過ぎて壊れてしまいます。そのため、図 3.16 (b) のように保護抵抗  $R$  を直列につないで発光させます。電池の起電力は  $3\text{ V}$  であるとします。

(1) 保護抵抗  $R$  が  $100\ \Omega$  であったとき、発光ダイオードでの消費電力を求めなさい。

(2) 保護抵抗  $R$  の値を  $25\ \Omega$  に変更したとき、発光ダイオードの消費電力は (1) の何倍になりますか。

**解答** (1) 発光ダイオードの両端に加わる電圧を  $V\text{ [V]}$ 、発光ダイオードに流れる電流を  $I\text{ [A]}$  としたとき、キルヒホッフの第二法則より

$$\begin{aligned} V &= 3\text{ [V]} - I \times 100\text{ [\Omega]} \\ \Rightarrow I &= -\frac{V - 3\text{ [V]}}{100\text{ [\Omega]}} = 30\text{ [mA]} - \frac{V}{100\text{ [\Omega]}} \end{aligned}$$

となる。これとグラフの交点を求めると、 $V = 2\text{ V}$ 、 $I = 10\text{ mA}$  となり、消費電力は  $P = 2\text{ V} \times 10\text{ mA} = 20\text{ mW}$  となる。

(2) キルヒホッフの第二法則より

$$V = 3\text{ [V]} - I \times 25\text{ [\Omega]} \quad \Rightarrow \quad I = -\frac{V - 3\text{ [V]}}{25\text{ [\Omega]}}$$

となる。これとグラフの交点を求めると、 $V = 2.5\text{ V}$ 、 $I = 20\text{ mA}$  となり、消費電力は  $P = 2.5\text{ V} \times 20\text{ mA} = 50\text{ mW}$  となる。これは (1) の 2.5 倍である。

[3.4] **コンデンサーの充電** 図 3.17 のように、電気容量  $C$  のコンデンサーと抵抗  $R$  を直列につなげ、に起電力  $E$  の電池とスイッチに接続します。始めスイッチは開いており、コンデンサーには電荷は蓄えられていません。時刻  $t = 0$  でスイッチを閉じた後、時刻  $t$  にコンデンサーに蓄えられている電荷  $Q(t)$  を求めなさい。

**解答** キルヒホッフの第二法則より、

$$E = IR + \frac{Q}{C}$$

となる。また連続方程式より、

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

となる。これらより、 $Q(t)$  に対する微分方程式

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{E}{R} - \frac{1}{RC}Q = -\frac{1}{RC}(Q - CE)$$

が得られる。これは変数分離型をしているので、解くことができ、

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{Q - CE} &= -\frac{dt}{RC} \implies \int \frac{dQ}{Q - CE} = -\int \frac{dt}{RC} \\ \implies \log |Q - CE| &= -\frac{1}{RC}t + A' \\ \implies Q(t) &= CE + \pm e^{A'} e^{-t/RC} = CE + Ae^{-t/RC} \end{aligned}$$

となる。ここで  $A'$  は積分定数であり、 $A = \pm e^{A'}$  も定数である。定数  $A$  は初期条件 ( $t = 0$  で  $Q = 0$ ) を用いて決めることができ、 $A = -CE$  となる。よって、

$$Q(t) = CE(1 - e^{-t/RC})$$

となる。

[3.5] コンデンサーの放電とエネルギー Exercise 3.1 の回路において、スイッチを閉じてから十分に時間が経つまでの間に電気抵抗で生じるジュール熱は  $\int_0^\infty \frac{V(t)^2}{R} dt$  と書き表されます。ここで、 $V(t)$  は時刻  $t$  における抵抗での電圧降下を表します。Exercise 3.1 の解答を用いて、このジュール熱を具体的に計算し、それが時刻  $t = 0$  でコンデンサーに蓄えられていた静電エネルギーに一致することを示しなさい。

**解答** 抵抗に加わる電圧降下  $V(t)$  は、コンデンサーの電極間の電圧に等しく、Exercise 3.1 の解答を用いて

$$V(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{Q_0}{C} e^{-t/RC}$$

と書き表される。よって、時刻  $t = 0$  から時刻  $t = \infty$  の間に抵抗で生じるジュール熱は、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{V(t)^2}{R} dt &= \frac{Q_0^2}{RC^2} \int_0^\infty e^{-2t/RC} dt \\ &= \frac{Q_0^2}{RC^2} \left[ -\frac{RC}{2} e^{-2t/RC} \right]_0^\infty = \frac{Q_0^2}{2C} \end{aligned}$$

となる。これは時刻  $t = 0$  にコンデンサーが蓄えていた静電エネルギー  $Q_0^2/2C$  に一致する。つまりコンデンサーの放電によって、コンデンサーに蓄えられていた静電エネルギーは、すべてジュール熱に変換されることになる。

## 第 6 章

# 静磁場（テキストの第 4 章）

### 6.1 補足説明: アンペールの法則の直線電流への適用方法

アンペールの法則によって、直線電流が作る磁場を簡単に求めることができました。ただし、これは磁場の向きがあらかじめわかっていたからで、磁場の向きまで決めようとすると少々やっかいです。例えば、図 6.1 (a) のように座標をとったときに、点 A で磁場の  $x$  成分 (電流から離れる向きの成分)  $B_x$  がゼロであることは、アンペールの法則ではいうことができず、後で説明する別の法則が必要となります。ただし、 $B_x = 0$  であることを仮定すれば、磁場の  $z$  成分がゼロになることは、アンペールの法則から次のようにしてわかります。

図 6.1 (b) のような、高さ  $h$  の閉じた経路 C での磁場  $\mathbf{B}$  の線積分を考えてみましょう。経路の上辺と下辺では、磁場が  $x$  成分を持たないので線積分がゼロとなります。よって、左辺 ( $x = x_1$  の位置にある経路) と右辺 ( $x = x_2$  の位置にある経路) での線積分の和のみ考えればよく、

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = (B_z(x_1) - B_z(x_2))h \quad (6.1)$$

となります。

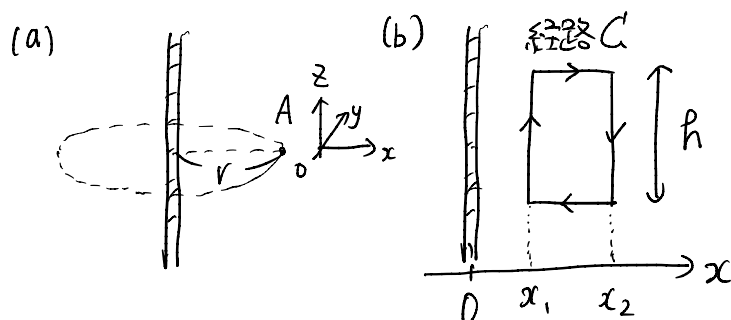


図 6.1 (a) 点 A での磁場の向きを議論するための座標系。(b) 磁場の  $z$  成分がないことを示すために取られた経路 C。

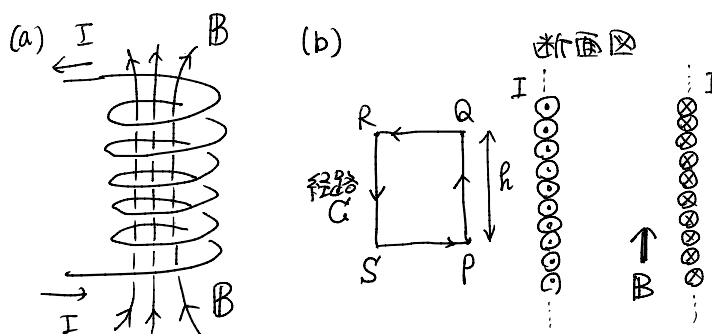


図 6.2 (a) 点 A での磁場の向きを議論するための座標系。(b) 磁場の  $z$  成分がないことを示すために取られた経路 C。

この経路 C を貫く電流はゼロなので、アンペールの法則より

$$(B_z(x_1) - B_z(x_2))h = 0 \iff B_z(x_1) = B_z(x_2) \quad (6.2)$$

となり、 $B_z$  は電流からの距離によらないことがわかります。そして、電流から十分離れた場所では磁場はゼロに近づくはずなので、 $B_z(x = \infty) = 0$  は必ずみなくてはなりません。よって、 $B_z$  は位置によらずゼロでなければいけないことがわかります。

最後に  $x$  方向の磁場がゼロであることは、次のように説明されます。まず、もし  $x$  方向に磁場が存在した場合には、電流まわりの軸対称性から、磁場  $\mathbf{B}$  は電流から放射状に広がる向きを向いていることがわかります<sup>\*1</sup>。さらに、磁場の湧き出しがない ( $\text{div } \mathbf{B} = 0$ ) ので、磁力線は途中で消えず、電流から「磁力線が湧き出している」ように見えます。しかし、これはモノポールなしの条件  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  と矛盾します。よって、直線電流から放射状に広がる向きに磁場は生じていないこと (磁場がゼロであること) が結論されます。

以上のように、アンペールの法則だけから磁場の向きを決定することはやや難しい作業で、あとで述べるビオ・サバールの法則によって向きを決めるほうが何かと便利です。ただ、アンペールの法則の使い方も練習しておくべきなので、テキストでは電流が作る磁場の向きはわかっているものとして例題を解いています。

## 6.2 補足説明: アンペールの法則のソレノイドへの適用方法

テキストで説明したように、ソレノイドとは、図 6.2 (a) に示すように円筒に導線 (金属線) を巻きつけた構造をもつコイルの一種です。少なくともソレノイドの軸方向に磁場が生じないことはすぐに示せます。まず、ソレノイドの外側に軸方向に磁場が生じていると仮定し、図 6.2 (b) のような長方形の経路 C をソレノイドの外側にとって、アンペールの法則を適用してみます。このとき図の横方向に  $x$  座標をとり、辺 PQ の位置を  $x = x_1$ 、辺 RS の位置を  $x = x_2$  とします。このとき、経路 C を貫く電流はゼロであることから、経路の左辺と右辺での磁場の大きさを  $B, B'$  とすると、

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = (B(x_1) - B(x_2))h = 0 \implies B(x_1) = B(x_2) \quad (6.3)$$

<sup>\*1</sup> この状況は、帯電した直線上の物体が作る電場  $\mathbf{E}$  の様子に似ています。



が成り立ち、磁場の大きさが軸からの距離によらないことがわかります。そして、十分遠方では磁場はゼロになっているはずなので、左辺を無限遠方にとったとすると、 $B' = B = 0$  が結論されます。

## 6.3 Training の解答

Training 4.1 Exercise 4.3 と同じ状況を考えます。位置  $x$  から  $x + dx$  の間にある電流  $J dx$  が位置  $(0, 0, a)$  につくる磁場  $d\mathbf{B}$  は直線電流がつくる磁場の公式を用いることで求めることができます。これを位置  $x$  について積分することで、十分広い面電流が位置  $(0, 0, a)$  につくる磁場を求め、Exercise 4.3 の解答と一致することを確認しなさい。

**解答** 位置  $x$  から  $x + dx$  の間にある無限に長い直線電流から  $A(0, 0, a)$  までの距離は  $r = \sqrt{x^2 + a^2}$  である。 $A(0, 0, a)$  に最も近い位置にある直線電流上の点は  $B(x, 0, 0)$  であるので、磁場の向きは  $B$  から  $A$  に向かう変位ベクトル

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

に対して直交し、電流に対する右ねじの向きで決まる向きを向くので、 $\mathbf{B}$  の方向を示す単位方向ベクトルは、

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$$

となる。磁場の大きさは  $\mu_0 J dx / 2\pi r$  で与えられるので、

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 J dx}{2\pi\sqrt{x^2 + a^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = \frac{\mu_0 J dx}{2\pi(x^2 + a^2)} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$$

となる。これを  $x = -\infty$  から  $x = \infty$  まで積分すればよいが、 $z$  成分は被積分関数が  $x$  の奇関数となっているのでゼロになる。よって、磁場は  $x$  成分のみ有限で、

$$B_x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 J a dx}{2\pi(x^2 + a^2)} = \frac{\mu_0 J}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{x^2 + a^2} dx$$

となる。 $x = at$  と  $x$  から  $t$  に変数変換すると、 $dx = a dt$  より、

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\mu_0 J}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2 + 1} dt = \frac{\mu_0 J}{2\pi} [\arctan t]_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{\mu_0 J}{2\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{\mu_0 J}{2} \end{aligned}$$

Training 4.2 断面が半径  $a$  の円となる無限に長い直線状の導体棒に電流  $I$  を流したとき、導体棒の中心軸から距離  $r$  の位置における磁場の大きさ  $B$  を  $r$  の関数として求めなさい。ただし、磁場の向きは右ネジの法則により、導体棒の中心軸の周りを取り巻く向きであることを用いてよく、電流は導体棒の内部を一様に流れるものとします。

**解答** 導体棒の中心軸に垂直な平面内にある、中心軸を中心に持つ半径  $r$  の円  $C$  を考えて、アンペールの法則を適用する。 $r < a$  のときには、円  $C$  を貫く電流は  $I \times (4\pi r^2)/(4\pi a^2) = Ir^2/a^2$  となるので、

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} &= B(r) \times 2\pi r = \frac{\mu_0 I r^2}{a^2} \\ \Rightarrow B(r) &= \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \end{aligned}$$

となる。一方、 $r > a$  のときは、円  $C$  を貫く電流は  $I$  なので、アンペールの法則より、

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} &= B(r) \times 2\pi r = \mu_0 I \\ \Rightarrow B(r) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \end{aligned}$$

となる。まとめると、

$$B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} & (r < a) \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & (r > a) \end{cases}$$

Tranining 4.3 Exercise 4.5 と同じ設定で粒子の速度を  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$  としたとき、運動方程式を直接解くことで  $v_x, v_y$  を  $t$  の関数として求めなさい。ただし、粒子は時刻  $t = 0$  で  $\mathbf{v} = (v_0, 0, 0)$  の速度をもつとします。さらに、時刻  $t = 0$  で粒子の速度が  $\mathbf{v} = (v_0, 0, v_1)$  であったとき、粒子の運動はどうなるでしょうか。

**解答** 運動方程式を書き表すと、

$$\begin{aligned} m \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv_z}{dt} \end{pmatrix} &= q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = q \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -qv_y B \\ qv_x B \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。 $x$  成分と  $y$  成分を書き下すと、

$$m \frac{dv_x}{dt} = -qv_y B \quad m \frac{dv_y}{dt} = qv_x B$$

となる。運動方程式の  $x$  成分の両辺をさらに時刻  $t$  で微分し、運動方程式の  $y$  成分の式を用いると、

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 v_x}{dt^2} &= -qB \frac{dv_y}{dt} = -\frac{q^2 B^2}{m} v_x \\ \Rightarrow \frac{d^2 v_x}{dt^2} &= -\frac{q^2 B^2}{m^2} v_x \end{aligned}$$

となる。これはバネにつながれた物体の運動方程式から導かれる 2 階の微分方程式と同じ形をしている。そのため、この微分方程式の一般解は、 $\omega = qB/m$  として、

$$v_x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

となる。また運動方程式の  $x$  成分より、

$$\begin{aligned} v_y(t) &= -\frac{m}{qB} \frac{dv_x}{dt} = -\frac{m}{qB} (-A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t) \\ &= A \sin \omega t - B \cos \omega t \end{aligned}$$

となる。初期条件 ( $t = 0$  で  $v_x = v_0$ ,  $v_y = 0$ ) より、 $A = v_0$ ,  $B = 0$  となり、

$$v_x(t) = v_0 \cos \omega t \quad v_y(t) = v_0 \sin \omega t$$

となる。さらに運動方程式の  $z$  成分は  $\frac{dv_z}{dt} = 0$  となることと、初期条件 ( $t = 0$  で  $v_z = 0$ ) から

$$v_z(t) = 0$$

となる。これは  $xy$  平面に平行な円運動を表す。

もし初期条件を時刻  $t = 0$  のときに  $\mathbf{v} = (v_0, 0, v_1)$  とすると、 $v_x$ ,  $v_y$  は変わらず、 $v_z$  が

$$v_z(t) = v_1 = (\text{一定})$$

となる。このとき、 $xy$  方向は円運動をしつつ、 $z$  方向に等速運動をし、全体としてらせん運動を行う。

Training 4.4 Exercise 4.6 で  $I_1 = I_2 = 1 \text{ A}$ 、 $r = 1 \text{ m}$  としたとき、 $1 \text{ m}$  当たりの導線が受ける力の大きさを求めなさい。

[解答] 電流  $I_1$  が  $r$  だけ離れたところに作る磁場の大きさは  $B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$  である。この磁場によって長さ  $l$  の電流  $I_2$  が受ける力は、

$$\begin{aligned} F &= I_2 B l = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi r} = \frac{1.257 \times 10^{-6} \text{ N/A}^2 \times 1 \text{ A} \times 1 \text{ A} \times 1 \text{ m}}{2 \times 3.14 \times 1 \text{ m}} \\ &= 2.00 \times 10^{-7} \text{ N} \end{aligned}$$

となる。実はもともとは電流の単位である  $1 \text{ A}$  は、2 つの直線電流の間に働く力が  $2 \times 10^{-7} \text{ N}$  となるように定義されており、これから電荷の単位である  $\text{C}$  (クーロン) も定められていた。電荷の単位が電子の電荷から定義されるようになったのは、最近のことである。

Training 4.5 Exercise 4.9 の解答を用いて、単位長さ当たりの巻数が  $n$  のソレノイドに電流を流したときの、ソレノイドの中心軸上での磁場を求めてみましょう。ソレノイドの中心軸に沿って  $z$  座標をとり、位置  $z$  から  $z + dz$  の区間にあるソレノイドの巻数が  $n dz$  であることと、Exercise 4.9 の円電流のつくる磁場の式 (4.60) を組み合わせて、ソレノイドの中心軸上  $(0, 0, z)$  での磁場の向きと大きさを求めなさい。

**解答** 位置  $z$  から  $z + dz$  の区間にあるソレノイド (電流  $In dz$ ) が原点  $(0, 0, 0)$  に作る磁場  $d\mathbf{B}$  は、 $+z$  方向を向いており、 $z$  成分のみ有限である。磁場の  $z$  成分は、Exercise 6.6 の結果から、

$$dB_z = \frac{\mu_0 (In dz) a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

となる。これを  $z = -\infty$  から  $z = +\infty$  まで積分することで、

$$B_z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 I n a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} dz = \frac{n\mu_0 I}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} dz$$

となる。 $z = at$  として  $z$  から  $t$  へ変数変換することで、 $dz = a dt$  より、

$$B_z = \frac{n\mu_0 I}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)^{3/2}}$$

となる。さらに  $t = \tan s$  として  $t$  から  $s$  へ変数変換すると、 $1 + \tan^2 s = 1/\cos^2 s$ ,  $dt = ds/\cos^2 s$  より、

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{n\mu_0 I}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dt}{(1/\cos^2 s)^{3/2} \cos^2 s} = \frac{n\mu_0 I}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos s ds \\ &= \frac{n\mu_0 I}{2} [\sin s]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{n\mu_0 I}{2} (1 - (-1)) = n\mu_0 I \end{aligned}$$

Training 4.6 ベクトル場を  $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$  と成分表示し、具体的に微分計算を行うことで、公式 (4.68) を証明しなさい。

**解答** 成分表示を使って、証明する式の  $z$  成分を具体的に計算する。左辺の  $z$  成分は、

$$\begin{aligned} &(\text{rot}(\text{rot} \mathbf{A}))_z \\ &= \frac{\partial}{\partial x} [(\text{rot} \mathbf{A})_y] - \frac{\partial}{\partial y} [(\text{rot} \mathbf{A})_x] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] \\ &= -\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial z} \\ &= -\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial z} \\ &= -\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_z + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \\ &= (-\nabla^2 \mathbf{A})_z + \frac{\partial}{\partial z} (\text{div} \mathbf{A}) = (-\nabla^2 \mathbf{A} + \text{grad}(\text{div} \mathbf{A}))_z \end{aligned}$$

となる。 $x$  成分、 $y$  成分についても同様に計算でき、証明が完了する。

Training 4.7 定数ベクトルを  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$  と表して、具体的に微分計算を行うことで、公式 (4.80)  $[\text{rot}(\mathbf{a}f) = -\mathbf{a} \times \text{grad} f]$  を証明しなさい。

**解答** スカラー場を  $f$  として、証明する式の左辺の  $z$  成分を計算していくと、

$$\begin{aligned} (\text{rot}(\mathbf{a}f))_z &= \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{a}f)_y - \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{a}f)_x = \frac{\partial}{\partial x} (a_y f) - \frac{\partial}{\partial y} (a_x f) \\ &= a_y \frac{\partial f}{\partial x} - a_x \frac{\partial f}{\partial y} = a_y (\text{grad} f)_x - a_x (\text{grad} f)_y \\ &= (-\mathbf{a} \times \text{grad} f)_z \end{aligned}$$

となる。 $x$  成分、 $y$  成分についても同様に計算でき、証明が完了する。

## 6.4 Practice の解答

[4.1] **磁場の重ね合わせ** 図 4.25 (a) のように、 $(x, y) = (a, 0)$  と  $(x, y) = (-a, 0)$  の位置に、 $z$  軸と平行な十分長い 2 つの直線導線が置かれており、 $+z$  方向に電流  $I$  が流れています。 $(x, y) = (0, a)$  における磁場  $\mathbf{B}$  の向きと大きさを求めなさい。

**解答**  $(x, y) = (a, 0)$  に置かれた電流が作る磁場  $\mathbf{B}_1$  は  $xy$  平面内を向き、電流の位置から  $(x, y) = (0, a)$  への変位ベクトル

$$\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ a \end{pmatrix}$$

に対して直交し、電流に対して右ねじの法則によって向きが決まる。よって、 $\mathbf{B}_1$  の向きを示す単位方向ベクトルは、 $\frac{1}{\sqrt{2}a} \begin{pmatrix} -a \\ a \end{pmatrix}$  となる。また磁場  $\mathbf{B}_1$  の大きさは、電流からの距離が  $\sqrt{2}a$  であることを使うと、 $|\mathbf{B}_1| = \mu_0 I / (2\pi\sqrt{2}a)$  となる。以上から、

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{2}a} \frac{1}{\sqrt{2}a} \begin{pmatrix} -a \\ a \end{pmatrix} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。同様にして  $(x, y) = (-a, 0)$  に置かれた電流が作る磁場  $\mathbf{B}_2$  は

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。以上より、磁場の重ね合わせにより、

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} \left[ \begin{pmatrix} -a \\ -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a \\ a \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。つまり磁場は  $-x$  方向を向き、磁場の大きさは  $\frac{\mu_0 I}{2\pi a}$  となる。

[4.2] **回路が磁場から受ける力** 図 4.26 のように、十分長い直線電流  $I_1$  と長方形回路 PQRS が同一平面上に置かれており、PQ と RS は直線電流と平行で、かつ、直線電流からそれぞれ  $a, b$  の距離にあったとします。長方形回路 PQRS に電流  $I_2$  が流れているとき、長方形回路が受ける力の向きと大きさを求めなさい。

**解答** 長方形の辺 QR と辺 SP に加わる力の大きさは等しく、向きは反対になるので、力は打ち消し合う。よって、辺 PQ と辺 RS に加わる力のみ考えればよい。辺 PQ 上では直線電流  $I_1$  によって、図面に対して垂直に裏から表に向かう向きに大きさ  $B_{PQ} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$  の磁場が生じ、その結果、辺 PQ は直線電流  $I_1$  から離れる向きに力を受ける。その大きさは、

$$F_{PQ} = I_2 B_{PQ} l = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi a}$$

となる。同様にして、辺 RS 上には大きさ  $B_{RS} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi b}$  の磁場が生じ、その結果、辺 RS は直線電流  $I_1$  に近づく向きに力を受ける。その大きさは、

$$F_{RS} = I_2 B_{RS} l = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi b}$$

となる。 $a < b$  より  $F_{PQ} > F_{RS}$  となるので、最終的に長方形 PQRS は直線電流  $I_1$  から離れる向きに力を受け、その大きさは、

$$F = F_{PQ} - F_{RS} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l (b - a)}{2\pi ab}$$

となる。

[4.3] 同軸ケーブルがつくる磁場 図 4.27 のように、半径  $a$  の無限に長い円柱状の金属棒と、半径  $b$  ( $< a$ ) の厚さの無視できる無限に長い中空円筒状の金属棒があります。外側の金属円筒に電流  $I$  を流し、内側の金属棒に逆向きに電流  $I$  を流したとき、中心軸から距離  $r$  の位置における磁場の大きさ  $B(r)$  をアンペールの法則を用いて求めなさい。ただし、磁場は中心軸に垂直な平面内を、右ネジの法則で決まる中心軸を取り巻く向きに生じるとします。

**解答** 中心軸に垂直な平面内にあり、中心軸を中心とする半径  $r$  の円 C を考え、経路 C に関してアンペールの法則を適用する。 $r < a$  のときは、経路 C を貫く電流の大きさは  $I \times (r^2/a^2)$  となるので、磁場の大きさを  $B(r)$  として、アンペールの法則から

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = B(r) \times 2\pi r = \mu_0 \frac{Ir^2}{a^2} \implies B(r) = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2}$$

となる。 $a < r < b$  のときは、経路 C を貫く電流の大きさは  $I$  となるので、

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = B(r) \times 2\pi r = \mu_0 I \implies B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

となる。 $b < r$  のときは、経路 C を貫く電流の大きさは、2 つの電流が打ち消し合ってゼロになるので、

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = B(r) \times 2\pi r = 0 \implies B(r) = 0$$

となる。

## 第 7 章

# 電磁誘導（テキストの第 5 章）

### 7.1 補足説明: 回路が動くときのファラデーの法則の証明

ファラデーの法則は、本来は固定された回路に対して、外から加える磁場を変化させたときに成り立つ法則です。しかし、実は磁場を固定したまま回路を動かしたときにも、ファラデーの法則がそのまま成り立つことを示すことができます。ここでは簡単のため、図 7.1 (a) のように平面上に経路  $C$  の回路があり、平面に垂直な方向に静磁場  $\mathbf{B}$  が印加されているとしましょう。磁場  $\mathbf{B}$  は、場所によって大きさが変化しても構いません。この状況で、回路の形状や向きは同じに保ったまま、回路全体を平面内で速度  $\mathbf{v}$  で動かすことを考えてみます<sup>\*1</sup>。

金属中の電荷  $q$  にはローレンツ力  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  が働きますが、これを起電力による電場  $\mathbf{E}_i$  とみなすと、

$$q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = q\mathbf{E}_i \quad \longrightarrow \quad \mathbf{E}_i = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (7.1)$$

の電場が生じることになります。そして、これを回路の経路  $C$  に沿って積分することで起電力

$$V_i = \int_C \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{r} \quad (7.2)$$

が生じる、とみなすことができます。

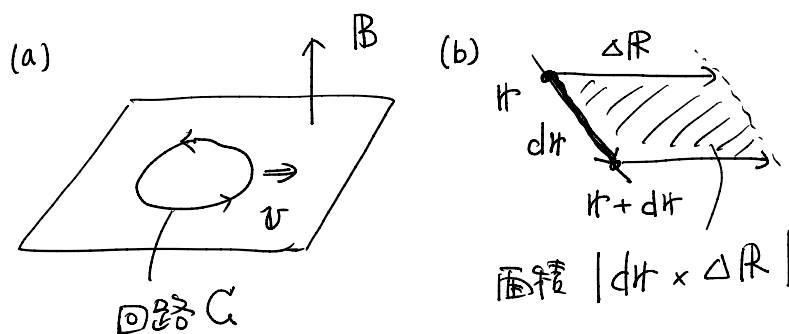


図 7.1 (a) 磁場中を動く回路。(b) 微小区間の移動によってできる微小面積。

<sup>\*1</sup> もっと一般的に回路が平面上にない場合や、回路が変形する場合も同様の方法で証明が可能です。

ここで現れた見かけの電場  $E_i$  (もしくは起電力  $V_i$ ) は、磁場が時間変化したときに生じる本当の誘導電場  $E$  (もしくは誘導起電力  $V$ ) とは異なりますが、回路中の電荷 (実際は自由電子) に同じように作用するため、起電力と同等のものとみなすことができます。

さて、この起電力  $V_i$  はベクトルの外積の公式

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c} \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (7.3)$$

と (7.1) を用いてもう少し計算することができて

$$\begin{aligned} V_i &= \int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_C (d\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{B} \end{aligned} \quad (7.4)$$

となります。ここで時刻  $t$  から時刻  $t + \Delta t$  までの間の回路の移動を考えてみると、回路は平面内を  $\Delta \mathbf{R} = \mathbf{v} \Delta t$  だけ平行移動しているはずですが、また経路  $C$  上の位置  $\mathbf{r}$  付近の回路の移動において、 $\Delta \mathbf{S} = d\mathbf{r} \times \Delta \mathbf{R}$  というベクトルを考えてみると、これはちょうど面積ベクトルと同じような役割を果たしていることがわかります。実際、このベクトルの大きさ  $|\Delta \mathbf{S}| = |d\mathbf{r}| \times |\Delta \mathbf{R}| \sin \theta$  ( $\theta$  は  $d\mathbf{r}$  と  $\Delta \mathbf{R}$  が成す角) は、図 7.1 (b) のように  $\mathbf{r}$  から  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  の間の微小経路が  $\Delta \mathbf{R}$  の移動をすることで生じる面積となります。さらに、 $\Delta \mathbf{S}$  は回路のある面に垂直な方向を向いていて、 $\mathbf{B}$  と同じ方向を向きます。

よって、位置  $\mathbf{r}$  から位置  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  までの微小区間がこの移動によってつくる微小面積を貫いている磁束は

$$|\Delta \mathbf{S}| \times |\mathbf{B}| = \Delta \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = (d\mathbf{r} \times \Delta \mathbf{R}) \cdot \mathbf{B} = (d\mathbf{r} \times \mathbf{v} \Delta t) \cdot \mathbf{B} \quad (7.5)$$

だけ減少します。これを経路  $C$  で積分すると、

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= - \int_C (d\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{B} \Delta t \\ \Rightarrow - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} &= \int_C (d\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{B} \end{aligned} \quad (7.6)$$

となり、これと式 (7.4) を組み合わせることで、

$$V_i = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \quad (7.7)$$

が得られます。そして、最後に  $\Delta t \rightarrow 0$  の極限をとると、ファラデーの法則と同じ式が導出されることになります。

磁場が固定されていて回路が動く場合と、回路が固定されていて磁場が変化する場合では、働いている物理現象が異なるように見えます。前者はローレンツ力によって生じるのに対し、後者はローレンツ力では記述できず、ファラデーの法則そのものを物理法則として受け入れる必要があります。でも最終的な式が一致してしまうのは、この段階では偶然としかいいようがありません。物理学の学習が少し進んで相対性理論を学ぶと、その謎が解き明かされることになります。

## 7.2 Training の解答

Training 5.1 図 5.6 のように巻数  $N$ 、断面積  $S$  のソレノイドに、外部から磁場  $\mathbf{B}(t) = (0, 0, B(t))$  を加えたとき、ソレノイドに生じる誘導起電力の大きさを  $\frac{dB(t)}{dt}$  を用いて書き表しなさい。ただし、ソレノイドの中心軸に沿って  $z$  軸をとるとします。



**解答** コイルを貫く磁束は  $\Phi(t) = NSB(t)$  となるので、誘導起電力の大きさは  $V(t) = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = NS \left| \frac{dB}{dt} \right|$  となる。

### 7.3 Practice の解答

[5-1] **ソレノイドがつくる磁場による誘導起電力** 図 5.14 (a) のような半径  $a$  の十分長い単位長さ当たりの巻数が  $n$  のソレノイドを考え、ソレノイドに時間変化する電流  $I(t)$  を流すと、図 5.14 (b) のようにソレノイド内部に一樣な磁場  $\mathbf{B}$  が生じます。いま、ソレノイドの中心軸方向の磁場の成分を時刻の関数として  $B(t)$  と書いたとき、ソレノイドの中心軸から距離  $r$  における電場  $\mathbf{E}$  の大きさ  $E(t)$  を  $\frac{dB}{dt}$  を用いて求めなさい。ただし、電気力線は図 5.14 (b) のように右ネジの法則で決まる中心軸を取り巻く向きに生じ、図 5.14 (b) の電気力線上で  $E$  は一定であるとしします。

**解答** ソレノイド内の磁場は、ソレノイドコイルの中心軸の方向を向き、大きさは  $B(t) = n\mu_0 I$  となる。コイルの軸に垂直な平面内に、コイルの軸に中心を持つ半径  $r$  の円周  $C$  をとり、経路  $C$  に囲まれた面  $A$  に対してファラデーの法則を適用する。このとき、 $\mathbf{E}$  は常に円周に沿った方向を向いているので、電場の大きさを  $E(r)$  として、

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} &= \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ \implies E(r) \times 2\pi r &= B \times \pi r^2 \implies E(r) = \frac{rB}{2} \end{aligned}$$

となる。

[5-2] **発電機** 図 5.15 (a) のように、一辺の長さがそれぞれ  $a, b$  で与えられる長方形コイルを置き、 $OO'$  を中心軸として角速度  $\omega$  で回転させることを考えます。図 5.15 (b) のように大きさ  $B$  の一樣な磁場が加えられているとき、コイルに生じる誘導起電力を時刻  $t$  の関数として求めなさい。ただし、コイルの正の向きを図 5.15 (a) のように置き、時刻  $t = 0$  でコイルと磁場の成す角  $\theta$  はゼロであったとし、そのときコイルを貫く磁束はゼロであるとしします (図 5.15 (b) を参照)。

**解答** コイルを貫く磁束は  $\Phi = -abB \sin \theta = -abB \sin \omega t$  となる。これより、コイルで生じる誘導起電力は、

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = abB\omega \cos \omega t$$

となる。

[5-3] **コイルと抵抗の直列回路** 図 5.16 のように自己インダクタンス  $L$  のコイルと電気抵抗  $R$  の抵抗が直列に接続された回路があります。時刻  $t = 0$  で回路を流れる電流が  $I_0$  であったとき、時刻  $t (> 0)$  における電流  $I(t)$  を求めなさい。

**解答** キルヒホッフの第二法則より、

$$IR + L \frac{dI}{dt} = 0 \implies \frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L} I$$

となる。この微分方程式を解くと、

$$\begin{aligned}\frac{dI}{I} &= -\frac{R}{L} dt \implies \int \frac{dI}{I} = -\int \frac{R}{L} dt \\ \implies \log |I(t)| &= -\frac{R}{L} t + C' \implies I(t) = \pm e^{C'} e^{-(R/L)t} = C e^{-(R/L)t}\end{aligned}$$

となる。ここで  $C'$  は積分定数、 $C = \pm e^{C'}$  は定数である。初期条件 ( $t = 0$  で  $I = I_0$ ) より  $C = I_0$  となるので、

$$I(t) = I_0 e^{-(R/L)t}$$

となる。

## 第 8 章

# マクスウェル方程式（テキストの第 6 章）

### 8.1 Training の解答

Training 6.1 真空の誘電率および真空の透磁率の値を用いて、波動方程式の解の進行速度  $v$  を具体的に求め、単位もチェックしなさい。

**解答**  $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ m}^{-3} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2$ ,  $\mu_0 = 1.2566 \times 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}$  を用いて、

$$\begin{aligned}\epsilon_0 \mu_0 &= 8.854 \times 10^{-12} \text{ m}^{-3} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2 \\ &\quad \times 1.2566 \times 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2} \\ &= 1.1126 \times 10^{-17} \text{ s}^2/\text{m}^2 \\ v &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}\end{aligned}$$

となる。

### 8.2 Practice の解答

[6.1] **変位電流の評価** 銅に交流電場  $\mathbf{E}(t) = (E_0 \cos 2\pi ft, 0, 0)$  が加わっているとき、オームの法則によって決まる電流密度  $\mathbf{j}$  と変位電流  $\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  の振幅が等しくなる振動数  $f$  を求めなさい。ただし、銅の伝導度を  $\sigma = 6.5 \times 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$  とし、銅の誘電率は真空の誘電率と等しいことを仮定して構いません。

**解答** オームの法則より、

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = (\sigma E_0 \cos 2\pi ft, 0, 0)$$

となる。また変位電流は、

$$\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = (-2\pi f \epsilon_0 E_0 \sin 2\pi ft, 0, 0)$$

となる。それぞれの振幅が等しくなるとき、

$$\begin{aligned}\sigma E_0 &= 2\pi f \epsilon_0 E_0 \\ \Rightarrow f &= \frac{\sigma}{2\pi \epsilon_0} = \frac{6.5 \times 10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}}{2 \times 3.14 \times 8.85 \times 10^{-12} \text{kg}^{-1} \text{m}^{-3} \text{s}^4 \text{A}^2} \\ &= 1.2 \times 10^{18} \text{Hz}\end{aligned}$$

となります ( $1 \Omega = 1 \text{kg m}^2 \text{s}^{-3} \text{A}^{-2}$  に注意してください)。この振動数はかなり大きく、 $f \ll 1 \times 10^{18} \text{Hz}$  であれば変位電流の効果が無視できることがわかります。

[6.2] 平面波 一般に 3 次元空間中の電磁場は、電場  $\mathbf{E}$  に対して

$$\begin{cases} E_x = A_x \cos(2\pi ft - k_x x - k_y y - k_z z) \\ E_y = A_y \cos(2\pi ft - k_x x - k_y y - k_z z) \\ E_z = A_z \cos(2\pi ft - k_x x - k_y y - k_z z) \end{cases} \quad (6.75)$$

と書き表されます。ここで  $f$  は光の振動数、 $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$  は定数ベクトル、 $\mathbf{E}_0 = (A_x, A_y, A_z)$  は振幅を表します。

- (1) 光はベクトル  $\mathbf{k}$  の向きに進行することを説明しなさい。
- (2) 光の波長を  $\lambda$  としたとき、 $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$  が成り立つことを示しなさい。
- (3) (6.76) を波動方程式 (6.44) に代入すると、波の公式  $f\lambda = c$  ( $c$  は光の速さ) が得られることを示しなさい。

解答 (1) 式 (6.75) を変形すると、

$$\begin{cases} E_x = A_x \cos(2\pi f(t - (k_x x + k_y y + k_z z)/2\pi f)) \\ E_y = A_y \cos(2\pi f(t - (k_x x + k_y y + k_z z)/2\pi f)) \\ E_z = A_z \cos(2\pi f(t - (k_x x + k_y y + k_z z)/2\pi f)) \end{cases}$$

となる。この式から、平面  $k_x x + k_y y + k_z z = 0$  における電場の振動  $(A_x, A_y, A_z) \cos 2\pi ft$  が、平面  $k_x x + k_y y + k_z z = C$  ( $C$  は定数) には  $C/2\pi f$  だけ遅れて伝わってくることがわかる。よって、平面  $k_x x + k_y y + k_z z = C$  ( $C$  は定数) が波面になっており、その法線ベクトル  $(k_x, k_y, k_z)$  の向きに波が進むことがわかる。

(2) 時刻  $t = 0$  のとき、電場は

$$\begin{cases} E_x = A_x \cos(k_x x + k_y y + k_z z) \\ E_y = A_y \cos(k_x x + k_y y + k_z z) \\ E_z = A_z \cos(k_x x + k_y y + k_z z) \end{cases}$$

となる。波面  $k_x x + k_y y + k_z z = 0$  と位相が  $2\pi$  だけずれた波面は  $k_x x + k_y y + k_z z = 2\pi$  となるが、この 2 つの波面の間隔が波長  $\lambda$  となる。平面  $k_x x + k_y y + k_z z = 0$  と平面  $k_x x + k_y y + k_z z = 2\pi$  の間の距離は、原点から平面  $k_x x + k_y y + k_z z = 2\pi$  におろした垂線の長さを計算することで求められる。原点を通り、法線ベクトル  $(k_x, k_y, k_z)$  の向きに伸びる直線は、媒介変数表示によって  $(x, y, z) = (k_x t, k_y t, k_z t)$  と書き表され、これを  $k_x x + k_y y + k_z z = 2\pi$  に代入することで、

$$(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)t = 2\pi \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2\pi}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

となる。よって、垂線と平面  $k_x x + k_y y + k_z z = C$  の交点は、

$$(x, y, z) = \frac{2\pi}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} (k_x, k_y, k_z)$$

となり、この点の原点からの距離は

$$|(x, y, z)| = \frac{2\pi}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{C}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} = \frac{C}{|\mathbf{k}|}$$

となる。この距離が波長となるため、

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|} \implies |\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$$

となる。

(3) 波動方程式 (6.43) の  $x$  成分に代入すると、左辺は

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right) \\ &= -A_x (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \cos(2\pi f t - k_x x - k_y y - k_z z) \end{aligned}$$

となり、右辺は

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = -\frac{A_x (2\pi f)^2}{c^2} \cos(2\pi f t - k_x x - k_y y - k_z z)$$

となります (光速が  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  と書けることを使いました)。両辺が等しいことから、

$$|\mathbf{k}|^2 = \frac{(2\pi f)^2}{c^2} \implies |\mathbf{k}| = \frac{2\pi f}{c}$$

となります。(2) の解答より、 $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$  であるので、

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c} \longrightarrow f\lambda = c \quad (8.1)$$

が得られ、波の公式が導けます。他の成分の式からも、同じ式が得られます。

[6-3] **電磁場の振幅** 電場の振幅が  $0.1 \text{ V/m}$  の電磁場に対して、磁場の振幅を求めなさい。

**解答** (6.56) と (6.61) を用いると、磁場の振幅  $B_0$  は電場の振幅  $A$  の  $1/c$  倍になっている。よって、

$$B_0 = \frac{A}{c} = \frac{0.1 \text{ V/m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 3 \times 10^{-10} \text{ V} \cdot \text{s/m}^2$$

となる。単位の確認を行うと、ファラデーの法則から、磁場に面積を掛けて時間の単位で割ると電圧になるので、これであって、

$$B_0 = 3 \times 10^{-10} \text{ T}$$

と T(テスラ) を用いて表すこともできる。

[6-4] **マクスウェル方程式** マクスウェル方程式が以下の形にまとめられことを、各成分ごとに分けて具体的に計算することで確かめよ。

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & cB_z & -cB_y \\ E_y & -cB_z & 0 & cB_x \\ E_z & cB_y & -cB_x & 0 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{\epsilon_0} \begin{pmatrix} \rho & -j_x/c & -j_y/c & -j_z/c \end{pmatrix}$$

**解答** 一列目の成分に注目すると、

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \implies \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

となり、マクスウェル方程式の第1式になる。二列目の成分に注目すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} - c \frac{\partial B_z}{\partial y} + c \frac{\partial B_y}{\partial z} &= -\frac{j_x}{c\epsilon_0} \\ \implies \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial z} &= -\frac{j_x}{c^2\epsilon_0} \end{aligned}$$

となるが、 $1/c^2 = \mu_0\epsilon_0$  を代入すると、

$$\begin{aligned} \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial z} &= -\mu_0 j_x \\ \implies \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} &= \mu_0 \left( j_x + \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \right) \\ \implies (\operatorname{rot} \mathbf{B})_x &= \mu_0 \left( \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)_x \end{aligned}$$

となり、マクスウェル方程式の第4式の  $x$  成分になる。同様にして、三列目・四列目の成分に注目すると、マクスウェル方程式の第4式の  $y$  成分と  $z$  成分になることがわかる。