高校で学ぶ数学のイカシカタ 第1日

高大接続プログラム

武蔵野大学工学部数理工学科
佐々木多希子、高石武史

数学をイカス

数学を生かす
高校で学んだ数学を使わないままにしておくのはもったいない

数学を活かす
身の回りのことをわかりやすく考えるために、数学を活用する

身近にあるものを数学で表現してみよう!

この講義で知ってほしいこと

- 数学は普段から使っている
  - だいたいどのくらいになるか「概算」していませんか？
- 数学は役に立つ
  - 天気予報も数式から成り立っている
- 数学はおもしろい
  - 使い方がわかると楽しめます

3日間のスケジュール

武蔵野大学の時間割で実施
（1コマ100分、3限は13:10スタート）

1. 8/7 13:10 – 14:50　関東第一高等学校
   - 数理工学とはなんだろう？　放物線と大谷選手のホームラン
2. 8/8 13:10 – 14:50　関東第一高等学校
   - 最適化を試してみる　ベストな解を探せ！
3. 8/10 13:10 – 14:50　武蔵野大学有明キャンパス4号館
   - 数理モデルで考えよう　世界の人口はどのように増えていくのか

関連する高校数学

- 2次関数
  - 放物線を描くグラフからわかることがたくさんあります
- 数列
  - この先を予測するときに役に立ちます
- 微分
  - 精密に予測をすることができます
- ベクトル
- 三角比

第1日の内容

1. これから学ぶこと
   1. 数理工学って何だろう？
2. 放物線と大谷選手のホームラン
   1. 2次関数と最小値、最大値
   2. ホームランの軌道を描く
3. グラフの傾きから最小値（最大値）を求める方法
   1. ホームランの最高到達点と到達距離を求める

1. 数理工学って何だろう？

数学って役に立つの？

- 論理的な考え方
  - 考え方を整理する
  - テキストを論理的に読み解く
- 問題を整理して数式に表す力
  - 問題の見通しをよくする

覚えていた公式を忘れても、
基本的な事柄からたどって
導くことができます

実際に役に立つ場面
- 建物の高さを測る：三角関数
- どちらが有利か考える：確率・統計
- 一番条件の良い方法を考える：2次関数、線形計画

数理工学とは何だろう？

数学＋コンピュータ等の活用を通して
社会・自然現象における問題解決を図る学問

数理工学

目標：**数理的手法を用いて、問題解決を図る**

数学

目標：数・量・図形などに関して、論理を用いて考察する

数理工学のキーワード

数理モデル

数学＋コンピュータ＋物理＋統計・データ解析

9

「数理モデル」で考える

どんなことが起きているのか？どうしたら一番良いのか？

環境、人体、ネットワーク、工業製品、なんでもOK！

柔らかいあたまで、いろいろな方向から問題を眺める

特徴を見つける

「仕組み」を考え、

「**数学の言葉**」で表す

数式で表す

数学・物理・コンピュータなどを用いて、どんなことがわかるか調べる

解を見つける

難しく見えていたものに「わかりやすい見方」を与え、
新しい結果を導き出してくれる

10

3分でわかる数理工学講座

私たちの生活の身近にあるものを例に、
数理工学がどのように社会で活用されているのかを紹介しています。

11

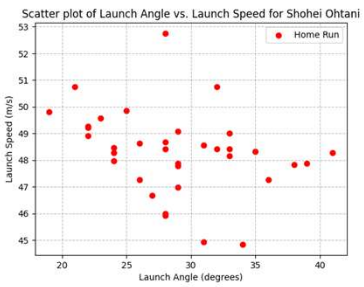
もしかしたら数学で解けるかも。。。

12

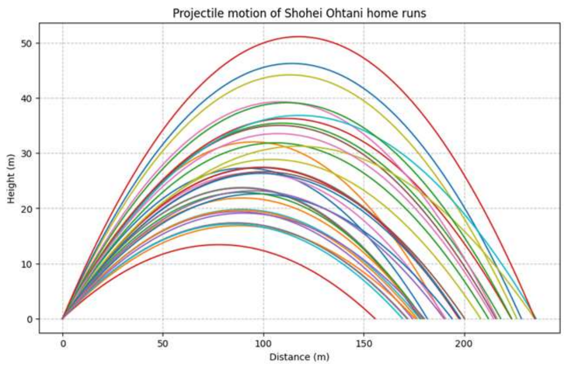
2. 放物線と
大谷選手のホームラン

大谷選手のホームランデータと軌道

2022 年度の大谷選手のホームランデータ（MLB StatCast）



打球の角度と初速



運動方程式から描いたホームランの軌道

放物線

「物」を「放る」ときにできる「線」
- ボールの軌道：大谷選手のホームラン
- パラボラアンテナ

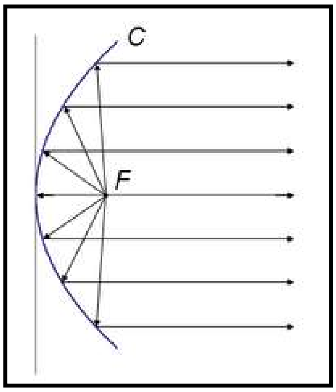
2次関数：$y = x^2$
放物線=2次関数のグラフ

https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%91%E3%83%A9%E3%83%9C%E3%83%A9%E3%82%A2%E3%83%B3%E3%83%86%E3%83%8A

パラボラアンテナ

放物曲面をした反射器
衛星通信、衛星放送(BS, CS)、電波天文などに使われる

放物線の性質：
- 平行な電磁波を反射させ、一点に集めることができる



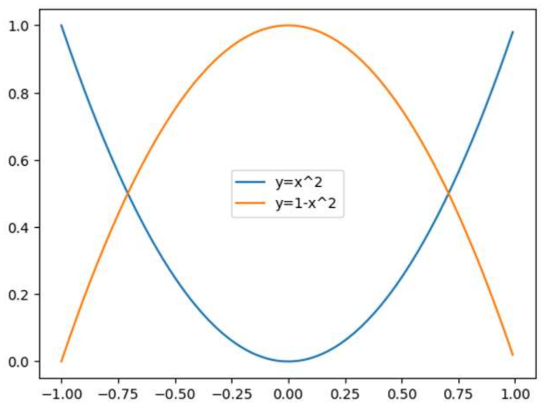
https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%91%E3%83%A9%E3%83%9C%E3%83%A9%E3%82%A2%E3%83%B3%E3%83%86%E3%83%8A

2次関数で表せるもの

- 落下距離：$y = \frac{1}{2}gt^2$　（t秒間に物が落下する距離）
- 制動距離： $y = \frac{1}{2}gt^2$　（ブレーキをかけて止まるまでの距離）
- 電力： $\mathrm{W} = VI = RI^2$
- 正方形の面積： $S = l^2$
- 正多角形の対角線の本数： $S = \frac{l(l-3)}{2}$

放物線の特徴

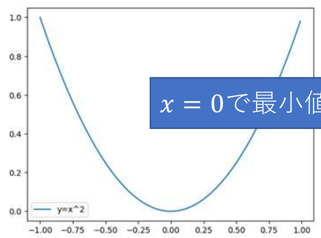
- 凸 or 凹
- 傾きが場所によって変化している
- たどっていくと最小値（または最大値）がある
  - 「平方完成」で求められる



2次関数の最小値（最大値）

$\boldsymbol{y = x^2}$

$x = 0$で最小値 $y = 0$

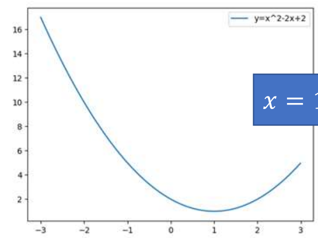


$x = 0$で最小値 $y = 0$

$\boldsymbol{y = x^2 - 2x + 2}$

$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$より、

$$y = (x^2 - 2x + 1) + 1$$
$$= (x-1)^2 + 1$$



$x = 1$で最小値 $y = 1$

2次関数の最小値（最大値）

$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$

［ワークシート］
平方完成して、最小値・最大値を求めよう

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$
$$= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right\}$$
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + a\left\{-\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right\}$$
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

$a > 0$ ならば、
$x = -\frac{b}{2a}$のとき
最小値$y = c - \frac{b^2}{4a}$

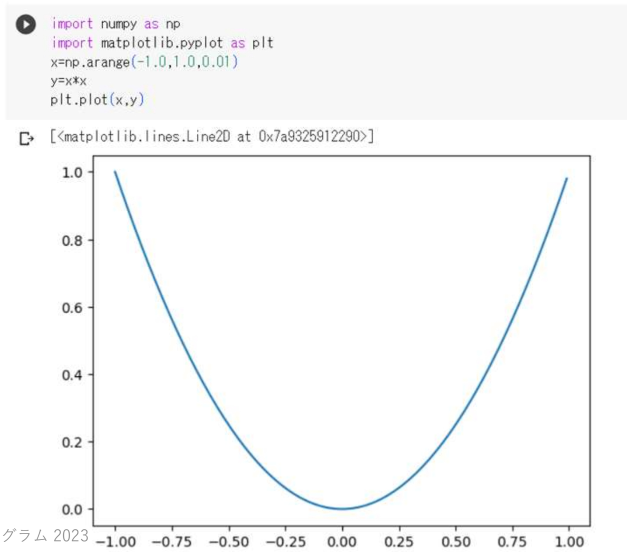
（$a < 0$ ならば、最大値）

授業資料

https://sites.google.com/musashino-u.ac.jp/me-hs2023/home

プログラムでグラフを描いてみよう

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x=np.arange(-1.0,1.0,0.01)
y=x*x
plt.plot(x,y)
```



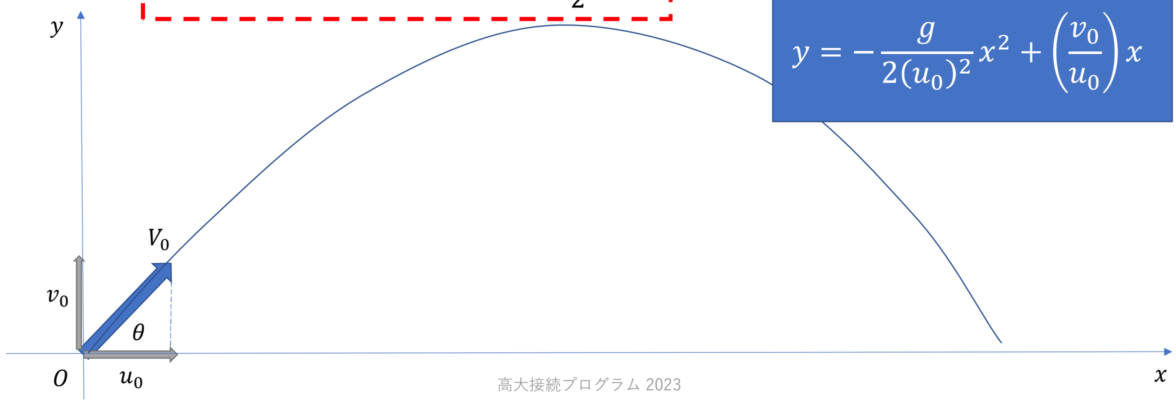
投げたボールの軌道

[ワークシート]
t を消去して、yをx の式で書こう

初速：$u_0 = V_0\cos\theta,\ v_0 = V_0\sin\theta$

位置：$\boxed{x(t) = u_0 t,\ y(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2}$

$$y = -\frac{g}{2(u_0)^2}x^2 + \left(\frac{v_0}{u_0}\right)x$$



式を簡単にして調べる

$$y = -\frac{g}{2(u_0)^2}x^2 + \left(\frac{v_0}{u_0}\right)x$$

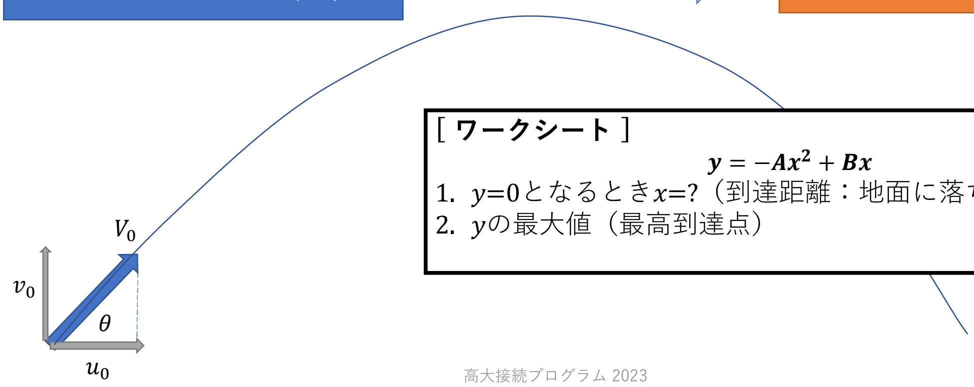
$A = \frac{g}{2(u_0)^2}, B = \left(\frac{v_0}{u_0}\right)$

$$\boldsymbol{y = -Ax^2 + Bx}$$

[ワークシート]

$\boldsymbol{y = -Ax^2 + Bx}$

1. y=0となるときx=?（到達距離：地面に落ちたところ）
2. yの最大値（最高到達点）



$y = -Ax^2 + Bx$からわかること

- $y = -Ax^2 + Bx = -Ax\left(x - \frac{B}{A}\right)$

  $x = 0, \frac{B}{A}$ のときに y = 0（地表）

  -> $x = 0$（投げ上げた場所）、$\boxed{x = \frac{B}{A}}$（落ちた場所）

- $y = -A\left(x - \frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{B^2}{4A}$

  $x = \frac{B}{2A}$ のとき、最大値 $y = \frac{B^2}{4A}$

  -> 一番高く上がったところが $\boxed{y = \frac{B^2}{4A}}$

投げたボールの軌道

$$y = -\frac{g}{2(u_0)^2}x^2 + \left(\frac{v_0}{u_0}\right)x$$

初速：$u_0 = V_0\cos\theta,\ v_0 = V_0\sin\theta$

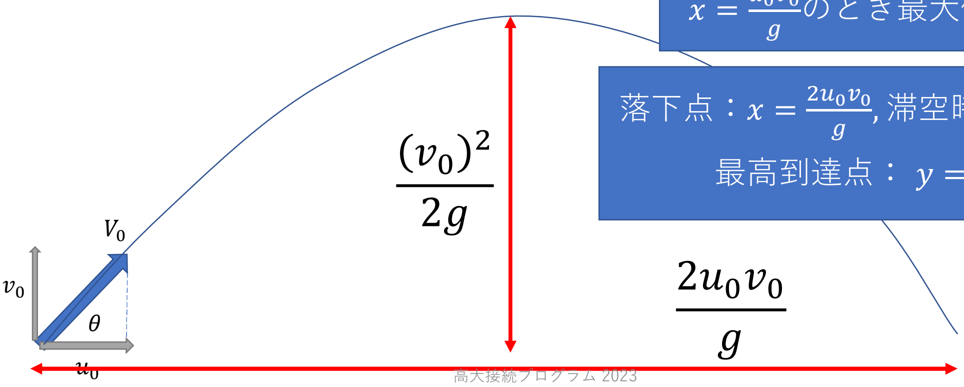
位置：$x(t) = u_0 t,\ y(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$

$y = 0$ となるのは $x = 0, \frac{2u_0v_0}{g}$

$x = \frac{u_0v_0}{g}$ のとき最大値 $y = \frac{(v_0)^2}{2g}$

落下点：$x = \frac{2u_0v_0}{g}$, 滞空時間：$t = \frac{2v_0}{g}$

最高到達点：$y = \frac{(v_0)^2}{2g}$



大谷選手のホームランの軌道を計算しよう

MLB StatCast
https://baseballsavant.mlb.com/savant-player/shohei-ohtani-660271?stats=statcast-r-hitting-mlb

第39号
日時：2023-07-28
ピッチャー：Gausman, Kevin
打球角度：28°
打球初速：46.3(m/s) = 時速167Km
到達距離：128m

大谷選手のホームランの軌道を計算しよう

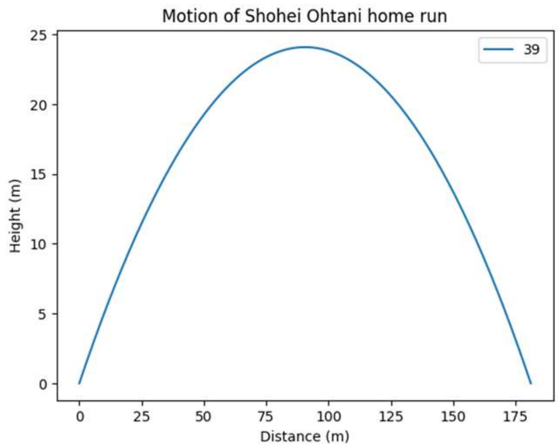
MLB StatCast
https://baseballsavant.mlb.com/savant-player/shohei-ohtani-660271?stats=statcast-r-hitting-mlb

第40号
日時：2023-08-03
ピッチャー：Anderson, Grant
打球角度：23°
打球初速：47.7(m/s) = 時速172Km
到達距離：119m

最新

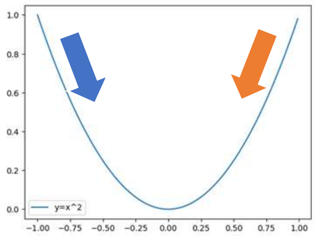
大谷選手のホームランの軌道を計算しよう

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
angle = np.radians(28.0) # 角度 (radian)
speed = 46.3 # 初速 (m/s)
g = 9.81  # 重力加速度 (m/s^2)
t_flight = 2 * speed * np.sin(angle) / g # 滞空時間
t = np.linspace(0, t_flight, num=1000)
x = speed * np.cos(angle) * t
y = speed * np.sin(angle) * t - 0.5 * g * t ** 2
plt.plot(x, y,label="39")
plt.xlabel('Distance (m)')
plt.ylabel('Height (m)')
plt.title('Motion of Shohei Ohtani home run')
plt.legend()
plt.show()
```

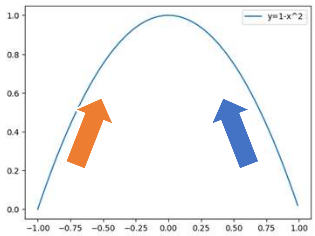


グラフの「傾き」から最小値・最大値を求める

- 最小値を探す場合
  - 右下がり（傾き：ー）⇒右へ移動
  - 右上がり（傾き：＋）⇒左へ移動



- 最大値を探す場合
  - 右下がり（傾き：ー）⇒左へ移動
  - 右上がり（傾き：＋）⇒右へ移動

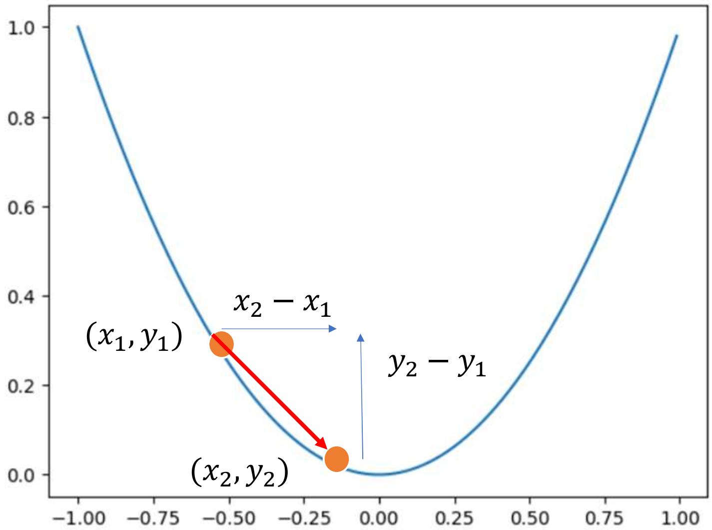


2点間の傾き

x方向の差： $x_2 - x_1$
y方向の差： $y_2 - y_1$

⇒
傾き：

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

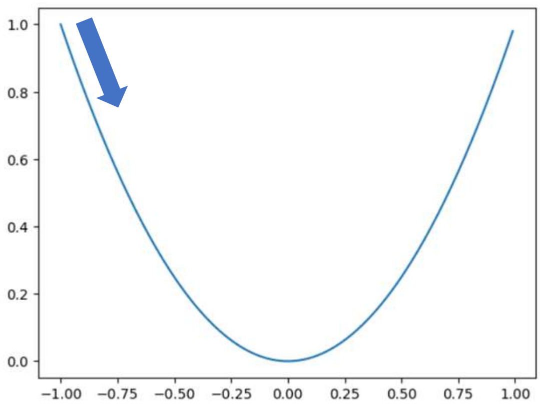


x=-1 から右へ探す

```
def fn(x):
  return x*x

dx=0.1 # dx > 0
x1=-1.0
while(x1 < 1.0):
  x2=x1+dx # x1 < x2
  dydx=(fn(x2) - fn(x1))/dx # 傾き
  if(dydx<0):
    x1=x2 # 右へ移動
  else:
    break # 終了

print("x=%f, y=%f" % (x1,fn(x1)))
```

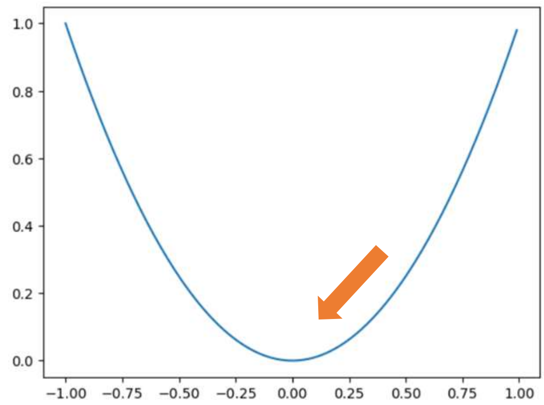


両方から探せるプログラム

```
def fn(x):
  return x*x
def dfdx(x1,x2):
  return (fn(x2) - fn(x1))/dx # 傾き

dx=0.01 # dx > 0
x1=0.3
dydx1=dfdx(x1,x1+dx)
while(x1 > -1.0 and x1 < 1.0):
  x2=x1+dx # x1 < x2
  dydx=dfdx(x1,x2) # 傾き
  if(dydx*dydx1 <= 0):
    break
  if(dydx<0):
    x1=x2 # 右へ移動
  elif(dydx>0):
    x1=x1-dx # 左へ移動
  dydx1 = dydx # 前回の傾き
  print("x=%f, y=%f, dydx=%f" % (x1,fn(x1),dydx))

print("x=%f, y=%f" % (x1,fn(x1)))
```

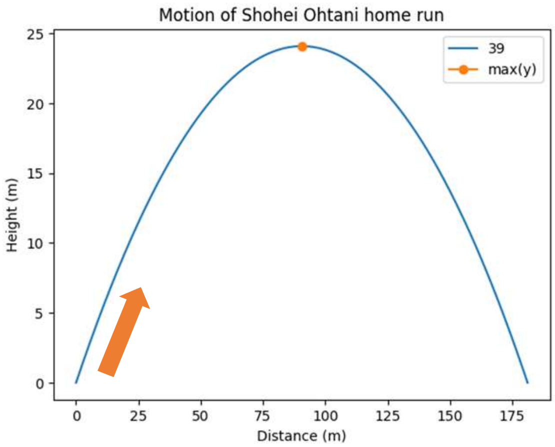


大谷選手のホームランの最高到達点

```
…
x = speed * np.cos(angle) * t
y = speed * np.sin(angle) * t - 0.5 * g * t ** 2

for i in range(len(x)-1):
  dydx=(y[i+1] - y[i])/(x[i+1] - x[i]) # 傾き
  if(dydx<=0):
    break
print("x=%fm, y=%fm" % (x[i],y[i]))

plt.plot(x, y,label="39")
plt.plot(x[i], y[i], marker='o', label="max(y)")
plt.xlabel('Distance (m)’)
…
```



第1日のまとめ

まとめ

放物線は2次関数のグラフの形である

- パラボラアンテナの形やホームランの軌道は放物線になっている
- 2次関数は最小値（または最大値）を持つ
- 「平方完成」すれば最小値（または最大値）がわかる

傾きを使った最小値・最大値の求め方

- グラフのカーブに沿って探せばよい