

# Brunn–Minkowski-type 不等式と放物型方程式の解の凹性

ウ

2025 年 9 月 23 日

## 概要

この文書は, Brunn–Minkowski, Prékopa–Leindler, そして Borell–Brascamp–Lieb 不等式の解説をするものである. 主に PDE やそれに関係した関数不等式 (幾何学的不等式) への応用を紹介するつもりである. 主な参考文献は [BL, G, ILS] である.

## 目次

1	Brunn–Minkowski 不等式と Prékopa–Leindler 不等式	2
1.1	Minkowski 和と凸結合	2
1.2	Brunn–Minkowski 不等式, Prékopa–Leindler 不等式	2
1.3	定理 1.3, 1.4, 1.6 の証明	3
2	BM の応用: 等周不等式と Sobolev 不等式	4
2.1	等周不等式	5
2.2	Sobolev 不等式	6
3	関数の $p$ -concavity と Borell–Brascamp–Lieb 不等式	7
3.1	$p$ -concave 関数	7
3.2	Borell–Brascamp–Lieb 不等式	7
3.3	応用: 熱方程式の解の concavity	9
4	BBL 不等式に対する PDE 的アプローチ	10

## 記号

- $\mathcal{L}^n$ :  $\mathbf{R}^n$  上の Lebesgue 測度. しばしば  $dx = d\mathcal{L}^n$ ,  $|E| = \mathcal{L}^n(E)$ .
- $\mathcal{H}^s$  ( $s \geq 0$ ):  $\mathbf{R}^n$  上の  $s$  次元 Hausdorff 測度.
- $B_R(x_0) := \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x - x_0| < R\}$ .
- $\mathbf{1}_E$  ( $E \subset \mathbf{R}^n$ ): 集合  $E$  の特性関数.

# 1 Brunn–Minkowski 不等式と Prékopa–Leindler 不等式

## 1.1 Minkowski 和と凸結合

**定義 1.1** (Minkowski 和, dilation, 凸結合).  $X, Y \subset \mathbf{R}^n$  に対してこれらの **Minkowski 和**  $X + Y$  が

$$X + Y := \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$$

で定義される.  $r > 0$  に対して  $X$  の  $r$ -**dilation**  $rX$  とは

$$rX := \{rx \mid x \in X\}$$

のことである.

$X$  と  $Y$  の **凸結合** とは,  $0 < \lambda < 1$  を用いて

$$\lambda X + (1 - \lambda)Y = \{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid x \in X, y \in Y\}$$

と表される集合のことである.

**例 1.2.**  $\mathbf{R}^2$  内で,  $X$  を 1 辺の長さ  $a > 0$  の正方形の内部,  $Y$  を半径  $r > 0$  の円板とする. このとき

$$\mathcal{L}^2(X + Y) = a^2 + \pi r^2 + 4ar \geq (\mathcal{L}^2(X)^{1/2} + \mathcal{L}^2(Y)^{1/2})^2 (= a^2 + \pi r^2 + 2\pi^{1/2}ar).$$

## 1.2 Brunn–Minkowski 不等式, Prékopa–Leindler 不等式

Brunn–Minkowski 不等式の主張を述べる.

**定理 1.3** (Brunn–Minkowski 不等式; first form).  $0 < \lambda < 1$  とし,  $X, Y \in \mathbf{R}^n$  は有界可測集合で  $(1 - \lambda)X + \lambda Y$  も可測であるようなものとする. このとき

$$\mathcal{L}^n((1 - \lambda)X + \lambda Y) \geq \mathcal{L}^n(X)^{1-\lambda} \mathcal{L}^n(Y)^\lambda \quad (\text{BM1})$$

が成り立つ.

**定理 1.4** (Brunn–Minkowski 不等式; standard form).  $0 < \lambda < 1$  とし,  $X, Y \in \mathbf{R}^n$  は空でない有界可測集合で  $(1 - \lambda)X + \lambda Y$  も可測であるようなものとする. このとき不等式

$$\mathcal{L}^n((1 - \lambda)X + \lambda Y)^{1/n} \geq (1 - \lambda)\mathcal{L}^n(X)^{1/n} + \lambda\mathcal{L}^n(Y)^{1/n} \quad (\text{BM2})$$

が成り立つ.

**注意 1.5.**  $X, Y$  が可測であっても  $X + Y$  が可測であるとは限らない ([S],[ES] を見よ).

Brunn–Minkowski 不等式と関係の深い不等式に Prékopa–Leindler 不等式がある:

**定理 1.6** (Prékopa–Leindler 不等式).  $0 < \lambda < 1$  とし,  $f, g, h: \mathbf{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  を非負値可積分関数で

$$h((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq f(x)^{1-\lambda} g(y)^\lambda \quad (\forall x, y \in \mathbf{R}^n)$$

を満たすものとする。このとき

$$\int_{\mathbf{R}^n} h \, dx \geq \left( \int_{\mathbf{R}^n} f \, dx \right)^{1-\lambda} \left( \int_{\mathbf{R}^n} g \, dx \right)^{\lambda} \quad (\text{PL})$$

が成り立つ。

### 1.3 定理 1.3, 1.4, 1.6 の証明

不等式 (BM1), (BM2), (PL) を証明しよう。まずは  $n = 1$  から。

**補題 1.7.** (BM2) は  $n = 1$  のとき正しい。

*Proof.* Lebesgue 測度の正則性から  $X, Y$  はコンパクトであるとしてよい。このとき  $X + Y$  もコンパクトである。必要なら平行移動して

$$X \subset (-\infty, 0], \quad Y \subset [0, \infty) \quad \text{and} \quad X \cap Y = \{0\}$$

としてよく、よって  $X + Y \supset X \cup Y$  であるため

$$\mathcal{L}^1(X + Y) \geq \mathcal{L}^1(X \cup Y) = \mathcal{L}^1(X) + \mathcal{L}^1(Y)$$

を得る。 $0 < \lambda < 1$  に対して、 $X$  を  $(1 - \lambda)X$  で、 $Y$  を  $\lambda Y$  で置き換えることで所望の不等式を得る。  $\square$

**補題 1.8.**  $n \geq 1$  のとき (PL) は正しい。

*Proof.* 次元  $n$  に関する帰納法による。まず  $n = 1$  の場合を示す。

可積分関数  $f, g, h: \mathbf{R} \rightarrow [0, \infty)$  が

$$h((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq f(x)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda} \quad (\forall x, y \in \mathbf{R}) \quad (1.1)$$

を満たすと仮定する。適当な近似により  $f, g$  はコンパクト台を持つとしてよい。

(1.1) より、 $t \geq 0$  および  $x, y \in \mathbf{R}$  に対して

$$f(x) \geq t, \quad g(y) \geq t \implies h((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq t$$

つまり

$$\{h \geq t\} \supset (1 - \lambda)\{f \geq t\} + \lambda\{g \geq t\} \quad (\forall t \geq 0)$$

両辺を  $[0, \infty)$  上積分して (BM2) を適用すれば

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} h \, dx &= \int_0^\infty \mathcal{L}^1(\{h \geq t\}) \, dt \geq \int_0^\infty \mathcal{L}^1((1 - \lambda)\{f \geq t\} + \lambda\{g \geq t\}) \, dt \\ &\geq \int_0^\infty ((1 - \lambda)\mathcal{L}^1(\{f \geq t\}) + \lambda\mathcal{L}^1(\{g \geq t\})) \, dt \\ &= (1 - \lambda) \int_{\mathbf{R}} f \, dx + \lambda \int_{\mathbf{R}} g \, dx \\ &\geq \left( \int_{\mathbf{R}} f \, dx \right)^{1-\lambda} \left( \int_{\mathbf{R}} g \, dx \right)^{\lambda} \end{aligned}$$

となり  $n = 1$  のとき (PL) が示された.

次に  $n \geq 2$  の場合を帰納法で示す.  $s \in \mathbf{R}$  に対して

$$h_s(z) := h(z, s) \quad (\text{for } z \in \mathbf{R}^{n-1})$$

とおく.  $f_s, g_s$  も同様に定義する.

$a, b \in \mathbf{R}$  を固定し  $c = (1 - \lambda)a + \lambda b$  とおく. 仮定より

$$h_c((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq f_a(x)^{1-\lambda} g(y)^\lambda \quad (\forall x, y \in \mathbf{R}^{n-1})$$

が成り立つので,  $n - 1$  における帰納法の仮定から

$$\int_{\mathbf{R}^{n-1}} h_c dx \geq \left( \int_{\mathbf{R}^{n-1}} f_a dx \right)^{1-\lambda} \left( \int_{\mathbf{R}^{n-1}} g_b dx \right)^\lambda$$

が成り立つ. このことは,  $s \in \mathbf{R}$  に対して

$$H(s) := \int_{\mathbf{R}^{n-1}} h_s dx, \quad F(s) := \int_{\mathbf{R}^{n-1}} f_s dx, \quad G(s) := \int_{\mathbf{R}^{n-1}} g_s dx$$

とおくとき

$$H(\lambda a + (1 - \lambda)b) \geq F(a)^{1-\lambda} G(b)^\lambda \quad (\forall a, b \in \mathbf{R})$$

が成り立つことを示している. よって  $n = 1$  の場合の (PL) より

$$\int_{\mathbf{R}} H ds \geq \left( \int_{\mathbf{R}} F ds \right)^{1-\lambda} \left( \int_{\mathbf{R}} G ds \right)^\lambda$$

が成り立つ. よって  $n$  における (PL) が示された. □

**補題 1.9.**  $n \geq 1$  のとき, (PL) を認めれば (BM1) は正しい.

*Proof.*  $f = \mathbf{1}_X, g = \mathbf{1}_Y, h = \mathbf{1}_{(1-\lambda)X + \lambda Y}$  とおけばよい. □

**補題 1.10.** (BM1) を認めれば (BM2) は正しい.

*Proof.*  $X$  または  $Y$  が零集合なら自明なので,  $\mathcal{L}^n(X) > 0, \mathcal{L}^n(Y) > 0$  としてよい. 適当にスケーリングして  $\mathcal{L}^n(X + Y)^{1/n} \geq \mathcal{L}^n(X)^{1/n} + \mathcal{L}^n(Y)^{1/n}$  を示せばよい.

$$\lambda' := \frac{\mathcal{L}^n(Y)^{1/n}}{\mathcal{L}^n(X)^{1/n} + \mathcal{L}^n(Y)^{1/n}},$$

$$X' := \mathcal{L}^n(X)^{-1/n} X, \quad Y' := \mathcal{L}^n(Y)^{-1/n} Y$$

とおくと (BM1) より  $\mathcal{L}^n((1 - \lambda')X' + \lambda'Y') \geq 1$  を得る. 左辺を変形すると (BM2) を得る. □

## 2 BM の応用：等周不等式と Sobolev 不等式

Brunn–Minkowski 不等式 (BM2) には, 凸幾何学や幾何学的測度論をはじめとした広範な応用が知られているが, ここでは等周不等式と Sobolev 不等式の証明を紹介する.

## 2.1 等周不等式

$K \subset \mathbf{R}^n$  を凸体とする．なお，ここでは  $\mathbf{R}^n$  内のコンパクト凸集合で内部が空でないものを凸体と呼んでいる．このとき  $K$  の表面積の気分で

$$S(K) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(K + \varepsilon B) - \mathcal{L}^n(K)}{\varepsilon} \quad (2.1)$$

と定義する．なおここで  $B = B_1(0)$  は単位球である．

**注意 2.1.** • 混合体積に対する Minkowski の定理より， $\mathcal{L}^n(K + \varepsilon B)$  は  $\varepsilon$  に関する  $n$  次式となる．特に (2.1) 式の極限は収束する．

- 更に境界  $\partial K$  が十分滑らかならば ( $C^1$  級なら十分)， $S(K) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial K)$  が成り立つ．余面積公式 (coarea formula) による．

**定理 2.2** (凸体に対する等周不等式)． $K \subset \mathbf{R}^n$  が凸体ならば

$$\frac{\mathcal{L}^n(K)^{(n-1)/n}}{S(K)} \leq \frac{\mathcal{L}^n(B)^{(n-1)/n}}{S(B)} = n^{-1} \omega_n^{-1/n} \quad (\text{IP1})$$

が成り立つ．なお  $\omega_n = \mathcal{L}^n(B) = \pi^{n/2} / \Gamma(\frac{n}{2} + 1)$  とおいた． $S(B) = n\omega_n$  であることから右辺が上のように計算される．

*Proof.* まず， $\varepsilon = t/(1-t)$  とおくと  $S(K)$  の定義から

$$\begin{aligned} S(K) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n((1-t)K + tB) - (1-t)^n \mathcal{L}^n(K)}{(1-t)^{n-1}t} \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n((1-t)K + tB) - \mathcal{L}^n(K)}{(1-t)^{n-1}t} + \lim_{t \downarrow 0} \frac{(1 - (1-t)^n) \mathcal{L}^n(K)}{(1-t)^{n-1}t} \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n((1-t)K + tB) - \mathcal{L}^n(K)}{t} + n \mathcal{L}^n(K) \end{aligned}$$

である．そこで

$$f(t) = \mathcal{L}^n((1-t)K + tB)^{1/n} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

とおくと (BM2) より  $f$  は concave である．特に  $f'(0) \geq f(1) - f(0)$  が成り立つ．最初にやった計算より  $f'(0)$  を具体的に表示すると

$$f'(0) = \frac{\mathcal{L}^n(K)^{(1-n)/n}}{n} (S(K) - n \mathcal{L}^n(K)) \geq \mathcal{L}^n(B)^{1/n} - \mathcal{L}^n(K)^{1/n}$$

を得る．これを適切に変形すると所望の不等式を得る． □

**注意 2.3** (等号成立条件について)．等周不等式 (IP1) の等号成立条件について考える．

まず (BM2) の等号成立条件は， $X, Y$  が測度零の集合を除いて相似な凸体であることだと知られている．

このことを認めて，(IP1) において等号が成り立つと仮定すると，上の証明の記号において  $f'(0) = f(1) - f(0)$  が成り立つ． $f$  は concave なので，任意の  $t \in (0, 1]$  に対して

$$\frac{f(t) - f(0)}{t} = f(1) - f(0)$$

つまり BM の等号が成り立つ。よって  $K$  と  $B$  は相似である。

以上より, (IP1) で等号が成り立つのは  $K$  が球である場合に限る。

**注意 2.4** ( $C^1$  級境界を持つコンパクト領域に対する等周不等式).  $K \subset \mathbf{R}^n$  がコンパクト領域で境界  $\partial K$  が  $C^1$  級ならば, 極限

$$S(K) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(K + \varepsilon B) - \mathcal{L}^n(K)}{\varepsilon}$$

が存在し,  $S(K) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial K)$  が成り立つ。余面積公式による (例えば Evans–Gariepy の本 [EG] を参照).  
したがって同様の議論により

$$\frac{\mathcal{L}^n(K)^{(n-1)/n}}{\mathcal{H}^{n-1}(\partial K)} \leq \frac{\mathcal{L}^n(B)^{(n-1)/n}}{\mathcal{H}^{n-1}(\partial B)} = n^{-1} \omega_n^{-1/n} \quad (\text{IP2})$$

が成り立つ。

## 2.2 Sobolev 不等式

等周不等式から Sobolev 不等式が従う。

**定理 2.5** (Sobolev 不等式).  $f \in W^{1,1}(\mathbf{R}^n)$  ならば

$$\left( \int_{\mathbf{R}^n} |f|^{n/(n-1)} dx \right)^{(n-1)/n} \leq n^{-1} \omega_n^{-1/n} \int_{\mathbf{R}^n} |Df| dx$$

が成り立つ。

*Proof.*  $f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ ,  $f \geq 0$  としてよい。layer-cake representation より

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} f^{n/(n-1)} dx &= \frac{n}{n-1} \int_0^\infty t^{n/(n-1)} \mathcal{L}^n(\{f \geq t\}) dt \\ &= \frac{n}{n-1} \int_0^\infty \mathcal{L}^n(\{f \geq t\})^{(n-1)/n} \left[ t \mathcal{L}^n(\{f \geq t\})^{(n-1)/n} \right]^{1/(n-1)} dt \\ &\leq \frac{n}{n-1} \int_0^\infty \mathcal{L}^n(\{f \geq t\})^{(n-1)/n} \left[ \int_0^t \mathcal{L}^n(\{f \geq s\})^{(n-1)/n} ds \right]^{1/(n-1)} dt \end{aligned}$$

である。ここで  $F(t) = \int_0^t \mathcal{L}^n(\{f \geq s\})^{(n-1)/n} ds$  とおく。Sard の定理よりほとんどすべての  $t > 0$  に対して  $\{f = t\}$  は  $C^1$  曲面であることに注意して (IP2) を用いると

$$\begin{aligned} \left( \int_{\mathbf{R}^n} f^{n/(n-1)} dx \right)^{(n-1)/n} &\leq \left[ \frac{n}{n-1} \int_0^\infty F'(t) F(t)^{1/(n-1)} dt \right]^{(n-1)/n} \\ &= F(\infty) = \int_0^\infty \mathcal{L}^n(\{f \geq t\})^{(n-1)/n} dt \\ &\leq \int_0^\infty n^{-1} \omega_n^{-1/n} \mathcal{H}^{n-1}(\{f = t\}) dt \quad (\text{by (IP2)}) \\ &= n^{-1} \omega_n^{-1/n} \int_{\mathbf{R}^n} |Df| dx \end{aligned}$$

を得る。なお最後の変形で余面積公式 ([EG, Theorem 3.13]) を用いた。 □

### 3 関数の $p$ -concavity と Borell–Brascamp–Lieb 不等式

本節では Prékopa–Leidler 不等式 (PL) の拡張である Borell–Brascamp–Lieb 不等式を紹介する.

#### 3.1 $p$ -concave 関数

**定義 3.1.**  $-\infty \leq p \leq \infty$ ,  $0 < \lambda < 1$ ,  $a, b \geq 0$  に対して非負実数  $M_p(a, b; \lambda)$  を

$$M_p(a, b; \lambda) := \begin{cases} 0 & (\forall p \in [-\infty, \infty]) & \text{if } ab = 0, \\ \begin{cases} [(1-\lambda)a^p + \lambda b^p]^{1/p} & (p \in \mathbf{R} \setminus \{0\}) \\ a^{1-\lambda} b^\lambda & (p = 0) \\ \max\{a, b\} & (p = \infty) \\ \min\{a, b\} & (p = -\infty) \end{cases} & \text{if } ab > 0 \end{cases}$$

と定義する.

**定義 3.2.** 非負値関数  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  が  $p$ -concave であるとは

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq M_p(f(x), f(y); \lambda) \quad (\forall x, y \in \mathbf{R}^n, \lambda \in (0, 1))$$

が成り立つことをいう.

**注意 3.3.**  $f$  が  $p$ -concave であることと, 集合  $P_f := \{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) > 0\}$  が凸でありかつ

$$\begin{cases} f \text{ は } P_f \text{ 上定数} & (\text{if } p = \infty) \\ f^p \text{ は } P_f \text{ 上 concave} & (\text{if } p \in (0, \infty)) \\ \log f \text{ は } P_f \text{ 上 concave} & (\text{if } p = 0) \\ f^p \text{ は } P_f \text{ 上 concave} & (\text{if } p \in (-\infty, 0)) \\ \text{任意の } \alpha > 0 \text{ に対して集合 } \{f > \alpha\} \text{ は凸} & (\text{if } p = -\infty) \end{cases}$$

であることは同値である.

- 1-concave を単に concave といい,  $-1$ -concave のことを convex という. 零等位集合  $\{f = 0\}$  を無視しているので通常の concavity とは若干定義が異なることに注意せよ.
- 0-concave のことを log-concave という.  $-\infty$ -concave のことを quasi-concave という.
- Jensen の不等式より

$$-\infty \leq p < q \leq \infty \implies M_p(a, b; \lambda) \leq M_q(a, b; \lambda)$$

である.

- とくに,  $p < q$  のとき,  $q$ -concave ならば  $p$ -concave である.

#### 3.2 Borell–Brascamp–Lieb 不等式

次の初等的な不等式から始めよう.

**補題 3.4.**  $0 < \lambda < 1$ ,  $p, q \in [-\infty, \infty]$ ,  $p + q \geq 0$  とする. このとき  $a, b, c, d \geq 0$  に対して

$$M_p(a, b; \lambda) M_q(c, d; \lambda) \geq M_s(ac, bd; \lambda)$$

が成り立つ. ここで

$$s = \begin{cases} pq/(p+q) & (\text{if } p \text{ or } q \neq 0) \\ 0 & (\text{if } p = q = 0) \end{cases}$$

である.

*Proof.* 次の一般化された Hölder の不等式:  $0 < \lambda < 1$ ,  $p_1, p_2, r > 0$ ,  $p_1^{-1} + p_2^{-1} = 1$  と  $a, b, c, d \geq 0$  に対して

$$M_r(ac, bd; \lambda) \leq M_{rp_1}(a, b; \lambda) M_{rp_2}(c, d; \lambda)$$

が成り立つ ([HLP] を見よ). 更に  $r < 0$  ならば反対向きの不等号が成り立つ. これを用いよ.  $\square$

**定理 3.5** (Borell–Brascamp–Lieb 不等式).  $0 < \lambda < 1$ ,  $-1/n \leq p \leq \infty$  とする. 非負可測関数  $f, g, h: \mathbf{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  が

$$h((1-\lambda)x + \lambda y) \geq M_p(f(x), g(y); \lambda) \quad (\forall x, y \in \mathbf{R}^n)$$

を満たしていると仮定する. このとき不等式

$$\|h\|_1 \geq M_{p/(1+np)}(\|f\|_1, \|g\|_1; \lambda) \quad (\text{BBL})$$

が成り立つ. ただし,  $p = -1/n$  のとき  $p/(1+np) = -\infty$ ,  $p = \pm\infty$  のとき  $p/(1+np) = 1/n$  と解釈する.

**注意 3.6.**  $p = 0$  とすれば (PL) が得られる.

以下定理 3.5 を証明する. まずは  $n = 1$  の場合に関する次の補題を示す.

**補題 3.7.**  $f, g, h: \mathbf{R} \rightarrow [0, \infty]$  を非負値可測関数,  $0 < \lambda < 1$  が

$$h((1-\lambda)x + \lambda y) \geq \min\{f(x), f(y)\} (= M_{-\infty}(f(x), f(y); \lambda)) \quad (\forall x, y \in \mathbf{R}) \quad (3.1)$$

を満たし, 更に  $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty =: m$  と仮定する. このとき

$$\|h\|_1 \geq (1-\lambda)\|f\|_1 + \lambda\|g\|_1$$

が成り立つ.

*Proof.*  $f, g$  はコンパクト台を持つと仮定してよい. 仮定より  $t \geq 0$  に対して包含  $\{h \geq t\} \supset (1-\lambda)\{f \geq t\} + \lambda\{g \geq t\}$  が成り立つので,  $0 < t < m$  に対して (BM2) より

$$\mathcal{L}^1(\{h \geq t\}) \geq (1-\lambda)\mathcal{L}^1(\{f \geq t\}) + \lambda\mathcal{L}^1(\{g \geq t\})$$

が成り立つ. 両辺を  $(0, m)$  上積分して所望の不等式を得る.  $\square$

*Proof of 定理 3.5.*  $n$  に関する帰納法による. まず  $n = 1$  の場合を考える.  $\|f\|_1, \|g\|_1 > 0$  かつ  $f, g$  は有界としてよい.

$$F(x) := \frac{f(x)}{\|f\|_\infty}, \quad G(x) := \frac{g(x)}{\|g\|_\infty}$$



とおく。仮定 (3.1) より

$$\begin{aligned} h((1-\lambda)x + \lambda y) &\geq M_p(\|f\|_\infty F(x), \|g\|_\infty G(y); \lambda) \\ &\geq M_p(\|f\|_\infty, \|g\|_\infty; \lambda) M_p(F(x), G(y); \theta) \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで  $\theta \in (0, 1)$  は

$$\theta = \begin{cases} \lambda \|g\|_\infty^p / ((1-\lambda)\|f\|_\infty^p + \lambda\|g\|_\infty^p) & (\text{if } p \neq 0, \infty) \\ \lambda & (\text{if } p = 0 \text{ or } \infty) \end{cases}$$

である。よって

$$h((1-\lambda)x + \lambda y) \geq M_p(\|f\|_\infty, \|g\|_\infty; \lambda) \min\{F(x), G(y)\}$$

が成り立つ。補題 3.7 より

$$\|h\|_1 \geq M_p(\|f\|_\infty, \|g\|_\infty; \lambda) M_1(\|F\|_1, \|G\|_1; \lambda) \geq M_{p/(1+p)}(\|f\|_1, \|g\|_1; \lambda)$$

を得る。なお最後の不等式で補題 3.4 を用いた。

$n \geq 1$  の場合は、補題 1.8 と同様に帰納法で示される。  $\square$

### 3.3 応用：熱方程式の解の concavity

(BBL) の応用先は多岐にわたる。例えば、確率・統計、幾何学的不等式、調和解析、偏微分方程式論 etc., とにかく膨大な結果がある。ここでは積分核の marginal で表される関数のべき凸性、およびその系として放物型偏微分方程式の解の concavity に関して議論する。

**系 3.8.** 非負値可積分関数  $K = K(x, y): \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  は  $\mathbf{R}^{m+n}$  上  $p$ -concave で  $p \geq -1/n$  とする。このとき

$$F(x) := \int_{\mathbf{R}^n} K(x, y) dy \quad (x \in \mathbf{R}^m)$$

で定まる関数  $F$  は  $\mathbf{R}^m$  上  $p/(1+np)$ -concave である。

*Proof.*  $x_0, x_1 \in \mathbf{R}^m$  を固定し、 $x_\lambda = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1$  とおき、 $i \in \{0, 1, \lambda\}$  に対して

$$k_i(y) := K(x_i, y) \quad (y \in \mathbf{R}^n)$$

とおく。仮定より

$$k_\lambda((1-\lambda)y_0 + \lambda y_1) \geq M_p(k_0(y_0), k_1(y_1); \lambda) \quad (\forall y_0, y_1 \in \mathbf{R}^n)$$

が成り立つ。よって (BBL) より

$$\|k_\lambda\|_1 \geq M_{p/(1+np)}(\|k_0\|_1, \|k_1\|_1; \lambda)$$

を得る。つまり

$$F((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1) \geq M_{p/(1+np)}(F(x_0), F(x_1); \lambda)$$

を得る。  $\square$

系 3.9.  $p_1, p_2$  は  $p_1 + p_2 \geq 0$  であり,

$$p := \begin{cases} p_1 p_2 / (p_1 + p_2) & (\text{if } p_1 \text{ or } p_2 = 0) \\ 0 & (\text{if } p_1 = p_2 = 0) \end{cases}$$

とおいたとき  $p \geq -1/n$  だと仮定する.

$i = 1, 2$  に対して非負値可積分関数  $f_i: \mathbf{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  は  $p_i$ -concave だとする. このとき  $f_1 * f_2$  は  $p/(1 + np)$ -concave である.

*Proof.*  $f(x, y) = f_1(x - y)f_2(y)$  ( $(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ ) は  $p$ -concave である. 実際

$$\begin{aligned} f((1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1, (1 - \lambda)y_0 + \lambda y_1) &= f_1((1 - \lambda)(x_0 - y_0) + \lambda(x_1 - y_1))f_2((1 - \lambda)y_0 + \lambda y_1) \\ &\geq M_{p_1}(f_1(x_0 - y_0), f_1(x_1 - y_1); \lambda)M_{p_2}(f_2(y_0), f_2(y_1); \lambda) \\ &\geq M_p(f(x_0, y_0), f(x_1, y_1); \lambda) \end{aligned}$$

である (補題 3.4 を用いた). 系 3.8 より結論が得られる.  $\square$

系 3.10. 非負値可積分関数  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  が log-concave ならば, 熱方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & (x, t) \in \mathbf{R}^n \times (0, \infty) \\ u(\cdot, 0) = f & x \in \mathbf{R}^n \end{cases}$$

の解  $u$  について,  $u(\cdot, t)$  は任意の  $t > 0$  に対して log-concave である.

注意 3.11. 系 3.10 の証明は, 熱方程式の解が Gauss 核との畳み込みで書けるという全空間特有の性質に依存するものであり, この方法をそのまま有界領域などに適用することはできない.

Korevaar [K] は, concavity maximum principle と呼ばれる新しい手法を確立することで Dirichlet 境界条件下において同様の log-concavity 保存の結果を得た.

注意 3.12. Brascamp–Lieb [BL] は, 他にも (PL) (を少しだけ改良したもの) を巧みに用いることで, ポテンシャル  $V$  が convex であるときに Dirichlet 境界条件を課した  $\partial_t - \frac{1}{2}\Delta + V$  の基本解が log-concave であることを示した.

## 4 BBL 不等式に対する PDE 的アプローチ

系 3.10 は, 熱方程式の解の log-concavity が保存されるということを (PL) を用いて示したものである.

Ishige–Liu–Salani [ILS] は, 逆に熱方程式の解の性質を用いて (PL) を示した. ここでは, その証明の概略を紹介する.

彼らは, 放物型偏微分方程式の解析を駆使して系 3.10 の拡張である次の定理を証明した.

定理 4.1.  $0 < \lambda < 1$  とする.  $i \in \{0, 1, \lambda\}$  に対して  $f_i \in L^1(\mathbf{R}^n) \cap L^\infty(\mathbf{R}^n) \cap C(\mathbf{R}^n)$ ,  $f_i \geq 0$  であり,

$$f_\lambda((1 - \lambda)y + \lambda z) \geq M_0(f_0(y), f_1(z); \lambda) (= f_0(y)^{1-\lambda} f_1(z)^\lambda) \quad (\forall y, z \in \mathbf{R}^n)$$

だと仮定する.  $i \in \{0, 1, \lambda\}$  に対して  $u_i$  を

$$\begin{cases} \partial_t u_i - \Delta u_i = 0 & (x, t) \in \mathbf{R}^n \times (0, \infty) \\ u_i(\cdot, 0) = f_i & x \in \mathbf{R}^n \end{cases}$$

の解とする．このとき任意の  $t > 0$  に対して

$$u_\lambda((1-\lambda)y + \lambda z) \geq M_0(u_0(t, y), u_1(t, z); \lambda) (= u_0(y, t)^{1-\lambda} u_1(z, t)^\lambda) \quad (\forall y, z \in \mathbf{R}^n)$$

が成り立つ．

証明の概略．定理 4.1 の証明の概略は次の通り (筆者が詳細を理解できたら完全な証明に書き換えるつもりである) :  $u_0$  と  $u_1$  の空間に関する Minkowski convolution を

$$\bar{u}_\lambda(x, t) := \sup \{ u_0(y, t)^{1-\lambda} u_1(z, t)^\lambda \mid y, z \in \mathbf{R}^n \text{ with } (1-\lambda)y + \lambda z = x \}$$

で定義する．この  $\bar{u}_\lambda$  が熱方程式の粘性劣解であることを示す (このステップが本質的である)．すると粘性解に対する比較原理から  $\bar{u}_\lambda \leq u_\lambda$  が従う．これが求める結果である．  $\square$

さて,  $f_1, f_2, f_\lambda$  を定理 4.1 の仮定を満たすものとする．Lebesgue の優収束定理から

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (4\pi t)^{n/2} u_i(x, t) = \int_{\mathbf{R}^n} f_i(y) dy \quad (\forall x \in \mathbf{R}^n, i \in \{0, 1, \lambda\})$$

である．定理 4.1 より勝手な  $x \in \mathbf{R}^n$  に対して

$$(4\pi t)^{n/2} u_\lambda(x, t) \geq [(4\pi t)^{n/2} u_0(x, t)]^{1-\lambda} [(4\pi t)^{n/2} u_1(x, t)]^\lambda$$

が成り立つので,  $t \rightarrow \infty$  として

$$\int_{\mathbf{R}^n} f_\lambda dx \geq \left( \int_{\mathbf{R}^n} f_0 dx \right)^{1-\lambda} \left( \int_{\mathbf{R}^n} f_1 dx \right)^\lambda$$

を得る．これは (PL) に他ならない．

なお, 定理 4.1 には初期値に連続かつ有界な関数という余分な仮定が付いてはいるものの, 適当な近似を用いた議論により完全に定理 1.6 が復元することができる．

**注意 4.2.** 上では簡単のため (PL) ( $\alpha = 0$  の場合) のみを扱ったが, [ILS] では同様の議論により  $-1/2 < \alpha < 0$  に対する結果を得ている．その際には熱方程式の代わりに非線形放物型方程式

$$\partial_t u - \frac{\Delta(u^m)}{m} = 0, \quad \text{where } m = 2\alpha + 1 \quad (4.1)$$

を考え, 定理 4.1 と同様の主張を証明することで  $\alpha$  に対する (BBL) を導出している．

なお, 方程式 (4.1) は  $0 < m < 1$  のとき fast diffusion 方程式というが, 有限時間で解が消滅する extinction と呼ばれる現象が起こるため  $m = 1$  (つまり  $\alpha = 0$ ) の場合と比べてより繊細な解析が必要となる．

## 参考文献

- [BCCT08] J. Bennett, A. Carbery, M. Christ, and T. Tao, *The Brascamp-Lieb inequalities: finiteness, structure and extremals*, Geom. Funct. Anal. **17** (2008), no. 5, 1343–1415, DOI 10.1007/s00039-007-0619-6. MR2377493
- [BL76] H. J. Brascamp and E. H. Lieb, *On extensions of the Brunn-Minkowski and Prékopa-Leindler theorems, including inequalities for log concave functions, and with an application to the diffusion equation*, J. Functional Analysis **22** (1976), no. 4, 366–389, DOI 10.1016/0022-1236(76)90004-5. MR0450480
- [ES70] P. Erdős and A. H. Stone, *On the sum of two Borel sets*, Proc. Amer. Math. Soc. **25** (1970), 304–306, DOI 10.2307/2037209. MR0260958

- [EG25] L. C. Evans and R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, 2nd ed., Textbooks in Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 2025. MR4907811
- [Gar02] R. J. Gardner, *The Brunn–Minkowski inequality*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **39** (2002), no. 3, 355–405, DOI 10.1090/S0273-0979-02-00941-2. MR1898210
- [HLP88] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1988. Reprint of the 1952 edition. MR0944909
- [ILS25] K. Ishige, Q. Liu, and P. Salani, *A parabolic PDE-based approach to Borell–Brascamp–Lieb inequality*, Math. Ann. **392** (2025), no. 4, 4891–4937, DOI 10.1007/s00208-025-03206-6. MR4958493
- [Kor83] N. J. Korevaar, *Convex solutions to nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems*, Indiana Univ. Math. J. **32** (1983), no. 4, 603–614, DOI 10.1512/iumj.1983.32.32042. MR0703287
- [Sie20] W. F. Sierpiński, *Sur la question de la mesurabilité de la base de M. Hamel*, Fund. Math. **1** (1920), 105–111.