

# 東工大院試 解答集

un cinglé

2024 年 9 月 4 日

## 概要

本 PDF は、東工大数学系の大学院入試の解答集である。当試験は午前の部と午後の部に分かれており、それぞれ基礎科目と専門科目に位置づけられる。本解答集は午前の問題と、一部午後の問題（主に解析系）に対する、主に筆者が作成した答案をまとめたものであるが、いくつかの問題については友人が教えてくれたより良い解答を採用している。協力してくれた諸氏はありがとう。

問題のリンクは次である：

<https://www.math.titech.ac.jp/top/~jimu/Graduate/old-exam/innsi.html>

まだ解けていない問題：

- 午前, 2022[3](3),
- 午前, 2023[3](4),
- 午後, 2021[6](3),

## 目次

1	午前	3
1.1	2012 年度	3
1.2	2013 年度	4
1.3	2014 年度	6
1.4	2015 年度	8
1.5	2016 年度	10
1.6	2017 年度	12
1.7	2018 年度	13
1.8	2019 年度	15
1.9	2020 年度	17
1.10	2021 年度	19
1.11	2022 年度	20
1.12	2023 年度	21
1.13	2024 年度	23
1.14	2025 年度	26
2	午後	29
2.1	2014 年度	29
2.2	2015 年度	30

2.3	2016 年度 . . . . .	32
2.4	2017 年度 . . . . .	33
2.5	2018 年度 . . . . .	35
2.6	2019 年度 . . . . .	36
2.7	2020 年度 . . . . .	39
2.8	2021 年度 . . . . .	41
2.9	2022 年度 . . . . .	42
2.10	2023 年度 . . . . .	45
2.11	2024 年度 . . . . .	48
2.12	2025 年度 . . . . .	51
3	おまけ A：個人的未解決問題リスト	54

# 1 午前

## 1.1 2012 年度

[1]

簡単すぎるため省略.

[2]

(1)  $a > 0$  を任意に固定する (今は  $a = 1$  でよい).  $n \in \mathbb{N}_0$  に対して  $x_n$  を,  $[an, a(n+1)]$  における  $f$  の最小化元とする. すなわち

$$an \leq x_n \leq a(n+1) \quad \text{and} \quad f(x_n) = \min_{[an, a(n+1)]} f$$

となる  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  を取る. 今

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{an}^{a(n+1)} f(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx < \infty$$

なので, とくに

$$f(x_n) \leq \frac{1}{a} \int_{an}^{a(n+1)} f(x) dx \rightarrow 0 \quad (\text{as } n \rightarrow \infty)$$

であるから  $f(x_n) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) となる.  $x_n \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ) であることはよい.

(2)  $f(x) = x/(1+x^6 \sin^2 x)$  は (\*) を満たすが有界ですらない.

(3)  $\varepsilon > 0$  を任意に取る.  $f$  は一様連続であるから,  $\delta > 0$  があり, 任意の  $x, y \in [0, \infty)$  に対して次が成り立つ:

$$|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$$

ここで, (1) の解答において  $a = \delta$  としたときの  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  を取る.  $f(x_n) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) であるから, 十分大きな  $N \in \mathbb{N}$  があり, 任意の  $n \geq N$  に対して  $f(x_n) < \varepsilon/2$  となる. したがって, 任意の  $x \geq N\delta$  に対して  $n = \lfloor x/\delta \rfloor$  を  $x/\delta$  の整数部分とすると

$$f(x) \leq f(x_n) + |f(x) - f(x_n)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

を得る ( $x \in [\delta n, \delta(n+1)]$  より  $|x - x_n| \leq \delta$  に注意せよ).

[3]

(1)  $\emptyset, X \in \mathcal{O}$  であることはよい.

$A, B \in \mathcal{O}$  だとする. もし  $A \subset \mathbb{N}$  または  $B \subset \mathbb{N}$  ならば  $A \cap B \subset \mathbb{N}$  より  $A \cap B \in \mathcal{O}$  である. 一方, もし  $X - A$  と  $X - B$  が  $\mathbb{N}$  の有限部分集合ならば,  $X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B)$  もそうである. よって  $A \cap B \in \mathcal{O}$ . 以上よりいずれの場合も  $A \cap B \in \mathcal{O}$  は成り立つ.

$\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  を  $\mathcal{O}$  の元の族とする. もし任意の  $\lambda \in \Lambda$  に対して  $A_\lambda \subset \mathbb{N}$  ならば,  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \subset \mathbb{N}$  より  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathcal{O}$  である. 一方, ある  $\lambda_0 \in \Lambda$  について  $X - A_{\lambda_0}$  が  $\mathbb{N}$  の有限部分集合ならば,  $X - \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \subset X - A_{\lambda_0}$  もそうである. よってこの場合も  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathcal{O}$  が示された.

(2)  $x, y \in X$  を相異なる元とする. このとき最初から  $x < y$  と仮定してもよい. もし  $0 = x < y$  ならば  $A = X - \{y\}$ ,  $B = \{y\}$  が  $x$  と  $y$  を分離する開集合たちである. もし  $0 < x < y$  ならば  $A = \{x\}$ ,  $B = \{y\}$  でよい.

次に  $C, D \subset X$  は閉集合で  $C \cap D = \emptyset$  だとする. このとき,  $C \subset \{0\}$  であるか,  $C$  は  $\mathbb{N}$  の有限部分集合である.  $D$  についても同様である. もし  $C \subset \{0\}$  ならば,  $D \subset \mathbb{N}$  かつ  $D$  は有限集合だとしてよい. このときは  $A = X - D$ ,  $B = D$  が  $C, D$  を分離する. 一方, もし  $C, D \subset \mathbb{N}$  らが有限部分集合ならば,  $A = C$ ,  $B = D$  とおけばよい.

(3) 答えははい.  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  を  $X$  の開被覆だとせよ. このとき  $\lambda_0 \in \Lambda$  で  $0 \in A_{\lambda_0}$  となるものが存在する. ここで  $X - A_{\lambda_0}$  は  $\mathbb{N}$  の有限部分集合であることに注意する. 各  $x \in X - A_{\lambda_0}$  に対して  $\lambda_x \in \Lambda$  があり  $x \in A_{\lambda_x}$  となるので, これら  $\{A_{\lambda_x}\}_{x \in \{0\} \cup (X - A_{\lambda_0})}$  が有限部分開被覆を与える.

(4) 丁寧な誘導をありがとう.  $f: X \rightarrow Y$  を  $f(0) = 0$ ,  $f(n) = 1/n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) により定める.  $f$  は連続であることを示すが, それには  $\mathbb{R}$  の开区間  $I = (a, b)$  について  $f^{-1}(I \cap Y) \in \mathcal{O}$  であることを示せばよい. もし  $0 < a < b$  ならば  $f^{-1}(I \cap Y) = \{n \in \mathbb{N} \mid 1/b < n < 1/a\} \in \mathcal{O}$  である. 一方,  $a \leq 0 < b$  ならば  $f^{-1}(I \cap Y) = \{0\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n > 1/b\} \in \mathcal{O}$  となる.

$f$  はコンパクト空間から Hausdorff 空間への連続全単射であるから同相である.

## 1.2 2013 年度

[1]

答えは  $\pi^2/8a$ . 極座標に変換する. つまり

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta; \quad (r, \theta, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$$

とおく. すると

$$\begin{aligned} \iiint_D \frac{dx dy dz}{(a^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2} &= \int_0^\infty dr \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \frac{r^2 \sin \theta}{(a^2 + r^2)^2} \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \frac{r^2}{(a^2 + r^2)^2} dr \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{a^2 \tan^2 x}{a^4 (1 + \tan^2 x)^2} \frac{a}{\cos^2 x} dx \quad (\text{put } r = a \tan x) \\ &= \frac{\pi}{2a} \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx \\ &= \frac{\pi}{2a} \left[ \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi^2}{8a} \end{aligned}$$

と計算される.

[2]

(1)

$$\min_I f \leq \mu_1 := \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(x) dx \leq \max_I f$$

であるから, 中間値の定理より  $f(b) = \mu_1$  となる  $b \in I$  が存在する.

(2)

$$\min_I f = \left( \frac{3}{2a^3} \min_I f \right) \int_{-a}^a x^2 dx \leq \mu_2 := \frac{3}{2a^3} \int_{-a}^a x^2 f(x) dx \leq \left( \frac{3}{2a^3} \max_I f \right) \int_{-a}^a x^2 dx = \max_I f$$

であるから、以下同文.

(3) 部分積分より

$$\begin{aligned}\mu_3 &:= \frac{3}{2a^3} \int_{-a}^a x f(x) dx \\ &= \frac{3(f(a) - f(-a))}{4a} - \frac{3}{4a^3} \int_{-a}^a x^2 f'(x) dx \\ &= \frac{3}{4a} \int_{-a}^a f'(x) dx - \frac{3}{4a^3} \int_{-a}^a x^2 f'(x) dx \\ &= \frac{3}{4a^3} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) f'(x) dx\end{aligned}$$

であり、したがって

$$\min_I f' = \left( \min_I f' \right) \frac{3}{4a^3} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx \leq \mu_3 \leq \left( \max_I f' \right) \frac{3}{4a^3} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \max_I f'$$

であるから、以下同文.

[3]

(1)  $(\varphi(\mathbf{0}), \varphi(\mathbf{0})) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$  より  $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  を得る.

(2)  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  とする. このとき  $\varphi(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = a\varphi(\mathbf{x}) + b\varphi(\mathbf{y})$  を示せばよいが, 内積の双線形性を用いて分解し, さらにわちゃわちゃすると

$$\begin{aligned} &(\varphi(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) - a\varphi(\mathbf{x}) - b\varphi(\mathbf{y}), \varphi(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) - a\varphi(\mathbf{x}) - b\varphi(\mathbf{y})) \\ &= (\varphi(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}), \varphi(a\mathbf{x} + b\mathbf{y})) - a(\varphi(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}), \varphi(\mathbf{x})) - b(\varphi(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}), \varphi(\mathbf{y})) \\ &\quad - a(\varphi(\mathbf{x}), \varphi(a\mathbf{x} + b\mathbf{y})) + a^2(\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x})) + ab(\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y})) \\ &\quad - b(\varphi(\mathbf{y}), \varphi(a\mathbf{x} + b\mathbf{y})) + ab(\varphi(\mathbf{y}), \varphi(\mathbf{x})) + b^2(\varphi(\mathbf{y}), \varphi(\mathbf{y})) \\ &= (a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) - a(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{x}) - b(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{y}) \\ &\quad - a(\mathbf{x}, a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) + a^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + ab(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &\quad - b(\mathbf{y}, a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) + ab(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + b^2(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となることから従う.

(3)  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  を  $\mathbb{R}^n$  の標準基底とする.  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  は線形写像だから行列  $A = [\varphi(\mathbf{e}_1) \ \cdots \ \varphi(\mathbf{e}_n)]$  により  $\varphi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$  と表される. 仮定より  $\varphi(\mathbf{e}_1), \dots, \varphi(\mathbf{e}_n)$  は  $\mathbb{R}^n$  の正規直交系を与えており, したがって  $A$  は直交行列である.

[4]

(1) 略.

(2) 行列  $\begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix}$  を基本変形してなんやかんややると  $X + Y$ ;  $X \cap Y$  の基底としてそれぞれ  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ;  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$  が取れることがわかる.

[5]

(1)  $(X, d)$  は,  $n = 1$  のとき不連結,  $n \geq 2$  のとき連結.

(2)  $(X, d)$  の有界閉集合  $B = \{\mathbf{p} \in X \mid |\mathbf{p}| \leq 1\}$  はコンパクトではない。実際,

$$B_n = \{\mathbf{p} \in X \mid 1/n < |\mathbf{p}|\}$$

で定まる  $A$  の開被覆  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は, 有限部分被覆を持たない。

(3) はい。  $X$  は完備距離空間  $\mathbb{R} \times S^{n-1}$  に同相である。ここで  $S^{n-1}$  は  $\mathbb{R}^n$  内の単位  $(n-1)$ -球面。実際に

$$X \ni \mathbf{p} \mapsto (\log |\mathbf{p}|, \mathbf{p}/|\mathbf{p}|) \in \mathbb{R} \times S^{n-1}$$

が同相写像である。

■余談 ある完備距離空間と同相となるような位相空間をポーランド空間という。例えば, ポーランド空間の  $G_\delta$  集合はポーランド空間であることが知られている。とくに無理数全体の集合に  $\mathbb{R}$  の相対位相を入れるとポーランド空間になる。

### 1.3 2014 年度

[1]

答えは  $\pi/12$ . 円柱座標

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad \zeta = z; \quad (r, \theta, \zeta) \in [0, \infty) \times [0, \pi/2] \times [0, \infty)$$

を用いよ。

[2]

(1) 答えは  $p \leq 3$  で,  $p < 3$  のとき  $f(x) = 0$ ;  $p = 3$  のとき  $f(x) = \begin{cases} 0 & (\text{if } x = 0) \\ x^{-2} & (\text{if } 0 < x \leq 1) \end{cases}$  である。

(2) 答えは  $p < 1$ .  $p = 3$  のときは明らかに  $f_n$  は一様収束しない (連続関数の一様収束極限が連続であることを思い出せばよい). そこで  $p < 3$  だとして。

$$f'_n(x) = \frac{n^p(1 - 2n^3x^3)}{(1 + n^3x^3)^2}$$

であり, 増減を考えると  $f_n(x)$  は  $x = 2^{-1/3}n^{-1}$  で最大値をとることがわかる。よって

$$\sup_{[0,1]} |f_n| = f_n(2^{-1/3}n^{-1}) = \frac{2^{2/3} \cdot n^{p-1}}{3}$$

である。よって  $f_n$  が一様に  $f = 0$  に収束するのは  $p < 1$  のときに限る。

(3) 答えは  $p \leq 2$ . 変数変換  $y = nx$  により

$$\int_0^1 f_n(x) dx = n^{p-2} \int_0^n \frac{y}{1+y^3} dy$$

だが,

$$I_n := \int_0^n \frac{y}{1+y^3} dy \leq \int_0^1 y dy + \int_1^n \frac{1}{y^2} dy \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{n} \leq \frac{3}{2} < \infty$$

は収束するので  $n^{p-2}I_n$  は  $p \leq 2$  のときに限って収束する。

[3]

(1) 例えば

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2)  $(a+d)^2$ .

(3) 16.

[4]

(1)  $F$  はスケール不変である. つまり  $F(k\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})$  ( $\forall k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ ). とくに  $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}/|\mathbf{x}|)$ .

(2)  $F$  の連続性より,  $F$  の  $S^2$  への制限は最大値・最小値を持つが, (1) よりこれらは  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$  全域における  $F$  の最大値・最小値を与える.

(3) 仮定より  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  は一次独立. よって  $\det P = \det \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{a} \times \mathbf{b} \end{bmatrix} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 \neq 0$  なので  $P$  は正則である. さて,  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  が  $A$  の固有ベクトルであることを示そう.  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  はそれぞれ, 拘束条件  $|\mathbf{x}|^2 = 1$  のもとでの

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j$$

の最大化・最小化元である. ここで  $A = (a_{ij})_{i,j}$ ,  $\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3)$  とおいた. Lagrange の未定乗数法より,  $\mathbf{x} = \mathbf{a}, \mathbf{b}$  に対して

$$\sum_j a_{ij}x_j - 2\lambda x_i = 0 \quad (\text{for } i = 1, 2, 3)$$

が成り立つ. ここで  $\lambda$  は未定定数を表す. これは  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  が  $A$  の固有ベクトルであることを示している. 最後に  $\mathbf{c}$  が  $A$  の固有ベクトルであることを示す.  $A$  は対称行列であり,  $\mathbf{a}$  は  $A$  の固有ベクトルなので固有値を  $\lambda$  として

$$\langle A\mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{c}, A\mathbf{a} \rangle = \lambda \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle = 0$$

が成り立つ. 同様に  $\langle A\mathbf{c}, \mathbf{b} \rangle = 0$  が成り立つので,  $A\mathbf{c}$  は  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  に直交するベクトルである. よって  $A\mathbf{c}$  は  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$  の定数倍になるしかない.

以上より  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  が  $A$  の固有ベクトルからなる  $\mathbb{R}^3$  の基底をなすことが示された.

[5]

(1) はい.  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq b$  とする. 最初から  $a < b$  としてよい. このとき  $[a, b)$  と  $[b, b+1)$  は  $a$  と  $b$  を分離する開集合である.

(2) いいえ.  $U := (-\infty, 0) = \bigcup_{n \geq 0} [-n, 0) \in \mathcal{O}$  および  $V := [0, \infty) = \bigcup_{n \geq 0} [0, n) \in \mathcal{O}$  は空でなく,  $U \cup V = \mathbb{R}$ ,  $U \cap V = \emptyset$ .

(3) いいえ.  $[0, 1] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, 1 - 1/2n) \cup [1, 2)$  は有限部分被覆を持たない.

## 1.4 2015 年度

[1]

(1) 答えは  $\alpha < -1$ . 極座標に変換すると

$$2\pi \int_0^\infty (1+r^2)^\alpha r \, dr$$

の収束・発散を見ればよい.

(2)  $M = \sup_n |a_n| < \infty$  とおく.  $\varepsilon > 0$  とせよ.  $\lim_n a_n = a$  より, 十分大きい  $N \in \mathbb{N}$  があり, 任意の  $n \geq N$  に対して  $|a - a_n| \leq \varepsilon$  が成り立つ. よって  $n \geq N$  ならば

$$\left| a - \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right| \leq \frac{|a - a_1| + \cdots + |a - a_n|}{n} \leq \frac{N(|a| + M)}{n} + \frac{(n - N)\varepsilon}{n}$$

よって

$$\limsup_n \left| a - \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right| \leq \limsup_n \left( \frac{N(|a| + M)}{n} + \frac{(n - N)\varepsilon}{n} \right) = \varepsilon$$

となる.  $\varepsilon > 0$  は任意なので  $\lim_n \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = a$  を得る.

[2]

(1)  $1 > 0$  に対して  $M > 0$  があり, 任意の  $|x| \geq M$  に対して  $|f(x)| \leq 1$  となる. よって

$$\sup_{\mathbb{R}} |f| \leq 1 + \sup_{[-M, M]} |f| < \infty$$

である.

(2)  $\varepsilon > 0$  とせよ. 仮定より,  $M > 0$  があり, 任意の  $|x| \geq M$  に対して  $|f(x)| \leq \varepsilon/3$  となる.  $f$  は有界閉区間  $[-M, M]$  上一様連続であるから,  $0 < \delta < 1$  があり, 任意の  $x, y \in [-M, M]$  に対して

$$|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/3$$

が成り立つ.  $x, y \in \mathbb{R}$  が  $|x - y| \leq \delta$  を満たすと仮定しよう.

- $x, y \in [-M, M]$  ならば  $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/3$  である.
- $x, y \notin [-M, M]$  ならば  $|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq \varepsilon$  である.
- $x > M$  かつ  $y \in [-M, M]$  ならば,  $|y - M| \leq |x - y| \leq \delta$  より  $|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(M)| + |f(M) - f(y)| \leq \varepsilon$  である. 同様に  $|x| \geq M$  もしくは  $|y| \geq M$  の場合が示せる.

(3)  $M = \sup_{\mathbb{R}} |f|$  とおく.  $z = ny$  と変数変換して

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x + z/n)g(z) \, dz$$

となる.

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x + z/n)|g(z) \, dz$$



である。さて、 $\varepsilon > 0$  とせよ。  $f$  は一様連続なので、  $\delta > 0$  があり、 任意の  $x, y \in \mathbb{R}$  に対して

$$|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

となる。 よって  $x \in \mathbb{R}$  に対して

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &\leq \int_{|z| \leq n\delta} |f(x) - f(x + z/n)| g(z) dz + \int_{|z| \geq n\delta} |f(x) - f(x + z/n)| g(z) dz \\ &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}} g(z) dz + 2M \int_{|z| \geq n\delta} g(z) dz \\ &\leq \varepsilon + \int_{|z| \geq n\delta} g(z) dz \end{aligned}$$

だが、 今  $\int_{|z| \geq n\delta} g dz \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) より

$$\limsup_n \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$$

となる。  $\varepsilon > 0$  は任意なので  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) を得る。

[3]

固有多項式は  $(\lambda - a - b)^2(\lambda - a + b)(\lambda + a - b)$ . 固有値  $\lambda$  に対する固有空間を  $V_\lambda$  と書くことにすると、

$$\begin{aligned} V_{2a} &= \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad V_0 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \quad (\text{if } a = b) \\ V_{a+b} &= \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad V_{a-b} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad V_{-a+b} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \quad (\text{if } a \neq b) \end{aligned}$$

最小多項式は

$$(\lambda - 2a)\lambda \quad (\text{if } a = b) \quad ; \quad (\lambda - a - b)(\lambda - a + b)(\lambda + a - b) \quad (\text{if } a \neq b)$$

[4]

(1)  $\ker(E_n - A) \subset \text{Im}(A)$  より従う. (2) 等号成立は  $\ker(E_n - A) \supset \text{Im}(A)$  つまり  $A - A^2 = (E_n - A)A = 0$  と同値.

[5]

(1)  $\emptyset, \mathbb{R}^2 \in \mathcal{O}$  はよい.  $U_\lambda, U, V \subset \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}$  の開集合とせよ ( $\lambda \in \Lambda$ ). このとき

$$(U \times \mathbb{R}) \cap (V \times \mathbb{R}) = (U \cap V) \times \mathbb{R}, \quad \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (U_\lambda \times \mathbb{R}) = \left( \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \right) \times \mathbb{R} \in \mathcal{O}$$

である.

(2) いいえ.  $(0, 0), (0, 1) \in \mathbb{R}^2$  は開集合で分離できない.

(3) コンパクトであるものは、  $J \times J, I \times I$  のみ. ほかはコンパクトでない.

(4)  $\text{cl}(I \times I) = J \times \mathbb{R}, \text{cl}(I \times J) = J \times \mathbb{R}, \text{cl}(J \times I) = J \times \mathbb{R}, \text{cl}(J \times J) = J \times \mathbb{R}$

## 1.5 2016 年度

[1]

(1), (2) 略.

(3)  $X = (x_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$  に対して

$$D_A(X) = O \iff x_{11} = x_{33}, x_{12} = x_{32}, x_{13} = x_{31}, x_{21} = x_{23}$$

であることがわかる. よって  $\dim \ker(D_A) = 5$ , 次元定理より  $\dim \operatorname{Im}(D_A) = 4$ .

[2]

(1)  $\Phi_n(\lambda) = A - \lambda$  を  $A$  の固有多項式とすると,

$$\Phi_1(\lambda) = 1 - \lambda, \Phi_2(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda; \quad \Phi_n(\lambda) = (1 - \lambda)\Phi_{n-1}(\lambda) - \Phi_{n-2}(\lambda) \quad (n \geq 3).$$

を得る. よって

$$\det A = \Phi_n(0) = \begin{cases} 1 & (\text{if } n \equiv 0, 1 \pmod{6}), \\ -1 & (\text{if } n \equiv 3, 4 \pmod{6}), \\ 0 & (\text{if } n \equiv 2, 5 \pmod{6}). \end{cases}$$

(2) direct calculation より固有空間は

$$\left\langle {}^t(1, 0, -1, 0, \dots, 0, (-1)^{(n-1)/2}) \right\rangle.$$

[3]

(1) 略.

(2)  $(-\infty, 0)$  はコンパクトでないが  $(-\infty, 0]$  はコンパクトである.  $(-\infty, 0)$  の開被覆  $\{(-\infty, -1/n) \mid n \in \mathbb{N}\}$  は有限部分被覆を持たない.  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  を  $(-\infty, 0]$  の  $\mathcal{O}$ -開被覆とせよ.  $U_\lambda = (-\infty, a_\lambda)$  とおく ( $U_\lambda = \emptyset$  ならば  $a_\lambda = -\infty$ ,  $U_\lambda = \mathbb{R}$  ならば  $a_\lambda = \infty$  と解釈せよ).  $0 \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$  であるから, ある  $\lambda_0 \in \Lambda$  に対して  $0 \in U_{\lambda_0}$  である.  $\{U_{\lambda_0}\}$  が有限部分被覆.

(3) 答えははい.  $(0, 1) \cup (2, 3) \subset U \cup V$ ;  $U, V \in \mathcal{O}$ ;  $U \cap V \cap ((0, 1) \cup (2, 3)) = \emptyset$  とせよ. このとき  $U \subset V$  または  $U \supset V$  が成り立つので,  $U \cap ((0, 1) \cup (2, 3)) = \emptyset$  または  $V \cap ((0, 1) \cup (2, 3)) = \emptyset$  である. よって  $(0, 1) \cup (2, 3)$  は連結.

(4)  $f: (\mathbb{R}, \mathcal{O}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{O})$  を連続写像とする.  $x, x' \in \mathbb{R}$  で  $x \leq x'$ ,  $f(x) > f(x')$  を満たすものがあつたと仮定しよう.  $f$  の連続性より

$$f^{-1}((-\infty, f(x))) = (-\infty, a), \quad a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

となる  $a$  がある.  $f(x') < f(x)$  より  $x' < a$  である. 一方明らかに  $x \geq a$  である. よって  $x' < x$  となり矛盾.

[4]

(1) 答えは  $p + q > 0$ .  $x \neq 0$  に対して  $f_{p,q}(x) = |x|^{p+q} |\sin x/x|^q$  であり,  $\sin x/x \rightarrow 1$  ( $x \rightarrow 0$ ) に注意するとわかる.

(2) 答えは  $p+q > 1$ .  $x \neq 0$  に対して

$$\frac{f_{p,q}(x) - f_{p,q}(0)}{x} = \frac{x}{|x|} |x|^{p+q-1} \left| \frac{\sin x}{x} \right|^q$$

が  $x \rightarrow 0$  で有限確定値に収束する条件を考えればわかる.

(3) 答えは  $p+q > -1$ . 極座標に変換すると

$$\iint_D f_{p,q}(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy = \frac{\pi}{2} \int_0^1 r^{p+q+1} \left| \frac{\sin r}{r} \right|^q dr$$

で同様.  $[0, 1]$  で  $0 < \exists m \leq |\sin r/r| \leq 1$  に注意せよ.

[5]

(1) まず  $f, g$  は連続関数の一様収束極限として連続である.  $\delta > 0$  を固定する. ある  $N$  以上の任意の  $n$  について  $|a - a_n| < \delta$  となる. よって  $n \geq N$  に対して

$$|f(a) - f_n(a_n)| \leq |f(a) - f(a_n)| + |f(a_n) - f_n(a_n)| \leq \sup_{b \in \mathbb{R}, |a-b| < \delta} |f(a) - f(b)| + \sup_{b \in \mathbb{R}} |f(b) - f_n(b)|$$

$\limsup_{n \rightarrow \infty}$  を取って ( $f_n$  の一様収束性より)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f(a) - f_n(a_n)| \leq \sup_{b \in \mathbb{R}, |a-b| < \delta} |f(a) - f(b)| + 0$$

$\limsup_{\delta \rightarrow +0}$  を取って ( $f$  の点  $a$  での連続性より)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f(a) - f_n(a_n)| \leq \limsup_{\delta \rightarrow +0} \sup_{b \in \mathbb{R}, |a-b| < \delta} |f(a) - f(b)| = 0$$

を得る.

(2)  $g_n$  は一様収束列なので一様有界である. よって,  $M := \sup_{n \geq 1} \sup_{x \in [0,1]} |g_n(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |g(x)| < \infty$  となる.  $f$  は有界閉区間  $[-M, M]$  上一様連続である.  $\delta > 0$  を固定する.  $N \in \mathbb{N}$  があり,  $\sup_{n \geq N} \sup_{x \in [0,1]} |g(x) - g_n(x)| < \delta$  となる. よって

$$\sup_{n \geq N} \sup_{x \in [0,1]} |f(g(x)) - f(g_n(x))| \leq \sup_{a, b \in [-M, M], |a-b| < \delta} |f(a) - f(b)|$$

よって

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} |f(g(x)) - f(g_n(x))| \leq \sup_{a, b \in [-M, M], |a-b| < \delta} |f(a) - f(b)|$$

となり,  $\delta \rightarrow 0$  とすることで結論を得る ( $f$  の  $[-M, M]$  における一様連続性より).

(3)

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} |f(g(x)) - f_n(g_n(x))| \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} |f(g(x)) - f(g_n(x))| + \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} |f(g_n(x)) - f_n(g_n(x))| \\ & \leq 0 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{a \in \mathbb{R}} |f(a) - f_n(a)| \\ & \leq 0 + 0 \end{aligned}$$

## 1.6 2017 年度

[1]

(1) 略.

(2) 結果だけ書く：

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{where } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3)  $C_V(A) = \{X \in V \mid XA = AX\} = W$  と書く.  $C_V(P^{-1}AP) = P^{-1}WP \cong W$  だが,  $P^{-1}AP$  は相異なる固有値を持つ対角行列であるから,  $C_V(P^{-1}AP)$  は対角行列全体. したがって  $\dim W = 3$ . 線形写像  $\mathbb{R}[t] \rightarrow W, f(t) \mapsto f(X)$  を考察する. kernel は  $A$  の最小多項式  $(t-1)(t-2)(t-3)$  で生成されるイデアルである. 準同型定理より

$$\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}[t]/((t-1)(t-2)(t-3)) \cong \mathbb{R}[A] \subset W$$

である.  $\dim W = 3$  だったので  $W = \mathbb{R}[A]$  を得る.

[2]

$\text{Im}(A^n) \subset \text{Im}(A^{n+1})$  が示されれば, 逆の包含は明らかなので結論が従う. 部分空間の列

$$\text{Im}(A^{n+1}) \subset \text{Im}(A^n) \subset \cdots \subset \text{Im}(A^2) \subset \text{Im}(A) \subset \text{Im}(A^0) = \mathbb{C}^n$$

を考えると,  $\dim \mathbb{C}^n = n$  より, ある  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  で  $\text{Im}(A^{k+1}) = \text{Im}(A^k)$  となる. よって

$$\text{Im}(A^{n+1}) = \text{Im}(A^{n-k} \cdot A^{k+1}) = \text{Im}(A^{n-k} \cdot A^k) = \text{Im}(A^n)$$

を得る.

[3]

(1)

$$\mathcal{O} = \{U \subset \mathbb{R} \mid \forall x \in U \exists U(a, r) \in \mathcal{B} \text{ s.t. } x \in U(a, r) \subset U\}$$

が  $\mathbb{R}$  の位相であることが示されれば,  $\mathcal{B}$  がその開基であることは明らかである. 省略.

(2) 「 $x \in U \in \mathcal{O}$  ならば  $-x \in U$ 」であることに注意する. すると  $1, -1 \in \mathbb{R}$  は  $\mathcal{O}$  の開集合で分離できない.

(3)  $\mathcal{O}$  は通常の Euclid 位相  $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$  よりも弱い位相であることから従う.

(4)  $[0, 1]$  は  $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$  の位相でコンパクトであるから,  $\mathcal{O}$  でもコンパクトである.  $-1 \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$  だが  $1 \notin \mathbb{R} \setminus [0, 1]$  である. よって  $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$  は開集合ではない.

[4]

非負値単調非増加数列  $\{a_n\}_n$  について,

$$\sum_n a_n \text{ が収束する} \iff \sum_n 2^n a_{2^n} \text{ が収束する}$$

であることに注意する. よって  $\sum_{n \geq 2} 1/(n^p \log n)$  が収束することは  $\sum_n 2^n \cdot 1/(2^{np} n) = \sum_n n^{-1} 2^{(1-p)n}$  が収束することと同値であり, これは  $\sum_n 2^n \cdot 2^{-n} 2^{(1-p)2^n} = \sum_n 2^{(1-p)2^n}$  が収束することと同値でこれは  $p > 1$  と同値.

(2) 仮定より, 十分大きな  $N \in \mathbb{N}$  があり, 任意の  $n, m \geq N$  に対して  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_m(x) - f_n(x)| \leq 1$  となる. 各  $f_n$  は多項式であるから,  $n \geq N$  に対して,  $f_n$  の次数は  $n$  によらない定数であり,  $d \geq 1$  について,  $f_n$  ( $n \geq N$ ) の  $d$  次の係数は  $n$  によらない.  $f_n$  がある  $f$  に一様収束するということから定数項はある実数に収束し, したがって  $f$  は多項式となる.

[5]

(1)  $\varepsilon > 0$  とする. 仮定より,  $\delta_1 > 0$  があり

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \quad (x, y \in [1 - \delta_1, 1))$$

となる.  $f$  は有界閉区間  $[0, 1 - \delta_1/2]$  で一様連続であるから, ある  $\delta_2 > 0$  に対して

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \quad (x, y \in [0, 1 - \delta_1/2], |x - y| \leq \delta_2)$$

となる. さて,  $x, y \in [0, 1)$ ,  $0 \leq y - x \leq \min\{\delta_1/2, \delta_2\}$  とする. もし  $x \in [0, 1 - \delta_1]$  ならば  $y \in [0, 1 - \delta_1/2]$  であるから  $|x - y| \leq \delta_2$  とあわせて  $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$  である.  $x \in [1 - \delta_1, 1)$  ならば  $y \in [1 - \delta_1, 1)$  でもあるから  $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$  である.

(2)  $\limsup_{x \rightarrow 1-0} f(x) > t > s > \liminf_{x \rightarrow 1-0} f(x)$  となる  $s, t$  を取る. すると, 任意の  $x \in [0, 1)$  に対して,  $y, z \in (x, 1)$  があり,  $f(y) < s < t < f(z)$  となる. よって  $f(z) - f(y) > t - s > 0$ . これは  $f$  が一様連続ではないことを示している.

(3) 仮定より  $(1-t)^\alpha f'(t)$  は  $[0, 1]$  上の連続関数に一意に拡張され, とくに有界である.  $M = \sup_{t \in [0, 1)} (1-t)^\alpha |f'(t)| < \infty$  とおく.  $x, y \in [0, 1)$  に対して

$$|f(x) - f(y)| = \left| \int_x^y (1-t)^{-\alpha} (1-t)^\alpha f'(t) dt \right| \leq M \left| \int_x^y (1-t)^{-\alpha} dt \right| = \frac{M}{1-\alpha} |(1-x)^{1-\alpha} - (1-y)^{1-\alpha}|$$

より一様連続性が従う.

## 1.7 2018 年度

[1]

(1) 略. (2)  $T(x^3) = 3x^3 + 3x^2y$ ,  $T(x^2y) = x^3 + 3x^2y + 2xy^2$ ,  $T(xy^2) = 2xy^2 + 3xy^2 + y^3$ ,  $T(y^3) = 3xy^2 + 3y^3$  より  $T$  の行列表示は

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

である. 固有多項式を頑張って計算すると

$$\det(\lambda - T) = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 4)(\lambda - 6)$$

であり, 各  $\lambda \in \{0, 2, 4, 6\}$  に対応する固有空間  $V_\lambda$  は

$$V_0 = \langle (x-y)^3 \rangle, \quad V_2 = \langle (x+y)(x-y)^2 \rangle, \quad V_4 = \langle (x+y)^2(x-y) \rangle, \quad V_6 = \langle (x+y)^3 \rangle$$

よって  $V = V_0 \oplus V_2 \oplus V_4 \oplus V_6$  の基底が得られた.

[2]

(1)  $\ker f$  の補空間  $W_0$  を取る. つまり  $V = \ker f \oplus W_0$  である.  $W_0$  は  $r$  次元で  $f|_{W_0}$  は単射 ( $W_0 \cap \ker f = 0$  である).

(2)  $W_0$  の基底  $w_1, \dots, w_r$  を取る. 与えられた  $x \in \mathbb{R}^n$  を  $x = v + w$  ( $v \in \ker f$ ,  $w \in W_0$ ) と分解せよ. このとき  $W' = \langle v + w_1, \dots, v + w_r \rangle$  とおくと  $v \in W'$ , よって  $x \in W_0 + W'$  である.  $W' \in S$  であることも簡単にわかる.

[3]

(1) 略. (2)  $(0, 0)$  と  $(1, 0)$  が開集合で分離できない. (3) 易しい. (4)  $\mathcal{O}$  から定まる位相の閉集合系は

$$\{C \subset X \mid (0, 0) \in C\} \cup \mathcal{P}(\{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\})$$

であることに注意する.  $Q \subset X$  が可算ならば  $Q \cup \{(0, 0)\}$  は  $Q$  を含む閉集合であるから  $\overline{Q} \subset Q \cup \{(0, 0)\}$ .  $X$  は非可算集合なので  $\overline{Q} = X$  とはなり得ない.

[4]

(1)  $f$  は有界なので  $M := \sup_{[0, \infty)} |f|$  とおく.  $0 < s < t$  に対して

$$\begin{aligned} |\alpha - g(t)| &\leq \left| \frac{1}{t} \int_0^t (\alpha - g(t)) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{t} \left\{ \int_0^s |\alpha - f(x)| dx + \int_s^t |\alpha - f(x)| dx \right\} \\ &\leq \frac{(|\alpha| + M)s}{t} + \frac{(t-s)}{t} \sup_{x \geq s} |\alpha - f(x)| \end{aligned}$$

$\limsup_{t \rightarrow \infty}$  を取ると

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\alpha - g(t)| \leq \sup_{x \geq s} |\alpha - f(x)|$$

$s \rightarrow \infty$  として結論を得る.

(2) 答えは  $\alpha/2$ .  $0 < s < t$  に対して

$$\begin{aligned} \left| \frac{\alpha}{2} - h(t) \right| &= \frac{1}{t^2} \left| \int_0^t x(\alpha - f(x)) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{t} \left\{ \int_0^s |\alpha - f(x)| dx + \int_s^t |\alpha - f(x)| dx \right\} \\ &\leq \dots \end{aligned}$$

あとは同様.

[5]

$(x+y)/2$  まわりの Taylor 展開を考える.

$$f(x) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{x-y}{2}f'\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{(x-y)^2}{8}f''\left(\frac{x+y}{2}\right) + \int_{\frac{x+y}{2}}^x dt \int_{\frac{x+y}{2}}^t ds \left(f''(s) - f''\left(\frac{x+y}{2}\right)\right),$$

$$f(y) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{y-x}{2}f'\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{(y-x)^2}{8}f''\left(\frac{x+y}{2}\right) + \int_{\frac{x+y}{2}}^y dt \int_{\frac{x+y}{2}}^t ds \left(f''(s) - f''\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)$$

である. 辺々足して

$$f(x) - 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f(y) = \frac{(x-y)^2}{4}f''\left(\frac{x+y}{2}\right) + \left(\int_{\frac{x+y}{2}}^x dt \int_{\frac{x+y}{2}}^t ds + \int_{\frac{x+y}{2}}^y dt \int_{\frac{x+y}{2}}^t ds\right) \left(f''(s) - f''\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)$$

を得る. 両辺を  $(x-y)^2/4$  で割って  $x, y \rightarrow a$  とすれば結論が得られる. 具体的には次のようにする: 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して  $\delta > 0$  があり,  $|s-a| \leq \delta$  に対して  $|f''(x) - f''(s)| < \varepsilon$  となる. そこで  $a - \delta < x < a < y < a + \delta$  ならば,

$$\left| \int_{\frac{x+y}{2}}^x dt \int_{\frac{x+y}{2}}^t ds \left(f''(s) - f''\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \right| \leq 2\varepsilon \cdot \int_{\frac{x+y}{2}}^x dt \int_{\frac{x+y}{2}}^t ds = \frac{(x-y)^2\varepsilon}{2}$$

など.

## 1.8 2019 年度

[1]

(1)  $A^{12} = (A^3)^4 = O$  である.

(2)  $A$  の最小多項式, 固有多項式をそれぞれ  $\varphi(X)$ ,  $\Phi(X)$  とおく. (1) より  $\varphi \mid X^{12}$  であるから  $\varphi = X^k$  の形である.  $\Phi \mid \varphi^4$  であるから  $\Phi = X^4$  となる. Cayley-Hamilton の定理より  $\varphi \mid \Phi = X^4$ . これは  $A^4 = O$  であることを示している.

(3)

$$O = A^6 = (A^3)^2 = \begin{bmatrix} 0 & a & d & f \\ & 0 & b & e \\ & & 0 & c \\ & & & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ab & ae + cd \\ & 0 & 0 & bc \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

より  $ab = 0$  である.

[2]

(1) 固有値は 0, 2, -2 で, 固有空間の次元はそれぞれ 3, 2, 1.

(2) まず  $A, B$  が共通の固有値  $\lambda$  を持つと仮定する. 零でない  $x \in \mathbb{C}^m$ ,  $y \in \mathbb{C}^n$  があり,

$$Ax = \lambda x, \quad {}^tBy = \lambda y$$

となる. すると  $X = x {}^ty \in M(m, n)$  は零ではなく

$$AX - XB = Ax {}^ty - x {}^tyB = \lambda x {}^ty - x {}^t(\lambda y) = 0$$

となる.

次に  $A$  と  $B$  が共通の固有値を持たないと仮定する. このとき  $A, B$  の最小多項式  $\varphi(T), \psi(T) \in \mathbb{C}[T]$  は互いに素であるから,  $u, v \in \mathbb{C}[T]$  があり

$$u\varphi + v\psi = 1$$

となる. さて, 変数への  $A$  の代入によって多項式環  $\mathbb{C}[T]$  は  $M(m, n)$  に作用している. つまり

$$\mathbb{C}[T] \times M(m, n) \ni (p, X) \mapsto p(A)X \in M(m, n)$$

という作用がある. もし  $X \in \ker f_{A,B}$ , つまり  $AX = XB$  ならば任意の  $p \in \mathbb{C}[T]$  に対して

$$p(A)X = Xp(B)$$

であるから, とくに

$$X = EX = (u(A)\varphi(A) + v(A)\psi(A))X = Xv(B)\psi(B) = 0$$

となる. これは  $\ker f_{A,B} = 0$  であることを示している.

[3]

- (1)  $(0, 0), (0, 1) \in \mathbb{R}^2$  は  $\mathcal{O}'$  の開集合で分離できない.
- (2)  $A \subset \mathbb{R}^2, (0, 0) \notin A$  のとき  $\text{Int}_{\mathcal{O}'}(A) = \emptyset$ .
- (3)  $A \subset \mathbb{R}^2, (0, 0) \in A$  のとき  $\text{Cl}_{\mathcal{O}'}(A) = \mathbb{R}^2$ .
- (4)  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O}')$  は連結である.  $X = U \cup V, U, V \in \mathcal{O}', U \cap V = \emptyset$  とする. 一般性を失わず  $(0, 0) \in U$  としてよい. すると  $(0, 0) \notin V$  より  $V = \emptyset$  である.
- (5)  $f: (\mathbb{R}^2, \mathcal{O}') \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{O}')$  を同相写像とする.  $f(0, 0) \neq (0, 0)$  だと仮定しよう.  $\varepsilon > 0$  で  $f(0, 0) \notin B_\varepsilon = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid |p| < \varepsilon\}$  となるものを取る.  $f$  は連続で  $B_\varepsilon \in \mathcal{O}'$  より  $f^{-1}(B_\varepsilon) \in \mathcal{O}'$  であり, かつ  $(0, 0) \notin f^{-1}(B_\varepsilon)$  であるから  $f^{-1}(B_\varepsilon) = \emptyset$  となる. これは  $f$  が全単射であることに反する.

[4]

- (1)  $F: D \rightarrow \tilde{D}, F(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$  は  $F \circ F^{-1} = \text{id}_{\tilde{D}}, F^{-1} \circ F = \text{id}_D$  を満たすので, chain rule より Jacobi 行列  $JF$  について  $(JF)(JF^{-1}) = I$  が成り立つ. 行列式を取って結論を得る.
- (2)  $\tilde{E} = [1, 2] \times [-2, 2]$  とし  $F: E \rightarrow \tilde{E}$  を  $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = (xy, y - x^2)$  で定める.

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \det \begin{bmatrix} y & x \\ -2x & 1 \end{bmatrix} = y + 2x^2 \neq 0 \quad \text{in } E$$

である.  $F$  は全単射かつ  $C^1$  級で  $F^{-1}$  も  $C^1$  級 (逆関数定理より). よって

$$\begin{aligned} \iint_E \left( \frac{1}{x} + \frac{2x}{y} \right) dx dy &= \int_1^2 du \int_{-2}^2 dv \left( \frac{1}{x} + \frac{2x}{y} \right) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \\ &= \int_1^2 du \int_{-2}^2 \left( \frac{1}{x} + \frac{2x}{y} \right) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \\ &= \int_1^2 du \int_{-2}^2 dv \frac{1}{u} \\ &= 4 \log 2 \end{aligned}$$



[5]

(1) 帰納的に  $0 \leq f_n(x) \leq 2$ , ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in I$ ) がわかる. よって

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= \sqrt{f_n(x) + 2} - f_n(x) \\ &= \frac{f_n(x) + 2 - (f_n(x))^2}{\sqrt{f_n(x) + 2} + f_n(x)} \\ &\geq \frac{1}{4}(f_n(x) + 1)(2 - f_n(x)) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

である.

(2)

$$\begin{aligned} 2 - f_{n+1}(x) &= 2 - \sqrt{f_n(x) + 2} \\ &= \frac{2 - f_n(x)}{2 + \sqrt{f_n(x) + 2}} \\ &\leq \frac{1}{2}(2 - f_n(x)) \end{aligned}$$

である. よって

$$0 \leq 2 - f_n(x) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (2 - f_1(x)) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot 2 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

(3)  $f$  は定数関数 2 に  $[0, 1]$  上一様収束する. よって 2.

## 1.9 2020 年度

[1]

はい.

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{N} \sum_{k=1}^N f(x_k) \right| &= \left| \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k) dx \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x) - f(x_k)| dx \\ &\leq \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} dx \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx + (1-t)x_k) dt \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} dx \int_0^1 dt |x - x_k| |f'(tx + (1-t)x_k)| \\ &\leq \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} dx K \frac{b-a}{N} \\ &= N \cdot \frac{b-a}{N} \cdot K \frac{b-a}{N} = \frac{K(b-a)^2}{N} \end{aligned}$$

追記:  $f$  は  $C^1$  級ではないので議論を修正しなければならないが, 平均値の定理を使えばなんとでもなる.

[2]

$n, m \in \mathbb{N}$ ,  $m < n$  に対して

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{n} - \alpha \right| &= \left| \frac{1}{n} \left( a_m + \sum_{k=m}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \right) - \alpha \right| \\ &= \left| \frac{a_m - m\alpha}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=m}^{n-1} (a_{k+1} - a_k - \alpha) \right| \\ &\leq \frac{|a_m| + m|\alpha|}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=m}^{n-1} |a_{k+1} - a_k - \alpha| \\ &\leq \frac{|a_m| + m|\alpha|}{n} + \frac{n-m}{n} \sup_{k \geq m} |a_{k+1} - a_k - \alpha| \end{aligned}$$

となる.  $\limsup_{n \rightarrow \infty}$  をとって

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{n} - \alpha \right| \leq \sup_{k \geq m} |a_{k+1} - a_k - \alpha|$$

である.  $m \rightarrow \infty$  として結論を得る.

(2) 答えは  $\beta/2$ .  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $m < n$  に対して

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{n^2} - \frac{\beta}{2} \right| &= \left| \frac{\beta}{2} \left( \left(1 - \frac{m}{n}\right) \left(1 + \frac{m-1}{n}\right) - 1 \right) + \frac{1}{n^2} \sum_{k=m}^{n-1} (a_{k+1} - a_k - k\beta) \right| \\ &\leq \frac{|\beta|}{2} \left| \left(1 - \frac{m}{n}\right) \left(1 + \frac{m-1}{n}\right) - 1 \right| + \frac{1}{n} \sum_{k=m}^{n-1} \left| \frac{a_{k+1} - a_k}{k} - \beta \right| \end{aligned}$$

あとは同様.

[3]

(1) 答えは  $\{(0,0)\}$ .  $Y \subset X$  を,  $\{(0,0)\} \subsetneq Y$  となるものとする. もし  $Y = \{(0,0), (0,1)\}$  ならば,  $Y$  の開集合  $U = \{(0,0)\}$ ,  $V = \{(0,1)\}$  が  $Y$  を分割する. もし  $Y \neq \{(0,0), (0,1)\}$  の場合,  $p = (1/n_0, y_0) \in Y$ ,  $n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq y_0 \leq 1$  を取る.

$$U = \{(1/n_0, y) \mid 0 \leq y \leq 1\}, \quad V = Y \setminus U$$

が  $Y$  を分割する  $Y$  の開集合である.

(2) ない.

[4]

(a) ならば (b) は明らか. (b) を仮定する.  $f$  が同型でも零写像でもないと仮定する. すると,  $0 \neq x \in V$ ,  $\alpha \in V^*$  があり,

$$f(x) = 0, \quad f^*(\alpha) \neq 0$$

となる. ただし  $V^*$  は  $V$  の双対空間であり,  $f^* \in \text{End}(V^*)$  は  $f$  の双対写像.  $g \in \text{End}(V)$  を次で定める:

$$g(v) = \alpha(v)x$$

このとき

$$f(g(v)) = \alpha(v)f(x) = 0, \quad g(f(v)) = \alpha(f(v))x = f^*(\alpha)(v)x \quad (v \in V)$$

だが、(b) の仮定より任意の  $v \in V$  に対して  $f^*(\alpha)(v)x = 0$  したがって  $f^*(\alpha) = 0$  となる。よって矛盾。

[5]

(1) 固有値は  $\pm 1$ .  $\lambda = \pm 1$  に対応する固有空間を  $W_\lambda$  と書くことにすれば

$$W_1 = \langle 1, (-2x + b)^2 \rangle, \quad W_{-1} = \langle -2x + b, (-2x + b)^3 \rangle$$

(2)  $\varphi_{a,b}$  の固有値全体の集合は  $\{a^k \mid 0 \leq k \leq d\}$ .

(3)  $\varphi_{a,b}$  が対角化可能であるための条件は、「 $a \neq 1$  または  $b = 0$ 」. これを示す.

$a \neq 1$  ならば、 $((a-1)x + b)^k$  ( $k = 0, 1, \dots, d-1$ ) は固有値  $a^k$  に属する固有ベクトルであり、すべて一次独立である.

$b = 0$  ならば、 $x^k$  ( $k = 0, 1, \dots, d-1$ ) は固有値  $a^k$  に属する固有ベクトルであり、すべて一次独立である.

$a = 1$  かつ  $b \neq 0$  の場合、

$$f_k(x) = \frac{1}{k!} \frac{x}{b} \left( \frac{x}{b} - 1 \right) \cdots \left( \frac{x}{b} - k + 1 \right) \quad (k \geq 0)$$

とおくと  $f_k$  ( $0 \leq k \leq d-1$ ) は一次独立であり、

$$\begin{aligned} \varphi_{1,b} f_k(x) &= \frac{1}{k!} \left( \frac{x}{b} + 1 \right) \frac{x}{b} \cdots \left( \frac{x}{b} - k + 2 \right) \\ &= \frac{1}{k!} \frac{x}{b} \left( \frac{x}{b} - 1 \right) \cdots \left( \frac{x}{b} - k + 1 \right) + \frac{1}{(k-1)!} \frac{x}{b} \cdots \left( \frac{x}{b} - k + 2 \right) \\ &= f_k(x) + f_{k-1}(x) \end{aligned}$$

となる。よってこの基底によって  $\varphi_{1,b}$  は Jordan 細胞

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

で表現される。よって対角化可能ではない。

## 1.10 2021 年度

[1]

(1)  $D = D_1$  は

$$D(e^x) = e^x, \quad D(xe^x) = e^x + xe^x, \quad e^{2x} = 2e^{2x}$$

を満たすので、 $D, D_n = D^n$  の行列表示は

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad D_n = \begin{bmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \quad (n \geq 0)$$

である.  $\{D_i\}_{0 \leq i \leq 2}$  が一次独立であることを示そう:  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $a_0 D_0 + a_1 D_1 + a_2 D_2 = 0$  は

$$a_0 + a_1 + a_2 = a_1 + 2a_2 = a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0$$

と同値でこれは  $a_0 = a_1 = a_2 = 0$  と同値.

(2)  $n \geq 3$  に対して

$$D_n = (2^n - 2n)D_0 + (-2^{n+1} + 3n + 2)D_1 + (2^n - n - 1)D_2$$

であるから  $\{D_i\}_{0 \leq i \leq 2}$  が  $\text{span}\{D_n \mid n \geq 0\}$  の基底を与える.

(3) 普通に

$$f(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{4}\right)e^x + \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{1+2^n}e^{2x}$$

[2]

(1)  $A_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$ . (2) 閉集合の族  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  が (\*) を満たすことは, 開集合たち  $U_\lambda = X \setminus A_\lambda$  が「 $\emptyset \neq F \subset \Lambda$  が有限ならば  $\bigcup_{\lambda \in F} U_\lambda \neq X$ . かつ  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = X$ 。」このことから明らか. (3)  $X$  をコンパクト空間,  $Y \subset X$  をその閉集合とする.  $Y$  の任意の閉集合の族は  $\{A_\lambda \cap Y\}_{\lambda \in \Lambda}$ ,  $A_\lambda$  は  $X$  の閉集合という形をしている. 今  $Y$  は  $X$  の閉集合より  $A_\lambda \cap Y$  もそう. よって  $Y$  の閉集合族は (\*) を満たし得ない.

[3]

(1)  $(a, b) = (2, 0)$ . (2)  $(a, b) = (4, 0)$ . (3)  $(a, b) = (3, 0)$ .

## 1.11 2022 年度

[1]

固有多項式は

$$(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$$

である.

固有値は  $1, -1, (-1 + \sqrt{-3})/2 =: \omega_\pm$  である. 各固有空間  $V_\lambda$  は

$$V_1 = \langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 \rangle, \quad V_{-1} = \langle \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_4 \rangle, \quad V_{\omega_\pm} = \langle \mathbf{v}_1 + \omega_\pm \mathbf{v}_3 + \omega_\mp \mathbf{v}_5 \rangle$$

という基底を持つ. よって  $f_\sigma$  の最小多項式は

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$$

と求まる.

[2]

$\ker(f)$ ,  $\text{Im}(f)$  の  $V$  における補空間  $W, W'$  を取る. つまり  $V = \ker(f) + W = \text{Im}(f) + W'$  かつ  $\ker(f) \cap W = \text{Im}(f) \cap W' = 0$ . 次の可換図式を満たす  $g_1, h$  を取る:

$$\begin{array}{ccccc} & & V & \xrightarrow{f} & V \\ & \swarrow h & \downarrow \text{pr}_W & \nearrow g_1 & \downarrow \\ V & \longleftarrow & W & \xrightarrow{\cong} & \text{Im}(f) \end{array}$$

さらに同型  $g_2: \ker(f) \rightarrow W'$  がある.  $g = g_1 \oplus g_2: \ker(f) \oplus W$  とおけばよい.

[3]

(1) いいえ. (2) はい. (3) はい (多分. なぜ?). (4) いいえ.

[4]

(1)  $f_n|_{[0,1]}$  は  $[0,1]$  上の一様有界かつ同程度一様連続な関数列である. よって Ascoli-Arzelà の定理より  $f_n$  は  $[0,1]$  上一様収束する部分列を持つが,  $f$  は周期 1 を持つので  $\mathbb{R}$  上一様収束する.

(2) 同様に Ascoli-Arzelà の定理より.

[5]

(1)  $\pi/t$ .

(2) 答えは 0.  $x \in [a, b]$  に対して  $tf(x)/(t^2 + x^2) \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow 0$ ) であり

$$\left| \frac{t}{t^2 + x^2} f(x) \right| \leq \|f\|_{L^\infty([a,b])} \frac{1}{x^2} \in L^1([a,b]) \quad (0 < t < 1)$$

である ( $0 \notin [a, b]$  に注意せよ. ). dominated convergence より問題の積分は 0 に収束する.

(3)  $\tilde{f} = \begin{cases} f & (\text{on } [a, b]) \\ 0 & (\text{outside } [a, b]) \end{cases}$  とおく. 十分小さな  $\delta > 0$  に対して

$$\begin{aligned} \left| \pi f(0) - \int_a^b \frac{tf(x)}{t^2 + x^2} dx \right| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t(\tilde{f}(0) - \tilde{f}(x))}{t^2 + x^2} dx \right| \\ &\leq \int_{-\delta}^{\delta} \frac{t}{t^2 + x^2} |f(0) - f(x)| dx + \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} \frac{t}{t^2 + x^2} |\tilde{f}(0) - \tilde{f}(x)| dx \\ &\leq \pi \sup_{x \in (-\delta, \delta)} |f(0) - f(x)| + 2\|f\|_{L^\infty([a,b])} \left( \pi - 2 \arctan \frac{\delta}{t} \right) \end{aligned}$$

となる.  $\limsup_{t \rightarrow +0}$  をとって

$$\limsup_{t \rightarrow +0} \left| \pi f(0) - \int_a^b \frac{tf(x)}{t^2 + x^2} dx \right| \leq \pi \sup_{x \in (-\delta, \delta)} |f(0) - f(x)|$$

を得る.  $\delta \rightarrow 0$  として結論を得る.

## 1.12 2023 年度

[1]

(1)  $W \in \mathcal{S}$  とせよ. このとき任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $W = \varphi^n(W) \subset \varphi(V)$  なので  $W \subset W_0$  を得る.

(2)  $V \supset \varphi(V) \supset \varphi^2(V) \supset \dots$  という部分空間の系列を考える.  $V$  は有限次元なので, ある  $N \in \mathbb{N}$  に対して  $\varphi^N(V) = \varphi^{N+1}(V)$  となる. このとき  $\varphi^n = \varphi^{n+1}(V)$  ( $n \geq N$ ) となるので  $W_0 = \varphi^N(V)$  である. よって  $\varphi(W_0) = \varphi^{N+1}(V) = W_0$  であり,  $\varphi|_{W_0}: W_0 \rightarrow W_0$  は全射なので (有限次元性より) 同型.

(3)  $K = \mathbb{R}$ ,  $V = \mathbb{R}^{\oplus \mathbb{N}}$ ,  $\varphi((a_1, a_2, \dots)) = (a_2, a_3, \dots)$ .

[2]

(1)  $D_n(x; a, b) = xD_{n-1}(x; a, b) - abD_{n-2}(x; a, b)$  がわかる. とくに  $a_n = D_n(-2; 1, 1)$  とおくと  $a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2}$ .  $a_1 = -2$ ,  $a_2 = 3$  とあわせて  $a_n = (-1)^n(n+1)$ .

(2) 帰納法.

(3)  $D_n(x; a, b)$  は行列

$$\begin{bmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & a & \cdots & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

の固有多項式である. 一方この行列は固有値  $2\sqrt{ab}\cos(k\pi/(n+1))$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) を持ち, 対応する固有ベクトルは

$$\left[ \sqrt{a^{m-1}b} \sin \frac{k\pi}{n+1}, \sqrt{a^{m-2}b^2} \sin \frac{2\pi}{n+1}, \dots, \sqrt{ab^{m-1}} \sin \frac{n\pi}{n+1} \right]$$

である.

[3]

(1) いいえ. (2) はい. (3) の答えは

$$\bar{B} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x \leq 1/\sqrt{2} \text{ かつ } y \leq 1/\sqrt{2}) \text{ または } (x \geq -1/\sqrt{2} \text{ かつ } y \geq -1/\sqrt{2}) \right\}$$

(4) 謎.

[4]

(1)  $1 < a < 2$  のとき, ( $|\sin x| \leq |x|$  に注意して)

$$\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx \leq \int_0^1 x^{1-\alpha} dx + \int_1^\infty x^{-\alpha} dx \leq \frac{1}{2-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} < \infty$$

より従う.

(2)  $0 < a \leq 1$  のとき,  $1 < M, N$  に対して部分積分より

$$\begin{aligned} \left| \int_M^N \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \right| &= \left| \frac{\cos M}{M^\alpha} - \frac{\cos N}{N^\alpha} - \alpha \int_M^N x^{-\alpha-1} \cos x dx \right| \\ &\leq \frac{2}{M^\alpha} + \frac{2}{N^\alpha} \\ &\rightarrow 0 \quad (M, N \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

なので  $\int_0^1 (\sin x)/x^\alpha dx$  は収束する.  $\int_0^1 (\sin x)/x^\alpha dx$  は (1) と同様に絶対収束する.

(3)

$$\int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx = \sum_{k=1}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx \geq \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(k\pi)^\alpha} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| dx = \sum_{k=1}^\infty \frac{2}{(k\pi)^\alpha} = \infty$$

[5]

(1)  $n \geq 2$  に対して  $1/(nk)^{nk} \leq 1/2^n$  である.

(2)  $I_{n,k} = \int_0^1 x^k (\log x)^n dx$  とおく. 部分積分より

$$I_{n,k} = \int_0^1 \left( \frac{x^{k+1}}{k+1} \right)' (\log x)^n = - \int_0^1 \frac{x^{k+1}}{k+1} \cdot n (\log x)^{n-1} \frac{1}{x} dx = -\frac{n}{k+1} I_{n-1,k}$$

よって

$$I_{n,n} = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^n} I_{0,n} = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$$

である.

(3)

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^x dx &= \int_0^1 e^{x \log x} dx \\ &= \int_0^1 \sum_{n \geq 0} \frac{(x \log x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \int_0^1 (x \log x)^n dx \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= S(1) - 2S(2) \end{aligned}$$

### 1.13 2024 年度

[1]

(1)

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} 1 + (n-1)a^2 & 2a + (n-2)a^2 & \cdots & 2a + (n-2)a^2 \\ 2a + (n-2)a^2 & 1 + (n-1)a^2 & \cdots & 2a + (n-2)a^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2a + (n-2)a^2 & 2a + (n-2)a^2 & \cdots & 1 + (n-1)a^2 \end{bmatrix} \\ &= (na - 2(n-1))A + (a-1)(na - (n-1))I \end{aligned}$$

がわかる.  $A$  はスカラー行列ではないので最小多項式  $\varphi$  は 1 次式ではなく,

$$\varphi(x) = x^2 - (na - 2(a-1))x - (a-1)(na - (a-1))$$

がわかる.

(2)  $\varphi(x) = (x+a-1)(x-na+a-1)$  より  $A$  の固有値は  $-a+1$ ,  $na-a+1$ .

(3)  $a$  が 1 とともに  $-1/(n-1)$  と異なる場合,  $A$  は正則なので  $\text{rank } A = n$ .

$a = 1$  の場合, 簡単に  $\text{rank } A = 1$ .

$a = -1/(n-1)$  の場合,  $A$  を基本変形を施して

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1/(n-1) & \cdots & -1/(n-1) \\ 0 & -1/(n-1) & 1 & \cdots & -1/(n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -1/(n-1) & -1/(n-1) & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

とできるが, 右下の行列は一番最初の場合より  $\text{rank} = n-1$  である. よって  $\text{rank} = n-1$ .

[2]

(1)  $f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  を線形写像とする. このとき行列  $A = (A_{ij})_{i,j}$  を  $a_{ij} = f(E_{ji})$  で定める. ここで  $E_{ij}$  は  $(i,j)$ -成分だけ 1 で他が 0 の行列を表す.  $f(X) = \text{tr}(AX)$  であることを示そう. 線形写像は基底の行き先で決まるので  $X = E_{ij}$  について示せばよい.

$$\text{tr}(AE_{ij}) = \sum_{k,l} A_{kl}(E_{ij})_{lk} = A_{ji} = f(E_{ij})$$

よりよい  $(E_{ij}$  の  $(l,k)$ -成分を  $(E_{ij})_{li}$  で表す).

(2) 答えは  $g(X) = c \text{tr}(X)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .  $g(X) = \text{tr}(CX)$ ,  $C \in M_n(\mathbb{R})$  が  $g(AB) = g(BA)$  ( $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ) を満たすとする. つまり

$$\text{tr}(CAB) = \text{tr}(CBA) \quad (\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})).$$

とくに  $A = E_{st}$ ,  $B = E_{uv}$  とおくと,

$$\sum_{i,j,k} C_{ij}(E_{st})_{jk}(E_{uv})_{ki} = \sum_{i,j,k} C_{ij}(E_{uv})_{jk}(E_{st})_{ki}$$

したがって  $C_{vs}\delta_{tu} = C_{tu}\delta_{vs}$ , つまり

$$v \neq s \implies C_{vs} = 0; \quad v = s, t = u \implies C_{uu} = C_{vv}$$

である. これは  $C$  がスカラー行列であることを示している.

(3) 答えは  $n^2 - 1$  次元. 包含写像  $\iota: V \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  の双対写像

$$\iota^*: M_n(\mathbb{R})^* \rightarrow V^*, \quad \iota^*(f) = f \circ \iota = f|_V$$

を考える.  $\iota$  は単射より  $\iota^*$  は全射. また (2) より  $\ker \iota^*$  は  $\text{tr}$  で生成されるので 1 次元. よって準同型定理より  $V^*$  は  $n^2 - 1$  次元である.

[3]

(1)  $X \ni x \mapsto (x, f(x)) \in Y$  は連続なので像を制限しても  $X \rightarrow \Gamma(f)$  は連続である. 連結空間の全射連続写像の像として  $\Gamma(f)$  は連結.

(2)  $x \in f^{-1}(A)$  とする. このとき  $(x, f(x)) \in p_Y^{-1}(A) \cap \Gamma(f)$  より,  $x = p_X(x, f(x)) \in p_X(p_Y^{-1}(A) \cap \Gamma(f))$ .

逆に  $x \in p_X(p_Y^{-1}(A) \cap \Gamma(f))$  とする. このとき, ある  $y \in Y$  があり  $(x, y) \in p_Y^{-1}(A) \cap \Gamma(f)$ . よって  $f(x) = y \in A$  となる.



(3)  $C \subset X \times Y$  を閉集合とする. このとき  $p_X(C)$  が  $X$  の閉集合であることを示す.  $x \in X \setminus p_X(C)$  とする. つまり任意の  $y \in Y$  に対して  $(x, y) \notin C$ .  $C$  は  $X \times Y$  の閉集合なので,  $X, Y$  それぞれの開集合  $U_y \subset X, V_y \subset Y$  があり,

$$(x, y) \in U_y \times V_y \subset (X \times Y) \setminus C$$

となる.  $\{V_y\}_{y \in Y}$  は  $Y$  の開被覆なので, コンパクト性より有限部分被覆  $V_{y_1}, \dots, V_{y_n}$  が存在する.

$$U := U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$$

は  $X$  の開集合であり,  $U \subset X \setminus p_X(C)$  である:  $x \in U$  を固定する. 任意の  $y \in Y$  について, ある  $i$  に対して  $y \in V_{y_i}$  となる.  $(x, y) \in U_{y_i} \cap V_{y_i} \subset (X \times Y) \setminus C$  となり,  $y \in Y$  は任意なので  $x \notin p_X(C)$ .

(4)  $f$  が連続だとする.  $(x, y) \in (X \times Y) \setminus \Gamma(f)$  だとする. このとき  $y \neq f(x)$  である.  $Y$  は Hausdorff 空間なので, 開集合  $U, V \subset Y$  があり,  $f(x) \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$  となる.  $f$  は連続より  $f^{-1}(U) \times V$  は  $X \times Y$  の開集合であり,  $f^{-1}(U) \times V \subset (X \times Y) \setminus \Gamma(f)$  となる.

逆に  $\Gamma(f)$  が閉だとする. このとき任意の開集合  $A \subset Y$  に対して

$$f^{-1}(A) = p_X(p_Y^{-1}(A) \cap \Gamma(f))$$

は, (2), (3) より  $X$  の閉集合である.

[4]

答えは  $\beta > 1, \alpha + \beta > 2$ .

(i) 問題の級数が収束する条件は  $\alpha + \beta > 1$ .

(ii) このとき, 級数  $\sum_{n \geq 1} n^{-\alpha}(x+n)^{-\beta}$  は  $f(x)$  に広義一様収束する. よって  $f$  は連続.

(iii) 広義一様収束なので, 任意の  $R > 0$  に対して

$$\int_0^R f(x) dx = \sum_{n \geq 1} \int_0^R \frac{1}{n^\alpha(x+n)^\beta}$$

である.  $\beta = 1$  の場合は

$$\int_0^R f(x) dx = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \log \left( 1 + \frac{R}{n} \right) \rightarrow \infty \quad (R \rightarrow \infty)$$

より広義積分は発散する.  $\beta \neq 1$  の場合

$$\int_0^R f(x) dx = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(\beta-1)n^\alpha} \left( \frac{1}{n^{\beta-1}} - \frac{1}{(R+n)^{\beta-1}} \right)$$

が  $R \rightarrow \infty$  で収束する条件は  $\beta - 1 > 0$  かつ  $\alpha + \beta - 1 > 1$ .

[5]

(1)  $\sqrt{a_n a_{n+1}} \leq \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$  より.  $a_n = 1 + 2^{-n} + (-1)^{n-1}(1 - 2^{-n})$  を考えれば逆は成り立たない.

(2)  $\varepsilon = 1$  に対して  $\delta > 0$  があり,

$$x, y \in [0, \infty), |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq 1$$

となる. よって  $x \geq \delta$  ならば

$$\int_{x-\delta}^{x+\delta} |f(x) - f(y)| dy \leq 2\delta$$

一方

$$\int_{x-\delta}^{x+\delta} |f(x) - f(y)| dy \geq \left| \int_{x-\delta}^{x+\delta} (f(x) - f(y)) dy \right| \geq 2\delta |f(x)| - \left| \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(y) dy \right| \geq 2\delta |f(x)| - 2 \sup_{[0, \infty)} |F|$$

よって

$$\sup_{x \in [\delta, \infty)} |f| \leq 1 + \frac{1}{\delta} \sup_{[0, \infty)} |F|$$

を得る.

$$\sup_{x \in [0, \infty)} |f| \leq 1 + \frac{1}{\delta} \sup_{[0, \infty)} |F| + \sup_{[0, \delta]} |f| < \infty$$

である.

## 1.14 2025 年度

[1]

(1) direct calculation より  $A$  の最小多項式は

$$\Phi(x) := x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$

(2)  $E$  (単位行列),  $A, A^2, A^3, A^4$  の第 1 列は, それぞれ

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

となる. よって  $E, A, \dots, A^4$  は  $\mathbb{C}$  上一次独立であるから  $A$  の最小多項式は  $\Phi$  と一致する.

(3)  $\Phi(x) = (x - \alpha_1)^{m_1} \cdots (x - \alpha_r)^{m_r}$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{C}$ ,  $m_i \geq 1$  と因数分解できたとすると  $A$  の Jordan 標準形は

$$\begin{bmatrix} J(\alpha_1, m_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\alpha_r, m_r) \end{bmatrix}, \quad \text{where } J(\alpha_i, m_i) = \begin{bmatrix} \alpha_i & 1 & & \\ & \alpha_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \alpha_i \end{bmatrix}$$

となることから (2) からわかる.

$$(x-1)^2(x+1)^2(x-2) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2$$

なので, 答えは

$$(a, b, c, d, e) = (-2, -2, 4, 1, 2).$$

[2]

(1)  $A$  の固有値は  $3, (1 \pm \sqrt{5})/2$ ;  $B$  の固有値は  $-1, 0, 4$  であることがわかる.  $A$  (resp.  ${}^tB$ ) の固有値  $\lambda$  (resp.  $\mu$ ) と対応する固有ベクトル  $v$  (resp.  $w$ ) に対して  $X = v {}^t w$  とおくと

$$f_{A,B}(X) = Av {}^t w B = (Av) ({}^t B w) = \lambda \mu X$$

となるので,  $\lambda \mu$  は  $f_{A,B}$  の固有値である. これで  $f_{A,B}$  の 9 個の固有値がすべて尽くされているので, 結局  $f_{A,B}$  の固有値は 0 (3 重), 12,  $-3, 2(1 \pm \sqrt{5})$ ,  $(-1 \pm \sqrt{5})/2$ . この中で絶対値最大のものは 12 であるが,  $A$  の固有値 3 に対応する固有ベクトルとして  ${}^t(1, 1, 1)$ ;  $B$  の固有値 4 に対応する固有ベクトルとして  ${}^t(1, 2, 1)$  が取れるので,  $f_{A,B}$  の固有値 12 に対応する固有ベクトルの 1 つとして

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

を得る.

(2) 答えは  $9 - rs$ . 正則行列  $P_1, P_2, Q_1, Q_2$  があり,

$$\tilde{A} := P_1 A P_2 = \begin{bmatrix} E_r & \\ & O_{3-r} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} := Q_1 B Q_2 = \begin{bmatrix} E_s & \\ & O_{3-s} \end{bmatrix}$$

となる.

$$f_{A,B}(X) = AXB = P_1^{-1} \cdot P_1 A P_2 \cdot P_2^{-1} X Q_1^{-1} \cdot Q_1 B Q_2 \cdot Q_2^{-1} = P_1^{-1} f_{\tilde{A}, \tilde{B}}(P_2^{-1} X Q_1^{-1}) Q_2^{-1}$$

であるから  $\text{rank } f_{A,B} = \text{rank } f_{\tilde{A}, \tilde{B}}$ . ここで行列単位  $E_{ij}$  に対して

$$f_{\tilde{A}, \tilde{B}}(E_{ij}) = \begin{cases} E_{ij} & (1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s) \\ O & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

なので,  $\text{rank } f_{A,B} = rs$ .

[3]

(1) 略.

(2) 答えは No.  $U, V \in \mathcal{O}$ ,  $U \neq \emptyset$ ,  $V \neq \emptyset$  とする. このとき  $\mathbb{R} \setminus U$ ,  $\mathbb{R} \setminus V$  は有界なので,  $M > 0$  があり,

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \geq M\} \subset U \cap V$$

となる. とくに  $U \cap V \neq \emptyset$  である.

(3) 答えは Yes.  $U, V \in \mathcal{O}$ ,  $U \neq \emptyset$ ,  $V \neq \emptyset$  で,  $A \subset U \cup V$ ,  $U \cap V \cap A = \emptyset$  となるものがあつたとする. このとき  $\mathbb{R} \setminus U$ ,  $\mathbb{R} \setminus V$  は有界なので,  $M > 0$  があり

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq M\} \subset U \cap V$$

となる.  $A$  は非有界なので  $A \cap \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq M\} \neq \emptyset$ . これは矛盾である.

(4) 答えは Yes.  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{O}$  を  $\mathbb{R}$  の開被覆とする.  $\lambda_0 \in \Lambda$  を任意に固定する. このとき  $\mathbb{R} \setminus U_{\lambda_0}$  は  $(\mathbb{R}, \mathcal{O}(\mathbb{R}^2))$  の有界閉集合なので  $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ -コンパクト. よって有限部分開被覆が取れ, これと  $U_{\lambda_0}$  と合わせれば  $\mathbb{R}^2$  の有限部分開被覆となる.

[4]

(1)  $f$  は全単射連続なので逆写像  $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が存在する.  $g = f^{-1}$  かつ  $g$  が連続であることを示す.  $f$  が狭義単調増加より  $f(t) < x$  と  $t < f^{-1}(x)$  が同値となることに注意すると,

$$g(x) = \sup \{t \in \mathbb{R} \mid f(t) < x\} = \sup \{t \in \mathbb{R} \mid t < f^{-1}(x)\} = f^{-1}(x)$$

を得る. とくに  $g$  は全単射かつ狭義単調増加. よって任意の  $a < b$  に対して

$$g^{-1}((a, b)) = (g^{-1}(a), g^{-1}(b)) = (f(a), f(b))$$

なので  $g$  は連続である.

(2)  $g$  は広義単調増加であることが定義より分かる. つまり  $y < x$  ならば  $g(y) \leq g(x)$  であるから,

$$\limsup_{y \rightarrow x-0} g(y) \leq g(x)$$

を得る. 以下  $g(x) \leq \liminf_{y \rightarrow x-0} g(y)$  を示す.  $\varepsilon > 0$  とする.  $g$  の定義より  $t_0 \in \mathbb{R}$  があり  $f(t_0) < x$  かつ  $g(x) < t_0 + \varepsilon$  となる. 任意の  $f(t_0) < y < x$  に対して  $g(y) \geq t_0$  であるから,  $g(x) < t_0 + \varepsilon \leq g(y) + \varepsilon$ . したがって

$$g(x) \leq \limsup_{y \rightarrow x-0} g(y) + \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$  は任意であるから結論を得る.

(3)  $f(t) = t^3 - t$  など.

[5]

(1)  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $(r, \theta) \in [0, 1] \times [\pi/4, \pi/2]$  と置換する.

$$\begin{aligned} I(a) &= \iint_D x^b e^{-\frac{ax^2}{x^2+y^2}} dx dy \\ &= \int_0^1 \int_{\pi/4}^{\pi/2} r(r \cos \theta)^b e^{-a \cos^2 \theta} r dr d\theta \\ &= \int_0^1 r^{1+b} dr \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^b \theta e^{-a \cos^2 \theta} d\theta \end{aligned}$$

$t = \cos \theta$  とおけば

$$I(a) = \int_0^1 r^{1+b} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{t^b}{\sqrt{1-t^2}} e^{-at^2} dt$$

となる. よって  $I(a)$  が収束する条件は  $b+1 > 0$  で,

$$I(a) = \frac{1}{b+2} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{t^b}{\sqrt{1-t^2}} e^{-at^2} dt.$$

(2)  $\tau = at^2$  と置換すると

$$I(a) = \frac{1}{b+2} \int_0^{a/2} \frac{(s/a)^{b/2}}{\sqrt{1-s/a}} e^{-s} \frac{ds}{2\sqrt{as}} = \frac{1}{2(b+2)} a^{-(b+1)/2} \int_0^{a/2} \frac{s^{(b-1)/2}}{\sqrt{1-s/a}} e^{-s} ds$$

となる. よって

$$a^{(b+1)/2}I(a) = \frac{1}{2(b+2)} \int_{\mathbb{R}} \frac{s^{(b-1)/2}}{\sqrt{1-s/a}} e^{-s} \mathbb{1}_{[0,a/2]} ds.$$

ここで  $\frac{s^{(b-1)/2}}{\sqrt{1-s/a}} e^{-s} \mathbb{1}_{[0,a/2]} \rightarrow 0$  a.e.  $s \in \mathbb{R}$  かつ  $\frac{s^{(b-1)/2}}{\sqrt{1-s/a}} e^{-s} \mathbb{1}_{[0,a/2]} \leq \sqrt{2} s^{(b-1)/2} e^{-s} \in L^1(\mathbb{R})$  より dominated convergence が使えて

$$\lim_{a \rightarrow \infty} a^{(b+1)/2}I(a) = \frac{1}{2(b+2)} \Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)$$

を得る.

## 2 午後

主に解析系の問題を解いていく.

### 2.1 2014 年度

[5]

$$(1) \text{ 答えは } \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r(\theta)} z^n dz = \begin{cases} i\theta & (n = -1) \\ 0 & (n \geq 0) \end{cases}.$$

$$(2) \text{ 答えは } 2\pi i \sum_{j=1}^n \alpha_j.$$

[6]

(1)  $e^{-x^n} \searrow 0$  a.e.  $x \in [1, \infty)$  に注意する.  $f(x)(1 - e^{-x^n}) \rightarrow f(x)$  a.e. かつ  $|f(x)(1 - e^{-x^n})| \leq |f(x)| \in L^1$  なので, dominated convergence より結論を得る.

(2)  $f_M(x) = -\sum_{k=1}^M \frac{(-1)^k}{k!} f(x) x^{kn}$  とおく. まず  $f_M(x) \rightarrow f(x)(1 - e^{-x^n})$  a.e.  $x \in [1, \infty)$  as  $M \rightarrow \infty$  である. さらに固定された  $N > 0$  に対して

$$|f_M(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} |f(x)| \leq (e^{N^n} - 1) |f(x)| \in L^1 \quad (x \in [1, N])$$

が成り立つので, dominated convergence から帰結する.

(3)  $\varphi'(t) = -\int_0^\infty \frac{f(x)}{(x+t)^2} dx$  であることを示す.  $t \in (0, \infty)$ ,  $h \in \mathbb{R}$ ,  $|h| < \min\{1, t/2\}$  に対して簡単な計算により

$$\left| \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} + \int_0^\infty \frac{f(x)}{(x+t)^2} dt \right| \leq \int_0^\infty \frac{|h|}{(x+h+t)(x+t)^2} |f(x)| dx$$

である.  $\frac{|h|}{(x+h+t)(x+t)^2} |f(x)| \rightarrow 0$  a.e. as  $h \rightarrow 0$  であり,  $\frac{|h|}{(x+h+t)(x+t)^2} |f(x)| \leq 2|f(x)|/t^3 \in L^1$  より dominated convergence が適用できる.

$\varphi'$  の連続性も同様.

[8]

(1) (B) の同次化 (BH) :  $-x'' = \lambda x$ ,  $x(0) = x(\pi) = 0$  の解が 0 しかないことを示せばよい.

- (i)  $\lambda > 0$  の場合, (BH) の一般解は  $x = A \cos \sqrt{\lambda}t + B \sin \sqrt{\lambda}t$ .  $x(0) = x(\pi) = 0$  より  $A = 0$ ,  $B \sin \sqrt{\lambda}\pi = 0$ . よって解は  $x \equiv 0$  であるか,  $\lambda = k^2$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) かつ  $x = B \sin k\pi$ . 後者は仮定より棄却される.
- (ii)  $\lambda < 0$  の場合, (BH) の一般解は  $x = A \cosh \sqrt{-\lambda}t + B \sinh \sqrt{-\lambda}t$ .  $x(0) = x(\pi) = 0$  より  $A = 0$  かつ  $B \sinh \sqrt{-\lambda}\pi = 0$ . よって  $B = 0$ .
- (iii)  $\lambda = 0$  の場合, (BH) の一般解は  $x = Ax + B$ .  $x(0) = x(\pi) = 0$  より  $A = B = 0$ .
- (2)  $-x'' = n^2x + f$ ,  $x(0) = x(\pi) = 0$  と仮定する. 部分積分により

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(t) \sin nt \, dt &= \int_0^\pi (-x'' - n^2x) \sin nt \, dt \\ &= n \int_0^\pi x' \cos nt \, dt - n^2 \int_0^\pi x \sin nt \, dt \\ &= n^2 \int_0^\pi x \sin nt \, dt - n^2 \int_0^\pi x \sin nt \, dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって矛盾.

(3)  $x(t) = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{k^2 - \lambda} \sin kt$ .

(4)  $x_n$  は  $[0, \pi]$  で一様 Cauchy 列である.

## 2.2 2015 年度

[5]

結論:  $A_n \rightarrow -2$ ,  $B_n$  は収束しない.  $f_n(x) = (nx^2 \cos x)/(1 + nx)$ ,  $g_n(x) = (nx \cos x)/(1 + nx^2)$  とおく.  $f_n \rightarrow x \cos x$  a.e. である. また  $f_n(x) \leq x \in L^1([0, \pi])$ . よって dominated convergence が適用できて

$$A_n = \int_0^\pi f_n(x) \, dx \rightarrow \int_0^\pi x \cos x \, dx = -2$$

を得る.

$B_n = \int_0^\pi g_n(x) \, dx$  が発散することを示す.  $g_n \rightarrow (\cos x)/x$  a.e. に注意する. 積分区間を  $\int_0^{\pi/3} + \int_{\pi/3}^\pi$  に分ける.  $|g_n(x)| \leq 1/x \leq 3/\pi$  ( $x \in [\pi/3, \pi]$ ) より  $\int_{\pi/3}^\pi g_n(x) \, dx$  は収束する. 一方

$$\int_0^{\pi/3} g_n(x) \, dx \geq \int_0^{\pi/3} \frac{nx}{1 + nx^2} \cdot \frac{1}{2} \, dx = \frac{1}{4} \log \left( 1 + \frac{n\pi^2}{9} \right) \rightarrow \infty$$

である.

[7]

(1) 関数  $1/(1 + z^{2n+1})$  の閉曲線  $C_R = \partial D_R$  上の線積分を考える. ただし

$$D_R = \{re^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi/(2n+1)\}.$$

$D_R$  における  $1/(1+z^{2n+1})$  の極は  $\zeta = \exp(\pi i/(2n+1))$  ただ 1 つで,  $C_R$  上にはない. 留数定理より

$$\begin{aligned}\int_{C_R} \frac{dz}{1+z^{2n+1}} &= 2\pi i \operatorname{Res}(\zeta, 1/(1+z^{2n+1})) \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{z-\zeta}{1+z^{2n+1}} \\ &= 2\pi i \left( \prod_{k=1}^{2n} (\zeta - \zeta^{2k+1}) \right)^{-1} \\ &= 2\pi i \zeta^{-2n} \left( \prod_{k=1}^{2n} (1 - \zeta^{2k}) \right)^{-1}\end{aligned}$$

である. 今,  $z^{2n+1} - 1$  の根は  $z = \exp(2\pi k/(2n+1)) = \zeta^{2k}$  ( $k = 0, 1, \dots, 2n$ ) であるから因数分解公式

$$(z-1)(z^{2n} + \dots + z + 1) = z^{2n+1} - 1 = \prod_{k=0}^{2n} (z - \zeta^{2k})$$

が成り立つ. 両辺を  $z-1$  で割って  $z \rightarrow 1$  の極限を考えると

$$2n+1 = \prod_{k=1}^{2n} (1 - \zeta^{2k})$$

を得る. したがって線積分の結果は

$$\int_{C_R} \frac{dz}{1+z^{2n+1}} = \frac{2\pi i \zeta^{-2n}}{2n+1} = -\frac{2\pi i \zeta}{2n+1}$$

を得る. さて, ここで線積分の経路を  $C_R = I_R \cup \Gamma_R \cup J_R$ ,

$$I_R = [0, R], \quad \Gamma_R = \{Re^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi/(2n+1)\}, \quad J_R = \{r\zeta^2 \mid 0 \leq r \leq R\}$$

と分ける.

$$\begin{aligned}\int_{J_R} \frac{dz}{1+z^{2n+1}} &= \int_R^0 \frac{\zeta^2 dr}{1+r^{2n+1}} = -\zeta^2 \int_0^R \frac{dx}{1+x^{2n+1}} \\ \left| \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{1+z^{2n+1}} \right| &\leq \frac{1}{R^{2n+1}-1} \cdot \frac{2\pi R}{n} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)\end{aligned}$$

より,  $R \rightarrow \infty$  における極限で

$$(1 - \zeta^2) \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^{2n+1}} = -\frac{2\pi i \zeta}{2n+1}$$

が成り立つ. したがって

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^{2n+1}} = \frac{\pi}{(2n+1)(\zeta - \zeta^{-1})/(2i)} = \frac{\pi}{(2n+1)\sin(\pi/(2n+1))}$$

が示された.

(2)  $\log|\varphi(z)|$  が  $z$  に関する調和関数であることが計算により分かる.

[7]

(1)  $h_1(x, t) = \sin x + 2t^{1/2} \sin^2 x$ .

(2)  $T < 1/64$  でよいことを帰納法で示す.  $0 < t < 1/64$  ならば  $|h_1(x, t)| \leq 1 + 2t^{1/2} \leq 2$  なので  $j = 0, 1$  での成立はよい.  $\|h_j\|_T \leq 2$  を仮定する. このとき  $0 < t < T$  に対して

$$|h_{j+1}(x, t)| \leq |h_0(x, t)| + \int_0^t \frac{\|h_j\|_T^2}{(t-s)^{1/2}} ds \leq 1 + 2t^{1/2} \|h_j\|_T^2 \leq 1 + 2 \cdot \frac{1}{64^{1/2}} \cdot 2^2 \leq 2$$

を得る. よって  $\|h_{j+1}\|_T \leq 2$  である.

(3)  $T < 1/256$  でよい. 実際,  $0 < t < T$  に対して

$$\begin{aligned} |h_{j+1}(x, t) - h_j(x, t)| &\leq \int_0^t \frac{|h_j(x, t)|^2 - |h_{j-1}(x, t)|^2}{(t-s)^{1/2}} ds \\ &\leq (\|h_j\|_T + \|h_{j-1}\|_T) \|h_j - h_{j-1}\|_T \cdot 2t^{1/2} \\ &\leq (2 + 2) \|h_j - h_{j-1}\|_T \cdot 2t^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2} \|h_j - h_{j-1}\|_T \end{aligned}$$

となる. つまり  $\|h_{j+1} - h_j\|_T \leq \frac{1}{2} \|h_j - h_{j-1}\|_T$ . これを繰り返し用いて

$$\|h_{j+1} - h_j\|_T \leq \frac{1}{2} \|h_j - h_{j-1}\|_T \leq \cdots \leq \frac{1}{2^j} (\|h_1\| + \|h_0\|) \leq 2^{-j+2}$$

を得る. よって, 任意の  $j < k$  に対して

$$\|h_j - h_k\|_T \leq \sum_{i=j-1}^k \|h_{i+1} - h_i\|_T \leq \sum_{i=j-1}^k 2^{-i+2} = 8(2^{-j} - 2^{-k}) \rightarrow 0 \quad (j, k \rightarrow \infty)$$

である.

## 2.3 2016 年度

[6]

(1)  $\infty > \int_{\mathbb{R}} f \geq \int_{\mathbb{R} \setminus F_\alpha} f \geq \alpha |\mathbb{R} \setminus F_\alpha|$  より従う.

(2)  $x \in F_\alpha$  ならば  $g_n(x) \leq \frac{\alpha^n}{1+\alpha^n} \rightarrow 0$  であり,  $g_n \mathbb{1}_{F_\alpha} \leq f \in L^1$  より dominated convergence が適用できる ( $0 \leq y \leq 1$  ならば  $y^n/(1+y^n) \leq y$  に注意せよ).

(3)  $\int_{\mathbb{R}} = \int_{\{f>1\}} + \int_{\{f<1\}} + \int_{\{f=1\}}$  とわけ.

$g_n \mathbb{1}_{\{f>1\}} \rightarrow \mathbb{1}_{\{f>1\}}$  a.e. かつ  $g_n \mathbb{1}_{\{f>1\}} \leq \mathbb{1}_{\{f>1\}} \in L^1$  ((1) より) なので  $\int_{\{f>1\}} g_n \rightarrow |\{f>1\}|$  を得る.

$f(x) < 1$  ならば  $g_n(x) \mathbb{1}_{\{f<1\}}(x) \leq (f(x))^n \rightarrow 0$  なので  $g_n \mathbb{1}_{\{f<1\}} \rightarrow 0$  a.e., また  $g_n \mathbb{1}_{\{f<1\}} \leq f \in L^1$  なので  $\int_{\{f<1\}} g_n \rightarrow 0$  を得る.

$g_n \mathbb{1}_{\{f=1\}} = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}_{\{f=1\}}$  より  $\int_{\{f=1\}} g_n = |\{f=1\}|/2$  である.

[7]

相図を描けば明らか (だと思うのだが……).



[8]

(1) 偏角の原理の証明問題. 2024 年度問 [5] に同じ問題が出題されている.

(2)  $D_{\pm} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z \pm i/2| \leq 1\}$  とおいたとき対称差  $D_+ \triangle D_-$  から境界を除いたものを描けばよい.

## 2.4 2017 年度

[7]

(1)  $|w| < m$  ならば,

$$\begin{aligned} g(w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} \frac{1}{1 - w/f(\zeta)} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{|\zeta|=r} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} \left( \frac{w}{f(\zeta)} \right)^k d\zeta \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)^{k+1}} d\zeta \right) w^k \end{aligned}$$

が成り立つ. なお, 無限和と線積分の交換に円周  $|\zeta| = r$  における一様収束性

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \sup_{|\zeta|=r} \left| \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} \frac{1}{1 - w/f(\zeta)} - \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} \sum_{k=0}^N \left( \frac{w}{f(\zeta)} \right)^k \right| \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{r}{m} \left( \sup_{|\zeta|=r} |f'| \right) \sum_{k=N+1}^{\infty} \left( \frac{|w|}{m} \right)^k = 0$$

を用いた. よって  $g$  は整級数で表されるので正則.

(2)  $h(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta$  とおく. (1) と同様に  $f$  は  $|w| < m$  で正則. 一方偏角の原理により  $h(w)$  は  $|\zeta| < r$  における  $f(\zeta) = w$  の解の個数を表す. とくに  $h$  は離散値を取り連続なので定数. 仮定より  $h(0) = 1$  なので  $h \equiv 1$ .

(3) (2) より,  $|w| < m$  に対して  $\zeta f'(\zeta)/(f(\zeta) - w)$  の  $|\zeta| < r$  における極は, 1 位の極  $z(w)$  ただ 1 つである. よって

$$h(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta = \text{Res}(z(w), \zeta f'(\zeta)/(f(\zeta) - w)) = \lim_{\zeta \rightarrow z(w)} (\zeta - z(w)) \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} = z(w).$$

[8]

(1)  $g_r \leq g$  より, dominated convergence の優関数として  $g$  が取れる. まず  $r \rightarrow \infty$  の極限を考える.  $|g| < \infty$  a.e. より  $g_r(x) = \min\{g(x), r\} \rightarrow g(x)$  a.e. より. 次に  $r \rightarrow +0$  の極限は  $g_r(x) \rightarrow 0$  a.e. がわかる ( $g > 0$ ,  $= 0$  となる点をそれぞれ考えよ).

(2) 可測集合  $A$  および  $r > 0$  に対して

$$\int_A g d\lambda = \int_{A \cap \{g \leq r\}} g d\lambda + \int_{A \cap \{g > r\}} g d\lambda \leq r\mu(A) + \int_{\mathbb{R}} g \mathbb{1}_{\{g \geq r\}} d\lambda$$

である. よって

$$\limsup_{\delta \rightarrow +0} \sup_{\lambda(A) < \delta} \int_A g d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} g \mathbb{1}_{\{g \geq r\}} d\lambda \quad (\forall r > 0).$$

今,  $|g| < \infty$  a.e. より  $g(x)\mathbb{1}_{\{g \geq r\}}(x) \rightarrow 0$  a.e. また  $|g|\mathbb{1}_{\{g \geq r\}} \leq |g| \in L^1$  より dominated convergence が使えて

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g \mathbb{1}_{\{g \geq r\}} d\lambda = 0$$

を得る.

(3)  $r > 0$  に対して

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f - f_n| d\lambda &= \left( \int_{\{|f - f_n| \leq r\}} + \int_{\{|f - f_n| > r\}} \right) |f - f_n| d\lambda \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \min\{|f - f_n|, r\} d\lambda + 2 \int_{\{|f - f_n| > r\}} g d\lambda \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}} g_r d\lambda + 2 \int_{\{|f - f_n| > r\}} g d\lambda \end{aligned}$$

である. 今, 仮定より, 任意の  $\delta > 0$  に対して  $N \in \mathbb{N}$  があり  $\lambda(\{|f - f_n| > r\}) < \delta$  ( $\forall n \geq N$ ) となる. よって  $n \geq N$  ならば

$$\int_{\mathbb{R}} |f - f_n| d\lambda \leq 2 \int_{\mathbb{R}} g_r d\lambda + 2 \sup_{\lambda(A) < \delta} \int_A g d\lambda$$

である.  $\limsup_{n \rightarrow \infty}$  としたあとに  $r \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow +0$  として結論を得る.

[9]

(1)  $x, y \in C(I)$ ,  $t \in [0, 1]$  に対して

$$|Sx(t) - Sy(t)| = \int_0^{t^2} |A(s)| |x(s) - y(s)| ds \leq \|A\| \|x - y\|$$

より  $\|Sx - Sy\| \leq \|A\| \|x - y\|$  を得る.

(2)

$$\begin{aligned} |S^m x(t) - S^m y(t)| &= \left| \int_0^{t^2} ds_1 (S^{m-1} x(s_1) - S^{m-1} y(s_1)) \right| \\ &\leq \int_0^{t^2} ds_1 \int_0^{s_1^2} ds_2 \cdots \int_0^{s_{m-1}^2} ds_m |A(s_m)| |x(s_m) - y(s_m)| \\ &\leq \|x - y\| \|A\| \int_0^1 ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \cdots \int_0^{s_{m-1}} ds_m \\ &= \|x - y\| \|A\| \frac{1}{m!} \end{aligned}$$

より  $\|A\|/m_0! < 1/2$  くらい  $m_0$  を大きく取れば  $m \geq m_0$  に対して  $\|S^m x - S^m y\| \leq \frac{1}{2} \|x - y\|$  となる.

(3)  $x_n \in C(I)$  を,

$$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = Sx_n$$

により定める. つまり  $x_n = S^n x_0$ . 任意の  $n \geq m_0$  に対して

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \frac{1}{2} \|x_n - x_{n-1}\| \leq \cdots \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_0\| = \frac{|\alpha|}{2^n}$$

となる. よって  $n > m \geq m_0$  に対して

$$\|x_n - x_m\| \leq \sum_{k=m}^{n-1} \|x_{k+1} - x_k\| \leq 2|\alpha|(2^{-m} - 2^{-n}) \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty)$$

となる.  $C(I)$  は完備なので Cauchy 列  $(x_n)$  はある  $x \in C(I)$  に収束する.

$$\|Sx - x\| \leq \|S(x - x_n)\| + \|x_{n+1} - x\| \leq M\|x - x_n\| + \|x_{n+1} - x\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

より  $Sx = x$  を得る.  $\xi$  が他の固定点, つまり  $S\xi = \xi$  だとする. このとき

$$\|x - \xi\| = \|S^{m_0}x - S^{m_0}\xi\| \leq \frac{1}{2}\|x - \xi\|$$

より  $x = \xi$ . よって固定点は一意.

## 2.5 2018 年度

[6]

(1)

$$\left| \int_{L_{\pm}(R)} e^{-z^2/2} dz \right| = \left| \int_0^a e^{-(R^2 \pm 2Rti - t^2)/2} i dt \right| \leq \int_0^a e^{(-R^2 + t^2)/2} dt \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

(2)  $D_R = \{z \mid |\operatorname{Re} z| \leq R, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq a\}$ ,  $I_R = [-R, R]$ ,  $J_R = \{s + ai \mid -R \leq s \leq R\}$  とおく.

$$\int_{J_R} e^{-z^2/2} dz = \int_{-R}^R e^{-(s^2 - a^2 + 2asi)/2} ds = e^{a^2/2} \int_{-R}^R e^{-s^2/2} (\cos as - i \sin as) ds$$

一方,

$$0 = \int_{\partial D_R} e^{-z^2/2} dz = \int_{-R}^R e^{-s^2/2} ds - e^{a^2/2} \int_{-R}^R e^{-s^2/2} (\cos as - i \sin as) ds + \left( \int_{L_+} - \int_{L_-} \right) e^{-z^2/2} dz$$

なので,  $R \rightarrow \infty$  として実部を見ると

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/2} \cos as ds = \sqrt{2\pi} e^{-a^2/2}$$

を得る. 左辺の被積分関数は偶関数なので 2 で割って結論を得る.

[7]

(1)

$$\int_X e^{\lambda f(x)} d\mu(x) \geq \int_{\{x \mid f(x) > k\}} e^{\lambda k} d\mu = e^{\lambda k} \mu(\{x \mid f(x) > k\})$$

より従う.

(2)  $f(x) = x$  とすれば

$$\begin{aligned} e^{\lambda k} \mu((k, \infty)) &\leq \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\lambda^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-\lambda)^2/2} dx \\ &= e^{\lambda^2/2} \end{aligned}$$

を得る．とくに  $\lambda = k$  として結論を得る．

[8]

$$(1) x(t) = e^{-2t}(x_0 \cos t + (2x_0 + x_1) \sin t).$$

$$(2) \mathbf{x} = {}^t(x, x') \text{ は}$$

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{g}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x, y) \end{bmatrix}$$

である．線形項について行列の固有値の実部はすべて負なので，次の補題より原点は局所漸近安定平衡点．

**補題 1.**  $n$  次元非線形自励系  $u' = Au + g(u)$  を考える．ただし  $A \in M_n(\mathbb{R})$  であり， $g \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  は局所 Lipschitz 連続かつ  $g(p) = o(p)$  ( $p \rightarrow 0$ ) を満たすものとする．このとき

$$\Lambda := \max \{ \operatorname{Re} \lambda \mid \lambda \in \mathbb{C} \text{ は } A \text{ の固有値} \} < 0$$

ならば，自励系の平衡点  $0$  は指数安定である．

*Proof.* 追記予定.

□

## 2.6 2019 年度

[5]

(1-1) 次の鏡像原理を思い出す： $D_1$  を上半平面  $\mathbb{H}$  内の領域とし， $\partial D_1 \cap \mathbb{R}$  はある开区間  $I$  を含むとする． $f \in C(D_1 \cup I)$  は  $D_1$  内で正則で， $f(x) \in \mathbb{R}$  ( $x \in I$ ) ならば， $f$  は  $D_1 \cup I \cup D_2$  まで正則に拡張される．ここで  $D_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z} \in D_1\}$ ．

問題の解答に戻る．鏡像原理より， $f$  は  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$  まで正則に， $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq 0\} \setminus \{0\}$  まで連続に拡張される．さらに  $g(z) = if(iz)$  に対して鏡像原理を用いることで， $f$  は  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  にまで正則に拡張される．条件 3 より， $0$  は  $f$  の除去可能特異点である (Riemann の除去可能定理)．よって  $f$  は  $\mathbb{C}$  上の正則関数  $F$  に拡張される．

(1-2) したがって， $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$  は存在する．

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{r \rightarrow +0} f(re^{i\pi/2}) \in \mathbb{R} \cap (i\mathbb{R}) = \{0\}$$

より  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0$  を得る．

(2) 単連結領域  $\Lambda(\theta_0)$  は  $0$  を含まないので， $z^{2\theta_0/\pi} = e^{\frac{2\theta_0}{\pi} \log z}$  の一価な分枝が取れる． $g(z) = f(z^{2\theta_0/\pi})$  は  $\Lambda(\pi/2)$  上定義されるので，(1) に帰着する．

[6]

(1) (a)  $\varepsilon = 1 > 0$  に対して  $K > 0$  があり，

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\{|f_n| \geq K\}} |f_n| d\mu < 1$$

となる．一方，

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\{|f_n| \leq K\}} |f_n| d\mu \leq K \cdot \mu(X)$$

である。よって

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X |f_n| d\mu \leq 1 + K\mu(X)$$

を得る。

(b) 任意の  $A \in \mathcal{B}$ ,  $K > 0$  に対して,

$$\begin{aligned} \int_A |f_n| d\mu &= \int_{A \cap \{|f_n| \geq K\}} |f_n| d\mu + \int_{A \cap \{|f_n| \leq K\}} |f_n| d\mu \\ &\leq \int_{\{|f_n| \geq K\}} |f_n| d\mu + K\mu(A) \end{aligned}$$

である。よって,

$$\limsup_{\delta \rightarrow +0} \sup_{A \in \mathcal{B}, \mu(A) < \delta} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_A |f_n| d\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{|f_n| \geq K} |f_n| d\mu$$

である。  $K \rightarrow \infty$  として結論を得る。

(2) まず,

$$M := \sup_{f \in \mathcal{C}} \int_X |f|^p d\mu \geq \sup_{f \in \mathcal{C}} \int_{\{|f| \geq K\}} K^p d\mu = K^p \sup_{f \in \mathcal{C}} \mu(\{|f| \geq K\})$$

である。  $p'$  を  $p$  の Hölder 共役指数として ( $p^{-1} + p'^{-1} = 1$ )

$$\begin{aligned} \int_{\{|f| \geq K\}} |f| d\mu &= \int_X |f| \cdot \mathbb{1}_{\{|f| \geq K\}} \\ &\leq \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \mu(\{|f| \geq K\})^{1/p'} \\ &\leq \frac{M}{K^{p-1}} \end{aligned}$$

となる。したがって

$$\limsup_{K \rightarrow \infty} \sup_{f \in \mathcal{C}} \int_{\{|f| \geq K\}} |f| d\mu = 0$$

を得る。

[7]

(1)  $x \in H$  に対して, Bessel の不等式より

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

である。よって  $\langle x, e_n \rangle \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) である。

(2)

$$\left\| n^{-\alpha} \sum_{j=1}^n e_j \right\|^2 = n^{-2\alpha} \cdot n = n^{1-2\alpha} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

(3)  $x \in H$ ,  $m < n$  に対して

$$\begin{aligned} \left| \langle x, n^{-1/2} \sum_{j=1}^n e_j \rangle \right| &\leq n^{-1/2} \left( \sum_{j=1}^m |\langle x, e_j \rangle| + \sum_{j=m+1}^n |\langle x, e_j \rangle| \right) \\ &\leq n^{-1/2} \left( m \|x\| + \left( \sum_{j=m+1}^n |\langle x, e_j \rangle|^2 \right)^{1/2} (n-m)^{1/2} \right) \\ &= n^{-1/2} m \|x\| + \left( 1 - \frac{n}{m} \right)^{1/2} \left( \sum_{j=m+1}^n |\langle x, e_j \rangle|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

よって

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \langle x, n^{-1/2} \sum_{j=1}^n e_j \rangle \right| \leq \left( \sum_{j=m+1}^{\infty} |\langle x, e_j \rangle|^2 \right)^{1/2}$$

である.  $m \rightarrow \infty$  として結論を得る.

[8]

(1)  $u$  は狭義単調増加であることに注意する.

$t_0$  を極大延長可能時刻, つまり  $t_0 = \sup \{ t > 0 \mid u \text{ は } [0, t) \text{ で定義される} \}$  とする.

$$\frac{u'(t)}{f(u(t))} = 1$$

より,

$$\int_0^{u(t)} \frac{dx}{f(x)} = t$$

である. もし  $t_0 < \infty$  ならば,  $\lim_{t \rightarrow t_0-0} u(t) = \infty$  である<sup>\*1</sup>. よって

$$\infty = \lim_{t \rightarrow t_0-0} \int_0^{u(t)} \frac{dx}{f(x)} = t_0 < \infty$$

となり矛盾.

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_0^{u(t)} \frac{dx}{f(x)} = \infty$$

より  $u(t) \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow \infty$ ).

(2) もし  $u_T := \lim_{t \rightarrow T-0} u(t) < \infty$  ならば,

$$\int_0^{u_T} \frac{dx}{f(x)} = T = \int_0^{\infty} \frac{dx}{f(x)}$$

これは  $f > 0$  に反する.

(3)  $L = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} < \infty$  とすると, ある  $M > 0$  について,  $\frac{f(x)}{x} \leq L$  ( $\forall x \geq M$ ) となる.

もし  $u \leq M$  ( $\forall t \geq 0$ ) ならば,  $e^{-t}u(t) \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow \infty$ ) である.

---

<sup>\*1</sup> もし  $\lim_{t \rightarrow t_0-0} u(t) < \infty$  ならば,  $f$  は  $[0, t_0]$  に拡張され, さらに局所解の存在より  $[0, t_0 + \varepsilon)$  ( $\exists \varepsilon > 0$ ) に拡張される. これは極大性に矛盾.

ある  $t_0 > 0$  について  $u(t) \geq M$  ( $\forall t > t_0$ ) ならば,

$$\{e^{-Lt}u(t)\}' = e^{-Lt}(u'(t) - Lu(t)) = e^{-Lt}(f(u(t)) - Lu(t)) \leq 0$$

である. よって

$$e^{-Lt}u(t) \leq e^{-Lt_0}u(t_0) \quad (t \geq t_0)$$

したがって  $e^{-2Lt}u(t) \leq e^{-L(t_0+t)}u(t_0) \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow \infty$ ).

## 2.7 2020 年度

[5]

(1)  $I = 1/(1 - \lambda)$ . (2)  $z + z^2e^{-2019z}$  など.

[6]

(1)  $\{a_n\}_n \in l^1$  とする. このとき  $a_n \rightarrow 0$  であるから  $\{n \mid |a_n| \geq 1\}$  は有限集合である. よって

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p = \sum_{n: |a_n| \geq 1} |a_n|^p + \sum_{n: |a_n| \leq 1} |a_n|^p \leq \sum_{n: |a_n| \geq 1} |a_n|^p + \sum_{n: |a_n| \leq 1} |a_n| < \infty$$

となる.

(2)  $\alpha > 1/2$  のとき,  $\{a_n\}_n \in l^2$  に対して Hölder の不等式より

$$\|T_\alpha \{a_n\}_n\|_{l^1} = \sum_{n \geq 1} n^{-\alpha} |a_n| \leq \left( \sum_{n \geq 1} n^{-2\alpha} \right)^{1/2} \|\{a_n\}_n\|_{l^2}$$

だからである.

(3) 答えは No.  $a_n = 1/(n^{1/2} \log n)$  ( $n \geq 2$ ) とおくと  $\{a_n\}_n \in l^2$  だが,  $T_{1/2} \{a_n\}_n \notin l^1$  である.

(4)  $N = 1, 2, \dots$  に対して  $T_\alpha^{(N)}: l^2 \rightarrow l^1$  を

$$(T_\alpha^{(N)} \{a_n\}_n)_n = \begin{cases} n^{-\alpha} a_n & (n = 1, \dots, N) \\ 0 & (n > N) \end{cases}$$

と定める.  $T_\alpha^{(N)}$  は finite-rank operator (像が有限次元) であるからコンパクト作用素. 一方,

$$\|(T_\alpha - T_\alpha^{(N)}) \{a_n\}_n\|_{l^1} = \sum_{n \geq N+1} n^{-\alpha} |a_n| \leq \left( \sum_{n \geq N+1} n^{-2\alpha} \right)^{1/2} \|\{a_n\}_n\|_{l^2}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \|T_\alpha - T_\alpha^{(N)}\|_{\mathcal{L}(l^2, l^1)} &= \sup_{\{a_n\}_n \in l^2, \|\{a_n\}_n\|_{l^2} \leq 1} \|(T_\alpha - T_\alpha^{(N)}) \{a_n\}_n\|_{l^1} \\ &\leq \left( \sum_{n \geq N+1} n^{-2\alpha} \right)^{1/2} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

である. よって,  $T_\alpha$  は, コンパクト作用素  $T_\alpha^{(N)}$  の作用素ノルム  $\|\bullet\|_{\mathcal{L}(l^2, l^1)}$  に関する極限としてコンパクト作用素である.

[7]

(1) 正しくない.  $I_n = [-1/n, 1/n]$  として  $f_n(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus I_n}/x^3$  とおくと  $f_n \in L^1(\mathbb{R})$  は  $f(x) = 1/x^3$  にほとんど至る所収束する. 例えば  $\varphi(x) = \begin{cases} 1 - |x| & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$  とおくと,

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \varphi = 0 \quad (n \geq 1)$$

である. 一方  $f\varphi$  は可積分ではない.

(2) 正しい.  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f_n(x) \not\rightarrow f(x)\}$  として,  $n \geq 1, \varepsilon > 0$  に対して

$$A_{n,\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R} \mid |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}$$

とおく.

$$A = \bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} A_{m,\varepsilon}$$

である. 今  $m(A) = 0$  なので, 測度の単調収束定理より任意の  $\varepsilon > 0$  に対して

$$0 = m(A \cap [-1/\varepsilon, 1/\varepsilon]) \geq m\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} A_{m,\varepsilon} \cap [-1/\varepsilon, 1/\varepsilon]\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} m\left(\bigcup_{m \geq n} A_{m,\varepsilon} \cap [-1/\varepsilon, 1/\varepsilon]\right)$$

である.

(3) 正しい.  $\Phi$  は連続なので  $\Phi \circ f_n$  は  $\Phi \circ f$  にほとんど至るところ収束する. 一方  $\int_{\mathbb{R}} \Phi(f_n(x)) dx \rightarrow 0$  より, ある部分列  $\Phi \circ f_{n_k}$  は 0 にほとんど至るところ収束する. よって  $\Phi \circ f = 0$  a.e. を得る.

(4) 正しい.  $\Psi(x, f_n(x))$  は  $\Psi(x, f(x))$  に a.e. で収束する.

$$K := \text{pr}(\text{supp } \Psi) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} \text{ s.t. } (x, y) \in \text{supp } \Psi\}$$

とおくと

$$|\Psi(x, f_n(x))| \leq M \mathbb{1}_K$$

である. ここで  $M = \sup_{\mathbb{R}^2} |\Psi|$ . 今  $K$  はコンパクトなので  $M \mathbb{1}_K$  は可積分. よって dominated convergence により結論が得られる.

[8]

(1)  $f(t) = \int_0^t u(s) ds$  とおくと,  $u$  は  $C^1$  級で  $u(t) \leq f(t) + c$ .

$$\{e^{-t}(f(t) + c)\}' = e^{-t}(u(t) - f(t) - c) \leq 0$$

となるので  $e^{-t}(f(t) + c)$  は単調非増加.  $t = 0$  での値を考えて  $e^{-t}(f(t) + c) \leq c$  を得る. よって

$$u(t) \leq f(t) + c \leq ce^t$$

(2)  $f(t) = \int_0^t (s+1)^{-1} u(s) ds$  とおくと  $u(t) \leq f(t) + (t+1)^2$  である.

$$\left\{ \frac{f(t)}{t+1} \right\}' = \frac{f'(t)(t+1) - f(t)}{(t+1)^2} = \frac{u(t) - f(t)}{(t+1)} \leq 1$$



より  $(t+1)^{-1}f(t) \leq t$  を得る. よって

$$u(t) \leq f(t) + (t+1)^2 \leq t(t+1) + (t+1)^2 = 2t^2 + 3t + 1$$

である.

(3)  $f(t) = \int_0^t u(s)^2 ds$  とおき,  $u(t) \geq f(t) + 1$  となる  $u$  があったとする. このとき  $0 < t < 1$  に対して  $g(t) = (1-t)f(t) - t$  とおくと,

$$g'(t) = -f(t) + (1-t)f'(t) - 1 \geq -f(t) + (1-t)(1+f(t))^2 - 1 = (1+f(t))g(t) \geq g(t)$$

であり, よって

$$\{e^{-t}g(t)\}' = e^{-t}(g' - g) \geq 0$$

を得る.  $g(0) = f(0) = 0$  より  $g(t) \geq 0$  を得る. これは

$$f(t) \geq \frac{t}{1-t} \quad (0 < t < 1)$$

であることを示している. よって

$$u(t) \geq \frac{t}{1-t} + 1$$

であり,  $t \rightarrow 1-0$  の極限で  $u(t) \rightarrow +\infty$  となる. これは矛盾.

## 2.8 2021 年度

[5]

(ii) ならば (i) は, 留数定理による. (i) ならば (ii) を示す. まず次を示す: ( $\diamond$ ) 「 $g \in C(\overline{D})$  が有理型で境界には極を持たず, 任意の多項式  $P$  に対して

$$\int_C P(z)g(z) dz = 0$$

ならば,  $g$  は正則である.  $z_1, \dots, z_k$  が  $g$  の  $m_1, \dots, m_k$  位の極であるとする. このとき

$$P(z) = (z - z_1)^{m_1-1}(z - z_2)^{m_2} \dots (z - z_k)^{m_k} = \frac{\prod_{j=1}^k (z - z_j)^{m_j}}{z - z_1}$$

とおくと, 留数定理より

$$\int_C P(z)g(z) dz = \text{Res}(z_1, P(z)f(z)) \neq 0$$

である. これは矛盾.

さて,  $f$  が (i) を満たすとする. このとき  $g(z) = f(z) - 1/(2\pi iz)$  は有理型で, ( $\diamond$ ) の仮定を満たす. よって  $g$  は正則であり,  $f = g + 1/(2\pi iz)$  は (ii) を満たす.

[6]

(1)

$$\int_{\mathbb{R}} (u_n(x) - a_1)^2 (u_n(x) - a_2)^2 dx \geq \int_{A_{\varepsilon,n}} \varepsilon^2 \cdot \varepsilon^2 dx = \varepsilon^4 m(A_{\varepsilon,n})$$

より

$$m(A_{\varepsilon,n}) \leq \frac{1}{\varepsilon^4} \int_{\mathbb{R}} (u_n(x) - a_1)^2 (u_n(x) - a_2)^2 dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

を得る.

(2)

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \liminf_{n \rightarrow \infty} |u_n(x) - a_j| > 0 \ (j = 1, 2) \right\}$$

とおく. 任意の  $l \in \mathbb{Z}$  に対して  $m(A \cap [l, l+1)) = 0$  であることをいえよ.

$$A \cap [l, l+1) = \bigcup_{k \geq 1} \bigcup_{N \geq 1} \bigcap_{n \geq N} (A_{1/k,n} \cap [l, l+1))$$

である. 任意の  $k, N \geq 1$  に対して, 測度の単調収束定理より

$$m \left( \bigcap_{n \geq N} A_{1/k,n} \cap [l, l+1) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_{1/k,n} \cap [l, l+1)) = 0$$

なので結論を得る.

(3) 偽らしい (未検証).

[7]

(1)  $u \in X$  に対して

$$|Au(x)| \leq \int_0^x |u(y)| dy \leq \|u\|_X \quad (x \in [0, 1])$$

よって  $\|Au\|_X \leq \|u\|_X$  を得る.

(2)

$$|A^n u(x)| \leq \int_0^x dy_1 \int_0^{y_1} dy_2 \cdots \int_0^{y_{n-1}} dy_n |u(y_n)| \leq \frac{1}{n!} \|u\|_X$$

である.

(3)

$$T_N = z \sum_{n=0}^N \left( \frac{A}{z} \right)^n$$

とおく. これは  $\mathcal{L}(X)$  の Cauchy 列である: 実際,  $N > M$  に対して

$$\|T_N - T_M\| \leq |z| \sum_{n=M+1}^N \frac{\|A^n\|}{|z|^n} \leq |z| \sum_{n=M+1}^N \frac{1}{n! |z|^n} \rightarrow 0 \quad (M, N \rightarrow \infty)$$

よって  $T_N$  はある有界線形作用素  $T$  に作用素ノルムで収束する.  $T$  が求める逆作用素であることが確かめられる.

## 2.9 2022 年度

[6]

(1)  $k \in \mathbb{N}$  に対して

$$G_k := \{x \in X \mid |g(x)| \geq k\}$$

とおく.

$$\|g\|_2^2 \geq \int_{G_k} |g|^2 \geq k^2 \mu(G_k)$$

より  $\mu(G_k) \leq \|g\|_2^2 / k^2$  となる.  $A \in \mathcal{F}$  に対して

$$\int_A |g|^2 = \int_{A \setminus G_k} |g|^2 + \int_{A \cap G_k} |g|^2 \leq k^2 \mu(A) + \int_X |g|^2 \mathbb{1}_{G_k}$$

なので,

$$\limsup_{\delta \rightarrow +0} \sup_{A \in \mathcal{F}, \mu(A) < \delta} \int_A |g|^2 \leq \int_X |g|^2 \mathbb{1}_{G_k}$$

である. 今,  $|g| < \infty$  a.e. より  $g(x) \mathbb{1}_{G_k} \rightarrow 0$  a.e. である. また  $|g|^2 \mathbb{1}_{G_k} \leq |g|^2 \in L^1(X)$  より dominated convergence が使えて

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X |g|^2 \mathbb{1}_{G_k} = 0$$

となる. これで示された.

(2)  $f_n$  が零集合  $A$  を除いて  $f$  に一様収束しているとは, 「任意の  $k \geq 1$  に対して  $n_k \geq 1$  があり  $E_{n_k, k} \subset A$  となる」 ことである.

(3)  $f_n \rightarrow f$  a.e. in  $X$  とは,

$$\mu\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_{n, k}\right) = 0 \quad (\forall k \geq 1)$$

ということである. 測度の単調収束定理より

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcap_{n \geq N} E_{n, k}\right) = 0.$$

このことから求める  $n_k$  は作れる.

(4)  $g \in L^2(X)$  とする.  $\{f_n\}_n$  の任意の部分列  $\{f_{n_k}\}_k$  に対してさらなる部分列  $\{f_{n_{k_l}}\}_l$  が存在して,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_X f_{n_{k_l}} g = \int_X f g$$

となることを示す.

$\varepsilon > 0$  とする. (1) より, ある  $\delta > 0$  が存在して,

$$A \in \mathcal{F}, \mu(A) < \delta \implies \int_A |g|^2 d\mu < \varepsilon$$

とできる.  $f_{n_k} \rightarrow f$  a.e. より, ある部分列  $\{k_l\}_l$  を取れば,

$$\mu\left(\bigcup_{l \geq 1} E_{n_{k_l}, l}\right) < \delta$$

とできる. よって

$$\begin{aligned} \left| \int_X (f - f_{n_{k_l}}) g \right| &\leq \int_{E_{n_{k_l}, l}} |f - f_{n_{k_l}}| |g| + \int_{X \setminus E_{n_{k_l}, l}} |f - f_{n_{k_l}}| |g| \\ &\leq 2M^{1/2} \|g\|_{L^2(E_{n_{k_l}, l})} + \|f - f_{n_{k_l}}\|_{L^2(X \setminus E_{n_{k_l}, l})} \|g\|_{L^2(X)} \\ &\leq 2M^{1/2} \varepsilon^{1/2} + \frac{1}{l} \mu(X)^{1/2} \|g\|_{L^2(X)} \end{aligned}$$

となる.  $\limsup_{l \rightarrow \infty}$  を取った後  $\varepsilon \rightarrow 0$  とせよ.

[7]

(1)  $f \in L^r$  に対して, Hölder の不等式より

$$|Tf(x)| = \left| \int_{\Omega} K(x, y) f(y) dy \right| \leq \left( \int_{\Omega} |K(x, y)|^p dy \right)^{1/p} \left( \int_{\Omega} |f(y)| dy \right)^{1/r}$$

である. なお,  $K \in L^p(\Omega \times \Omega)$  よりほとんどすべての  $x \in \Omega$  に対して  $K(x, -) \in L^p(\Omega)$  である (Fubini の定理). よって

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |Tf(x)|^p dx &= \int_{\Omega} dx \left( \int_{\Omega} |K(x, y)|^p dy \right) \left( \int_{\Omega} |f(y)| dy \right)^{p/r} \\ &= \left( \int_{\Omega \times \Omega} |K(x, y)|^p dx dy \right) \left( \int_{\Omega} |f(y)| dy \right)^{p/r} \end{aligned}$$

したがって  $\|Tf\|_p \leq \|K\|_p \|f\|_r$ .

(2) ほとんどすべての  $x \in \Omega$  に対して  $K(x, -) \in L^p(\Omega)$  であるから, そのような  $x$  に対して

$$T_n f(x) = \int_{\Omega} K(x, y) f_n(y) dy \rightarrow \int_{\Omega} K(x, y) f(y) dy = Tf(x)$$

(3)  $L^r$  は reflexive であるから 「 $f_n \rightharpoonup f$  weakly in  $L^r$  ならば  $Tf_n \rightarrow Tf$  strongly in  $L^p$ 」 を示せばよい. 弱収束列は有界なので  $M = \sup_n \|f_n\|_r < \infty$ . また (2) より  $Tf_n \rightarrow Tf$  a.e. また a.e.  $x \in \Omega$  に対して

$$|Tf_n(x)| \leq \int_{\Omega} |K(x, y)| |f_n(y)| dy \leq M \|K(x, -)\|_p$$

であり,  $K \in L^p(\Omega \times \Omega)$  より右辺は ( $x$  に関して)  $L^p$  に属する. よって dominated convergence より  $Tf_n \rightarrow Tf$  strongly in  $L^p$  が従う.

[8]

$f(z) = 1/(z^2 \sin z)$  の正方形領域  $\{x + iy \mid \max\{|x|, |y|\} \leq (N + 1/2)\pi\}$  における極は,  $z = n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z} \cap [-n, n]$ ) である. 極の位数は 0 のみ 2 で,  $n\pi$  ( $n \neq 0$ ) では 1. よって

$$\text{Res}(0, f) = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} z^3 f(z) = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} \frac{z}{\sin z} = \frac{1}{6},$$

$$\text{Res}(n\pi, f) = \lim_{z \rightarrow n\pi} (z - n\pi) f(z) = \lim_{z \rightarrow n\pi} \frac{z - n\pi}{z^2 \sin z} = \frac{(-1)^n}{(n\pi)^2} \quad (n \neq 0)$$

であるから, 留数定理より

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_N} \frac{dz}{z^2 \sin z} = \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^2}$$

を得る.

(2) 答えは  $-\pi/12$ .  $C_N$  上  $|\sin z| \geq 1$  がわかる. よって

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_N} \frac{dz}{z^2 \sin z} \right| \leq \frac{4(2N+1)\pi}{2\pi i} \cdot \frac{1}{((N+1/2)\pi)^2} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

であるから, (1) の結果と合わせて結論を得る.

## 2.10 2023 年度

[5]

(1) 任意の  $\rho > 0$  に対して,  $N = N_\rho$  を,  $(N!)^{1/N} > 2\rho/R$  となるくらい大きく取れば,  $|z| < \rho$  に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{a_n}{n!} z^n \right| \leq \sum_{n < N} \frac{|a_n|}{n!} \rho^n + \sum_{n \geq N} |a_n| \left( \frac{R}{2} \right)^n < \infty$$

これは任意の  $\rho > 0$  に対して  $F(z)$  が  $|z| < \rho$  で絶対収束することを示している.

(2), (3) Cauchy の積分公式より

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=r} \frac{f(u)}{u^{n+1}} du$$

が成り立っている.

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{2\pi i n!} \int_{|u|=r} \frac{f(u)}{u^{n+1}} du \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=r} \frac{f(u)}{u} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left( \frac{z}{u} \right)^n \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=r} \frac{f(u)}{u} e^{z/u} du \end{aligned}$$

[6]

(1) いいえ.  $f_n(x) = x^{-1/p}/n$  とおくと

$$\int_I |f_n(x)| dx = \frac{1}{n} \frac{1}{1-p} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

だが,  $f_n \notin L^p$  である.

(2) 正しい. 部分列に移って

$$\|f_n - f_{n+1}\|_{L^1(I)} \leq 2^{-n}$$

だとしてよい.

$$g_n(x) := \sum_{k=1}^{n-1} |f_k(x) - f_{k+1}(x)|$$

とおくと,

$$\int_I g_n dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} \leq 1$$

$g_n$  は単調増加なのである可測関数  $g$  に収束するが, Fatou の補題より

$$\int_I g dx \leq \liminf \int_I g_n dx \leq 1$$

なので  $g \in L^1(I)$  である. とくに  $g < \infty$  a.e. in  $I$ . したがって

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sum_{k=m}^{n-1} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| = g_n(x) - g_m(x) \rightarrow 0 \quad \text{a.e. in } I \quad (m, n \rightarrow \infty)$$

なので  $f$  は a.e. で Cauchy 列であるからある  $f^*$  に収束する.  $\|f - f_n\|_{L^1} \rightarrow 0$  であったから  $f = f^*$  a.e. である.

(3) 正しい. 任意の部分列  $\{n_k\}_k$  について,  $\|f - f_{n_k}\|_{L^1} \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) だから, 更なる部分列  $\{k_l\}_l$  があ  
り  $f_{n_{k_l}} \rightarrow f$  a.e. となる.  $g$  は連続より  $g(f_{n_{k_l}}(x)) \rightarrow g(f(x))$  a.e. である. さらに  $|g \circ f_{n_{k_l}}| \leq \sup |g| < \infty$   
なので,  $L^p$ -variant of dominated convergence より ( $I$  は測度有限に注意せよ)

$$\left\| g(f(x)) - g(f_{n_{k_l}}(x)) \right\|_{L^p} \rightarrow 0 \quad (l \rightarrow \infty)$$

を得る.

[7]

$M = \sup |f|$  とおく.

(1)  $F'(t) = -e^{-\lambda t} f(t)$  であることを示す.

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(t+h) - F(t)}{h} + e^{\lambda t} f(t) \right| &= \left| -\frac{1}{h} \int_t^{t+h} (e^{-\lambda s} f(s) - e^{-\lambda t} f(t)) ds \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \left| \int_t^{t+h} (|f(s)|(e^{-\lambda t} - e^{-\lambda s}) + e^{-\lambda t} |f(s) - f(t)|) ds \right| \\ &\leq M \sup_{s \in [t, t+h]} |e^{-\lambda t} - e^{-\lambda s}| + \sup_{s \in [t, t+h]} |f(s) - f(t)| \\ &\rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0) \end{aligned}$$

より従う.

(2)  $G(t) = \int_0^t e^{\lambda s} f(s) ds$  とおくと  $G'(t) = e^{\lambda t} f(t)$  である.

$$\begin{aligned} |F(t)| &\leq M \int_t^\infty e^{-\lambda s} ds = \frac{M}{\lambda} e^{-\lambda t}, \\ |G(t)| &\leq M \int_0^t e^{\lambda s} ds \leq \frac{M}{\lambda} e^{\lambda t} \end{aligned}$$

に注意する.

$$y(t) = -\frac{1}{2\lambda} (e^{\lambda t} F(t) + e^{-\lambda t} G(t))$$

より

$$|y(t)| \leq \frac{1}{2\lambda} \left( e^{\lambda t} \frac{M}{\lambda} e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \frac{M}{\lambda} e^{\lambda t} \right) = \frac{M}{\lambda^2} < \infty$$

なので  $y$  は有界. 以下  $y$  が (A) を満たすことを確認する:

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{1}{2\lambda} (e^{\lambda t} (\lambda F + F') + e^{-\lambda t} (-\lambda G + G')) \\ y'' &= -\frac{1}{2\lambda} (e^{\lambda t} (\lambda^2 F + 2\lambda F' + F'') + e^{-\lambda t} (\lambda^2 G - 2\lambda G' + G'')) \\ &= -\frac{1}{2\lambda} (\lambda^2 (e^{\lambda t} F + e^{-\lambda t} G) + 2\lambda (e^{\lambda t} F' - e^{-\lambda t} G') + (e^{\lambda t} F'' + e^{-\lambda t} G'')) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\lambda}(e^{\lambda t}F + e^{-\lambda t}G) &= y, \\ F' &= -e^{-\lambda t}f(t), \quad G' = e^{\lambda t}f(t), \\ F'' &= e^{-\lambda t}(\lambda f - f'), \quad G'' = e^{\lambda t}(\lambda f + f') \end{aligned}$$

より

$$y'' = \lambda^2 y + f$$

を得る.

(3) (A) の解は,  $y$  と斉次方程式  $x'' - \lambda^2 x = 0$  の一般解の和で表される:

$$x(t) = Ae^{\lambda t} + Be^{-\lambda t} + y(t)$$

$x(0) = 0$  より,

$$A + B + \int_0^\infty e^{-\lambda s} f(s) ds = 0$$

である. また,  $x$  が  $[0, \infty)$  で有界であるには

$$A = 0$$

でなければならない. よって

$$x(t) = \int_0^\infty (e^{-\lambda|s-t|} - e^{-\lambda(s+t)}) f(s) ds$$

が求める解.

[8]

(1)  $K^*$  が閉であること:  $x \in H$  に対して  $\alpha_x: H \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha_x(y) = (x, y)$  は連続であるから,

$$K^* = \bigcap_{x \in K} \{y \in H \mid (x, y) \leq 0\} = \bigcap_{x \in K} \alpha_x^{-1}((-\infty, 0])$$

は閉である.  $\alpha, \beta \geq 0$ ,  $y, z \in K^*$  に対して,

$$(x, \alpha y + \beta z) = \alpha(x, y) + \beta(x, z) \leq 0 \quad (x \in K)$$

となるから  $\alpha y + \beta z \in K^*$ .

(2) straight forward.

(3)  $s = \inf_{\xi \in K} \|x - z\|$  とおく. 任意の  $k \in \mathbb{N}$  に対して  $\xi_k \in K$  があり,

$$s^2 \leq \|\xi_k - z\| < s^2 + \frac{1}{n}$$

となる.  $\{\xi_k\}_k$  が Cauchy 列であることを示そう:  $k, l \in \mathbb{N}$  に対して

$$\begin{aligned} \|\xi_k - \xi_l\|^2 &= 2\|\xi_k - z\|^2 + 2\|\xi_l - z\|^2 - 4\left\|\frac{\xi_k + \xi_l}{2} - z\right\|^2 \\ &\leq 2\left(s^2 + \frac{1}{k}\right) + 2\left(s^2 + \frac{1}{l}\right) - 4s^2 \\ &\leq \frac{2}{k} + \frac{2}{l} \\ &\rightarrow 0 \quad (k, l \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

である ( $K$  は閉凸錐なので  $(\xi_k + \xi_l)/2 \in K$  である). よって  $\{\xi_k\}_k$  はある  $x \in K$  に収束する.  $\|x - z\| = s$  である.

(4)  $\xi \in K$ ,  $\alpha, \beta \geq 0$  に対して  $\alpha x + \beta \xi \in K$  であるから

$$\|x - z\|^2 \leq \|\alpha x + \beta \xi - z\|^2$$

が成り立つ.  $\alpha = 1$  としてみると,

$$0 \leq \|x + \beta \xi - z\|^2 - \|x - z\|^2 = \beta(\beta \|\xi\|^2 - 2(y, \xi))$$

を得る.  $\beta \rightarrow +0$  とすることで  $(y, \xi) \leq 0$  を得る. よって  $y \in K^*$  である.

一方で,  $\beta = 0$  とすると,

$$0 \leq \|\alpha x - z\|^2 - \|x - z\|^2 = (\alpha - 1)(\alpha \|x\|^2 - 2(x, z))$$

である.  $\alpha \rightarrow 1 \pm 0$  とすることで  $(x, z) = \|x\|^2$  つまり  $(x, y) = 0$  を得る.

## 2.11 2024 年度

[5]

(1)  $Z$  を  $f$  の  $c$  内部の零点全体の集合とする. 積分路の変形により

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f'}{f} dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{z_0 \in Z} \int_{\partial B_\rho(z_0)} \frac{f'}{f} dz$$

である. ただし  $\rho$  は十分小さな正の数.  $z_0 \in Z$  に対して,  $f$  の零点  $z_0$  の位数を  $m$  とする:  $f(z) = (z - z_0)\varphi(z)$  であり,  $\varphi$  は  $D$  で正則,  $\varphi(z_0) \neq 0$  と書ける.

$$f'(z) = m(z - z_0)^{m-1}\varphi(z) + (z - z_0)^m\varphi'(z)$$

であるから

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$$

である. いま  $\varphi(z_0) \neq 0$  より  $\varphi'/\varphi$  は  $B_\rho(z_0)$  で正則だから,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(z_0)} \frac{f'}{f} dz = m$$

である.

(2) 開球  $B_R = B_R(z_0) \subset\subset D$  に対して,  $f$  が  $D$  内で正則であることを示す.  $c$  を  $B_R$  内の閉曲線に対して

$$\int_c f_n dz = 0$$

が成り立つ (Cauchy の定理).  $f_n$  は  $c$  上  $f$  に一様収束するので

$$\int_c f dz = 0$$

となる. Morera の定理より  $f$  が正則であることが従う. Cauchy の積分の公式より

$$f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta, \quad f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta, \quad (z \in B_R)$$



である．よって任意の  $0 < \rho < R$  に対して

$$\sup_{z \in B_\rho} |f'(z) - f'_n(z)| \leq \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{B_R} \frac{f(\zeta) - f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} dz \right| \leq \frac{2\pi R}{2\pi(R - \rho)^2} \sup_{\zeta \in B_R} |f(\zeta) - f_n(\zeta)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

を得る．よって  $f'_n$  は  $f$  に  $D$  内で広義一様収束する．

(3) 背理法で示す． $f$  が定数ではなく，かつ単射でもないとする： $f(z_1) = f(z_2)$ ,  $z_1 \neq z_2 \in D$ ．このとき  $g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_1)$  とおくと  $g_n$  は  $g(z) = f(z) - f(z_1)$  に  $D$  上広義一様収束する．また  $g_n$  は  $\tilde{D} = D \setminus \{z_1\}$  上 nonzero である．よって  $B = B_\rho(z_2) \subset \subset \tilde{D}$  に対して

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{g'_n}{g_n} dz = 0 \quad (n \geq 1)$$

だが， $g(z_2) = 0$  より

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{g'}{g} dz \geq 1$$

である． $g'_n/g_n$  は  $\partial B$  上  $g'/g$  に一様収束するのでこれは矛盾である．

[6]

(1) 正しい． $\|(f - f_n)\mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus E_n}\|_1 \rightarrow 0$  より，ある部分列  $f_{n_k}$  が存在して

$$(f - f_{n_k})\mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus E_{n_k}} \rightarrow 0 \quad (\text{a.e. in } \mathbb{R})$$

となる．更に部分列を取って，

$$\mu(E_{n_k}) \leq \frac{1}{2^k}$$

であるとしてよい．

$$E := \limsup_{k \rightarrow \infty} E_{n_k} = \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{l \geq k} E_{n_l}$$

とおくと  $\mu(E) = 0$  である． $x \notin E$  ならば，ある  $k \geq 1$  があり，任意の  $l \geq k$  に対して  $x \notin E_{n_l}$  となる．よって

$$|f(x) - f_{n_k}(x)| \leq |f(x)| |1 - \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus E_{n_k}}| + |f(x) - f_{n_k}(x)| \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus E_{n_k}} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

となる ((1) と Fatou の補題より  $\|f\|_2 \leq M$  である)．

(2) 正しい．Hölder の不等式より

$$\begin{aligned} \|f - f_n\|_1 &\leq \|(f - f_n)\mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus E_n}\|_1 + \|f(\mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus E} - 1)\|_1 + \|f_n(\mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus E_n} - 1)\|_1 \\ &\leq \|(f - f_n)\mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus E_n}\|_1 + (\|f\|_2 + \|f_n\|_2) \mu(E_n)^{1/2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

[7]

$f \in C(D)$ ,  $x \in D$  に対して

$$\begin{aligned} |T_n f_k(x)| &\leq \int_D |x - y|^{-1} \Psi_n(x - y) |f(y)| dy \\ &\leq \|f\| \int_{\{y \in D \mid |x - y| \geq 1/n\}} n \cdot 1 dy \\ &\leq \pi n \|f\| \end{aligned}$$

よって  $\|T_n f\| \leq \pi n \|f\|$  を得る. よって  $T_n$  は  $C(D)$  から  $C(D)$  への有界線形作用素であり, とくに  $C(D)$  の (一様) 有界列  $\{f_k\}_k$ ,  $M = \sup_k \|f_k\| < \infty$  に対して  $\{T_n f_k\}_k$  は一様有界である. さらに  $x, z \in D$  に対して

$$\begin{aligned} |T_n f_k(x) - T_n f_k(z)| &\leq \int_D |\Phi_n(x, y) - \Phi_n(z, y)| |f_k(y)| dy \\ &\leq 2\pi M \sup_{y \in D} |\Phi_n(x, y) - \Phi_n(z, y)| \end{aligned}$$

だが,  $\Phi_n: D \times D \rightarrow \mathbb{R}$  はコンパクト集合上連続より一様連続であることに注意すると,

$$\limsup_{\delta \rightarrow +0} \sup_{x, z \in D, |x-z| < \delta} |T_n f_k(x) - T_n f_k(z)| \leq 2\pi M \limsup_{\delta \rightarrow +0} \sup_{x, y, z \in D, |x-z| < \delta} |\Phi_n(x, y) - \Phi_n(z, y)| = 0$$

を得る. よって  $\{T_n f_k\}_k$  は  $D$  上の一様有界かつ同程度一様連続関数列であるから一様収束する部分列を持つ. したがって  $T_n$  はコンパクト作用素である.

(2)  $f \in C(D)$ ,  $x \in D$  に対して

$$\begin{aligned} |Tf(x) - T_n f(x)| &\leq \int_D |x - y|^{-1} (1 - \Psi_n(x - y)) |f(y)| dy \\ &\leq \|f\| \int_{\{y \in D \mid |x-y| \leq 2/n\}} |x - y|^{-1} dy \\ &\leq \frac{4\pi}{n} \|f\| \end{aligned}$$

であるから,

$$\|T - T_n\|_{\mathcal{L}(C(D))} = \sup_{f \in C(D), \|f\| \leq 1} \sup_{x \in D} |Tf(x) - T_n f(x)| \leq \frac{4\pi}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

よってコンパクト作用素のノルム収束極限として  $T$  はコンパクト作用素である.

[8]

(1) 部分積分により,  $u \in C^2([-1, 1])$  と  $h \in X_0$  に対して

$$\int_{-1}^1 u(h'' + h' + h) dx = \int_{-1}^1 (u'' - u' + u)h dx$$

である. よって次を示せばよい:  $h \in C([-1, 1])$  が

$$\int_{-1}^1 fh dx = 0 \quad (\forall h \in X_0)$$

を満たすならば  $f \equiv 0$  である.

$$\eta(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & (|x| < 1) \\ 0 & (|x| \geq 1) \end{cases}, \quad \eta_n(x) = n\eta(nx) \quad (n \geq 1)$$

とおくと  $\eta_n \in C_c^\infty(B_{1/n})$ ,  $\eta \geq 0$ ,  $\int \eta_n = 1$  である.  $x_0 \in (-1, 1)$  を固定する.  $h(x) = \eta_n(x - x_0)$  は,  $h \in C_c^\infty(B_{1/n}(x_0))$  より,  $n$  が十分大きければ  $X_0$  の元である. よって

$$\begin{aligned} |f(x_0)| &= \left| f(x_0) - \int_{B_{1/n}(x_0)} f h dx \right| \\ &= \int_{B_{1/n}(x_0)} |f(x_0) - f(x)| \eta_n(x - x_0) dx \\ &\leq \sup_{x \in B_{1/n}(x_0)} |f(x_0) - f(x)| \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

であるから  $f(x_0) = 0$  ( $x_0 \in (-1, 1)$ ) が示された.

$$(2) \quad u(x) = \frac{2a}{\sqrt{3}} e^{x/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x.$$

$$(3) \quad u(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} e^{x/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x & (x \geq 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases} \text{ が答え. 以下見つけ方: } u = 0 \ (x \leq 0) \text{ の形で探す. 部分積分より,}$$

$h \in X_0$  に対して

$$\int_{-1}^1 u(h'' + h' + h) dx = \int_0^1 u(h'' + h' + h) dx = -u(0)h(0) + u'(0)h(0) - u(0)h'(0) + \int_0^1 (u'' - u' + u)h dx$$

となる. よって問題の条件を満たす  $u$  は,

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 1, \quad u'' - u' + u = 0 \quad (x \geq 0)$$

を満たすものでよい.

## 2.12 2025 年度

[3]

(1) 答えは 3.  $|Z(G)|$  は  $|G| = 27$  の約数なので 1, 3, 9, 27 が候補.  $|Z(G)| = 27$  なら  $G$  が可換群となるので除外される. 次に類等式

$$27 = |Z(G)| + \sum_{i=1}^s |C(x_i)|$$

を考察する. ここで和に現れる  $C(x_i)$  は中心に含まれない元からなる共軛類をもれなく数える. 各  $|C(x_i)|$  は  $|G| = 27$  の約数で 1 より大きいので  $|Z(G)| = 1$  はありえない. また, もし  $|Z(G)| = 9$  ならば,  $G/Z(G)$  は位数 3 なので巡回群となる. よって  $G$  は可換群となってしまうので除外. したがって  $|Z(G)| = 3$  しかありえない.

(2) 答えは 11. (1) より 1 元からなる共軛類がちょうど 3 つある. 他の共軛類たちはちょうど 3 つの元からなることを示す.  $|C(x_i)| \neq 1$  ならば  $|C(x_i)|$  は 3 または 9 だが,  $Z(G) \subsetneq Z_G(x_i) := \{g \in G \mid gx_i = x_i g\}$  (実際  $x_i \notin Z(G)$ ) より  $|Z_G(x_i)| = 9$  である. したがって  $|C(x_i)| = |G|/|Z_G(x_i)| = 3$ . 以上より, 共軛類の個数は  $3 + (27 - 3)/3 = 11$ .

(3) 答えは  $m_1 = 9$ ,  $m_3 = 2$  で他が 0. 「既約表現の個数 = 共軛類の個数」より

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + \cdots = 11.$$

また「既約表現の次元の 2 乗和 =  $|G|$ 」より

$$m_1 + 4m_2 + 9m_3 + 16m_4 + 25m_5 + \cdots = 27.$$

辺々引いて

$$3m_2 + 8m_3 + 15m_4 + 24m_5 + \cdots = 16.$$

これを満たす非負整数は  $m_2 = 0$ ,  $m_3 = 2$ ,  $m_n = 0$  ( $n \geq 4$ ) しかない.

[6]

(1) は (3) の主張を認めれば従うので, あとで示すことになる.

(2)  $f(z)$  を 0 まわりで Laurent 展開する:

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n.$$

Laurent 展開級数は広義一様絶対収束であることに注意する.

$$|f(z)|^2 = \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} a_n \overline{a_m} z^n \overline{z}^m.$$

これを  $\varepsilon \leq |z| \leq 1$  上積分すると

$$\begin{aligned} \infty > \|f\|^2 &\geq \int_{\varepsilon}^1 \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| r dr d\theta \\ &= \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} a_n \overline{a_m} \int_{\varepsilon}^1 r^{n+m+1} dr \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta \\ &= 2\pi \left( |a_{-1}|^2 \log \frac{1}{\varepsilon} + \sum_{n \neq -1} \frac{1 - \varepsilon^{2n+2}}{2n+2} |a_n|^2 \right) \end{aligned}$$

最右辺が  $\varepsilon \rightarrow +0$  で有限となるには  $a_n = 0$  ( $n \leq -1$ ) でなければならない.

(3) 平均値の定理

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta \quad (0 \leq \rho \leq r)$$

を思い出す. 両辺を 2 乗して Hölder の不等式などを用いると

$$|f(z_0)|^2 \leq \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{i\theta})| d\theta \right)^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{i\theta})|^2 d\theta$$

を得る. 両辺に  $\rho$  をかけて  $[0, r]$  上積分すると

$$\frac{r^2}{2} |f(z_0)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \iint_{|z-z_0| \leq r} |f(z_0 + \rho e^{i\theta})| r dr d\theta \leq \frac{\|f\|^2}{2\pi}$$

を得る.

(4)  $L^2(D)$  の完備性より,  $f \in L^2(D)$  があり  $\|f - f_n\| \rightarrow 0$  となることはわかる. この  $f$  が正則であることを示す.  $\overline{B_{2R}} \subset D$  となる ball を取る. (3) より

$$\limsup_{n, m \rightarrow \infty} \sup_{z \in B_R} |f_m(z) - f_n(z)|^2 \leq \frac{1}{\pi R^2} \limsup_{n, m \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\|^2 = 0$$

であるから,  $f_n$  は  $B_R$  上ある正則関数  $\tilde{f}$  に一様収束する. 一方  $f_n \rightarrow f$  in  $L^2(D)$  だったので  $f = \tilde{f}$  a.e. in  $B_R$ .  $B_R$  は任意なので  $f$  は正則関数と a.e. で一致する.

[7]

(1) 答えは 0. 積分区間を  $(0, \infty) = (0, \pi) \times [\pi, \infty)$  に分ける.  $(0, \pi)$  上  $f(x) > 0$  a.e. より  $\frac{\arctan f(x)}{f(x)} < 1$  a.e. であるから  $\left(\frac{\arctan f(x)}{f(x)}\right)^n \rightarrow 0$  a.e. 有限測度性から  $1 \in L^1([0, \pi])$  なので, dominated convergence より

$$\int_0^\pi \left(\frac{\arctan f(x)}{f(x)}\right)^n dx \rightarrow 0$$

がわかる.

$[\pi, \infty)$  上  $\arctan f(x) \leq \pi/2$  かつ  $x/2 < f(x)$  より  $\frac{\arctan f(x)}{f(x)} \leq \frac{\pi}{x}$  である. よって

$$\int_\pi^\infty \left(\frac{\arctan f(x)}{f(x)}\right)^n dx \leq \int_\pi^\infty \left(\frac{\pi}{x}\right)^n dx = \frac{\pi}{n-1} \rightarrow 0$$

を得る.

(2)  $F(x, t) = pt^{p-1} \mathbb{1}_{\{(x, t) \mid |f(x)| \geq t\}}$  ( $(x, t) \in [0, 1] \cup (0, \infty)$ ) とおく. Fubini-Tonelli の定理より

$$\int_0^1 dx \int_0^\infty dt F(x, t) = \int_0^\infty dt \int_0^1 dx F(x, t)$$

両辺の累次積分を実行することで

$$\int_0^1 |f(x)|^p dx = \int_0^\infty pt^{p-1} m(\{x \mid |f(x)| \geq t\}) dt$$

を得る.

(3) (2) の右辺と和  $\sum_{n \geq 1} 2^{np} m(\{x \mid |f(x)| \geq 2^n\})$  が comparable であることを示す. まず積分区間を  $(0, \infty) = (0, 2) \cup \bigcup_{n \geq 1} [2^n, 2^{n+1})$  と分けて,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^{p-1} m(\{x \mid |f(x)| \geq t\}) dt &\leq 2^{p-1} + \sum_{n \geq 1} 2^n \cdot 2^{(n+1)(p-1)} m(\{x \mid |f(x)| \geq 2^n\}) \\ &\leq 2^{p-1} + 2^{p-1} \sum_{n \geq 1} 2^{np} m(\{x \mid |f(x)| \geq 2^n\}) \end{aligned}$$

を得る. また  $(0, \infty) = (0, 1) \cup \bigcup_{n \geq 1} [2^{n-1}, 2^n)$  と分ければ

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^{p-1} m(\{x \mid |f(x)| \geq t\}) dt &\geq 1 + \sum_{n \geq 1} 2^{n-1} \cdot 2^{(n-1)(p-1)} m(\{x \mid |f(x)| \geq 2^n\}) \\ &= 1 + 2^{-p} \sum_{n \geq 1} 2^{np} m(\{x \mid |f(x)| \geq 2^n\}) \end{aligned}$$

を得る.

[8]

$\|f\|_{C^0} = \sup_{x \in I} |f(x)|$ ,  $[f]_{C^\alpha} = \sup_{x, y \in I, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$  とおく.

(1)  $x \in I$  に対して

$$|f(x)| \leq |f(0)| + |f(x) - f(0)| \leq |f(0)| + [f]_{C^\alpha} |x|^\alpha \leq |f(0)| + [f]_{C^\alpha} = \|f\|_{C^\alpha}$$

となる。よって  $\|f\|_{C^0} \leq \|f\|_{C^\alpha}$  を得る。

(2)  $f \in C^\alpha(I)$ ,  $x, y \in I$  とする。このとき

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f(y)|^{1-\beta/\alpha} |f(x) - f(y)|^{\beta/\alpha} \\ &\leq (2\|f\|_{C^0})^{1-\beta/\alpha} ([f]_{C^\alpha} |x - y|^\alpha)^{\beta/\alpha} \\ &= 2^{1-\beta/\alpha} \|f\|_{C^0}^{1-\beta/\alpha} [f]_{C^\alpha}^{\beta/\alpha} |x - y|^\beta \end{aligned}$$

を得る。とくに  $f \in C^\beta(I)$  であり,

$$[f]_{C^\beta} \leq 2^{1-\beta/\alpha} \|f\|_{C^0}^{1-\beta/\alpha} [f]_{C^\alpha}^{\beta/\alpha}$$

を得る。

(3)  $K = \{f \in C^\beta(I) \mid \|f\|_{C^\alpha} \leq 1\}$  とおく。  $K$  が  $\|\bullet\|_{C^\beta}$  で点列コンパクトであることを示す。点列  $\{f_n\} \subset K$  を取る。  $\|f_n\|_{C^0} \leq \|f_n\|_{C^\alpha} \leq 1$  より  $f_n$  は  $I$  上一様有界。さらに  $x, y \in I$  に対して

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq [f_n]_{C^\alpha} |x - y|^\alpha \leq |x - y|^\alpha$$

なので  $f_n$  は  $I$  上同程度一様連続。したがって, Ascoli-Arzelà の定理により  $f \in C(I)$  があり  $\|f - f_n\|_{C^0} \rightarrow 0$  となる。以下  $f \in K$  かつ  $\|f - f_n\|_{C^\beta} \rightarrow 0$  であることを示す。任意の  $x, y \in I$ ,  $x \neq y$  に対して

$$|f_n(0)| + \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq 1$$

であるから  $n \rightarrow \infty$  として

$$|f(0)| + \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq 1$$

を得る。よって  $f \in K$ 。また (2) で示した不等式を  $f - f_n \in C^\alpha(I)$  に適用して

$$[f - f_n]_{C^\beta} \leq 2^{1-\beta/\alpha} \|f - f_n\|_{C^0}^{1-\beta/\alpha} [f - f_n]_{C^\alpha}^{\beta/\alpha} \leq 2\|f - f_n\|_{C^0}^{1-\beta/\alpha} \rightarrow 0$$

を得る。これで  $K$  が点列コンパクトであることをが示された。

### 3 おまけ A：個人的未解決問題リスト

院試の過去問で個人的に未解決のもののうち、筆者が解決したいと思っている (重要) もののリストを掲げておく。なお問題は一部抜粋したり表現を改変している。

東工大 2021 年度, 午後 [6](3) (一部改変)

$\mathbb{R}$  上の Lebesgue 可測関数の列  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} u_n(x)^2 (u_n(x) - 1)^2 dx = 0$$

を満たしているとき,  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  はほとんど至るところ収束する部分列を持つか?

東大 2021 年度, 専門 B 第 12 問

$D \subset \mathbb{C}$  を 0 を含む有界領域で,  $D$  上の正則関数  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  は  $f(D) \subset D$ ,  $f(0) = 0$  を満たすとする. 関数列  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  を

$$f_1(z) = f(z), \quad f_{n+1}(z) = f(f_n(z)) \quad (n \geq 1)$$

で定める.

1.  $|f'(0)| \leq 1$  を示せ.
2.  $|f'(0)| < 1$  のとき,  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は  $D$  上広義一様収束すると言えるか?
3.  $|f'(0)| = 1$  のとき,  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は  $D$  上広義一様収束すると言えるか?

東大 2023 年度, 専門 B 第 12 問

$D \subset \mathbb{C}$  を 0 を含む領域,  $f$  を  $D$  上の正則関数とする.  $f$  の零点の位数はすべて 1 であるとし,  $f(0) \neq 0$  とする. 各  $r > 0$  に対して  $B_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ ,

$$S = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0, \overline{B_r} \subset D, 0 \notin f(\partial B_r)\}$$

とおく.

1.  $r \in S$  とする.  $f$  の  $B_r$  内の零点全体が  $a_1, \dots, a_n$  であるとき,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta$$

の値を  $f(0)$ ,  $r$ ,  $a_1, \dots, a_n$  を用いて表せ.

2.  $r > 0$  に対して

$$L(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \max \{ \log |f(re^{i\theta})|, 0 \} d\theta, \quad M(r) = \max \{ |f(z)| \mid z \in \overline{B_r} \}$$

とおく.  $1 \in S$  とする. このとき  $r \in S \cap (0, 1)$  に対して

$$L(r) \leq \max \{ \log M(r), 0 \} \leq \frac{1+r}{1-r} L(1)$$

を示せ.

東大 2024 年度, 専門 A 第 7 問 (一部抜粋)

$a \in \mathbb{R}$  として,  $\mathbb{R}$  上で 2 つの連立微分方程式

$$(*) \quad \begin{cases} x'(t) = ax(t) \\ y'(t) = -y(t) - x(t)^2 \end{cases}, \quad (**) \quad \begin{cases} u'(t) = u(t) \\ v'(t) = -v(t) \end{cases}$$

を考える. このとき同相写像  $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  で次を満たすものが存在するための  $a$  に対する必要十分条件を求め, そのときの同相写像  $H$  を 1 つ与えよ.

(条件)：任意の  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  に対して、 $t = 0$  における初期値が  $(x_0, y_0)$  である  $(*)$  の解  $(x(t), y(t))$  と、 $t = 0$  における初期値が  $H(x_0, y_0)$  である  $(**)$  の解  $(u(t), v(t))$  との間に

$$H(x(t), y(t)) = (u(t), v(t))$$

が成立する.

#### 東大 2024 年度 専門 B 第 10 問

$\mathbb{R}$  上の複素数値可積分関数  $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  に対して次の 2 条件は同値であることを示せ.

- (i)  $\sup_{g \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}), \|g\|_2 \leq 1} \|f * g\|_2 = \|f\|_1.$
- (ii) 実数  $s, t \in \mathbb{R}$  が存在して、 $\mathbb{R}$  上ほとんど至るところ  $f(x)e^{\sqrt{-1}(sx+t)} \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$

#### 東大 2025 年度, 専門 B 第?問

$\mathbb{C}$  内の領域を  $\Delta_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ ,  $\Delta = \Delta_1$  とおく.  $f$  を  $\Delta$  上の単射正則関数とする.

1.  $f$  の 0 まわりでの Taylor 展開を  $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$  とおく. このとき  $0 < r < 1$  に対して  $f(\Delta_r)$  の面積を  $r, a_0, a_1, \dots$  を用いて表せ.
2.  $f(\Delta)$  が凸ならば, 任意の  $0 < r < 1$  に対して  $f(\Delta_r)$  が凸であることを示せ.