東工大院試

un cinglé

2024 年 6 月 6 日

概要

問題は

`https://www.math.titech.ac.jp/top/~jimu/Graduate/old-exam/innsi.html`

を見よ.

目次

1　午前

1.1　2012 年度

問題は

https://www.math.titech.ac.jp/top/~jimu/Graduate/old-exam/H24innsi.pdf

を見よ.

[1]

簡単すぎるため省略.

[2]

(1) $a > 0$ を任意に固定する (今は $a = 1$ でよい). $n \in \mathbb{N}_0$ に対して x_n を，$[an, a(n+1)]$ における f の最小化元とする．すなわち

$$an \le x_n \le a(n+1) \quad \text{and} \quad f(x_n) = \min_{[an, a(n+1)]} f$$

となる $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ を取る. 今

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{an}^{a(n+1)} f(x)\,dx = \int_0^{\infty} f(x)\,dx < \infty$$

なので，とくに

$$f(x_n) \le \frac{1}{a} \int_{an}^{a(n+1)} f(x)\,dx \to 0 \quad (\text{as } n \to \infty)$$

であるから $f(x_n) \to 0$ $(n \to \infty)$ となる．$x_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ であることはよい.

(2) $f(x) = x/(1 + x^6 \sin^2 x)$ は $(*)$ を満たすが有界ですらない.

(3) $\varepsilon > 0$ を任意に取る．f は一様連続であるから，$\delta > 0$ があり，任意の $x, y \in [0, \infty)$ に対して次が成り立つ：

$$|x - y| \le \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$$

ここで，(1) の解答において $a = \delta$ としたときの $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ を取る．$f(x_n) \to 0$ $(n \to \infty)$ であるから，十分大きな $N \in \mathbb{N}$ があり，任意の $n \ge N$ に対して $f(x_n) < \varepsilon/2$ となる．したがって，任意の $x \ge N\delta$ に対して $n = \lfloor x/\delta \rfloor$ を x/δ の整数部分とすると

$$f(x) \le f(x_n) + |f(x) - f(x_n)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

を得る ($x \in [\delta n, \delta(n+1)]$ より $|x - x_n| \le \delta$ に注意せよ).

[3]

(1) $\emptyset,\ X \in \mathcal{O}$ であることはよい.

$A, B \in \mathcal{O}$ だとする．もし $A \subset \mathbb{N}$ または $B \subset \mathbb{N}$ ならば $A \cap B \subset \mathbb{N}$ より $A \cap B \in \mathcal{O}$ である．一方，もし $X - A$ と $X - B$ が $\mathbb{N}$ の有限部分集合ならば，$X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B)$ もそうである．よって $A \cap B \in \mathcal{O}$．以上よりいずれの場合も $A \cap B \in \mathcal{O}$ は成り立つ.

$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathcal{O}$ の元の族とする．もし任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $A_\lambda \subset \mathbb{N}$ ならば，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subset \mathbb{N}$ より $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in \mathcal{O}$ である．一方，ある $\lambda_0 \in \Lambda$ について $X - A_{\lambda_0}$ が $\mathbb{N}$ の有限部分集合ならば，$X - \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subset X - A_{\lambda_0}$ もそうである．よってこの場合も $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in \mathcal{O}$ が示された．

(2) $x, y \in X$ を相異なる元とする．このとき最初から $x < y$ と仮定してもよい．もし $0 = x < y$ ならば $A = X - \{y\}$，$B = \{y\}$ が x と y を分離する開集合たちである．もし $0 < x < y$ ならば $A = \{x\}$，$B = \{y\}$ でよい．

次に $C, D \subset X$ は閉集合で $C \cap D = \emptyset$ だとする．このとき，$C \subset \{0\}$ であるか，C は $\mathbb{N}$ の有限部分集合である．D についても同様である．もし $C \subset \{0\}$ ならば，$D \subset \mathbb{N}$ かつ D は有限集合だとしてよい．このときは $A = X - D$, $B = D$ が C, D を分離する．一方，もし $C, D \subset \mathbb{N}$ らが有限部分集合ならば，$A = C$, $B = D$ とおけばよい．

(3) 答えははい．$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を X の開被覆だとせよ．このとき $\lambda_0 \in \Lambda$ で $0 \in A_{\lambda_0}$ となるものが存在する．ここで $X - A_{\lambda_0}$ は $\mathbb{N}$ の有限部分集合であることに注意する．各 $x \in X - A_{\lambda_0}$ に対して $\lambda_x \in \Lambda$ があり $x \in A_{\lambda_x}$ となるので，これら $\{A_{\lambda_x}\}_{x\in\{0\}\cup(X-A_{\lambda_0})}$ が有限部分開被覆を与える．

(4) 丁寧な誘導をありがとう．$f\colon X \to Y$ を $f(0) = 0$, $f(n) = 1/n$ $(n \in \mathbb{N})$ により定める．f は連続であることを示すが，それには $\mathbb{R}$ の開区間 $I = (a, b)$ について $f^{-1}(I \cap Y) \in \mathcal{O}$ であることを示せばよい．もし $0 < a < b$ ならば $f^{-1}(I \cap Y) = \{n \in \mathbb{N} \mid 1/b < n < 1/a\} \in \mathcal{O}$ である．一方，$a \leq 0 < b$ ならば $f^{-1}(I \cap Y) = \{0\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n > 1/b\} \in \mathcal{O}$ となる．

f はコンパクト空間から Hausdorff 空間への連続全単射であるから同相である．

1.2　2013 年度

問題は

`https://www.math.titech.ac.jp/top/~jimu/Graduate/old-exam/H25innsi.pdf`

を見よ．

[1]

答えは $\pi^2/8a$．極座標に変換する．つまり

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\cos\varphi, \quad z = r\cos\theta\ ; \quad (r, \theta, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$$

とおく．すると

$$
\begin{aligned}
\iiint_D \frac{dxdydz}{(a^2+x^2+y^2+z^2)^2} &= \int_0^\infty dr \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \, \frac{r^2 \sin\theta}{(a^2+r^2)^2} \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \frac{r^2}{(a^2+r^2)^2} \, dr \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{a^2 \tan^2 x}{a^4 (1+\tan^2 x)^2} \frac{a}{\cos^2 x} \, dx \qquad (\text{put } r = a\tan x) \\
&= \frac{\pi}{2a} \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx \\
&= \frac{\pi}{2a} \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi^2}{8a}
\end{aligned}
$$

と計算される．

[2]

(1)

$$
\min_I f \le \mu_1 \coloneqq \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} f(x) \, dx \le \max_I f
$$

であるから，中間値の定理より $f(b) = \mu_1$ となる $b \in I$ が存在する．

(2)

$$
\min_I f = \left(\frac{3}{2a^3} \min_I f \right) \int_{-a}^{a} x^2 \, dx \le \mu_2 \coloneqq \frac{3}{2a^3} \int_{-a}^{a} x^2 f(x) \, dx \le \left(\frac{3}{2a^3} \max_I f \right) \int_{-a}^{a} x^2 \, dx = \max_I f
$$

であるから，以下同文．

(3) 部分積分より

$$
\begin{aligned}
\mu_3 \coloneqq \frac{3}{2a^3} \int_{-a}^{a} x f(x) \, dx \\
&= \frac{3(f(a) - f(-a))}{4a} - \frac{3}{4a^3} \int_{-a}^{a} x^2 f'(x) \, dx \\
&= \frac{3}{4a} \int_{-a}^{a} f'(x) \, dx - \frac{3}{4a^3} \int_{-a}^{a} x^2 f'(x) \, dx \\
&= \frac{3}{4a^3} \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2) f'(x) \, dx
\end{aligned}
$$

であり，したがって

$$
\min_I f' = \left(\min_I f' \right) \frac{3}{4a^3} \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2) \, dx \le \mu_3 \le \left(\max_I f' \right) \frac{3}{4a^3} \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2) \, dx = \max_I f'
$$

であるから，以下同文．

[3]

(1) $(\varphi(\mathbf{0}), \varphi(\mathbf{0})) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$ より $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ を得る．

(2) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$ とする．このとき $\varphi(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}) = a\varphi(\boldsymbol{x}) + b\varphi(\boldsymbol{y})$ を示せばよいが，内積の双線形性を用いて分解し，さらにわちゃわちゃすると

$$\begin{aligned}
&(\varphi(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}) - a\varphi(\boldsymbol{x}) - b\varphi(\boldsymbol{y}), \varphi(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}) - a\varphi(\boldsymbol{x}) - b\varphi(\boldsymbol{y})) \\
&= (\varphi(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}), \varphi(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y})) - a(\varphi(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}), \varphi(\boldsymbol{x})) - b(\varphi(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}), \varphi(\boldsymbol{y})) \\
&\quad - a(\varphi(\boldsymbol{x}), \varphi(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y})) + a^2(\varphi(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{x})) + ab(\varphi(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{y})) \\
&\quad - b(\varphi(\boldsymbol{y}), \varphi(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y})) + ab(\varphi(\boldsymbol{y}), \varphi(\boldsymbol{x})) + b^2(\varphi(\boldsymbol{y}), \varphi(\boldsymbol{y})) \\
&= (a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}, a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}) - a(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) - b(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \\
&\quad - a(\boldsymbol{x}, a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}) + a^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + ab(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\
&\quad - b(\boldsymbol{y}, a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}) + ab(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + b^2(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

となることから従う．

(3) $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底とする．$\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は線形写像だから行列 $A = \begin{bmatrix} \varphi(\boldsymbol{e}_1) & \cdots & \varphi(\boldsymbol{e}_n) \end{bmatrix}$ により $\varphi(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と表される．仮定より $\varphi(\boldsymbol{e}_1), \dots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)$ は $\mathbb{R}^n$ の正規直交系を与えており，したがって A は直交行列である．

[4]

(1) 略.

(2) 行列 $\begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix}$ を基本変形してなんやかんややると $X + Y$; $X \cap Y$ の基底としてそれぞれ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$; $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ が取れることがわかる．

[5]

(1) (X, d) は，$n = 1$ のとき不連結，$n \geq 2$ のとき連結.

(2) (X, d) の有界閉集合 $B = \{\boldsymbol{p} \in X \mid |\boldsymbol{p}| \leq 1\}$ はコンパクトではない．実際,

$$B_n = \{\boldsymbol{p} \in X \mid 1/n < |\boldsymbol{p}|\}$$

で定まる A の開被覆 $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は，有限部分被覆を持たない.

(3) はい．X は完備距離空間 $\mathbb{R} \times S^{n-1}$ に同相である．ここで S^{n-1} は $\mathbb{R}^n$ 内の単位 $(n-1)$-球面．実際に

$$X \ni \boldsymbol{p} \mapsto (\log |p|,\ p/|p|) \in \mathbb{R} \times S^{n-1}$$

が同相写像である．

■余談　ある完備距離空間と同相となるような位相空間をポーランド空間という．例えば，ポーランド空間の G_δ 集合はポーランド空間であることが知られている．とくに無理数全体の集合に $\mathbb{R}$ の相対位相を入れるとポーランド空間になる．

1.3　2014 年度

問題は

https://www.math.titech.ac.jp/top/~jimu/Graduate/old-exam/H26innsi.pdf

を見よ．

[1]

答えは $\pi/12$．円柱座標

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad \zeta = z\ ; \quad (r,\theta,\zeta) \in [0,\infty)\times[0,\pi/2]\times[0,\infty)$$

を用いよ．

[2]

(1) 答えは $p \le 3$ で，$p < 3$ のとき $f(x) = 0$；$p = 3$ のとき $f(x) = \begin{cases} 0 & (\text{if } x = 0) \\ x^{-2} & (\text{if } 0 < x \le 1) \end{cases}$ である．

(2) 答えは $p < 1$．$p = 3$ のときは明らかに f_n は一様収束しない (連続関数の一様収束極限が連続であることを思い出せばよい)．そこで $p < 3$ だとしよう．

$$f_n'(x) = \frac{n^p(1-2n^3x^3)}{(1+n^3x^3)^2}$$

であり，増減を考えると $f_n(x)$ は $x = 2^{-1/3}n^{-1}$ で最大値をとることがわかる．よって

$$\sup_{[0,1]}|f_n| = f_n(2^{-1/3}n^{-1}) = \frac{2^{2/3}\cdot n^{p-1}}{3}$$

である．よって f_n が一様に $f = 0$ に収束するのは $p < 1$ のときに限る．

(3) 答えは $p \le 2$．変数変換 $y = nx$ により

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = n^{p-2}\int_0^n \frac{y}{1+y^3}\,dy$$

だが，

$$I_n \coloneqq \int_0^n \frac{y}{1+y^3}\,dy \le \int_0^1 y\,dy + \int_1^n \frac{1}{y^2}\,dy \le \frac{3}{2} - \frac{1}{n} \le \frac{3}{2} < \infty$$

は収束するので $n^{p-2}I_n$ は $p \le 2$ のときに限って収束する．

[3]

(1) 例えば

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) $(a+d)^2$．

(3) 16．

[4]

(1) F はスケール不変である．つまり $F(k\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x})$ $(\forall k \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\setminus\{\boldsymbol{0}\})$．とくに $F(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|)$．

(2) F の連続性より，F の S^2 への制限は最大値・最小値を持つが，(1) よりこれらは $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ 全域における F の最大値・最小値を与える．

(3) 仮定より $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は一次独立．よって $\det P = \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 \neq 0$ なので P は正則である．さて，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が A の固有ベクトルであることを示そう．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ はそれぞれ，拘束条件 $|\boldsymbol{x}|^2 = 1$ のもとでの

$$\langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$$

の最大化・最小化元である．ここで $A = (a_{ij})_{i,j}$，$\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ とおいた．Lagrange の未定乗数法より，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して

$$\sum_j a_{ij} x_j - 2\lambda x_i = 0 \quad (\text{for } i = 1, 2, 3)$$

が成り立つ．ここで λ は未定定数を表す．これは $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が A の固有ベクトルであることを示している．最後に $\boldsymbol{c}$ が A の固有ベクトルであることを示す．A は対称行列であり，$\boldsymbol{a}$ は A の固有ベクトルなので固有値を λ として

$$\langle A\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} \rangle = \langle \boldsymbol{c}, A\boldsymbol{a} \rangle = \lambda \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} \rangle = 0$$

が成り立つ．同様に $\langle A\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b} \rangle = 0$ が成り立つので，$A\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に直交するベクトルである．よって $A\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ の定数倍になるしかない．

以上より $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が A の固有ベクトルからなる $\mathbb{R}^3$ の基底をなすことが示された．

[5]

(1) はい．$a, b \in \mathbb{R}$，$a \neq b$ とする．最初から $a < b$ としてよい．このとき $[a, b)$ と $[b, b+1)$ は a と b を分離する開集合である．

(2) いいえ．$U := (-\infty, 0) = \bigcup_{n \geq 0} [-n, 0) \in \mathcal{O}$ および $V := [0, \infty) = \bigcup_{n \geq 0} [0, n) \in \mathcal{O}$ は空でなく，$U \cup V = \mathbb{R}$，$U \cap V = \emptyset$．

(3) いいえ．$[0, 1] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, 1 - 1/2n) \cup [1, 2)$ は有限部分被覆を持たない．

1.4 2015 年度

問題は

```
https://www.math.titech.ac.jp/top/~jimu/Graduate/old-exam/H27innsi.pdf
```

を見よ．

[1]

(1) 答えは $\alpha < -1$．極座標に変換すると

$$2\pi \int_0^\infty (1 + r^2)^\alpha r \, dr$$

の収束・発散を見ればよい．

(2) $M = \sup_n |a_n| < \infty$ とおく．$\varepsilon > 0$ とせよ．$\lim_n a_n = a$ より，十分大きい $N \in \mathbb{N}$ があり，任意の $n \geq N$ に対して $|a - a_n| \leq \varepsilon$ が成り立つ．よって $n \geq N$ ならば

$$\left| a - \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right| \leq \frac{|a - a_1| + \cdots + |a - a_n|}{n} \leq \frac{N(|a| + M)}{n} + \frac{(n - N)\varepsilon}{n}$$

よって

$$\limsup_n \left| a - \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right| \leq \limsup_n \left(\frac{N(|a| + M)}{n} + \frac{(n - N)\varepsilon}{n} \right) = \varepsilon$$

となる．$\varepsilon > 0$ は任意なので $\lim_n \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = a$ を得る．

[2]

(1) $1 > 0$ に対して $M > 0$ があり，任意の $|x| \geq M$ に対して $|f(x)| \leq 1$ となる．よって

$$\sup_{\mathbb{R}} |f| \leq 1 + \sup_{[-M, M]} |f| < \infty$$

である．

(2) $\varepsilon > 0$ とせよ．仮定より，$M > 0$ があり，任意の $|x| \geq M$ に対して $|f(x)| \leq \varepsilon/3$ となる．f は有界閉区間 $[-M, M]$ 上一様連続であるから，$0 < \delta < 1$ があり，任意の $x, y \in [-M, M]$ に対して

$$|x - y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/3$$

が成り立つ．$x, y \in \mathbb{R}$ が $|x - y| \leq \delta$ を満たすと仮定しよう．

- $x, y \in [-M, M]$ ならば $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/2$ である．
- $x, y \notin [-M, M]$ ならば $|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq \varepsilon$ である．
- $x > M$ かつ $y \in [-M, M]$ ならば，$|y - M| \leq |x - y| \leq \delta$ より $|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(M)| + |f(M) - f(y)| \leq \varepsilon$ である．同様に $|x| \geq M$ もしくは $|y| \geq M$ の場合が示せる．

(3) $M = \sup_{\mathbb{R}} |f|$ とおく．$z = ny$ と変数変換して

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x + z/n) g(z)\, dz$$

となる．

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x + z/n)| g(z)\, dz$$

である．さて，$\varepsilon > 0$ とせよ．f は一様連続なので，$\delta > 0$ があり，任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$|x - y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

となる．よって $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_n(x)| &\leq \int_{|z| \leq n\delta} |f(x) - f(x + z/n)| g(z)\, dz + \int_{|z| \geq n\delta} |f(x) - f(x + z/n)| g(z)\, dz \\
&\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}} g(z)\, dz + 2M \int_{|z| \geq n\delta} g(z)\, dz \\
&\leq \varepsilon + \int_{|z| \geq n\delta} g(z)\, dz
\end{aligned}$$

だが，今 $\int_{|z|\geq n\delta} g\,dz \to \infty$ $(n\to\infty)$ より

$$\limsup_n \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)-f_n(x)| \leq \varepsilon$$

となる．$\varepsilon>0$ は任意なので $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-f_n(x)|\to 0$ $(n\to\infty)$ を得る．

[3]

固有多項式は $(\lambda-a-b)^2(\lambda-a+b)(\lambda+a-b)$．固有値 λ に対する固有空間を V_λ と書くことにすると，

$$V_{2a}=\left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}\right\rangle,\quad V_0=\left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}\right\rangle \quad (\text{if } a=b)$$

$$V_{a+b}=\left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}\right\rangle,\ V_{a-b}=\left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}\right\rangle,\ V_{-a+b}\left\langle \begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}\right\rangle \quad (\text{if } a\neq b)$$

最小多項式は

$$(\lambda-2a)\lambda \quad (\text{if } a=b) \quad ; \quad (\lambda-a-b)(\lambda-a+b)(\lambda+a-b) \quad (\text{if } a\neq b)$$

[4]

(1) $\ker(E_n-A)\subset \mathrm{Im}(A)$ より従う．(2) 等号成立は $\ker(E_n-A)\supset\mathrm{Im}(A)$ つまり $A-A^2=(E_n-A)A=0$ と同値．

[5]

(1) $\emptyset,\mathbb{R}^2\in\mathcal{O}$ はよい．$U_\lambda,U,V\subset\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}$ の開集合とせよ $(\lambda\in\Lambda)$．このとき

$$(U\times\mathbb{R})\cap(V\times\mathbb{R})=(U\cap V)\times\mathbb{R},\quad \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(U_\lambda\times\mathbb{R})=\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda\right)\times\mathbb{R}\in\mathcal{O}$$

である．

(2) いいえ．$(0,0)$, $(0,1)\in\mathbb{R}^2$ は開集合で分離できない．

(3) コンパクトであるものは，$J\times J$, $I\times I$ のみ．ほかはコンパクトでない．

(4) $\mathrm{cl}(I\times I)=J\times\mathbb{R}$, $\mathrm{cl}(I\times J)=J\times\mathbb{R}$, $\mathrm{cl}(J\times I)=J\times\mathbb{R}$, $\mathrm{cl}(J\times J)=J\times\mathbb{R}$

1.5 2016 年度

問題は

`https://www.math.titech.ac.jp/top/~jimu/Graduate/old-exam/H28innsi.pdf`

を見よ．

[1]

(1), (2) 略.

(3) $X = (x_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ に対して

$$D_A(X) = O \iff x_{11} = x_{33},\ x_{12} = x_{32},\ x_{13} = x_{31},\ x_{21} = x_{23}$$

であることがわかる．よって $\dim\ker(D_A) = 5$，次元定理より $\dim\mathrm{Im}(D_A) = 4$.

[2]

(1) $\Phi_n(\lambda) = A - \lambda$ を A の固有多項式とすると，

$$\Phi_1(\lambda) = 1 - \lambda,\ \Phi_2(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda \quad ; \quad \Phi_n(\lambda) = (1-\lambda)\Phi_{n-1}(\lambda) - \Phi_{n-2}(\lambda) \quad (n \geq 3).$$

を得る．よって

$$\det A = \Phi_n(0) = \begin{cases} 1 & (\text{if } n \equiv 0, 1 \mod 6), \\ -1 & (\text{if } n \equiv 3, 4 \mod 6), \\ 0 & (\text{if } n \equiv 2, 5 \mod 6). \end{cases}$$

(2) direct calculation より固有空間は

$$\left\langle {}^t(1, 0, -1, 0, \ldots, 0, (-1)^{(n-1)/2}) \right\rangle.$$

[3]

(1) 略.

(2) $(-\infty, 0)$ はコンパクトでないが $(-\infty, 0]$ はコンパクトである. $(-\infty, 0)$ の開被覆 $\{(-\infty, -1/n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ は有限部分被覆を持たない．$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $(-\infty, 0]$ の $\mathcal{O}$-開被覆とせよ．$U_\lambda = (-\infty, a_\lambda)$ とおく ($U_\lambda = \emptyset$ ならば $a_\lambda = -\infty$，$U_\lambda = \mathbb{R}$ ならば $a_\lambda = \infty$ と解釈せよ)．$0 \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ であるから，ある $\lambda_0 \in \Lambda$ に対して $0 \in U_{\lambda_0}$ である．$\{U_{\lambda_0}\}$ が有限部分被覆.

(3) 答えははい．$(0,1) \cup (2,3) \subset U \cup V$; $U, V \in \mathcal{O}$; $U \cap V \cap ((0,1) \cup (2,3)) = \emptyset$ とせよ．このとき $U \subset V$ または $U \supset V$ が成り立つので，$U \cap ((0,1) \cup (2,3)) = \emptyset$ または $V \cap ((0,1) \cup (2,3)) = \emptyset$ である．よって $(0,1) \cup (2,3)$ は連結.

(4) $f\colon (\mathbb{R}, \mathcal{O}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O})$ を連続写像とする．$x, x' \in \mathbb{R}$ で $x \leq x'$，$f(x) > f(x')$ を満たすものがあったと仮定しよう．f の連続性より

$$f^{-1}((-\infty, f(x))) = (-\infty, a), \quad a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

となる a がある．$f(x') < f(x)$ より $x' < a$ である．一方明らかに $x \geq a$ である．よって $x' < x$ となり矛盾.

[4]

(1) 答えは $p + q > 0$．$x \neq 0$ に対して $f_{p,q}(x) = |x|^{p+q} |\sin x/x|^q$ であり，$\sin x/x \to 1$ $(x \to 0)$ に注意するとわかる.

(2) 答えは $p + q > 1$．$x \neq 0$ に対して

$$\frac{f_{p,q}(x) - f_{p,q}(0)}{x} = \frac{x}{|x|} |x|^{p+q-1} \left| \frac{\sin x}{x} \right|^q$$

が $x\to 0$ で有限確定値に収束する条件を考えればわかる．

(3) 答えは $p+q>-1$．極座標に変換すると

$$\iint_D f_{p,q}(\sqrt{x^2+y^2})\,dxdy = \frac{\pi}{2}\int_0^1 r^{p+q+1}\left|\frac{\sin r}{r}\right|^q dr$$

で同様．$[0,1]$ で $0<\exists m\le |\sin r/r|\le 1$ に注意せよ．

[5]

(1) まず f,g は連続関数の一様収束極限として連続である．$\varepsilon>0$ とせよ．次を満たす $\delta>0$ がある：任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して

$$|a-x|\le\delta \Longrightarrow |f(a)-f(x)|\le\varepsilon$$

$a_n\to a\ (n\to\infty)$ より，$N\in\mathbb{N}$ があり任意の $n\ge N$ について $|a-a_n|\le\delta$ かつ $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-f_n(x)|\le\varepsilon$，よって

$$|f(a)-f_n(a_n)|\le|f(a)-f(a_n)|+|f(a_n)-f_n(a_n)|\le 2\varepsilon.$$

(2) $\varepsilon>0$ とせよ．$f\circ g$ は $[0,1]$ で一様連続であるから，次を満たす $\delta>0$ がある：任意の $x,y\in[0,1]$，$|x-y|\le\delta$ に対して $|f(g(x))-f(g(y))|\le\varepsilon$．$g_n$ が g に一様収束することから，ある $N\in\mathbb{N}$ について，任意の $n\ge N$ に対して $\sup_{x\in[0,1]}|g(x)-g_n(x)|\le\delta$，よって

$$\sup_{x\in[0,1]}|f(g(x))-f(g_n(x))|\le\varepsilon$$

となる．

(3) $\varepsilon>0$ とせよ．(2) と，f は f_n に一様収束することから，$N\in\mathbb{N}$ があり，任意の $n\ge N$ に対して $\sup_{x\in[0,1]}|f(g(x))-f(g_n(x))|\le\varepsilon$ かつ $\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-f_n(x)|\le\varepsilon$．よって

$$\sup_{x\in[0,1]}|f(g(x))-f_n(g_n(x))|\le\sup_{x\in[0,1]}|f(g(x))-f(g_n(x))|+\sup_{x\in[0,1]}|f(g_n(x))-f_n(g_n(x))|\le 2\varepsilon.$$

1.6 2017 年度

問題は

`https://www.math.titech.ac.jp/top/~jimu/Graduate/old-exam/H29innsi.pdf`

を見よ．

[1]

(1) 略.

(2) 結果だけ書く：

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix},\quad \text{where}\quad P=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

(3) $C_V(A)=\{X\in V\mid XA=AX\}=W$ と書く．$C_V(P^{-1}AP)=P^{-1}WP\cong W$ だが，$P^{-1}AP$ は相異なる固有値を持つ対角行列であるから，$C_V(P^{-1}AP)$ は対角行列全体．したがって $\dim W=3$．線形写像

$\mathbb{R}[t] \to W, \quad f(t) \mapsto f(X)$ を考察する．kernel は A の最小多項式 $(t-1)(t-2)(t-3)$ で生成されるイデアルである．準同型定理より

$$\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}[t]/((t-1)(t-2)(t-3)) \cong \mathbb{R}[A] \subset W$$

である．$\dim W = 3$ だったので $W = \mathbb{R}[A]$ を得る．

[2]

$\mathrm{Im}(A^n) \subset \mathrm{Im}(A^{n+1})$ が示されれば，逆の包含は明らかなので結論が従う．部分空間の列

$$\mathrm{Im}(A^{n+1}) \subset \mathrm{Im}(A^n) \subset \cdots \subset \mathrm{Im}(A^2) \subset \mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{Im}(A^0) = \mathbb{C}^n$$

を考えると，$\dim \mathbb{C}^n = n$ より，ある $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ で $\mathrm{Im}(A^{k+1}) = \mathrm{Im}(A^k)$ となる．よって

$$\mathrm{Im}(A^{n+1}) = \mathrm{Im}(A^{n-k} \cdot A^{k+1}) = \mathrm{Im}(A^{n-k} \cdot A^k) = \mathrm{Im}(A^n)$$

を得る．

[3]

(1)

$$\mathcal{O} = \{U \subset \mathbb{R} \mid \forall x \in U \ \exists U(a,r) \in \mathcal{B} \text{ s.t. } x \in U(a,r) \subset U\}$$

が $\mathbb{R}$ の位相であることが示されれば，$\mathcal{B}$ がその開基であることは明らかである．省略.

(2)「$x \in U \in \mathcal{O}$ ならば $-x \in U$」であることに注意する．すると $1, -1 \in \mathbb{R}$ は $\mathcal{O}$ の開集合で分離できない.

(3) $\mathcal{O}$ は通常の Euclid 位相 $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ よりも弱い位相であることから従う.

(4) $[0,1]$ は $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ の位相でコンパクトであるから，$\mathcal{O}$ でもコンパクトである．$-1 \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$ だが $1 \notin \mathbb{R} \setminus [0,1]$ である．よって $\mathbb{R} \setminus [0,1]$ は開集合ではない.

[4]

非負値単調非増加数列 $\{a_n\}_n$ について，

$$\sum_n a_n \text{ が収束する} \iff \sum_n 2^n a_{2^n} \text{ が収束する}$$

であることに注意する．よって $\sum_{n\geq 2} 1/(n^p \log n)$ が収束することは $\sum_n 2^n \cdot 1/(2^{np} n) = \sum_n n^{-1} 2^{(1-p)n}$ が収束することと同値であり，d'Alembert's ratio test よりこれは $p > 1$ と同値.

(2) 仮定より，十分大きな $N \in \mathbb{N}$ があり，任意の $n, m \geq N$ に対して $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_m(x) - f_n(x)| \leq 1$ となる．各 f_n は多項式であるから，$n \geq N$ に対して，f_n の次数は n によらない定数であり，$d \geq 1$ について，f_n $(n \geq N)$ の d 次の係数は n によらない．f_n がある f に一様収束するということから定数項はある実数に収束し，したがって f は多項式となる.

[5]

(1) $\varepsilon > 0$ とする．仮定より，$\delta_1 > 0$ があり

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \quad (x, y \in [1-\delta_1, 1))$$

となる．f は有界閉区間 $[0, 1-\delta_1/2]$ で一様連続であるから，ある $\delta_2 > 0$ に対して

$$|f(x) - f(y)| \le \varepsilon \quad (x, y \in [0, 1-\delta_1/2],\ |x-y| \le \delta_2)$$

となる．さて，$x, y \in [0, 1)$, $0 \le y - x \le \min\{\delta_1/2, \delta_2\}$ とする．もし $x \in [0, 1-\delta_1]$ ならば $y \in [0, 1-\delta_1/2]$ であるから $|x-y| \le \delta_2$ とあわせて $|f(x) - f(y)| \le \varepsilon$ である．$x \in [1-\delta_1, 1)$ ならば $y \in [1-\delta_1, 1)$ でもあるから $|f(x) - f(y)| \le \varepsilon$ である．

(2) $\limsup_{x\to 1-0} f(x) > t > s > \liminf_{x \to 1-0} f(x)$ となる s, t を取る．すると，任意の $x \in [0, 1)$ に対して，$y, z \in (x, 1)$ があり，$f(y) < s < t < f(z)$ となる．よって $f(z) - f(y) > t - s > 0$．これは f が一様連続ではないことを示している．

(3)

1.7　2018 年度

問題は

https://www.math.titech.ac.jp/top/~jimu/Graduate/old-exam/H30innsi.pdf

を見よ．

1.8　2019 年度

問題は

https://www.math.titech.ac.jp/top/~jimu/Graduate/old-exam/H31innsi.pdf

を見よ．

1.9　2020 年度

問題は

https://www.math.titech.ac.jp/top/~jimu/Graduate/old-exam/2020innsi.pdf

を見よ．

1.10　2021 年度

問題は

https://www.math.titech.ac.jp/top/~jimu/Graduate/old-exam/2021innsi.pdf

を見よ．

1.11　2022 年度

問題は

を見よ.

1.12　2023 年度

問題は

を見よ.

1.13　2024 年度

問題は

を見よ.