

# 東工大院試

un cinglé

2024 年 6 月 6 日

## 概要

問題は

<https://www.math.titech.ac.jp/top/~jimu/Graduate/old-exam/innsi.html>  
を見よ.

## 目次

# 1 午前

## 1.1 2012 年度

問題は

<https://www.math.titech.ac.jp/top/~jimu/Graduate/old-exam/H24innssi.pdf>

を見よ.

[1]

簡単すぎるため省略.

[2]

(1)  $a > 0$  を任意に固定する (今は  $a = 1$  でよい).  $n \in \mathbb{N}_0$  に対して  $x_n$  を,  $[an, a(n+1)]$  における  $f$  の最小化元とする. すなわち

$$an \leq x_n \leq a(n+1) \quad \text{and} \quad f(x_n) = \min_{[an, a(n+1)]} f$$

となる  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  を取る. 今

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{an}^{a(n+1)} f(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx < \infty$$

なので, とくに

$$f(x_n) \leq \frac{1}{a} \int_{an}^{a(n+1)} f(x) dx \rightarrow 0 \quad (\text{as } n \rightarrow \infty)$$

であるから  $f(x_n) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) となる.  $x_n \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ) であることはよい.

(2)  $f(x) = x/(1+x^6 \sin^2 x)$  は (\*) を満たすが有界ですらない.

(3)  $\varepsilon > 0$  を任意に取る.  $f$  は一様連続であるから,  $\delta > 0$  があり, 任意の  $x, y \in [0, \infty)$  に対して次が成り立つ:

$$|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$$

ここで, (1) の解答において  $a = \delta$  としたときの  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  を取る.  $f(x_n) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) であるから, 十分大きな  $N \in \mathbb{N}$  があり, 任意の  $n \geq N$  に対して  $f(x_n) < \varepsilon/2$  となる. したがって, 任意の  $x \geq N\delta$  に対して  $n = \lfloor x/\delta \rfloor$  を  $x/\delta$  の整数部分とすると

$$f(x) \leq f(x_n) + |f(x) - f(x_n)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

を得る ( $x \in [\delta n, \delta(n+1)]$  より  $|x - x_n| \leq \delta$  に注意せよ).

[3]

(1)  $\emptyset, X \in \mathcal{O}$  であることはよい.

$A, B \in \mathcal{O}$  だとする. もし  $A \subset \mathbb{N}$  または  $B \subset \mathbb{N}$  ならば  $A \cap B \subset \mathbb{N}$  より  $A \cap B \in \mathcal{O}$  である. 一方, もし  $X - A$  と  $X - B$  が  $\mathbb{N}$  の有限部分集合ならば,  $X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B)$  もそうである. よって  $A \cap B \in \mathcal{O}$ . 以上よりいずれの場合も  $A \cap B \in \mathcal{O}$  は成り立つ.

$\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  を  $\mathcal{O}$  の元の族とする. もし任意の  $\lambda \in \Lambda$  に対して  $A_\lambda \subset \mathbb{N}$  ならば,  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \subset \mathbb{N}$  より  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathcal{O}$  である. 一方, ある  $\lambda_0 \in \Lambda$  について  $X - A_{\lambda_0}$  が  $\mathbb{N}$  の有限部分集合ならば,  $X - \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \subset X - A_{\lambda_0}$  もそうである. よってこの場合も  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathcal{O}$  が示された.

(2)  $x, y \in X$  を相異なる元とする. このとき最初から  $x < y$  と仮定してもよい. もし  $0 = x < y$  ならば  $A = X - \{y\}$ ,  $B = \{y\}$  が  $x$  と  $y$  を分離する開集合たちである. もし  $0 < x < y$  ならば  $A = \{x\}$ ,  $B = \{y\}$  でよい.

次に  $C, D \subset X$  は閉集合で  $C \cap D = \emptyset$  だとする. このとき,  $C \subset \{0\}$  であるか,  $C$  は  $\mathbb{N}$  の有限部分集合である.  $D$  についても同様である. もし  $C \subset \{0\}$  ならば,  $D \subset \mathbb{N}$  かつ  $D$  は有限集合だとしてよい. このときは  $A = X - D$ ,  $B = D$  が  $C, D$  を分離する. 一方, もし  $C, D \subset \mathbb{N}$  だが有限部分集合ならば,  $A = C$ ,  $B = D$  とおけばよい.

(3) 答えははい.  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  を  $X$  の開被覆だとせよ. このとき  $\lambda_0 \in \Lambda$  で  $0 \in A_{\lambda_0}$  となるものが存在する. ここで  $X - A_{\lambda_0}$  は  $\mathbb{N}$  の有限部分集合であることに注意する. 各  $x \in X - A_{\lambda_0}$  に対して  $\lambda_x \in \Lambda$  があり  $x \in A_{\lambda_x}$  となるので, これら  $\{A_{\lambda_x}\}_{x \in \{0\} \cup (X - A_{\lambda_0})}$  が有限部分開被覆を与える.

(4) 丁寧な誘導をありがとう.  $f: X \rightarrow Y$  を  $f(0) = 0$ ,  $f(n) = 1/n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) により定める.  $f$  は連続であることを示すが, それには  $\mathbb{R}$  の开区間  $I = (a, b)$  について  $f^{-1}(I \cap Y) \in \mathcal{O}$  であることを示せばよい. もし  $0 < a < b$  ならば  $f^{-1}(I \cap Y) = \{n \in \mathbb{N} \mid 1/b < n < 1/a\} \in \mathcal{O}$  である. 一方,  $a \leq 0 < b$  ならば  $f^{-1}(I \cap Y) = \{0\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n > 1/b\} \in \mathcal{O}$  となる.

$f$  はコンパクト空間から Hausdorff 空間への連続全単射であるから同相である.

## 1.2 2013 年度

問題は

<https://www.math.titech.ac.jp/top/~jim/G/graduate/old-exam/H25innssi.pdf>

を見よ.

[1]

答えは  $\pi^2/8a$ . 極座標に変換する. つまり

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta; \quad (r, \theta, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$$

とおく. すると

$$\begin{aligned}
 \iiint_D \frac{dx dy dz}{(a^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2} &= \int_0^\infty dr \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \frac{r^2 \sin \theta}{(a^2 + r^2)^2} \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \frac{r^2}{(a^2 + r^2)^2} dr \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{a^2 \tan^2 x}{a^4 (1 + \tan^2 x)^2} \frac{a}{\cos^2 x} dx \quad (\text{put } r = a \tan x) \\
 &= \frac{\pi}{2a} \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx \\
 &= \frac{\pi}{2a} \left[ \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\pi/2} \\
 &= \frac{\pi^2}{8a}
 \end{aligned}$$

と計算される.

[2]

(1)

$$\min_I f \leq \mu_1 := \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(x) dx \leq \max_I f$$

であるから, 中間値の定理より  $f(b) = \mu_1$  となる  $b \in I$  が存在する.

(2)

$$\min_I f = \left( \frac{3}{2a^3} \min_I f \right) \int_{-a}^a x^2 dx \leq \mu_2 := \frac{3}{2a^3} \int_{-a}^a x^2 f(x) dx \leq \left( \frac{3}{2a^3} \max_I f \right) \int_{-a}^a x^2 dx = \max_I f$$

であるから, 以下同文.

(3) 部分積分より

$$\begin{aligned}
 \mu_3 &:= \frac{3}{2a^3} \int_{-a}^a x f(x) dx \\
 &= \frac{3(f(a) - f(-a))}{4a} - \frac{3}{4a^3} \int_{-a}^a x^2 f'(x) dx \\
 &= \frac{3}{4a} \int_{-a}^a f'(x) dx - \frac{3}{4a^3} \int_{-a}^a x^2 f'(x) dx \\
 &= \frac{3}{4a^3} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) f'(x) dx
 \end{aligned}$$

であり, したがって

$$\min_I f' = \left( \min_I f' \right) \frac{3}{4a^3} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx \leq \mu_3 \leq \left( \max_I f' \right) \frac{3}{4a^3} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \max_I f'$$

であるから, 以下同文.

[3]

(1)  $(\varphi(\mathbf{0}), \varphi(\mathbf{0})) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$  より  $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  を得る.

(2)  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  とする. このとき  $\varphi(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = a\varphi(\mathbf{x}) + b\varphi(\mathbf{y})$  を示せばよいが, 内積の双線形性を用いて分解し, さらにわちゃわちゃすると

$$\begin{aligned} & (\varphi(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) - a\varphi(\mathbf{x}) - b\varphi(\mathbf{y}), \varphi(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) - a\varphi(\mathbf{x}) - b\varphi(\mathbf{y})) \\ &= (\varphi(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}), \varphi(a\mathbf{x} + b\mathbf{y})) - a(\varphi(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}), \varphi(\mathbf{x})) - b(\varphi(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}), \varphi(\mathbf{y})) \\ &\quad - a(\varphi(\mathbf{x}), \varphi(a\mathbf{x} + b\mathbf{y})) + a^2(\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x})) + ab(\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y})) \\ &\quad - b(\varphi(\mathbf{y}), \varphi(a\mathbf{x} + b\mathbf{y})) + ab(\varphi(\mathbf{y}), \varphi(\mathbf{x})) + b^2(\varphi(\mathbf{y}), \varphi(\mathbf{y})) \\ &= (a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) - a(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{x}) - b(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{y}) \\ &\quad - a(\mathbf{x}, a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) + a^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + ab(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &\quad - b(\mathbf{y}, a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) + ab(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + b^2(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となることから従う.

(3)  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  を  $\mathbb{R}^n$  の標準基底とする.  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  は線形写像だから行列  $A = [\varphi(\mathbf{e}_1) \ \cdots \ \varphi(\mathbf{e}_n)]$  により  $\varphi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$  と表される. 仮定より  $\varphi(\mathbf{e}_1), \dots, \varphi(\mathbf{e}_n)$  は  $\mathbb{R}^n$  の正規直交系を与えており, したがって  $A$  は直交行列である.

[4]

(1) 略.

(2) 行列  $\begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix}$  を基本変形してなんやかんややると  $X + Y$ ;  $X \cap Y$  の基底としてそれぞれ  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ;  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$  が取れることがわかる.

[5]

(1)  $(X, d)$  は,  $n = 1$  のとき不連結,  $n \geq 2$  のとき連結.

(2)  $(X, d)$  の有界閉集合  $B = \{\mathbf{p} \in X \mid |\mathbf{p}| \leq 1\}$  はコンパクトではない. 実際,

$$B_n = \{\mathbf{p} \in X \mid 1/n < |\mathbf{p}|\}$$

で定まる  $A$  の開被覆  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は, 有限部分被覆を持たない.

(3) はい.  $X$  は完備距離空間  $\mathbb{R} \times S^{n-1}$  に同相である. ここで  $S^{n-1}$  は  $\mathbb{R}^n$  内の単位  $(n-1)$ -球面. 実際に

$$X \ni \mathbf{p} \mapsto (\log |\mathbf{p}|, \mathbf{p}/|\mathbf{p}|) \in \mathbb{R} \times S^{n-1}$$

が同相写像である.

■余談 ある完備距離空間と同相となるような位相空間をポーランド空間という. 例えば, ポーランド空間の  $G_\delta$  集合はポーランド空間であることが知られている. とくに無理数全体の集合に  $\mathbb{R}$  の相対位相を入れるとポーランド空間になる.

### 1.3 2014 年度

問題は

を見よ.

[1]

答えは  $\pi/12$ . 円柱座標

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad \zeta = z; \quad (r, \theta, \zeta) \in [0, \infty) \times [0, \pi/2] \times [0, \infty)$$

を用いよ.

[2]

(1) 答えは  $p \leq 3$  で,  $p < 3$  のとき  $f(x) = 0$ ;  $p = 3$  のとき  $f(x) = \begin{cases} 0 & (\text{if } x = 0) \\ x^{-2} & (\text{if } 0 < x \leq 1) \end{cases}$  である.

(2) 答えは  $p < 1$ .  $p = 3$  のときは明らかに  $f_n$  は一様収束しない (連続関数の一様収束極限が連続であることを思い出せばよい). そこで  $p < 3$  だとして.

$$f'_n(x) = \frac{n^p(1 - 2n^3x^3)}{(1 + n^3x^3)^2}$$

であり, 増減を考えると  $f_n(x)$  は  $x = 2^{-1/3}n^{-1}$  で最大値をとることがわかる. よって

$$\sup_{[0,1]} |f_n| = f_n(2^{-1/3}n^{-1}) = \frac{2^{2/3} \cdot n^{p-1}}{3}$$

である. よって  $f_n$  が一様に  $f = 0$  に収束するのは  $p < 1$  のときに限る.

(3) 答えは  $p \leq 2$ . 変数変換  $y = nx$  により

$$\int_0^1 f_n(x) dx = n^{p-2} \int_0^n \frac{y}{1+y^3} dy$$

だが,

$$I_n := \int_0^n \frac{y}{1+y^3} dy \leq \int_0^1 y dy + \int_1^n \frac{1}{y^2} dy \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{n} \leq \frac{3}{2} < \infty$$

は収束するので  $n^{p-2}I_n$  は  $p \leq 2$  のときに限って収束する.

[3]

(1) 例えば

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2)  $(a+d)^2$ .

(3) 16.

[4]

(1)  $F$  はスケール不変である. つまり  $F(k\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})$  ( $\forall k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ ). とくに  $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}/|\mathbf{x}|)$ .

(2)  $F$  の連続性より,  $F$  の  $S^2$  への制限は最大値・最小値を持つが, (1) よりこれらは  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$  全域における  $F$  の最大値・最小値を与える.

(3) 仮定より  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  は一次独立. よって  $\det P = \det \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{a} \times \mathbf{b} \end{bmatrix} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 \neq 0$  なので  $P$  は正則である. さて,  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  が  $A$  の固有ベクトルであることを示そう.  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  はそれぞれ, 拘束条件  $|\mathbf{x}|^2 = 1$  のもとでの

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$$

の最大化・最小化元である. ここで  $A = (a_{ij})_{i,j}$ ,  $\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3)$  とおいた. Lagrange の未定乗数法より,  $\mathbf{x} = \mathbf{a}, \mathbf{b}$  に対して

$$\sum_j a_{ij} x_j - 2\lambda x_i = 0 \quad (\text{for } i = 1, 2, 3)$$

が成り立つ. ここで  $\lambda$  は未定定数を表す. これは  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  が  $A$  の固有ベクトルであることを示している. 最後に  $\mathbf{c}$  が  $A$  の固有ベクトルであることを示す.  $A$  は対称行列であり,  $\mathbf{a}$  は  $A$  の固有ベクトルなので固有値を  $\lambda$  として

$$\langle A\mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{c}, A\mathbf{a} \rangle = \lambda \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle = 0$$

が成り立つ. 同様に  $\langle A\mathbf{c}, \mathbf{b} \rangle = 0$  が成り立つので,  $A\mathbf{c}$  は  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  に直交するベクトルである. よって  $A\mathbf{c}$  は  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$  の定数倍になるしかない.

以上より  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  が  $A$  の固有ベクトルからなる  $\mathbb{R}^3$  の基底をなすことが示された.

[5]

(1) はい.  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq b$  とする. 最初から  $a < b$  としてよい. このとき  $[a, b)$  と  $[b, b+1)$  は  $a$  と  $b$  を分離する開集合である.

(2) いいえ.  $U := (-\infty, 0) = \bigcup_{n \geq 0} [-n, 0) \in \mathcal{O}$  および  $V := [0, \infty) = \bigcup_{n \geq 0} [0, n) \in \mathcal{O}$  は空でなく,  $U \cup V = \mathbb{R}$ ,  $U \cap V = \emptyset$ .

(3) いいえ.  $[0, 1] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, 1 - 1/2n) \cup [1, 2)$  は有限部分被覆を持たない.

## 1.4 2015 年度

問題は

<https://www.math.titech.ac.jp/top/~jimu/Graduate/old-exam/H27innsi.pdf>

を見よ.

[1]

(1) 答えは  $\alpha < -1$ . 極座標に変換すると

$$2\pi \int_0^\infty (1+r^2)^\alpha r \, dr$$

の収束・発散を見ればよい.

(2)  $M = \sup_n |a_n| < \infty$  とおく.  $\varepsilon > 0$  とせよ.  $\lim_n a_n = a$  より, 十分大きい  $N \in \mathbb{N}$  があり, 任意の  $n \geq N$  に対して  $|a - a_n| \leq \varepsilon$  が成り立つ. よって  $n \geq N$  ならば

$$\left| a - \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right| \leq \frac{|a - a_1| + \cdots + |a - a_n|}{n} \leq \frac{N(|a| + M)}{n} + \frac{(n - N)\varepsilon}{n}$$

よって

$$\limsup_n \left| a - \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right| \leq \limsup_n \left( \frac{N(|a| + M)}{n} + \frac{(n - N)\varepsilon}{n} \right) = \varepsilon$$

となる.  $\varepsilon > 0$  は任意なので  $\lim_n \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = a$  を得る.

[2]

(1)  $1 > 0$  に対して  $M > 0$  があり, 任意の  $|x| \geq M$  に対して  $|f(x)| \leq 1$  となる. よって

$$\sup_{\mathbb{R}} |f| \leq 1 + \sup_{[-M, M]} |f| < \infty$$

である.

(2)  $\varepsilon > 0$  とせよ. 仮定より,  $M > 0$  があり, 任意の  $|x| \geq M$  に対して  $|f(x)| \leq \varepsilon/3$  となる.  $f$  は有界閉区間  $[-M, M]$  上一様連続であるから,  $0 < \delta < 1$  があり, 任意の  $x, y \in [-M, M]$  に対して

$$|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/3$$

が成り立つ.  $x, y \in \mathbb{R}$  が  $|x - y| \leq \delta$  を満たすと仮定しよう.

- $x, y \in [-M, M]$  ならば  $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/2$  である.
- $x, y \notin [-M, M]$  ならば  $|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq \varepsilon$  である.
- $x > M$  かつ  $y \in [-M, M]$  ならば,  $|y - M| \leq |x - y| \leq \delta$  より  $|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(M)| + |f(M) - f(y)| \leq \varepsilon$  である. 同様に  $|x| \geq M$  もしくは  $|y| \geq M$  の場合が示せる.

(3)  $M = \sup_{\mathbb{R}} |f|$  とおく.  $z = ny$  と変数変換して

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x + z/n)g(z) dz$$

となる.

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x + z/n)|g(z) dz$$

である. さて,  $\varepsilon > 0$  とせよ.  $f$  は一様連続なので,  $\delta > 0$  があり, 任意の  $x, y \in \mathbb{R}$  に対して

$$|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

となる. よって  $x \in \mathbb{R}$  に対して

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &\leq \int_{|z| \leq n\delta} |f(x) - f(x + z/n)|g(z) dz + \int_{|z| \geq n\delta} |f(x) - f(x + z/n)|g(z) dz \\ &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}} g(z) dz + 2M \int_{|z| \geq n\delta} g(z) dz \\ &\leq \varepsilon + \int_{|z| \geq n\delta} g(z) dz \end{aligned}$$



だが, 今  $\int_{|z| \geq n\delta} g \, dz \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$  より

$$\limsup_n \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$$

となる.  $\varepsilon > 0$  は任意なので  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$  を得る.

[3]

固有多項式は  $(\lambda - a - b)^2(\lambda - a + b)(\lambda + a - b)$ . 固有値  $\lambda$  に対する固有空間を  $V_\lambda$  と書くことにすると,

$$V_{2a} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad V_0 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \quad (\text{if } a = b)$$

$$V_{a+b} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad V_{a-b} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad V_{-a+b} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \quad (\text{if } a \neq b)$$

最小多項式は

$$(\lambda - 2a)\lambda \quad (\text{if } a = b) \quad ; \quad (\lambda - a - b)(\lambda - a + b)(\lambda + a - b) \quad (\text{if } a \neq b)$$

[4]

(1)  $\ker(E_n - A) \subset \text{Im}(A)$  より従う. (2) 等号成立は  $\ker(E_n - A) \supset \text{Im}(A)$  つまり  $A - A^2 = (E_n - A)A = 0$  と同値.

[5]

(1)  $\emptyset, \mathbb{R}^2 \in \mathcal{O}$  はよい.  $U_\lambda, U, V \subset \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}$  の開集合とせよ ( $\lambda \in \Lambda$ ). このとき

$$(U \times \mathbb{R}) \cap (V \times \mathbb{R}) = (U \cap V) \times \mathbb{R}, \quad \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (U_\lambda \times \mathbb{R}) = \left( \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \right) \times \mathbb{R} \in \mathcal{O}$$

である.

(2) いいえ.  $(0, 0), (0, 1) \in \mathbb{R}^2$  は開集合で分離できない.

(3) コンパクトであるものは,  $J \times J, I \times I$  のみ. ほかはコンパクトでない.

(4)  $\text{cl}(I \times I) = J \times \mathbb{R}, \text{cl}(I \times J) = J \times \mathbb{R}, \text{cl}(J \times I) = J \times \mathbb{R}, \text{cl}(J \times J) = J \times \mathbb{R}$

## 1.5 2016 年度

問題は

<https://www.math.titech.ac.jp/top/~jimur/Graduate/old-exam/H28innsi.pdf>

を見よ.

[1]

(1), (2) 略.

(3)  $X = (x_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$  に対して

$$D_A(X) = O \iff x_{11} = x_{33}, x_{12} = x_{32}, x_{13} = x_{31}, x_{21} = x_{23}$$

であることがわかる. よって  $\dim \ker(D_A) = 5$ , 次元定理より  $\dim \operatorname{Im}(D_A) = 4$ .

[2]

(1)  $\Phi_n(\lambda) = A - \lambda$  を  $A$  の固有多項式とすると,

$$\Phi_1(\lambda) = 1 - \lambda, \Phi_2(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda \quad ; \quad \Phi_n(\lambda) = (1 - \lambda)\Phi_{n-1}(\lambda) - \Phi_{n-2}(\lambda) \quad (n \geq 3).$$

を得る. よって

$$\det A = \Phi_n(0) = \begin{cases} 1 & (\text{if } n \equiv 0, 1 \pmod{6}), \\ -1 & (\text{if } n \equiv 3, 4 \pmod{6}), \\ 0 & (\text{if } n \equiv 2, 5 \pmod{6}). \end{cases}$$

(2) direct calculation より固有空間は

$$\left\langle {}^t(1, 0, -1, 0, \dots, 0, (-1)^{(n-1)/2}) \right\rangle.$$

[3]

(1) 略.

(2)  $(-\infty, 0)$  はコンパクトでないが  $(-\infty, 0]$  はコンパクトである.  $(-\infty, 0)$  の開被覆  $\{(-\infty, -1/n) \mid n \in \mathbb{N}\}$  は有限部分被覆を持たない.  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  を  $(-\infty, 0]$  の  $\mathcal{O}$ -開被覆とせよ.  $U_\lambda = (-\infty, a_\lambda)$  とおく ( $U_\lambda = \emptyset$  ならば  $a_\lambda = -\infty$ ,  $U_\lambda = \mathbb{R}$  ならば  $a_\lambda = \infty$  と解釈せよ).  $0 \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$  であるから, ある  $\lambda_0 \in \Lambda$  に対して  $0 \in U_{\lambda_0}$  である.  $\{U_{\lambda_0}\}$  が有限部分被覆.

(3) 答えははい.  $(0, 1) \cup (2, 3) \subset U \cup V$ ;  $U, V \in \mathcal{O}$ ;  $U \cap V \cap ((0, 1) \cup (2, 3)) = \emptyset$  とせよ. このとき  $U \subset V$  または  $U \supset V$  が成り立つので,  $U \cap ((0, 1) \cup (2, 3)) = \emptyset$  または  $V \cap ((0, 1) \cup (2, 3)) = \emptyset$  である. よって  $(0, 1) \cup (2, 3)$  は連結.

(4)  $f: (\mathbb{R}, \mathcal{O}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{O})$  を連続写像とする.  $x, x' \in \mathbb{R}$  で  $x \leq x'$ ,  $f(x) > f(x')$  を満たすものがあつたと仮定しよう.  $f$  の連続性より

$$f^{-1}((-\infty, f(x))) = (-\infty, a), \quad a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

となる  $a$  がある.  $f(x') < f(x)$  より  $x' < a$  である. 一方明らかに  $x \geq a$  である. よって  $x' < x$  となり矛盾.

[4]

(1) 答えは  $p + q > 0$ .  $x \neq 0$  に対して  $f_{p,q}(x) = |x|^{p+q} |\sin x/x|^q$  であり,  $\sin x/x \rightarrow 1$  ( $x \rightarrow 0$ ) に注意するとわかる.

(2) 答えは  $p + q > 1$ .  $x \neq 0$  に対して

$$\frac{f_{p,q}(x) - f_{p,q}(0)}{x} = \frac{x}{|x|} |x|^{p+q-1} \left| \frac{\sin x}{x} \right|^q$$

が  $x \rightarrow 0$  で有限確定値に収束する条件を考えればわかる.

(3) 答えは  $p + q > -1$ . 極座標に変換すると

$$\iint_D f_{p,q}(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy = \frac{\pi}{2} \int_0^1 r^{p+q+1} \left| \frac{\sin r}{r} \right|^q dr$$

で同様.  $[0, 1]$  で  $0 < \exists m \leq |\sin r/r| \leq 1$  に注意せよ.

[5]

(1) まず  $f, g$  は連続関数の一様収束極限として連続である.  $\varepsilon > 0$  とせよ. 次を満たす  $\delta > 0$  がある: 任意の  $x \in \mathbb{R}$  に対して

$$|a - x| \leq \delta \implies |f(a) - f(x)| \leq \varepsilon$$

$a_n \rightarrow a$  ( $n \rightarrow \infty$ ) より,  $N \in \mathbb{N}$  があり任意の  $n \geq N$  について  $|a - a_n| \leq \delta$  かつ  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ , よって

$$|f(a) - f_n(a_n)| \leq |f(a) - f(a_n)| + |f(a_n) - f_n(a_n)| \leq 2\varepsilon.$$

(2)  $\varepsilon > 0$  とせよ.  $f \circ g$  は  $[0, 1]$  で一様連続であるから, 次を満たす  $\delta > 0$  がある: 任意の  $x, y \in [0, 1]$ ,  $|x - y| \leq \delta$  に対して  $|f(g(x)) - f(g(y))| \leq \varepsilon$ .  $g_n$  が  $g$  に一様収束することから, ある  $N \in \mathbb{N}$  について, 任意の  $n \geq N$  に対して  $\sup_{x \in [0, 1]} |g(x) - g_n(x)| \leq \delta$ , よって

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f(g(x)) - f(g_n(x))| \leq \varepsilon$$

となる.

(3)  $\varepsilon > 0$  とせよ. (2) と,  $f$  は  $f_n$  に一様収束することから,  $N \in \mathbb{N}$  があり, 任意の  $n \geq N$  に対して  $\sup_{x \in [0, 1]} |f(g(x)) - f(g_n(x))| \leq \varepsilon$  かつ  $\sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ . よって

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f(g(x)) - f_n(g_n(x))| \leq \sup_{x \in [0, 1]} |f(g(x)) - f(g_n(x))| + \sup_{x \in [0, 1]} |f(g_n(x)) - f_n(g_n(x))| \leq 2\varepsilon.$$

## 1.6 2017 年度

問題は

<https://www.math.titech.ac.jp/top/~jimu/Graduate/old-exam/H29innsi.pdf>

を見よ.

[1]

(1) 略.

(2) 結果だけ書く:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{where } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3)  $C_V(A) = \{X \in V \mid XA = AX\} = W$  と書く.  $C_V(P^{-1}AP) = P^{-1}WP \cong W$  だが,  $P^{-1}AP$  は相異なる固有値を持つ対角行列であるから,  $C_V(P^{-1}AP)$  は対角行列全体. したがって  $\dim W = 3$ . 線形写像

$\mathbb{R}[t] \rightarrow W, f(t) \mapsto f(X)$  を考察する. kernel は  $A$  の最小多項式  $(t-1)(t-2)(t-3)$  で生成されるイデアルである. 準同型定理より

$$\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}[t]/((t-1)(t-2)(t-3)) \cong \mathbb{R}[A] \subset W$$

である.  $\dim W = 3$  だったので  $W = \mathbb{R}[A]$  を得る.

[2]

$\text{Im}(A^n) \subset \text{Im}(A^{n+1})$  が示されれば, 逆の包含は明らかなので結論が従う. 部分空間の列

$$\text{Im}(A^{n+1}) \subset \text{Im}(A^n) \subset \cdots \subset \text{Im}(A^2) \subset \text{Im}(A) \subset \text{Im}(A^0) = \mathbb{C}^n$$

を考えると,  $\dim \mathbb{C}^n = n$  より, ある  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  で  $\text{Im}(A^{k+1}) = \text{Im}(A^k)$  となる. よって

$$\text{Im}(A^{n+1}) = \text{Im}(A^{n-k} \cdot A^{k+1}) = \text{Im}(A^{n-k} \cdot A^k) = \text{Im}(A^n)$$

を得る.

[3]

(1)

$$\mathcal{O} = \{U \subset \mathbb{R} \mid \forall x \in U \exists U(a, r) \in \mathcal{B} \text{ s.t. } x \in U(a, r) \subset U\}$$

が  $\mathbb{R}$  の位相であることが示されれば,  $\mathcal{B}$  がその開基であることは明らかである. 省略.

(2) 「 $x \in U \in \mathcal{O}$  ならば  $-x \in U$ 」であることに注意する. すると  $1, -1 \in \mathbb{R}$  は  $\mathcal{O}$  の開集合で分離できない.

(3)  $\mathcal{O}$  は通常の Euclid 位相  $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$  よりも弱い位相であることから従う.

(4)  $[0, 1]$  は  $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$  の位相でコンパクトであるから,  $\mathcal{O}$  でもコンパクトである.  $-1 \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$  だが  $1 \notin \mathbb{R} \setminus [0, 1]$  である. よって  $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$  は開集合ではない.

[4]

非負値単調非増加数列  $\{a_n\}_n$  について,

$$\sum_n a_n \text{ が収束する} \iff \sum_n 2^n a_{2^n} \text{ が収束する}$$

であることに注意する. よって  $\sum_{n \geq 2} 1/(n^p \log n)$  が収束することは  $\sum_n 2^n \cdot 1/(2^{np} n) = \sum_n n^{-1} 2^{(1-p)n}$  が収束することと同値であり, d'Alembert's ratio test よりこれは  $p > 1$  と同値.

(2) 仮定より, 十分大きな  $N \in \mathbb{N}$  があり, 任意の  $n, m \geq N$  に対して  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_m(x) - f_n(x)| \leq 1$  となる. 各  $f_n$  は多項式であるから,  $n \geq N$  に対して,  $f_n$  の次数は  $n$  によらない定数であり,  $d \geq 1$  について,  $f_n$  ( $n \geq N$ ) の  $d$  次の係数は  $n$  によらない.  $f_n$  がある  $f$  に一様収束するということから定数項はある実数に収束し, したがって  $f$  は多項式となる.

[5]

(1)  $\varepsilon > 0$  とする. 仮定より,  $\delta_1 > 0$  があり

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \quad (x, y \in [1 - \delta_1, 1))$$

となる.  $f$  は有界閉区間  $[0, 1 - \delta_1/2]$  で一様連続であるから, ある  $\delta_2 > 0$  に対して

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \quad (x, y \in [0, 1 - \delta_1/2], |x - y| \leq \delta_2)$$

となる. さて,  $x, y \in [0, 1)$ ,  $0 \leq y - x \leq \min\{\delta_1/2, \delta_2\}$  とする. もし  $x \in [0, 1 - \delta_1]$  ならば  $y \in [0, 1 - \delta_1/2]$  であるから  $|x - y| \leq \delta_2$  とあわせて  $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$  である.  $x \in [1 - \delta_1, 1)$  ならば  $y \in [1 - \delta_1, 1)$  でもあるから  $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$  である.

(2)  $\limsup_{x \rightarrow 1-0} f(x) > t > s > \liminf_{x \rightarrow 1-0} f(x)$  となる  $s, t$  を取る. すると, 任意の  $x \in [0, 1)$  に対して,  $y, z \in (x, 1)$  があり,  $f(y) < s < t < f(z)$  となる. よって  $f(z) - f(y) > t - s > 0$ . これは  $f$  が一様連続ではないことを示している.

(3)

## 1.7 2018 年度

問題は

<https://www.math.titech.ac.jp/top/~jimu/Graduate/old-exam/H30innsi.pdf>

を見よ.

## 1.8 2019 年度

問題は

<https://www.math.titech.ac.jp/top/~jimu/Graduate/old-exam/H31innsi.pdf>

を見よ.

## 1.9 2020 年度

問題は

<https://www.math.titech.ac.jp/top/~jimu/Graduate/old-exam/2020innsi.pdf>

を見よ.

## 1.10 2021 年度

問題は

<https://www.math.titech.ac.jp/top/~jimu/Graduate/old-exam/2021innsi.pdf>

を見よ.

## 1.11 2022 年度

問題は

を見よ.

## 1.12 2023 年度

問題は

を見よ.

## 1.13 2024 年度

問題は

を見よ.