楕円型偏微分方程式の正則性理論

ウ

2025 年 4 月 5 日

概要

この PDF は，筆者が B4 セミナーで発表した (もしくは発表しきれなかった) 内容をまとめたものである．全体の流れはセミナーの文献 [FR] に概ね依っているが，他の文献も随所で参照している．

目次

参考文献

[Bre] H. Brézis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, Springer, 2011.

[Eva] L. C. Evans, *Partial Differential Equations: Second Edition*, American Mathematical Society, 2010.

[FR] X. Fernàndez-Real and X. Ros-Oton, *Regularity Theory for Elliptic PDE*[*1], arXiv:2301.01564, 2023.

[GT] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Classics in Mathematics, Springer Berlin, 2001.

[Mped] Mathpedia,「Hölder 空間の基本事項」. `https://old.math.jp/wiki/H%C3%B6lder%E7%A9%BA%E9%96%93%E3%81%AE%E5%9F%BA%E6%9C%AC%E4%BA%8B%E9%A0%85`

[Sim97] L. Simon, *Schauder estimates by scaling*, Calc. Var. Partial Differential Equations **5** (1997), 391-407.

[Wan06] X.-J. Wang, *Schauder Estimates for Elliptic and Parabolic Equations*, Chinese Ann. Math. Ser. B **27** (2006), 637-642.

[*1] `https://arxiv.org/abs/2301.01564`

記号

- $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$,
- $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$,
- $\mathcal{L}^n : \mathbb{R}^n$ 上の Lebesgue 測度，しばしば $\mathcal{L}^n(E) = |E|$ とも記される．
- $\mathcal{H}^s : \mathbb{R}^n$ 上の s 次元 Hausdorff 測度,
- $B_R(x_0) \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| < R\}$,
- $\omega_n \coloneqq \mathcal{L}^n(B_1(0)) = \pi^{n/2}/\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)$．このとき $\mathcal{H}^{n-1}(\partial B_1(0)) = n\omega_n$,
- $\Omega' \subset\subset \Omega :\Longleftrightarrow \overline{\Omega'}$ がコンパクトかつ $\overline{\Omega'} \subset \Omega$,
- $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$，$D_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ etc.,
- 一般に，多重添字 $\gamma = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}_0^n$ に対して $|\gamma| = i_1 + \cdots + i_n$ を γ の長さといい,
$$D^\gamma = D_1^{i_1} \cdots D_n^{i_n} = \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}}$$
  と表記する．
- Laplacian：$\Delta = \sum_{i=1}^n D_{ii}$,
- $Du = {}^t(D_1 u, \ldots, D_n u)$，$D^2 u = (D_{ij} u)_{i,j}$,
- $x \le C_{\alpha,\beta,\ldots} y$：「$x$ は y で，$\alpha, \beta, \ldots$ にのみ依存する定数を用いて上から抑えられる」．定数が何に依存するかはしばしば省略される．

1 Hölder 空間

本節では，おおよそ [Mped]，[GT] に従って Hölder 空間の基本事項について述べる．

1.1 定義

以下，とくに断らない限り $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は有界領域であると仮定する．

定義 1.1 (Hölder (セミ) ノルム)**.** $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ に対して，

$$
\begin{aligned}
|u|_{0;\Omega} = [u]_{0;\Omega} &\coloneqq \sup_{x\in\Omega} |u(x)|, \\
[u]_{0,\alpha;\Omega} &\coloneqq \sup_{x\neq y\in\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \quad (\alpha \in (0,1])
\end{aligned}
$$

として Hölder セミノルムを定める．また

$$
|u|_{0,\alpha;\Omega} \coloneqq |u|_{0;\Omega} + [u]_{0,\alpha;\Omega}
$$

と Hölder ノルムを定義する．Hölder 空間

$$
C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \coloneqq \left\{ u \in C(\overline{\Omega}) \mid [u]_{0,\alpha;\Omega} < \infty \right\}
$$

の元 $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ を α-Hölder 連続関数と呼ぶ．1-連続関数は Lipschitz 連続関数のことである．

また，$u \in C^k(\overline{\Omega})$ $(k \in \mathbb{N})$ に対して

$$
\begin{aligned}
[u]_{k,0;\Omega} = [u]_{k;\Omega} &\coloneqq \sup_{|\gamma|=k} [D^\gamma u]_{0;\Omega} \\
|u|_{k,0;\Omega} = |u|_{k;\Omega} &\coloneqq \sum_{j=0}^{k} [u]_{j;\Omega}, \\
[u]_{k,\alpha;\Omega} &\coloneqq \sup_{|\gamma|=k} [D^\gamma u]_{0,\alpha;\Omega}, \\
|u|_{k,\alpha;\Omega} &\coloneqq |u|_{k;\Omega} + [u]_{k,\alpha;\Omega} \quad (\alpha \in (0,1])
\end{aligned}
$$

と定義し，

$$
C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \coloneqq \left\{ u \in C^k(\overline{\Omega}) \mid [u]_{k,\alpha;\Omega} < \infty \right\}
$$

と定義する．

最後に，局所 Hölder 連続関数の空間を

$$
C^{k,\alpha}(\Omega) \coloneqq \left\{ u\colon \Omega \to \mathbb{R} \mid \forall \Omega' \subset\subset \Omega;\ u \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega'}) \right\}
$$

$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ に，“無次元ノルム” と呼ばれる以下の $|\bullet|_{k,\alpha;\Omega}$ と同値なノルムを定義しておくと，ノルム評価の記述が簡潔になって便利なことがある．

定義 1.2 (無次元ノルム)**.** $R = \operatorname{diam}\Omega$ として，次のように無次元ノルムを定義する．

$$\begin{aligned}
[u]'_{k,0;\Omega} = [u]'_{k;\Omega} &:= R^k [u]_{k;\Omega}, \\
[u]'_{k,\alpha;\Omega} &:= R^{k+\alpha} [u]_{k,\alpha;\Omega} \quad (\alpha \in (0,1]), \\
|u|'_{k,0;\Omega} = |u|'_{k;\Omega} &:= \sum_{j=0}^{k} [u]'_{j;\Omega}, \\
|u|'_{k,\alpha;\Omega} &:= |u|'_{k;\Omega} + [u]'_{k,\alpha;\Omega} \quad (\alpha \in (0,1])
\end{aligned}$$

1.2 Hölder (セミ) ノルムの基本的な性質

補題 1.3 (Hölder セミノルムの下半連続性)**.** $\alpha \in [0,1]$，$\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ が $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ に各点収束しているとする．このとき

$$[u]_{0,\alpha;\Omega} \le \liminf_{m\to\infty} [u_m]_{0,\alpha;\Omega}$$

が成り立つ．とくに $\sup_{m\in\mathbb{N}} [u_m]_{0,\alpha;\Omega} < \infty$ ならば $[u]_{0,\alpha;\Omega} < \infty$ である．

Proof. $\alpha = 0$ の場合：$x \in \Omega$ に対して

$$|u_m(x)| \le [u_m]_{0;\Omega} \quad (m \in \mathbb{N})$$

が成り立っている．両辺の $\liminf_m$ を取って

$$|u(x)| \le \liminf_{m\to\infty} [u_m]_{0;\Omega}$$

となり，$x \in \Omega$ は任意なので $[u]_{0;\Omega} \le \liminf_m [u_m]_{0;\Omega}$ を得る．

$\alpha > 0$ の場合：$x, y \in \Omega$ に対して

$$|u_m(x) - u_m(y)| \le [u_m]_{0,\alpha;\Omega} |x-y|^\alpha \quad (m \in \mathbb{N})$$

が成り立っている．両辺の $\liminf_m$ を取って同様にやればよい． □

定理 1.4. ノルム空間 $(C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}), |\bullet|_{k,\alpha;\Omega})$ は Banach 空間である．

Proof.

■#1　$k = 0,\ \alpha = 0$ の場合．

$\{u_m\}_m \subset C(\overline{\Omega})$ を Cauchy 列とする．

$$\lim_{m_0\to\infty} \sup_{m,l\ge m_0} \sup_{x\in\Omega} |u_l(x) - u_m(x)| = 0$$

なので，とくに各 $x \in \Omega$ で $\{u_m(x)\}_m$ は $\mathbb{R}$ の Cauchy 列である．よって，$\{u_m\}_m$ はある $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ に各点収束する．

$u_m \to u$ uniformly in Ω であることを示そう．$\varepsilon > 0$ とすると，$m_0 \in \mathbb{N}$ があり，任意の $m, l \ge m_0$ に対して

$$|u_m(x) - u_l(x)| \le \varepsilon \quad (\forall x \in \Omega)$$

が成り立つ．$l \to \infty$ として

$$|u_m(x) - u(x)| \le \varepsilon \quad (\forall x \in \Omega)$$

を得る．よって u_m は u に Ω 上一様収束し，よって $u \in C(\overline{\Omega})$ も従う．

■#2　$k>0,\ \alpha=0$ の場合．

$\{u_m\}_m \subset C^k(\overline{\Omega})$ を Cauchy 列とする．各 $|\gamma|\le k$ に対して $\{D^\gamma u_m\}_m$ は $C(\overline{\Omega})$ の Cauchy 列である．よって，#1 の場合より $D^\gamma u_m$ はある $v_\gamma \in C(\overline{\Omega})$ に Ω 上一様収束する．

$|\gamma|\le k-1,\ i\in\{1,\dots,n\}$ に対して $D_i v_\gamma = v_{\gamma+e_i}$ であることを示そう．今，任意の $m\in\mathbb{N},\ x\in\Omega$ と十分小さな $t\in\mathbb{R}$ に対して

$$D^\gamma u_m(x+te_i) - D^\gamma u_m(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} u_m(x+ste_i)\,ds = t\int_0^1 D_i D^\gamma u_m(x+ste_i)\,ds$$

が成り立っており，一様収束性より $m\to\infty$ とすると

$$\frac{v_\gamma(x+te_i)-v_\gamma(x)}{t} = \int_0^1 v_{\gamma+e_i}(x+ste_i)\,ds$$

を得る．両辺で $t\to 0$ とすれば $D_i v_\gamma = v_{\gamma+e_i}$ が得られる．

したがって，$u \coloneqq v_0$ とおくと $u\in C^k(\overline{\Omega})$ であり，$D^\gamma u = v_\gamma$ である．よって

$$|u-u_m|_{k;\Omega} \le \sum_{j=0}^k \sup_{|\gamma|=j} |D^\gamma u_m - v_\gamma|_{0;\Omega} \to 0 \quad (m\to\infty)$$

を得る．

■#3　$\alpha\in(0,1]$ の場合．

$\{u_m\}_m \subset C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ を Cauchy 列とする．$\{u_m\}_m$ は $C^k(\overline{\Omega})$ の Cauchy 列であるから，これまでの結果からある $u\in C^k(\overline{\Omega})$ に C^k-収束する．

$u\in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ かつ $|u-u_m|_{k,\alpha;\Omega}\to 0$ を示そう．$|\gamma|=k$ に対して各点収束の意味で $D^\gamma u_m \to D^\gamma u$ で，$\sup_m [D^\gamma u]_{k,\alpha;\Omega} < \infty$ であるから，補題 1.3 より $[D^\gamma u]_{0,\alpha;\Omega}<\infty$ である．したがって $u\in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ である．

$\varepsilon>0$ とする．$m_0\in\mathbb{N}$ があり，任意の $m,l\ge m_0,\ x,y\in\Omega$ に対して

$$|D^\gamma u_m(x) - D^\gamma u_m(y) - D^\gamma u_l(x) + D^\gamma u_l(y)| \le \varepsilon |x-y|^\alpha$$

となる．$l\to\infty$ として $[D^\gamma u_m - D^\gamma u]_{0,\alpha;\Omega}\le\varepsilon$ を得る．□

1.3　$C^{k,\alpha}$-領域

$\mathbb{R}^n_+ = \{x\in\mathbb{R}^n \mid x_n>0\},\ \partial\mathbb{R}^n_+ = \{x\in\mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ とおく．

定義 1.5. $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ を領域，$k\in\mathbb{N}_0,\ \alpha\in[0,1]$ とする．

Ω が $C^{k,\alpha}$-領域であるとは，任意の $\xi\in\partial\Omega$ に対して ξ の近傍 $U=U_\xi\subset\mathbb{R}^n$ と全単射 $\psi\colon U\to U' \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ があり，次が成り立つことをいう．

- $\psi(U\cap\Omega)\subset\mathbb{R}^n_+$,
- $\psi(U\cap\partial\Omega)\subset\partial\mathbb{R}^n_+$,
- $\psi\in C^{k,\alpha}(U),\ \psi^{-1}\in C^{k,\alpha}(U')$.

我々はとくに有界 $C^{0,1}$-領域 (i.e. 有界 Lipschitz 領域) に興味がある．有界 Lipschitz 領域は次の幾何的性質を持つ．

補題 1.6. Ω を有界 Lipschitz 領域とする．このとき次が成り立つ．

(D1) 定数 $L \geq 1$ が存在して，任意の $x, y \in \Omega$ に対して $p = \{x_i\}_{i=0}^{N} \subset \Omega$ が存在して次を満たす：
- $\forall i \in \{0, \ldots, N-1\}$，$t \in [0,1]$ に対して $tx_i + (1-t)x_{i+1} \in \Omega$ である[*2].
- $x_0 = x$，$x_N = y$.
- $l(p) \coloneqq \sum_{i=0}^{N-1} |x_{i+1} - x_i| \leq L|x-y|$.

(D2) 定数 $\rho_0 > 0$ と $\mu \in (0,1)$ があり，任意の $x \in \Omega$ と $\rho \in (0, \rho_0]$ に対して $y \in \Omega$ が存在して $|x-y| \leq \rho$ かつ $B_{\mu\rho}(y) \subset \Omega$ となる．

Proof. 加筆予定. $\square$

例 1.7.

$$\Omega_1 \coloneqq \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| < 1,\ |x_2| < 1,\ x_2 < |x_1|^{1/2}\right\},$$
$$\Omega_2 \coloneqq \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x_1 < 1,\ -2 < x_2 < \sin(1/x_1)\}$$

とおく．これらは Lipschitz 領域ではない．Ω_1 は (D1) を，Ω_2 は (D2) を満たさない．

1.4 $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ の包含関係

補題 1.8 ($C^{0,\alpha}$ の包含関係)**.** Ω を有界領域，$0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$ とする．このとき $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \subset C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ であり，

$$[u]'_{0,\beta;\Omega} \leq [u]'_{0,\alpha;\Omega} \quad (u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}))$$

が成り立つ．

Proof. $\beta = 0$ の場合は明らかなので，$\beta > 0$ とする．$u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ とする．$x, y \in \Omega$ に対して

$$\begin{aligned}|u(x) - u(y)| &\leq [u]_{0,\alpha;\Omega}|x-y|^{\alpha} \\ &\leq [u]_{0,\alpha;\Omega}(\operatorname{diam}\Omega)^{\alpha-\beta}|x-y|^{\beta}\end{aligned}$$

なので，

$$[u]_{0,\beta;\Omega} \leq R^{\alpha-\beta}[u]_{0,\alpha;\Omega}$$

を得る． $\square$

補題 1.9 (C^1 と $C^{0,1}$ の包含関係)**.** Ω を (D1) を満たす領域とする (c.f. 補題 1.6．そこに出てくる定数 $L \geq 1$ を固定する)．このとき $C^1(\overline{\Omega}) \subset C^{0,1}(\overline{\Omega})$ であり，

$$[u]_{0,1;\Omega} \leq L[u]_{1;\Omega} \quad (u \in C^1(\overline{\Omega}))$$

である．

[*2] このような p を Ω 内の折れ線という．

Proof. $x, y \in \Omega$ とする．(D1) の折れ線 $\{x_i\}_{i=0}^N$ を取ると，

$$\begin{aligned}|u(x)-u(y)| &\le \sum_{i=0}^{N-1}|u(x_{i+1})-u(x_i)| \\ &\le \sum_{i=0}^{N-1}\int_0^1\left|\frac{d}{dt}u((1-t)x_i+tx_{i+1})\,dt\right| \\ &\le \sum_{i=0}^{N-1}[u]_{1;\Omega}|x_{i+1}-x_i| \\ &\le L[u]_{1;\Omega}|x-y|\end{aligned}$$

となることから従う． □

定理 1.10. Ω を (D1) を満たす領域とする．$k, j \in \mathbb{N}_0,\ \alpha, \beta \in [0,1],\ j \le k,\ j+\beta \le k+\alpha$ とする．このとき $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \subset C^{j,\beta}(\overline{\Omega})$ であり，

$$|u|'_{j,\beta;\Omega} \le C_{n,k,j,\alpha,\beta,L}|u|'_{k,\alpha,\Omega} \quad (u \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}))$$

が成り立つ．

Proof. $k=j=0$ の場合と，$(k,j,\alpha,\beta)=(1,0,0,1)$ の場合はすでに示されている．$k=j\ge 1$ の場合は補題 1.8 よりすぐ従う．最後に $k>j$ の場合を考えるが，このとき $j+1\le k$ なので $C^k \subset C^{j+1}$ であり，補題 1.9 より $C^{j+1}\subset C^{j,1}$ である．さらに $k=j$ の場合より $C^{j,1}\subset C^{j,\beta}$ なので結局

$$C^{k,\alpha}\subset C^k \subset C^{j+1}\subset C^{j,\beta}$$

より示された． □

1.5 補間不等式

命題 1.11. $0<\beta<\alpha\le 1$ とするとき，

$$[u]_{0,\beta;\Omega} \le C_{\alpha,\beta}|u|_{0;\Omega}^{1-\frac{\beta}{\alpha}}[u]_{0,\alpha;\Omega}^{\frac{\beta}{\alpha}} \quad (u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})).$$

Proof. $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ とするとき，$x, y \in \Omega$ に対して

$$\begin{aligned}|u(x)-u(y)| &\le (|u(x)|+|u(y)|)^{1-\frac{\beta}{\alpha}}|u(x)-u(y)|^{\frac{\alpha}{\beta}} \\ &\le (2|u|_{0;\Omega})^{1-\frac{\beta}{\alpha}}([u]_{0,\alpha;\Omega}|x-y|^\alpha)^{\frac{\beta}{\alpha}} \\ &\le 2^{1-\frac{\beta}{\alpha}}|u|_{0;\Omega}^{1-\frac{\beta}{\alpha}}[u]_{0,\alpha;\Omega}^{\frac{\beta}{\alpha}}|x-y|^\beta\end{aligned}$$

となることから従う． □

補題 1.12. $a, b\ge 0,\ 0\le\beta\le\alpha\le 1,\ \alpha\ne 0$ に対して

$$a^{1-\beta}b^{1-\beta} \le \left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)a+\frac{\beta}{\alpha}a^{1-\alpha}b^\alpha.$$

Proof. Young の不等式より

$$a^{1-\beta}b^{\beta} \le a^{1-\frac{\beta}{\alpha}}(a^{1-\alpha}b^{1-\alpha})^{\frac{\beta}{\alpha}} \le \left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)a + \frac{\beta}{\alpha}a^{1-\alpha}b^{\alpha}.$$

□

定理 1.13 (Hölder セミノルムの補間不等式)**.** Ω は (D1) を満たす有界領域とし，$R = \operatorname{diam}\Omega$ とおく．$k, j \in \mathbb{N}_0$，$\alpha, \beta \in [0,1]$，$j+\beta < k+\alpha$ とする．このとき，

$$[u]'_{j,\beta;\Omega} \le C_{k,j,\alpha,\beta,L,\lambda}(|u|_{0;\Omega} + |u|_{0,\Omega}^{1-\tau}([u]'_{k,\alpha;\Omega})^{\tau}) \quad (u \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}))$$

が成り立つ．ここで

$$\tau := \frac{j+\beta}{k+\alpha}, \quad \lambda := \frac{\rho_0}{R}$$

である．とくに，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$|u|'_{j,\beta;\Omega} \le C_{k,j,\alpha,\beta,L,\lambda,\varepsilon}|u|_{0;\Omega} + \varepsilon[u]'_{k,\alpha;\Omega}.$$

Proof. $k = j = 0$ の場合はすでに示されている (命題 1.11).

■#1　$k = j \ge 1$，$\alpha \in (0,1]$，$\beta = 0$ の場合を，k に関する帰納法で示す．

　$k = 1$ の場合, $x \in \Omega$ を固定し, $\rho \in (0, \lambda R]$ を任意に取る. (D2) の $y \in \Omega$ を取る ($|x-y| \le \rho$, $B_{\mu\rho}(y) \subset \Omega$). $i = 1, \dots, n$ に対して

$$\begin{aligned}\mu\rho|D_i u(y)| &= \left|\int_0^{\mu\rho} D_i u(y+se_i)\,ds - \int_0^{\mu\rho}(D_i u(y+se_i) - D_i u(y))\,ds\right| \\ &\le |u(y+\mu\rho e_i) - u(y)| + \int_0^{\mu\rho}[u]_{1,\alpha;\Omega}s^{\alpha}\,ds \\ &\le 2|u|_{0;\Omega} + \frac{(\mu\rho)^{1+\alpha}}{1+\alpha}[u]_{1,\alpha;\Omega}\end{aligned}$$

である．よって

$$\begin{aligned}|D_i u(x)| &\le |D_i u(x) - D_i u(y)| + |D_i u(y)| \\ &\le [u]_{1,\alpha;\Omega}\rho^{\alpha} + \frac{1}{\mu\rho}\left(2|u|_{0;\Omega} + \frac{(\mu\rho)^{1+\alpha}}{1+\alpha}[u]_{1,\alpha;\Omega}\right) \\ &= \frac{2}{\mu\rho}|u|_{0;\Omega} + \left(1+\frac{\mu^{\alpha}}{1+\alpha}\right)\rho^{\alpha}[u]_{1,\alpha;\Omega}\end{aligned}$$

したがって

$$[u]_{1;\Omega} \le \frac{2}{\mu\rho}|u|_{0;\Omega} + \left(1+\frac{\mu^{\alpha}}{1+\alpha}\right)\rho^{\alpha}[u]_{1,\alpha;\Omega} \quad (\forall\rho \in (0, \lambda R]) \tag{1.1}$$

が成り立つ．ここで，もし $0 < |u|_{0;\Omega} < (\lambda R)^{1+\alpha}[u]_{1,\alpha;\Omega}$ ならば，(1.1) 式で $\rho = \left(\frac{|u|_{0;\Omega}}{[u]_{1,\alpha;\Omega}}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}$ として

$$[u]_{1;\Omega} \le \left(\frac{2}{\mu} + 1 + \frac{\mu^{\alpha}}{1+\alpha}\right)|u|_{0;\Omega}^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}[u]_{0,\alpha;\Omega}^{\frac{1}{1+\alpha}}$$

を得る．一方でもし $(\lambda R)^{1+\alpha}[u]_{1,\alpha;\Omega} \le |u|_{0;\Omega}$ ならば，$\rho = \lambda R$ として

$$
\begin{aligned}
[u]_{1;\Omega} &\le \frac{2}{\mu\lambda R}|u|_{0;\Omega} + \left(1 + \frac{\mu^\alpha}{1+\alpha}\right)\frac{|u|_{0;\Omega}}{\lambda R} \\
&\le \frac{1}{\lambda R}\left(\frac{2}{\mu} + 1 + \frac{\mu^\alpha}{1+\alpha}\right)|u|_{0;\Omega}
\end{aligned}
$$

となる．

結局，任意の $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ に対して

$$
R[u]_{1;\Omega} \le C\left(|u|_{0;\Omega} + R|u|_{0;\Omega}^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}[u]_{1,\alpha;\Omega}^{\frac{1}{1+\alpha}}\right)
$$

を得る．

ある $k \ge 1$ での成立を仮定する．このとき $\alpha \in (0,1]$, $\beta = 0$, $u \in C^{k+1,\alpha}(\overline{\Omega})$ とする．多重指数 γ, $|\gamma| = k+1$ に対して $\gamma = \gamma' + e_i$, $|\gamma'| = k$ とおく．$k=1$ の場合より

$$
\begin{aligned}
R^{k+1}|D^\gamma u|_{0;\Omega} &\le R^{k+1}[D^{\gamma'}u]_{1;\Omega} \\
&\le CR^k\left(\left|D^{\gamma'}u\right|_{0;\Omega} + R\left|D^{\gamma'}u\right|_{0;\Omega}^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}[D^{\gamma'}u]_{1,\alpha;\Omega}^{\frac{1}{1+\alpha}}\right) \\
&\le CR^k\left([u]_{k;\Omega} + R[u]_{k;\Omega}^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}[u]_{k+1,\alpha;\Omega}^{\frac{1}{1+\alpha}}\right) \\
&= C\left(R^k[u]_{k;\Omega} + R^{\frac{k+1+\alpha}{1+\alpha}}(R^k[u]_{k;\Omega})^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}[u]_{k+1,\alpha;\Omega}^{\frac{1}{1+\alpha}}\right)
\end{aligned}
$$

ここで帰納法の仮定から

$$
\begin{aligned}
R^k[u]_{k;\Omega} &\le C\left(|u|_{0;\Omega} + R^k|u|_{0;\Omega}^{\frac{1}{k+1}}[u]_{k,1;\Omega}^{\frac{k}{k+1}}\right) \\
&\lesssim C\left(|u|_{0;\Omega} + R^k|u|_{0;\Omega}^{\frac{1}{k+1}}[u]_{k+1;\Omega}^{\frac{k}{k+1}}\right)
\end{aligned}
$$

なので，

$$
\begin{aligned}
&R^{k+1}[u]_{k+1;\Omega} \\
&\lesssim C\left(\left(|u|_{0;\Omega} + R^k|u|_{0;\Omega}^{\frac{1}{k+1}}[u]_{k+1;\Omega}^{\frac{k}{k+1}}\right) + R^{\frac{k+1+\alpha}{1+\alpha}}\left(|u|_{0;\Omega} + R^k|u|_{0;\Omega}^{\frac{1}{k+1}}[u]_{k+1;\Omega}^{\frac{k}{k+1}}\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}[u]_{k+1,\alpha;\Omega}^{\frac{1}{1+\alpha}}\right) \\
&\lesssim C\left(|u|_{0;\Omega} + R^k|u|_{0;\Omega}^{\frac{1}{k+1}}[u]_{k+1;\Omega}^{\frac{k}{k+1}} + R^{\frac{k+1+\alpha}{1+\alpha}}\left(|u|_{0;\Omega}^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} + R^{\frac{k\alpha}{1+\alpha}}|u|_{0;\Omega}^{\frac{\alpha}{(k+1)(1+\alpha)}}[u]_{k+1;\Omega}^{\frac{k\alpha}{(k+1)(1+\alpha)}}\right)[u]_{k+1,\alpha;\Omega}^{\frac{1}{1+\alpha}}\right) \\
&= C\left(\begin{aligned}&|u|_{0;\Omega} + |u|_{0;\Omega}^{\frac{1}{k+1}}\left(R^{k+1}[u]_{k+1;\Omega}\right)^{\frac{k}{k+1}} + |u|_{0;\Omega}^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\left(R^{k+1+\alpha}[u]_{k+1,\alpha;\Omega}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \\ &\qquad + R^{k+1}\left(|u|_{0;\Omega}^{\frac{\alpha}{k+1+\alpha}}[u]_{k+1,\alpha;\Omega}^{\frac{k+1}{k+1+\alpha}}\right)^{\frac{k+1+\alpha}{(k+1)(1+\alpha)}}[u]_{k+1;\Omega}^{\frac{k\alpha}{(k+1)(1+\alpha)}}\end{aligned}\right) \\
&\lesssim C\left(\begin{aligned}&|u|_{0;\Omega} + \left(C_\varepsilon|u|_{0;\Omega} + \varepsilon R^{k+1}[u]_{k+1;\Omega}\right) + \left(|u|_{0;\Omega} + |u|_{0;\Omega}^{\frac{\alpha}{k+1+\alpha}}\left(R^{k+1+\alpha}[u]_{k+1,\alpha;\Omega}\right)^{\frac{k+1}{k+1+\alpha}}\right) \\ &\qquad + R^{k+1}\left(C_\varepsilon|u|_{0;\Omega}^{\frac{\alpha}{k+1+\alpha}}[u]_{k+1,\alpha;\Omega}^{\frac{k+1}{k+1+\alpha}} + \varepsilon[u]_{k+1;\Omega}\right)\end{aligned}\right) \\
&\lesssim C_\varepsilon\left(|u|_{0;\Omega} + R^{k+1}|u|_{0;\Omega}^{\frac{\alpha}{k+1+\alpha}}[u]_{k+1,\alpha;\Omega}^{\frac{k+1}{k+1+\alpha}}\right) + C\varepsilon R^{k+1}[u]_{k+1;\Omega}.
\end{aligned}
$$

ここで Young の不等式と補題 1.12 を用いた．この不等式で $\varepsilon = 1/2C$ とおくと結論が得られる．

■#2　$k = j \geq 1,\ 0 < \beta < \alpha < 1$ の場合.

　$|\gamma| = k$ に対して，命題 1.11 より

$$[D^\gamma u]_{0,\beta;\Omega} \leq C|D^\gamma u|_{0;\Omega}^{1-\frac{\beta}{\alpha}}[D^\gamma u]_{0,\alpha;\Omega}^{\frac{\beta}{\alpha}} \leq C[u]_{k;\Omega}^{1-\frac{\beta}{\alpha}}[u]_{k,\alpha;\Omega}^{\frac{\beta}{\alpha}}$$

したがって

$$\begin{aligned}
R^{k+\beta}[u]_{k,\beta;\Omega} &\leq CR^{k+\beta}[u]_{k;\Omega}^{1-\frac{\beta}{\alpha}}[u]_{k,\alpha;\Omega}^{\frac{\beta}{\alpha}} \\
&= CR^{\beta+\frac{k\beta}{\alpha}}\left(R^k[u]_{k;\Omega}\right)^{1-\frac{\beta}{\alpha}}[u]_{k,\alpha;\Omega}^{\frac{\beta}{\alpha}} \\
&\lesssim CR^{\beta+\frac{k\beta}{\alpha}}\left(|u|_{0;\Omega} + R^k|u|_{0;\Omega}^{\frac{\alpha}{k+\alpha}}[u]_{k,\alpha;\Omega}^{\frac{k}{k+\alpha}}\right)^{1-\frac{\beta}{\alpha}}[u]_{k,\alpha;\Omega}^{\frac{\beta}{\alpha}} \\
&\lesssim CR^{\beta+\frac{k\beta}{\alpha}}\left(|u|_{0;\Omega}^{1-\frac{\beta}{\alpha}} + R^{k\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)}|u|_{0;\Omega}^{\frac{\alpha-\beta}{k+\alpha}}[u]_{k,\alpha;\Omega}^{\frac{k}{k+\alpha}\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)}\right)[u]_{k,\alpha;\beta}^{\frac{\beta}{\alpha}} \\
&= C\left(|u|_{0;\Omega}^{1-\frac{\beta}{\alpha}}\left(R^{k+\alpha}[u]_{k,\alpha;\Omega}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} + R^{k+\beta}|u|_{0;\Omega}^{\frac{\alpha-\beta}{k+\alpha}}[u]_{k,\alpha;\Omega}^{\frac{k+\beta}{k+\alpha}}\right) \\
&\lesssim C\left(|u|_{0;\Omega} + |u|_{0;\Omega}^{\frac{\alpha-\beta}{k+\alpha}}\left(R^{k+\alpha}[u]_{k,\alpha;\Omega}\right)^{\frac{k+\beta}{k+\alpha}} + R^{k+\beta}|u|_{0;\Omega}^{\frac{\alpha-\beta}{k+\alpha}}[u]_{k,\alpha;\Omega}^{\frac{k+\beta}{k+\alpha}}\right) \\
&\lesssim C\left(|u|_{0;\Omega} + R^{k+\beta}|u|_{0;\Omega}^{\frac{\alpha-\beta}{k+\alpha}}[u]_{k,\alpha;\Omega}^{\frac{k+\beta}{k+\alpha}}\right)
\end{aligned}$$

となる.

■#3　一般の場合：j を固定して k に関する帰納法で示す.

　$\beta = 1$ の場合は，補題 1.9 より

$$[u]_{j,1;\Omega} \leq C[u]_{j+1;\Omega}$$

なので，$\beta = 0$ の場合に帰着する．よって $\beta \in [0, 1)$ としてよい.

　$k = j$ での成立はすでに示されている．以下ある $k \geq j$ での成立を仮定する．$u \in C^{k+1,\alpha}(\overline{\Omega})$ とする．$\beta \neq 1$ より $j + \beta < k + 1$ である．よって $\alpha = 1$ としたときの帰納法の仮定が使えて,

$$\begin{aligned}
R^{j+\beta}[u]_{j,\beta;\Omega} &\leq C\left(|u|_{0;\Omega} + R^{j+\beta}|u|_{0;\Omega}^{1-\frac{j+\beta}{k+\alpha}}[u]_{k,1;\Omega}^{\frac{j+\beta}{k+\alpha}}\right) \\
&\lesssim C\left(|u|_{0;\Omega} + R^{j+\beta}|u|_{0;\Omega}^{1-\frac{j+\beta}{k+\alpha}}[u]_{k+1;\Omega}^{\frac{j+\beta}{k+\alpha}}\right)
\end{aligned}$$

$\alpha = 0$ の場合はこれで示された.

　$\alpha \in (0, 1]$ の場合は,

$$\begin{aligned}
R^{j+\beta}[u]_{l,\beta;\Omega} &\leq C\left(|u|_{0;\Omega} + |u|_{0;\Omega}^{1-\frac{j+\beta}{k+1}}\left(R^{k+1}[u]_{k+1;\Omega}\right)^{\frac{j+\beta}{k+1}}\right) \\
&\lesssim C\left(|u|_{0;\Omega} + |u|_{0;\Omega}^{1-\frac{j+\beta}{k+1}}\left(|u|_{0;\Omega} + R^{k+1}|u|_{0;\Omega}^{1-\frac{k+1}{k+1+\alpha}}[u]_{k+1,\alpha;\Omega}^{\frac{k+1}{k+1+\alpha}}\right)^{\frac{j+\beta}{k+\alpha}}\right) \\
&\lesssim C\left(|u|_{0;\Omega} + |u|_{0;\Omega}^{1-\frac{j+\beta}{k+1}}\left(|u|_{0;\Omega}^{\frac{j+\beta}{k+1}} + R^{j+\beta}|u|_{0;\Omega}^{1-\frac{\alpha(j+\beta)}{(k+1+\alpha)(k+1)}}[u]_{k+1,\alpha;\Omega}^{\frac{j+\beta}{k+1+\alpha}}\right)\right) \\
&\lesssim C\left(|u|_{0;\Omega} + R^{j+\beta}|u|_{0;\Omega}^{1-\frac{j+\beta}{k+1+\alpha}}[u]_{k+1,\alpha;\Omega}^{\frac{j+\beta}{k+1+\alpha}}\right)
\end{aligned}$$

となり，示された. □

1.6 コンパクト埋め込み

定理 1.14. Ω を (D1) を満たす有界領域[*3]，$k, j \in \mathbb{N}_0$, $\alpha, \beta \in [0,1]$, $j+\beta < k+\alpha$ とする．このとき，包含写像 $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \subset C^{j,\beta}(\overline{\Omega})$ はコンパクト作用素である．

Proof.
■#1　$k=j=0$, $0 \le \beta < \alpha \le 1$ の場合.
$\{u_m\}_m \subset C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ を有界列とし，$M := \sup_m |u_m|_{0,\alpha;\Omega} < \infty$ とする．$m \in \mathbb{N}$, $x, y \in \Omega$ に対して

$$|u_m(x) - u_m(y)| \le M|x-y|^\alpha$$

なので，$\{u_m\}_m$ は同程度一様連続である．Ascoli–Arzelà の定理より，ある部分列 $\{u_{m_l}\}_l$ は $u \in C(\overline{\Omega})$ に $\overline{\Omega}$ 上一様収束する．これで $\beta = 0$ の場合は示された．$\beta > 0$ の場合は Hölder セミノルムの下半連続性 (補題 1.3) より $[u]_{0,\alpha;\Omega} \le M$．よって $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ であり，命題 1.11 より

$$\begin{aligned}|u - u_{m_l}|_{0,\beta;\Omega} &\le |u-u_{m_l}|_{0;\Omega} + C|u-u_{m_l}|_{0;\Omega}^{1-\frac{\beta}{\alpha}}[u-u_m]_{0,\alpha;\Omega}^{\frac{\beta}{\alpha}} \\ &\le |u-u_{m_l}|_{0;\Omega} + C(2M)^{\frac{\beta}{\alpha}}|u-u_{m_l}|_{0;\Omega}^{1-\frac{\beta}{\alpha}} \to 0 \quad (l \to 0)\end{aligned}$$

となる．

■#2　$\alpha \ne 0$, $\beta \ne 1$ の場合.
$\{u_m\}_m \subset C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ を有界列とする．$|\gamma| \le j-1$ に対して補題 1.9 より

$$\sup_m |D^\gamma u_m|_{0,1;\Omega} \le C \sup_m |D^\gamma u_m|_{1,0;\Omega} < \infty$$

である．また，$|\gamma| = j$ に対しては

$$\sup_m |D^\gamma u_m|_{0,\alpha';\Omega} < \infty, \quad \text{where } \alpha' := \begin{cases} 1 & (\text{if } j \le k-1) \\ \alpha & (\text{if } j = k) \end{cases}$$

である．いずれの場合も $\beta < \alpha'$ なので，#1 の結果から，部分列 $\{u_{m_l}\}_l$ があり，

$|\gamma| \le j-1$ ならば $D^\gamma u_{m_l}$ は $C(\overline{\Omega})$ で収束し，$|\gamma| = j$ ならば $D^\gamma u_{m_l}$ は $C^\beta(\overline{\Omega})$ で収束する．

よって

$$\left|u_{m_{l_1}} - u_{m_{l_2}}\right|_{j,\beta;\Omega} = \sum_{i=0}^{j}[u_{m_{l_1}} - u_{m_{l_2}}]_{i;\Omega} + [u_{m_{l_1}} - u_{m_{l_2}}]_{j,\beta;\Omega} \to 0 \quad (l_1, l_2 \to \infty)$$

であるから，$C^{j,\beta}$ の完備性より $\{u_{m_l}\}_l$ は $C^{j,\beta}$ で収束する．

■#3　$\beta = 1$ の場合は，$C^{k,\alpha} \subset C^{j+1} \subset C^{j,1}$ がコンパクト作用素と連続作用素の合成としてコンパクトである．

[*3] $k=j=0$ の場合は有界だけでよい．

■#4　$\alpha = 0$ の場合は，$C^k \subset C^{k-1,1} \subset C^{j,\beta}$ が連続作用素とコンパクト作用素の合成としてコンパクトである． □

系 1.15. (c.f. [FR, (H8)]). Ω を (D1) を満たす有界領域とする. $k \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in (0,1]$ とする. $\{u_m\}_m \subset C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ が有界列で，ある関数 u に $\overline{\Omega}$ 上一様収束しているとする．このとき $u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ である．

Proof.
■#1　$k = 0$ の場合は，Hölder セミノルムの下半連続性 (補題 1.3) より $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ がわかる．

■#2　$k \geq 1$ の場合，コンパクト埋め込み $C^{k,\alpha} \subset C^k$ より $\{u_m\}_m$ は $C^k(\overline{\Omega})$ で収束するが，今仮定よりその収束先が u である．再び補題 1.3 より $u \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ がわかる． □

2　Laplacian：古典解理論

Poisson 方程式とは

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega$$

の形の偏微分方程式のことをいう．$f = 0$ の場合，つまり

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

を Laplace 方程式という．

定義 2.1. $f \in C(\Omega)$ とする．$-\Delta u \leq (\geq) f$ を満たす $u \in C^2(\Omega)$ のことを Poisson 方程式の劣 (優) 解という．Laplace 方程式の劣 (優) 解を劣 (優) 調和関数という．

2.1　平均値の定理，最大値原理

定理 2.2 (平均値の定理)**.** $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を開集合，$u \in C^2(\Omega)$，$-\Delta u \leq (\geq) 0$ とする．このとき任意の球 $B = B_R(x_0) \subset\subset \Omega$ に対して

$$u(x_0) \leq (\geq) \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B} u \, d\sigma,$$
$$u(x_0) \leq (\geq) \frac{1}{\omega_n R^n} \int_B u \, dx$$

が成り立つ ($d\sigma$ は面積要素を表す).

Proof. 優調和の場合は $-u$ を考えれば劣調和の場合に帰着するので，劣調和の場合だけ示す (以降も同様である)．$r \in (0, R)$ に対して

$$\varphi(r) := \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u \, d\sigma(x) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{|y|=1} u(x_0 + ry) \, d\sigma(y)$$

とおく．ν で $\partial B_r(x_0)$ の単位法ベクトル場を表すものとして，

$$\begin{aligned}\varphi'(r) &= \frac{1}{n\omega_n}\int_{|y|=1} y\cdot Du(x_0+ry)\,d\sigma(y)\\ &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r(x_0)} \nu\cdot Du(x)\,d\sigma(x)\\ &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}}\int_{B_r(x_0)} \Delta u\,dx\\ &\geq 0\end{aligned}$$

なので，φ は単調減少である．ここで，$\lim_{r\to+0}\varphi(r)=u(x_0)$ であることを示そう．

$$|u(x_0)-\varphi(r)| = \left|u(x_0)-\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r(x_0)} u(x)\,dx\right| \leq \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r(x_0)} |u(x_0)-u(x)|\,d\sigma(x)$$

である．今，u は x_0 で連続であるから，任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ があり，任意の $x\in\Omega$ に対して

$$|x_0-x|\leq\delta \Longrightarrow |u(x_0)-u(x)|\leq\varepsilon$$

となる．よって，$r\leq\delta$ ならば $|u(x_0)-\varphi(r)|\leq\varepsilon$ を得る．これで $\lim_{r\to+0}\varphi(r)=u(x_0)$ が示されたが，これと φ が単調増加であることから

$$u(x_0)\leq\varphi(R)=\frac{1}{n\omega_n R^{n-1}}\int_{\partial B} u\,d\sigma$$

を得る．

後半の不等式は，$n\omega_n r^{n-1}u(x_0)\leq\int_{\partial B_r(x_0)} u\,d\sigma$ の両辺を $[0,R]$ で積分して得られる． □

定理 2.3 (強最大値原理)**.** $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ を領域，$u\in C^2(\Omega)$，$-\Delta u\leq(\geq)0$ とする．もし，$x_0\in\Omega$ があり，$u(x_0)=\sup_\Omega u$ $(\inf_\Omega u)$ となるならば，u は定数である．

Proof. $M:=\sup_\Omega u$，$\Omega':=\{x\in\Omega\mid u(x)=M\}$ とおくと，Ω' は Ω の相対閉集合であり，仮定より $\Omega'\neq\emptyset$ である．$\Omega'\subset\Omega$ が開集合であることを示そう．

$x_0\in\Omega'$ とする．$B=B_R(x_0)\subset\subset\Omega$ を取ると，定理 2.2 より

$$M=u(x_0)\leq\frac{1}{\omega_n R^n}\int_B u\,dx\leq\frac{1}{\omega_n R^n}\int_B M\,dx=M$$

である．よって上の不等号は全部等号で，そのためには $u=M\quad\text{in } B$ となるしかない．よって $B\subset\Omega'$ である．

したがって Ω' は Ω の開かつ閉集合であり，Ω の連結性と $\Omega\neq\emptyset$ より $\Omega'=\Omega$ を得る． □

系 2.4 (弱最大値原理)**.** $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ を有界領域とする．$u\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$，$-\Delta u\geq(\leq)0$ ならば

$$\sup_\Omega u=\sup_{\partial\Omega}\quad\left(\inf_\Omega u=\inf_{\partial\Omega} u\right)$$

が成り立つ．

系 2.5 (比較原理)**.** $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ を有界領域とし，$u,v\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ が

$$-\Delta u\leq-\Delta v\quad\text{in }\Omega,\quad u\leq v\quad\text{on }\partial\Omega$$

を満たすならば，$u \le v \in \Omega$ である．

とくに $f \in C(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$ に対して Poisson 方程式の Dirichlet 問題

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= g \quad \text{on } \partial\Omega \end{aligned}$$

の解 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ は，あれば一意である．

系 2.6. (c.f. [FR, Lemma 1.14])．$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界領域，$u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ とする．このとき

$$|u|_{0;\Omega} \le C_{\operatorname{diam}\Omega}(|\Delta u|_{0;\Omega} + |u|_{0;\partial\Omega})$$

である．

Proof. 比較原理を用いる．$R = \operatorname{diam}\Omega$ とおき，$x_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in \Omega$ を任意に取る．

$$w(x) \coloneqq (|\Delta u|_{0;\Omega} + |u|_{0;\partial\Omega})\left(\frac{R^2 - (x_1 - x_1^{(0)})^2}{2} + 1\right) \quad (x \in \Omega)$$

とおくと，$\Delta w = -(|\Delta u|_{0;\Omega} + |u|_{0;\partial\Omega}) \le \Delta u \quad \text{in } \Omega, \quad w \ge |\Delta u|_{0;\Omega} + |u|_{0;\partial\Omega} \ge u \quad \text{on } \partial\Omega$ である．よって，系 2.5 より

$$u \le w \le (|\Delta u|_{0;\Omega} + |u|_{0;\partial\Omega})\left(\frac{R^2}{2} + 1\right)$$

を得る．$-u$ について同様に議論して $|u| \le (R^2/2 + 1)(|\Delta u|_{0;\Omega} + |u|_{0;\partial\Omega})$ を得る． □

2.2 Green の表現公式，Poisson の積分公式

Poisson 方程式の Dirichlet 問題の解の一意性 (系 2.5) より，$u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ の Ω での値を，Δu の Ω での値と u の $\partial\Omega$ での値を用いて表示する公式の存在が期待される．そのような公式は Green の表現公式などと呼ばれる．

2.2.1 Laplace 方程式の基本解と Green の表現公式

Laplace 方程式の基本解とは,

$$\Phi(x) \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\log|x| & (n = 2) \\ -\frac{1}{n(n-2)\omega_n}|x|^{-n+2} & (n \ge 3) \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

のことである．直接計算により

$$\begin{aligned} D_i\Phi(x) &= \frac{1}{n\omega_n}|x|^{-n}x_i, \\ D_{ij}\Phi(x) &= \frac{1}{n\omega_n}(\delta_{ij}|x|^2 - nx_ix_j) \end{aligned}$$

より $\Delta\Phi = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ がわかる．また多重添字 γ に対して

$$|D^\gamma\Phi(x)| \le C_{n,\gamma}|x|^{2-n-|\gamma|}$$

が成り立つことがわかる．

さて，Ω を Gauss の発散定理が成り立つ有界領域とし，$u \in C^2(\overline{\Omega})$ とする．$x \in \Omega$ を固定する．

Green の第 2 公式

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\,dx = \int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial v}{\partial\nu} \right) d\sigma \quad (u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}))$$

を思い出す．$v(y) = \Phi(x-y)$ は $y = x$ で特異性を持つのでそのままこの公式を適用することはできないが，領域を $\Omega \setminus \overline{B_r(x)}$ $(B_r(x) \subset\subset \Omega)$ とすると使える：

$$\int_{\Omega\setminus\overline{B_r(x)}} \Phi(x-y)\Delta u(y)\,dy = \int_{\partial(\Omega\setminus\overline{B_r(x)})} \left(\Phi(x-y)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y) - u(y)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(x-y) \right) d\sigma(y) \tag{2.1}$$

(2.1) 式で $r \to +0$ とすることを考えよう．

$$\begin{aligned}\left| \int_{B_r(x)} \Phi(x-y)\Delta u(y)\,dy \right| &\le |\Delta u|_{0;\Omega} \int_{B_r(x)} |x-y|^{-n+2}\,dy \\ &= O(r^2) \to 0 \quad (r \to 0),\end{aligned}$$

$$\left| \int_{\partial B_r(x)} \Phi(x-y)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)\,d\sigma(y) \right| \le |Du|_{0;\Omega} r \to 0 \quad (r \to 0)$$

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_r(x)} u(y)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(x-y)\,d\sigma(y) &= \int_{\partial B_r(x)} u(y)\frac{|x-y|^{-n}}{n\omega_n}(y-x)\cdot\frac{y-x}{r}\,d\sigma(y) \\ &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y)\,d\sigma(y) \to u(x) \quad (r \to 0)\end{aligned}$$

であるから，(2.1) 式で $r \to 0$ とすると次を得る：

$$\int_\Omega \Phi\Delta u\,dy = \int_{\partial\Omega} \left(\Phi\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} \right) d\sigma + u(x)$$

すなわち

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} - \Phi\frac{\partial u}{\partial\nu} \right) d\sigma + \int_\Omega \Phi\Delta u\,dy \tag{2.2}$$

ここで Φ の引数は $x-y$ であり，u の引数は y などとして省略している．

そこで，もし $h_x \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ で

$$\Delta h_x = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad h_x(y) = -\Phi(x-y) \quad \text{on } \partial\Omega$$

となるものがあれば (そのような h_x は一意)，再び Green の第 2 公式より

$$\int_\Omega h_x\,dy = \int_{\partial\Omega} \left(-\Phi\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial h_x}{\partial\nu} \right) d\sigma$$

である．これと (2.2) 式をあわせて次を得る：

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial G}{\partial\nu}\,d\sigma + \int_\Omega G\Delta u\,dy \tag{2.3}$$

ここで

$$G(x,y) = \Phi(x-y) + h_x(y)$$

を Ω に関する Green 関数という．(2.3) 式を Green の表現公式と呼ぶ．

2.2.2 球上の Green 関数の導出，Poisson 積分

以下，$B = B_R(0)$ とし，$x \in B \setminus \{0\}$ に対して

$$\overline{x} := \frac{R^2}{|x|^2} x \in R^n \setminus \overline{B}$$

とおく．

B における Green の関数 G は次の表示を持つ：

$$G(x,y) = \begin{cases} \Phi(x-y) - \Phi\Big(\frac{|x|}{R}(\overline{x}-y)\Big) & (\text{if } x \neq 0) \\ \Phi(x-y) - \Phi(R) & (\text{if } x = 0) \end{cases}$$

そして，直接計算により

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) = \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R} |x-y|^{-n}$$

となる．

したがって，Green の表現公式より次を得る (Poisson の積分公式).

定理 2.7. $u \in C^2(\overline{B})$ が調和関数ならば,

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B} \frac{u(y)}{|x-y|^n} \, d\sigma(y) \quad (x \in B)$$

である．

逆に，次が成り立つ．

定理 2.8. $B = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ とする．$\varphi \in C(\partial B)$ に対して

$$u(x) := \begin{cases} \frac{R^2-|x|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n} \, d\sigma(y) & (x \in B) \\ \varphi(x) & (x \in \partial B) \end{cases}$$

とおくと $u \in C^2(B) \cap C(\overline{B})$ であり $-\Delta u = 0 \quad \text{in } B$ である．

Proof. $u \in C^2(\Omega)$, $\Delta u = 0$ であることは u の表示から明らか．$u \in C(\overline{B})$ かが問題である．

1 という定数関数に対して Green の表現公式を適用することで,

$$1 = \int_{\partial B} K(x,y) \, d\sigma(y), \quad (x \in B)$$

が従う．ここで

$$K(x,y) = \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R|x-y|^n}$$

を Poisson 核という．

$x_0 \in \partial B$, $\varepsilon > 0$ とする．φ の連続性より，$\delta > 0$ があり，任意の $y \in \partial B$ に対して

$$|x_0 - y| \leq \delta \Longrightarrow |\varphi(x_0) - \varphi(y)| \leq \varepsilon$$

となる．そこで，$x \in B,\ |x-x_0| \le \delta/2$ ならば

$$\begin{aligned}|u(x_0)-u(x)| &\le \int_{\partial B} K(x,y)|\varphi(x_0)-\varphi(y)|\,d\sigma(y)\\ &\le \int_{|y|=R,\ |x_0-y|\le\delta} K(x,y)\varepsilon\,d\sigma(y) + 2|\varphi|_{0;\partial B}\int_{|y|=R,\ |x_0-y|\ge\delta} K(x,y)\,d\sigma(y)\\ &\le \varepsilon + 2|\varphi|_{0;\partial B}\frac{R^2-|x|^2}{n\omega_n R(\delta/2)^n}\cdot n\omega_n R^{n-1}\end{aligned}$$

が成り立つ．さらに $|x-x_0|$ を小さく取れば $|x|$ は R に十分近くなり

$$|u(x_0)-u(x)| \le 2\varepsilon$$

とできる． □

2.2.3 応用編

系 2.9 (微分の内部評価)**.** $u \in C^2(\Omega),\ -\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega$ とする．このとき $u \in C^\infty(\Omega)$ であり，任意の $\Omega' \subset\subset \Omega,\ k \in \mathbb{N}$ に対して

$$[u]_{k;\Omega'} \le C_{n,k} d^{-k} |u|_{0;\Omega}$$

が成り立つ．ここで $d = \mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.

Proof. 任意の球 $B = B_R(x_0) \subset\subset \Omega$ に対して Poisson の積分公式

$$u(x) = \frac{R^2-|x-x_0|^2}{n\omega_n R}\int_{\partial B}\frac{u(y)}{|x-y|^n}\,d\sigma(y), \quad (x \in B)$$

が成り立っている．このことから u は C^∞ 級である．

ここで，$i = 1,\dots,n$ に対して $D_i u$ も調和となることに注意すると平均値の定理および部分積分より

$$D_i u(x_0) = \frac{1}{\omega_n R^n}\int_B D_i u\,dy = \frac{1}{\omega_n R^n}\int_{\partial B} u\nu_i\,d\sigma(y), \quad (\forall B = B_R(x_0) \subset\subset \Omega)$$

よって

$$|D_i u(x_0)| \le \frac{n}{R}|u|_{0;\Omega}$$

という評価を得る．$R \to d_{x_0} = \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)$ として

$$|D_i u(x_0)| \le \frac{n}{d_{x_0}}|u|_{0;\Omega} \tag{2.4}$$

となるので，$x_0 \in \Omega'$ について上限を取って

$$[u]_{1;\Omega'} \le \frac{n}{d}|u|_{0;\Omega}$$

を得る．

さて，一般に多重指数 $\gamma = \gamma' + e_i,\ |\gamma'| = k-1$ について，$x_0 \in \Omega'$ を固定したとき

$$B_i := B_{di/k}(x_0) \quad (i = 1,\dots,k)$$

とおく．(2.4) 式の評価を用いれば

$$|D^\gamma u(x_0)| \le \frac{nk}{d}\left|D^{\gamma'} u\right|_{0;B_1}$$

となるが，$B_i \subset\subset B_{i+1}$ に対して (2.4) の評価を繰り返し適用すれば

$$|D^\gamma u(x_0)| \le \left(\frac{nk}{d}\right)^k |u|_{0;\Omega}$$

が得られる．よって

$$[u]_{k;\Omega'} \le \left(\frac{nk}{d}\right)^k |u|_{0;\Omega}$$

を得る． □

系 2.10. Ω 上の調和関数全体は正規族をなす．すなわち，一様有界な調和関数列 $\{u_m\}_m$ は，調和関数に広義一様収束する部分列を持つ．

Proof. Ascoli–Arzelà の定理より $\{u_m\}_m$ が同程度連続であることを示せばよい．$M = \sup_m |u_m|_{0;\Omega} < \infty$ とおく．$x_0 \in \Omega$ とする．開球 $B = B_R(x_0) \subset\subset \Omega$ について，系 2.9 より $[u_m]_{1;B} \le C|u_m|_{0;\Omega} \le CM$ であるから，$x \in B$ に対して

$$|u_m(x_0) - u_m(x)| = \left|\int_0^1 (x_0 - x)\cdot Du_m(tx_0 + (1-t)x)\,dt\right| \le [u_m]_{1;\Omega}|x_0 - x| \le CM|x_0 - x|$$

となる．よって $\{u_m\}_m$ は x_0 で同程度連続である．

同様の評価により，u_m はコンパクト集合上 C^2 収束することがわかるので，u が調和であることもわかる． □

系 2.11 (Liouville の定理)**.** $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$，$-\Delta u = 0 \in \mathbb{R}^n$ とする．さらに $C,\ \gamma > 0$ が存在して

$$|u(x)| \le C(1 + |x|^\gamma) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n)$$

を満たすと仮定する．このとき u はたかだか $\lfloor\gamma\rfloor$ 次の多項式である．

Proof. 任意の $R > 0$ に対して

$$[u]_{\lfloor\gamma\rfloor+1;B_{R/2}} \le CR^{-\lfloor\gamma\rfloor-1}|u|_{0;B_R} \le CR^{-\lfloor\gamma\rfloor-1}(1 + R^\gamma)$$

なので，$R \to \infty$ として $[u]_{\lfloor\gamma\rfloor+1;\mathbb{R}^n} = 0$ となり結論を得る． □

2.3 寄り道：Perron の方法

やや本筋[*4]からは逸れるが，Peronn の方法による Laplace 方程式の Dirichlet 問題の解法について述べる．重要となるのが，最大値原理 (および比較原理) と球上の Dirichlet 問題の解の存在性である．

2.3.1 劣/優調和関数

定義 2.1 における劣 (優) 調和関数の定義を以下のように拡張する．

[*4] そもそも本筋などというものが存在したのだろうか．

定義 2.12. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を領域，$u \in C(\Omega)$ とする．u が劣 (優) 調和であるとは，任意の球 $B = B_R(x_0) \subset\subset \Omega$ と B 上の調和関数 $h \in C^2(B) \cap C(\overline{B})$ で $u \le h$ $(u \ge h)$ $\quad$ on ∂B を満たすものに対して，

$$u \le h \ (u \ge h) \quad \text{in } B$$

が成り立つことをいう．

比較原理 (系 2.5) よりこの定義が定義 2.1 の拡張になっていることに注意せよ．また，この (弱い意味での) 劣 (優) 調和関数について次が成り立つ．

補題 2.13 (強最大値原理)**.** $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を領域とする．$u \in C(\Omega)$ が劣調和で，ある $x_0 \in \Omega$ に対して $u(x_0) = \sup_\Omega u$ となるならば，u は定数である．

Proof. $M \coloneqq \sup_\Omega u$,

$$\Omega' \coloneqq \{x \in \Omega \mid u(x) = M\}$$

とおき Ω' が Ω の開かつ閉集合であることが示されれば，仮定より $\Omega' \neq \emptyset$ から $\Omega' = \Omega$ となる主張が従う．開なことだけが非自明である．$x_0 \in \Omega'$ とせよ．球 $B = B_R(x_0) \subset\subset \Omega$ を任意に取る．$h \in C^2(B) \cap C(\overline{B})$ を

$$\begin{aligned} \Delta h &= 0 \quad \text{in } B, \\ h &= u \quad \text{on } \partial B \end{aligned}$$

の解とする (定理 2.8 を参照)．u の劣調和性より B 上 $u \le h$ となるので，とくに

$$M = u(x_0) \le h(x_0) \le \sup_{\partial B} h = \sup_{\partial B} u \le M$$

となる (調和関数に対する弱最大値原理を用いた)．よって全部等号で

$$h(x_0) = M = \sup_{\partial B} h = \sup_B h$$

となるから，調和関数に対する強最大値原理より $h = M \quad \text{in } B$ を得る．とくに $u = M \quad \text{on } \partial B$ だが，$B = B_R(x_0) \subset\subset \Omega$ は任意なので $u = M \quad \text{in } B$ である．つまり $B \subset \Omega'$． □

補題 2.14. Ω を有界領域，$u, v \in C(\overline{\Omega})$ をそれぞれ劣，優調和関数で $u \le v \quad \text{on } \partial\Omega$ を満たすものとする．このとき，$u < v \quad \text{throughout } \Omega$ であるか，$u \equiv v$ であるかのどちらかである．

Proof. 背理法で示す．結論の否定を仮定すると，ある x_0 について

$$(u - v)(x_0) = \sup_\Omega (u - v) \eqqcolon M \ge 0$$

となる．このとき，ある球 $B = B_R(x_0) \subset\subset \Omega$ について，$u - v \not\equiv M \quad \text{on } \partial B$ であるとしてよい[*5]．そこで，$\overline{u}, \overline{v} \in C^2(B) \cap C(\overline{B})$ を

$$\begin{cases} \Delta \overline{u} = 0 & \text{in } B \\ \overline{u} = u & \text{on } \partial B \end{cases}, \quad \begin{cases} \Delta \overline{v} = 0 & \text{in } B \\ \overline{v} = v & \text{on } \partial B \end{cases}$$

で定める．調和関数 $\overline{u} - \overline{v}$ に対して最大値原理を用いて

$$M \ge \sup_{\partial B} (\overline{u} - \overline{v}) \ge (\overline{u} - \overline{v})(x_0) \ge (u - v)(x_0) = M$$

[*5] $\Omega' \coloneqq \{x \in \Omega \mid (u - v)(x) = M\} \neq \emptyset$ である．$\Omega' = \Omega$ の場合は明らか．そうでない場合，Ω' は Ω の開集合ではなく，ある $x_0 \in \Omega'$ とある $B = B_R(x_0)$ について $u - v \neq M \quad \text{in } B$ となる．

となるので，再び調和関数に対する強最大値原理より $\overline{u}-\overline{v}=M \quad \text{in } B$ を得る．これは B の取り方に矛盾する． □

補題 2.15. $u\in C(\Omega)$ を領域 Ω 上の劣調和関数とする．球 $B\subset\subset\Omega$ に対して B 上の調和関数 $\overline{u}$ で $\overline{u}=u \quad \text{on } \partial B$ となるものを取り，

$$U(x):=\begin{cases}\overline{u}(x) & (x\in B)\\ u(x) & (x\in\Omega\setminus B)\end{cases}$$

とおく．このとき U は Ω で劣調和である．この U を u の B における harmonic lifting という．

Proof. 貼り合わせの補題より $U\in C(\Omega)$ である．$B'\subset\subset\Omega$ を球，$h\in C^2(B')\cap C(\overline{B'})$ を B' 上の調和関数で $U\le h \quad \text{on } \partial B'$ を満たすものとする．

定義より Ω 上 $u\le U$ であるから，とくに $\partial B'$ 上 $u\le U\le h$ である．よって B' 上 $u\le h$ なので，$B'\setminus B$ 上 $U\le h$ である．

また，B 上 U は調和であり $U\le h \quad \text{on } \partial(B\cap B')$ である (直前に示した) から $U\le h \quad \text{in } B'\cap B$ となる．

以上より $U\le h \quad \text{in } B'$ が示された． □

補題 2.16. $u_1,\dots,u_N$ を Ω 上の劣調和関数とする．このとき $u=\max\{u_1,\dots,u_N\}$ も Ω 上の劣調和関数である．

Proof. 定義より明らか. □

以上では劣調和関数だけについて述べたが，優調和関数にも対応する性質がある．$-u$ を考えよ．

2.3.2 Perron solution

さて，以下 Ω を有界領域，$\varphi\colon\partial\Omega\to\mathbb{R}$ を有界関数とする．Dirichlet 問題

$$\begin{cases}\Delta u=0 & \text{in } \Omega,\\ u=\varphi & \text{on } \partial\Omega\end{cases}\tag{2.5}$$

を考える．

定義 2.17. $u\in C(\overline{\Omega})$ が φ に対する subfunction (superfunction) であるとは，u が劣 (優) 調和であり，$u\le(\ge)\varphi \quad \text{on } \partial\Omega$ が成り立つことをいう．

注意 2.18.
1. u,v がそれぞれ φ に対する subfunction, superfunction ならば，Ω 上 $u\le v$ となる．これは補題 2.14 による．
2. 定数関数 $\le\inf_{\partial\Omega}\varphi$ ($\ge\sup_{\partial\Omega}\varphi$) は subfunction (superfunction) である．

次の定理が Perron の方法にとって crucial である．

定理 2.19. $\mathcal{S}_\varphi$ で φ に対する subfunction 全体の集合を表す．このとき

$$u(x):=\sup_{v\in\mathcal{S}_\varphi}v(x)\quad(x\in\Omega)$$

で定まる u は Ω 上の調和関数である．この方法で構成された u を Dirichlet 問題 (2.5) の Perron solution という．

Proof. $v \in \mathcal{S}_\varphi$ に対して，最大値原理より $v \le \sup_{\partial\Omega} \varphi < \infty$ であるから u は well-defined である．

$y \in \Omega$ を固定する．u の定義より，$\{v_m\}_m \subset \mathcal{S}_\varphi$ があり $v_m(y) \to u(y)$ となる．このとき $\max\{v_m(y), \inf_{\partial\Omega}\varphi\} \to u(y)$ であるから，必要ならば v_m を $\max\{v_m, \inf_{\partial\Omega}\varphi\} \in \mathcal{S}_\varphi$ で置き換えて $\{v_m\}_m$ は一様有界であるとしてよい (補題 2.16 を参照).

$B = B_R(y) \subset\subset \Omega$ を任意の球とし，V_m を v_m の B における harmonic lifting とする (補題 2.15)．すると $V_m \in \mathcal{S}_\varphi$ であり，$V_m(y) \to u(y)$ である ($v_m \le V_m \le u \quad \text{in } \Omega$ に注意せよ).

関数列 $\{V_m\}_m$ の B への制限は，B 内の調和関数の一様有界列である．系 2.10 より，ある部分列 $\{V_{m_k}\}_k$ は B 内の調和関数 v に広義一様収束する．$v \le u \quad \text{in } B$, $v(y) = u(y)$ であることを注意しておく．

■claim: $v \equiv u \quad \text{in } B$ である．

背理法で示す．ある $z \in B$ で $v(z) < u(z)$ だと仮定する．このとき $\overline{u} \in \mathcal{S}_\varphi$ があり，$v(z) < \overline{u}(z)$ となる．$w_k := \max\{\overline{u}, V_{m_k}\} \in \mathcal{S}_\varphi$ とおき，$W_k \in \mathcal{S}_\varphi$ を w_k の B における harmonic lifting とする．

$$V_{m_k} \le w_k \le W_k \le u \tag{2.6}$$

に注意せよ．$\{W_k\}_k \subset \mathcal{S}_\varphi$ の B への制限は一様有界な調和関数列である．よって再び補題 2.10 より，$\{W\}_k$ のある部分列は B 内の調和関数 w に B 上広義一様収束する．今，(2.6) 式で $k \to \infty$ として $v \le w \le u \quad \text{in } \Omega$ を得る．一方 y での値を考えると $v(y) = u(y)$ より $v(y) = w(y)$ である．調和関数 $v - w$ に関する最大値原理より，$w - v = 0 \quad \text{in } B$ を得る．z での値を考えると

$$\overline{u}(z) > v(z) = w(z) \ge \overline{u}(z)$$

となり矛盾．よって $u \equiv v \quad \text{in } B$ を得る．よって u は B で調和． □

2.3.3 Perron solution と Dirichlet 問題

Dirichlet 問題 (2.5) が解 $w \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ を持てば，それは定理 2.19 で構成した Perron solution u と一致する (最大値原理による)．したがって，Perron solution の境界での振る舞いが問題となる．

以下，引き続き Ω を有界領域とする．

定義 2.20. $\xi \in \partial\Omega$ とする．

1. 関数 $w = w_\xi \in C(\overline{\Omega})$ が $\xi \in \partial\Omega$ における barrier であるとは，
   (i) w は Ω における優調和関数である．
   (ii) $w > 0 \quad \text{in } \overline{\Omega} \setminus \{\xi\}; \quad w(\xi) = 0.$
   が成り立つことをいう．
2. w が ξ の local barrier であるとは，ξ の近傍 N があり，$w \in C(\overline{\Omega \cap N})$ で
   (i) w は $\Omega \cap N$ における優調和関数である．
   (ii) $w > 0 \quad \text{in } \overline{\Omega \cap N} \setminus \{\xi\}; \quad w(\xi) = 0.$
   となることをいう．

注意 2.21. barrier と local barrier は，次の意味で実質同じ概念である：w を ξ における local barrier とし，$B \subset\subset N$ を開球で $\xi \in B$, $m := \inf_{N \setminus B} w > 0$ を満たすものとする．このとき

$$\overline{w}(x) := \begin{cases} \min\{m, w(x)\} & x \in \overline{\Omega} \cap B \\ m & x \in \overline{\Omega} \setminus B \end{cases}$$

とおくと $\overline{w}$ は ξ における barrier である[*6].

定義 2.22. $\xi \in \partial\Omega$ が Laplacian に関して regular であるとは，ξ における barrier が存在することをいう．

補題 2.23. u を定理 2.19 で構成した Perron solution とする．$\xi \in \partial\Omega$ が regular で，φ が ξ で連続ならば，$u(x) \to \varphi(\xi)$ $(x \to \xi)$ である．

Proof. $\varepsilon > 0$ とせよ．$M := \sup_{\partial\Omega} |\varphi|$ とおく．w を ξ における barrier とする．

φ の ξ における連続性から，$\delta > 0$ と $k > 0$ があり，

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(\xi)| &\leq \varepsilon \quad (\text{if } |x-\xi| \leq \delta), \\ kw(x) &\geq 2M \quad (\text{if } |x-\xi| \geq \delta) \end{aligned}$$

となる．ここで，$\varphi(\xi)+\varepsilon+kw$, $\varphi(\xi)-\varepsilon-kw$ という関数はそれぞれ φ に対する superfunction, subfunction となる．したがって，u の定義および補題 2.14 より

$$\varphi(\xi) - \varepsilon - kw \leq u \leq \varphi(\xi) + \varepsilon + kw \quad \text{in } \Omega$$

つまり

$$|u(x) - \varphi(\xi)| \leq \varepsilon + kw(x) \quad \text{in } \Omega$$

を得る．$w \to 0$ $(x \to \xi)$ より $|u(x) - \varphi(\xi)| \to 0$ $(x \to \xi)$ を得る． □

次の定理がこの節の目的であった：

定理 2.24 (Perron の方法：結論)**.** 有界領域 Ω に対して，次は同値である：

(a) Dirichlet 問題 (2.5) は，任意の連続な境界条件 $\varphi \in C(\partial\Omega)$ に対して解 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ を持つ．
(b) $\partial\Omega$ のすべての点は regular である．

Proof. (b)$\Longrightarrow$(a) は先の補題と定理 2.19 ですでに示されている．

(a)$\Longrightarrow$(b)：$\xi \in \partial\Omega$ に対して $\varphi(x) = |x - \xi|$ を境界値に持つ調和関数を u とすれば，u が ξ における barrier を与える． □

2.3.4 境界の regularity について

定理 2.24 より，Dirichlet 問題 (2.5) が任意の連続な境界条件に対して解を持つ条件を，領域の言葉で記述することができた．しかし条件 (b) は些か技術的であるので，ここでもう少し簡明な十分条件を与えておく．加筆予定.

3 Laplacian：弱解理論

本節では，Sobolev 空間を用いた Laplace 方程式および Poisson 方程式の弱解理論を解説する．

[*6] $w \in C(\overline{\Omega})$ であり，$\overline{w}$ が (i) を満たすことは補題 2.15 の証明と同様である (補題 2.16 に注意せよ)．(ii) は明らか.

3.1 弱解の定義，存在性

定義 3.1. 弱い意味での Laplacian とは，有界線形写像

$$\Delta\colon H^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega), \quad \Delta u(v) = -\int_\Omega Du \cdot Dv\,dx \quad (u \in H^1(\Omega),\ v \in H_0^1(\Omega))$$

のことをいう．

定義 3.2. $u \in H^1(\Omega)$ が弱い意味で劣 (優) 調和であるとは，

$$-\Delta u(v) \le (\ge) 0 \quad (\forall v \in H_0^1(\Omega),\ v \ge 0) \tag{3.1}$$

となることをいう．このとき $-\Delta u \le (\ge) 0$ weakly in Ω と書く．

u が $-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega$ の弱解であるとは，

$$-\Delta u(v) = \int_\Omega fv\,dx \quad (\forall v \in H_0^1(\Omega)) \tag{3.2}$$

であることをいう．つまり (3.2) の左辺により $f \in H^{-1}(\Omega)$ とみなすとき，$H^{-1}(\Omega)$ の等式として $-\Delta u = f$ が成り立つということである．

注意 3.3.

- $u \in C^2(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ が $-\Delta u = f$ の弱解ならば，古典解でもある (部分積分による).
- $\Delta\colon H^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ は有界線形写像であるから，弱解の定義 (3.1)，(3.2) の test function としては $v \in C_c^\infty(\Omega)$ で十分である．

以下，弱解の存在性を示す．次の関数解析からの補題が重要である．

補題 3.4. E を反射的 Banach 空間，$A \subset E$ を空でない凸かつ閉集合とする．$\varphi\colon A \to \mathbb{R}$ は下半連続な凸関数で，

$$\lim_{x\in A,\ \|x\|\to\infty} \varphi(x) = \infty$$

であると仮定する．このとき，$x_0 \in A$ があり $\varphi(x_0) = \min_A \varphi$ となる．

Proof. [Bre, Corollary 3.23] を見よ． □

定理 3.5. Ω を有界 Lipschitz 領域，$\varphi \in H^1(\Omega)$ とする．このとき，Dirichlet 問題

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ \quad u = \varphi & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.3}$$

は弱解 $u \in H^1(\Omega)$ を持つ．

Proof.
■#1　$K = \{w \in H^1(\Omega) \mid w - \varphi \in H_0^1(\Omega)\}$,

$$\mathscr{E}\colon H^1(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad \mathscr{E}(w) = \frac{1}{2}\int_\Omega |Dw|^2\,dx$$

とおく．$H^1(\Omega)$ は Hilbert 空間なのでとくに反射的 Banach 空間，K はその空でない凸閉集合である．$\mathscr{E}$ は K 上下半連続かつ凸であり，Poincaré の不等式より $\lim_{w\in K,\ \|w\|_{H^1(\Omega)}\to\infty} \mathscr{E}(w) = \infty$ である．したがって補題の仮定が成り立っており，$\mathscr{E}$ は最小化元 $u \in K$ を持つ．

■#2　#1 で構成した最小化元 u が解であることを示す．任意の $\varepsilon \in \mathbb{R}$ と $v \in H_0^1(\Omega)$ に対して $u + \varepsilon v \in K$ である．よって最小性から

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(u) &\le \mathscr{E}(u+\varepsilon v)\\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |D(u+\varepsilon v)|^2\,dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|Du|^2 + 2\varepsilon Du\cdot Dv + \varepsilon^2|Dv|^2\right)dx\\ &= \mathscr{E}(u) + \varepsilon\biggl(\int_\Omega Du\cdot Dv\,dx + \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |Dv|^2\,dx\biggr)\end{aligned}$$

したがって

$$\varepsilon\biggl(\int_\Omega Du\cdot Dv\,dx + \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |Dv|^2\,dx\biggr) \ge 0 \quad (\forall\varepsilon\in\mathbb{R})$$

となる．よって

$$\int_\Omega Du\cdot Dv\,dx = 0 \quad (\forall v \in H_0^1(\Omega))$$

でなければならない．これは $-\Delta u = 0$ であることを示している． □

次に解の一意性を議論するが，これは古典解の場合と同様で，比較原理からの帰結である．

命題 3.6 (比較原理)**.** Ω を有界領域とする．$u \in H^1(\Omega)$ が $-\Delta u \ge 0 \quad \text{in } \Omega,\ u \ge 0 \quad \text{on } \partial\Omega$ を満たすならば $u \ge 0 \quad \text{in } \Omega$ である．

Proof. $u = u^+ - u^-$ とプラスパートとマイナスパートにわける．$u^\pm \in H^1(\Omega),\ u^\pm \ge 0$ である[*7]．test function として $v = u^-$ を取ると，

$$\int_\Omega Du\cdot Du^- \ge 0$$

だが，$Du\cdot Du^- = (Du^+ - Du^-)\cdot Du^- = -|Du^-|^2$ なので

$$-\int_\Omega \left|Du^-\right|^2 dx \ge 0$$

となる．したがって $Du^- = 0 \quad \text{in } \Omega$ である．一方仮定より $u^- = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$ であるから，$u^- = 0 \quad \text{in } \Omega$ である．これは $u \ge 0 \quad \text{in } \Omega$ であることを示している． □

系 3.7. Ω を有界領域，$\varphi \in H^1(\Omega)$ とする．このとき Dirichlet 問題 (3.3) の解 $u \in H^1(\Omega)$ はただひとつである．

系 3.8. $u \in H^1(\Omega),\ f \in L^\infty(\Omega)$ で $-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega$ ならば，

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le C_\Omega(\|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u|_{\partial\Omega}\|_{L^\infty(\partial\Omega)})$$

Proof. 系 2.6 の証明と同様である． □

[*7] 非自明．さらに $Du^\pm(x) = \begin{cases} Du & (\pm u \ge 0) \\ 0 & (\pm u \le 0)\end{cases}$ である．

3.2 正則性

3.2.1 difference quotient

定義 3.9. 関数 $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ に対して，difference quotient を

$$\Delta_i^h u(x) \coloneqq \frac{u(x+he_i)-u(x)}{h}, \quad (x, x+he_i \in \Omega,\ h \neq 0)$$

と定義する．

補題 3.10. $u \in W^{1,p}(\Omega),\ 1 \leq p < \infty$ とする．このとき任意の $\Omega' \subset\subset \Omega$ と $0 < |h| < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ に対して $\Delta_i^h u \in L^p(\Omega')$ であり，

$$\left\|\Delta_i^h u\right\|_{L^p(\Omega')} \leq \|D_i u\|_{L^p(\Omega)}$$

である．

Proof. density argument により $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ の場合に帰着する．

$$\Delta_i^h u(x) = \frac{u(x+he_i)-u(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h D_i u(x+\xi e_i)\, d\xi$$

である．Hölder の不等式より

$$\begin{aligned}
\left|\Delta_i^h u(x)\right|^p &= \frac{1}{|h|^p}\left|\int_0^h D_i u(x+\xi e_i)\, d\xi\right|^p \\
&\leq \frac{1}{|h|^p}\left(\left(\int_0^h |D_i u(x+\xi e_i)|^p\, d\xi\right)^{1/p} \cdot |h|^{1-1/p}\right)^p \\
&= \frac{1}{|h|}\int_0^h |D_i u(x+\xi e_i)|^p\, d\xi
\end{aligned}$$

を得る．したがって

$$\int_{\Omega'} \left|\Delta_i^h u\right|^p dx \leq \frac{1}{|h|}\int_{\Omega'} dx \int_0^h |D_i u(x+\xi e_i)|^p\, d\xi \leq \frac{1}{|h|}\int_0^h d\xi \int_{\Omega'+\xi e_i} |D_i u|^p\, dx \leq \int_\Omega |D_i u|^p\, dx$$

となり結論を得る． □

補題 3.11. $u \in L^p(\Omega),\ 1 < p < \infty$ は次を満たすとする：定数 $K > 0$ があり，任意の $\Omega' \subset\subset \Omega,\ 0 < h < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ に対して

$$\Delta_i^h u \in L^p(\Omega') \quad かつ \quad \left\|\Delta_i^h u\right\|_{L^p(\Omega')} \leq K.$$

このとき $D_i u \in L^p(\Omega)$ であり，$\|D_i u\|_{L^p(\Omega)} \leq K$ である．

Proof. $\left\{\Delta_i^h u\right\}_{h>0} \subset L^p(\Omega)$ は L^p-有界であるから，$L^p(\Omega)$ の反射性より弱収束部分列を持つ：$\{h_m\}_m,\ v \in L^p(\Omega)$ があり，$h_m \searrow 0$ かつ

$$\Delta_i^{h_m} u \rightharpoonup v \quad \text{weakly in } L^p(\Omega)$$

となる．$\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq K$ である．$\varphi \in C_0^1(\Omega)$ とすると，十分大きな任意の m に対して $h_m < \operatorname{dist}(\operatorname{supp}\varphi, \partial\Omega)$ であり，

$$\int_\Omega \varphi\, \Delta_i^{h_m} u\, dx = -\int_\Omega u\, \Delta_i^{-h_m} \varphi\, dx$$

$m \to \infty$ として

$$\int_\Omega \varphi v \, dx = -\int_\Omega u \, D_i \varphi \, dx$$

を得る． □

3.2.2 内部正則性評価

定理 3.12. $u \in H^1(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, $-\Delta u = f$ weakly in Ω であると仮定する．このとき $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ であり，任意の $\Omega' \subset\subset \Omega$ に対して

$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \le C_{n,\Omega,\Omega'}(\|u\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)})$$

が成り立つ．

Proof. $v \in H^1_0(\Omega)$ は Ω 内にコンパクト台を持つとする．このとき，$0 < |2h| < \mathrm{dist}(\mathrm{supp}\, v, \partial\Omega)$ に対して

$$\Delta_i^{-h} v(x) = \frac{v(x - he_i) - v(x)}{-h}$$

とおくと $\Delta_i^{-h} v \in H^1_0(\Omega)$ である[*8]．弱解の定義より

$$\int_\Omega Du \cdot D(\Delta_i^{-h} v) \, dx = \int_\Omega f \, \Delta_i^{-h} v \, dx$$

左辺を変形すると

$$\int_\Omega D(\Delta_i^h u) \cdot Dv \, dx = -\int_\Omega f \, \Delta_i^{-h} v \, dx$$

を得るので，補題 3.10 より

$$\int_\Omega D(\Delta_i^h u) \cdot Dv \, dx \le \|f\|_2 \big\|\Delta_i^h v\big\|_2 \le \|f\|_2 \|D_i v\|_2$$

を得る．

$0 \le \eta \le 1$ を満たす $\eta \in C^1_0(\Omega)$ を取り，test function として $v = \eta^2 \Delta_i^h u$ を取る．すると

$$\int_\Omega D(\Delta_i^h u) \cdot D(\eta^2 \Delta_i^h u) \, dx \le \|f\|_2 \big\|D_i(\eta^2 \Delta_i^h u)\big\|_2$$

ここで $D(\eta^2 \Delta_i^h u) = 2\eta(D\eta)\Delta_i^h u + \eta^2 D(\Delta_i^h u)$ より

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \big|\eta D(\Delta_i^h u)\big|^2 \, dx \\
&\le \|f\|_2 \big(2\big\|\eta(D_i\eta)\Delta_i^h u\big\|_2 + \big\|\eta^2 D_i(\Delta_i^h u)\big\|_2\big) - 2\int_\Omega \eta \, \Delta_i^h u \, (D\eta) \cdot (D(\Delta_i^h u)) \, dx \\
&\le \|f\|_2 \big(2\big\|\eta(D_i\eta)\Delta_i^h u\big\|_2 + \big\|\eta^2 D_i(\Delta_i^h u)\big\|_2\big) + \left(\varepsilon \big\|\eta D(\Delta_i^h u)\big\|_2^2 + \frac{\big\|(\Delta_i^h u) D\eta\big\|_2^2}{\varepsilon}\right) \\
&\le \|D_i\eta\|_\infty (\|f\|_2^2 + \big\|\Delta_i^h u\big\|_2^2) + \frac{\|f\|_2^2}{\varepsilon} + \varepsilon \big\|\eta D_i(\Delta_i^h u)\big\|_2^2 + \varepsilon \big\|\eta D(\Delta_i^h u)\big\|_2^2 + \frac{\|D\eta\|_\infty^2 \big\|\Delta_i^h u\big\|_2^2}{\varepsilon} \\
&\le \|D_i\eta\|_\infty (\|f\|_2^2 + \|D_i u\|_2^2) + \frac{\|f\|_2^2}{\varepsilon} + 2\varepsilon \big\|\eta D(\Delta_i^h u)\big\|_2^2 + \frac{\|D\eta\|_\infty^2 \|D_i u\|_2^2}{\varepsilon}
\end{aligned}$$

[*8] $\mathrm{supp}\, v \cup (he_i + \mathrm{supp}\, v)$ では $\Delta_i^{-h} v$ は well-defined．その外では値を 0 として拡張せよ．

なお，最後の不等式で再び補題 3.10 を用いた．とくに $\varepsilon = 1/4$ と取れば，

$$\left\|\eta D(\Delta_i^h u)\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C(1 + \|D\eta\|_{L^\infty(\Omega)})(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)})$$

が得られる．ここで，η を，$\eta \equiv 1 \quad \text{on } \Omega'$，$|D\eta| \leq 2/d'$ $(d' = \mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega))$ となるように取れば

$$\left\|D(\Delta_i^h u)\right\|_{L^2(\Omega')} \leq C(1 + 2/d')(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)})$$

となる．$D(\Delta_i^h u) = \Delta_i^h(Du)$ であるので，補題 3.11 より

$$Du \in H^1(\Omega'), \quad \left\|D^2 u\right\|_{L(\Omega')} \leq C(1 + 2/d')(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)})$$

が従う． □

系 3.13. $u \in H^1(\Omega)$，$f \in H^k(\Omega)$，$k \geq 1$ が $-\Delta u = f$ weakly in Ω を満たしていると仮定する．このとき $u \in H^{k+1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ であり，任意の $\Omega' \subset\subset \Omega$ に対して

$$\|u\|_{H^{k+2}(\Omega')} \leq C_{n,\Omega,\Omega',k}(\|u\|_{H^1} + \|f\|_{H^k(\Omega)})$$

が成り立つ．

Proof. $k = 1$ の場合を示す．任意の $v \in C_0^2(\Omega)$ に対して

$$\int_\Omega Du \cdot D(D_k v)\,dx = \int_\Omega f\,D_k v\,dx$$

が成り立っている．$u \in H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ かつ $f \in H^1(\Omega)$ より

$$\int_\Omega D(D_k u) \cdot Dv = \int_\Omega (D_k f) v\,dx$$

となるが，これは $-\Delta(D_k u) = D_k f$ weakly in Ω であることを示している．$D_k f \in L^2(\Omega)$ より前の定理から $D_k u \in H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，したがって $u \in H^3_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ が従う．$k \geq 2$ でも帰納法で示せる． □

系 3.14. $u \in H^1(\Omega)$，$f \in C^\infty(\Omega)$，$-\Delta u = f$ weakly in Ω とする．このとき $u \in C^\infty(\Omega)$ である．

Proof. Sobolev の不等式

$$W^{k,p}(\Omega) \subset C_B^m(\Omega) = \{u \in C^m(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^\infty(\Omega)\ (|\alpha| \leq m)\},\ (0 \leq m < k - n/p)$$

より従う (c.f. [GT, Corollary 7.11])． □

とくに Laplace 方程式 $-\Delta u = 0$ の弱解 u は C^∞ 級である．

3.3 Harnack の不等式

本節では Laplacian に関する Harnack の不等式を導出し，さらにそれを用いて oscillation decay, 解の Hölder 連続性といった命題を示す．一般の楕円型方程式においても Harnack の不等式がこれらの種類の評価を導出するという流れは共通しており，Laplacian 特有ではないということに注意しておく (c.f. [GT, Chapter 8])．

3.3.1 Laplace 方程式の場合

定理 3.15 (Harnack の不等式)**.** $u \in H^1(\Omega)$ は $-\Delta u = 0$ weakly in Ω で，$u \geq 0 \quad \text{in } \Omega$ を満たすと仮定する．このとき，任意の $\Omega' \subset\subset \Omega$ に対して

$$\sup_{\Omega'} u \leq C_{n,\Omega,\Omega'} \inf_{\Omega'} u$$

が成り立つ．

Proof.

■#1 claim:　任意の $B_R = B_R(x_0) \subset\subset \Omega$ に対して $\sup_{B_{R/2}} u \leq C_{n,R} \inf_{B_{R/2}} u$ である．

$u \in C^\infty(\Omega)$ より，$B_R \subset\subset \Omega$ では Poisson integral formula が成り立つ：

$$u(x) = \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R} \frac{u(y)}{|x-y|^n} \, d\sigma(y) \quad (x \in B_R)$$

任意の $x \in B_{R/2}$，$y \in \partial B_R$ に対して $R/2 \leq |x - y| \leq 3R/2$，$3R^2/4 \leq R^2 - |x - x_0|^2 \leq R^2$ であることに注意すると，定数 $C = C_{n,R}$ があり

$$\frac{1}{C} \int_{\partial B_R} u \, d\sigma \leq u(x) \leq C \int_{\partial B_R} u \, d\sigma \quad (x \in B_{R/2})$$

となる．したがって，任意の $x_1, x_2 \in B_{R/2}$ に対して $u(x_1) \leq C^2 u(x_2)$ である．

■#2　$\Omega' \subset\subset \Omega$ とせよ．$x_1, x_2 \in \overline{\Omega'}$ で $u(x_1) = \sup_{\Omega'} u$，$u(x_2) = \inf_{\Omega'} u$ となるものを取る．$\overline{\Omega'}$ は path-connected より $\Gamma\colon [0,1] \to \overline{\Omega'}$ があり，$\Gamma(0) = x_1$，$\Gamma(1) = x_2$ となる．$d' = \operatorname{dist}(\Gamma, \partial\Omega)$，$R = d'/2$ とすると，有限個の $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_N \leq 1$ があり，$z_i \coloneqq \Gamma(t_i)$ とすると

$$\Gamma([0,1]) \subset \bigcup_{i=1}^N B_{R/2}(z_i), \quad B_R(z_i) \subset\subset \Omega$$

となる．各 i で $\sup_{B_{R/2}(z_i)} u \leq C_{n,R} \inf_{B_{R/2}(z_i)} u$ であるから，$u(x_1) \leq C_{n,R}^N u(x_2)$ となる．　□

Harnack の不等式より oscillation decay[*9]と呼ばれる結果が従う．上または下に有界な $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ に対して

$$\operatorname*{osc}_{\Omega} u \coloneqq \sup_{\Omega} u - \inf_{\Omega} u$$

とおく．

系 3.16 (oscillation decay)**.** $u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ を弱調和関数とする．このとき，任意の $\Omega' \subset\subset \Omega$ に対して

$$\operatorname*{osc}_{\Omega'} u \leq (1 - \theta) \operatorname*{osc}_{\Omega} u, \quad \theta = \theta_{n,\Omega,\Omega'} \in (0,1)$$

となる．

[*9] oscillation は/ásəléɪʃən/.

Proof. $w = u - \inf_\Omega u$ は非負調和であるから，Harnack の不等式より $\sup_{\Omega'} w \le C \inf_{\Omega'} w$ である．

$$\begin{aligned}\operatorname*{osc}_{\Omega'} u &= \operatorname*{osc}_{\Omega'} w \\ &= \sup_{\Omega'} w - \inf_{\Omega'} w \le \left(1 - \frac{1}{C}\right) \sup_{\Omega} w = \left(1 - \frac{1}{C}\right) \operatorname*{osc}_{\Omega} u\end{aligned}$$

である． □

注意 3.17. Harnack の不等式および oscillation decay の定数は，スケール不変である．すなわち $C_{n,\lambda\Omega,\lambda\Omega'} = C_{n,\Omega,\Omega'}$ $(\forall\lambda > 0)$．これは Laplace 方程式がスケール不変であることによる．

系 3.18 (Hölder 連続性)**.** $u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ を弱調和関数とする．このとき，ある $\alpha = \alpha_n \in (0,1)$ に対して $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ であり，任意の $\Omega' \subset\subset \Omega$ に対して

$$|u|_{0,\alpha;\Omega'} \le C_{n,\alpha} d^{-\alpha} \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad d = \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$$

である．

Proof. $x, y \in \Omega'$ に対して

$$|u(x) - u(y)| \le C d^{-\alpha} \|u\|_{L^\infty(\Omega)} |x - y|^\alpha$$

を示せばよい．記述を簡単にするため，平行移動により $y = 0$ としてよい．$B_d \subset\subset \Omega$ である．$x \in \Omega'$ が，$|x| < d$ を満たすならば，$2^{-k-1} d \le |x| < 2^{-k} d$ を満たす $k \in \mathbb{N}_0$ を取る．oscillation decay の定数 $\theta = \theta_n := \theta_{n,B_1,B_{1/2}}$ を取る．注意 3.17 より

$$\begin{aligned}|u(x) - u(0)| &\le \operatorname*{osc}_{B_{2^{-k}d}} u \le (1-\theta) \operatorname*{osc}_{B_{2^{-k+1}d}} u \le \cdots \le (1-\theta)^k \operatorname*{osc}_{B_d} u \\ &\le 2^{-k\alpha} \cdot 2\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\end{aligned}$$

となる．ここで $\alpha = -\log_2(1-\theta)$ とおいた．よって

$$|u(x) - u(0)| \le (2^{-k})^\alpha \cdot 2\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le \left(\frac{2|x|}{d}\right)^\alpha \cdot 2\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \frac{2^{1+\alpha}}{d^\alpha} \|u\|_{L^\infty(\Omega)} |x|^\alpha$$

を得る．

一方，$x \in \Omega'$，$|x| \ge d$ ならば，

$$|u(x) - u(0)| \le 2\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le \frac{2}{d^\alpha} \|u\|_{L^\infty(\Omega)} |x|^\alpha$$

である． □

3.3.2 Poisson 方程式の場合

定理 3.19 (Harnack の不等式)**.** $u \in H^1(\Omega)$，$f \in L^\infty(\Omega)$ は $-\Delta u = f$ weakly, $u \ge 0 \quad \text{in } \Omega$ を満たすとする．このとき任意の $\Omega' \subset\subset \Omega$ に対して

$$\sup_{\Omega'} u \le C_{n,\Omega,\Omega'} \left(\inf_{\Omega'} u + \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \right)$$

が成り立つ．

Proof. $v \in H^1(\Omega)$ を,

$$\begin{cases} -\Delta v = 0 & \text{weakly in } \Omega \\ v = u & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

の解とし, $w \coloneqq u - v \in H^1(\Omega)$ とすると $-\Delta w = f \quad \text{in } \Omega,\ w = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$ である.

Laplace 方程式に対する Harnack の不等式 (定理 3.15) より,

$$\sup_{\Omega'} v \le C_{n,\Omega,\Omega'} \inf_{\Omega'} v$$

である. また系 3.8 より

$$\sup_{\Omega} w \le C_\Omega \|f\|_\infty$$

なので結論を得る. □

系 3.20 (oscillation decay)**.** $u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega),\ f \in L^\infty(\Omega)$ は $-\Delta u = f$ weakly in Ω を満たすとする. このとき任意の $\Omega' \subset\subset \Omega$ に対して

$$\operatorname*{osc}_{\Omega'} u \le (1-\theta) \operatorname*{osc}_{\Omega} u + \|f\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \theta = \theta_{n,\Omega,\Omega'}$$

が成り立つ.

Proof. Laplace 方程式 $(f = 0)$ の場合と同様である. $w = u - \inf_\Omega u$ とおくと $-\Delta w = f,\ w \ge 0$ であるから w に Harnack の不等式を適用して

$$\begin{aligned} \operatorname*{osc}_{\Omega'} u = \operatorname*{osc}_{\Omega'} w &= \sup_{\Omega'} w - \inf_{\Omega'} \\ &\le \sup_{\Omega'} w - \left(\frac{1}{C} \sup_{\Omega'} w - \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \\ &\le \left(1 - \frac{1}{C}\right) \sup_{\Omega} w + \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{C}\right) \operatorname*{osc}_{\Omega} u + \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \end{aligned}$$

を得る. □

注意 3.21. Harnack の不等式, oscillation decay の定数は一般にはスケール不変ではないが, 次が成り立つ. $-\Delta u = f \quad \text{in } \lambda\Omega$ とする. このとき $\widetilde{u}(x) = u(\lambda x)$ とおくと $-\Delta u(x) = \lambda^2 f(\lambda x)$. よって

$$\sup_{\lambda\Omega'} u = \sup_{\Omega'} \widetilde{u} \le C_{n,\Omega,\Omega'} \left(\sup_{\Omega'} \widetilde{u} + r^2 \|f\|_{L^\infty(r\Omega)} \right) = C_{n,\Omega,\Omega'} \left(\sup_{\lambda\Omega'} u + \lambda^2 \|f\|_{L^\infty(\lambda\Omega)} \right)$$

同様に

$$\operatorname*{osc}_{\lambda\Omega'} \le (1 - \theta_{n,\Omega,\Omega'}) \left(\operatorname*{osc}_{\lambda\Omega} u + \lambda^2 \|f\|_{L^\infty(\lambda\Omega)} \right)$$

である.

系 3.22 (Hölder 連続性)**.** $u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega),\ f \in L^\infty(\Omega)$ は $-\Delta u = f$ weakly in Ω を満たすとする. このとき, ある $\alpha = \alpha_n \in (0,1)$ に対して $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ であり, 任意の $\Omega' \subset\subset \Omega$ に対して

$$|u|_{0,\alpha;\Omega'} \le C_{n,\alpha} d^{-\alpha} \left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + d^2 \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \right), \quad d = \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$$

が成り立つ.

Proof. $x, y \in \Omega'$ に対して

$$|u(x) - u(y)| \leq Cd^{-\alpha}(\|u\|_\infty + d^2\|f\|_\infty)|x-y|^\alpha$$

を示す．平行移動により $y=0$ としてよい．$d = \mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ とおくと $B_d \subset\subset \Omega$ である．

■claim:　$\alpha = \alpha_n \in (0,1)$, $k_0 = k_0(n) \in \mathbb{N}$ があり，

$$\operatorname*{osc}_{B_{2^{-k}d}} u \leq C\bigl(\|u\|_\infty + d^2\|f\|_\infty\bigr) \cdot 2^{-\alpha k} \quad (k \geq k_0).$$

Proof of the claim. oscillation decay の定数 $\theta = \theta_n := \theta_{n,B_1,B_{1/2}}$ を取ると，注意 3.21 より

$$\operatorname*{osc}_{B_{2^{-k}R}} u \leq (1-\theta) \operatorname*{osc}_{B_{2^{-k+1}R}} u + 2^{-2k+2} d^2 \|f\|_\infty$$

となる．そこで k_0 を，$2^{-2k_0+2} \leq \theta$ となるくらい大きく取れば，任意の $k \geq k_0$ に対して

$$\operatorname*{osc}_{B_{2^{-k}d}} u \leq (1-\theta) \operatorname*{osc}_{B_{2^{-k+1}d}} u + \theta \cdot 4^{k_0-k} d^2 \|f\|_\infty \tag{3.4}$$

そこで，$\alpha = -\log_2(1-\theta/2)$ に対して

$$\operatorname*{osc}_{B_{2^{-k+1}d}} u \leq 2 \cdot 2^{\alpha(k_0-k)}\bigl(\|u\|_\infty + d^2\|f\|_\infty\bigr) \quad (\forall k \geq k_0)$$

となることが帰納法から従う：$k=k_0$ の場合は明らか．k の場合の成立を仮定すると (3.4) 式より

$$\begin{aligned}
\operatorname*{osc}_{B_{2^{-k}d}} u &\leq \operatorname*{osc}_{B_{2^{-k+1}d}} u + \theta \cdot 4^{k_0-k} d^2 \|f\|_\infty \\
&\leq (1-\theta) \cdot 2 \cdot 2^{\alpha(k_0-k)}\bigl(\|u\|_\infty + d^2\|f\|_\infty\bigr) + \theta \cdot 4^{k_0-k} d^2 \|f\|_\infty \\
&\leq 2 \cdot 2^{\alpha(k_0-k)}\left(1 - \frac{\theta}{2}\right)\bigl(\|u\|_\infty + d^2\|f\|_\infty\bigr) \\
&\leq 2 \cdot 2^{\alpha(k_0-k-1)}\bigl(\|u\|_\infty + d^2\|f\|_\infty\bigr)
\end{aligned}$$

となる．これで claim の証明が完了した． □

さて，$x \in \Omega', |x| < 2^{-k_0}d$ ならば，$2^{-k-1}d \leq |x| < 2^{-k}d$ となる $k \geq k_0$ を取ると，claim より

$$|u(x) - u(0)| \leq \operatorname*{osc}_{B_{2^{-k}d}} u \leq 2 \cdot 2^{\alpha(k_0-k)}\bigl(\|u\|_\infty + d^2\|f\|_\infty\bigr) \leq \frac{2^{1+\alpha(1+k_0)}}{d^\alpha}\bigl(\|u\|_\infty + d^2\|f\|_\infty\bigr)|x|^\alpha$$

となる．$x \in \Omega'$, $|x| \geq 2^{-k_0}d$ ならば，

$$|u(x) - u(0)| \leq 2\|u\|_\infty \leq \frac{2^{1+\alpha k_0}}{d^\alpha}\|u\|_\infty |x|^\alpha$$

となり，結論が得られた． □

3.4 Schauder 評価

系 3.13 で見たように，2 階楕円型方程式における正則性評価は，典型的には「$-\Delta u = f$ ならば u は f より 2 回多く微分できる」と主張する．本節で取り扱う Schauder 評価は，Hölder 正則性に関するそのような評価の一つである．そこで重要となるのは解のノルムに関するアプリオリ評価である．

3.4.1 アプリオリ評価

定理 3.23. $u \in C^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\alpha \in (0,1)$ が $-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega$ を満たすとする．このとき $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ であり，任意の $\Omega' \subset\subset \Omega$ に対して

$$[u]_{2,\alpha;\Omega'} \leq C_{n,\alpha} d^{-2-\alpha}(|u|_{0;\Omega} + d^{2+\alpha}[f]_{0,\alpha;\Omega}), \quad (d = \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega))$$

が成り立つ．

Proof. [*10] $y, z \in \Omega'$ に対して

$$\left|D^2u(z) - D^2u(y)\right| \leq Cd^{-2-\alpha}(|u|_{0;\Omega} + d^{2+\alpha}[f]_{0,\alpha;\Omega})|y-z|^\alpha$$

を示す．まず $|y-z| \leq 2^{-4}d$ の場合を考える．平行移動により $y = 0$ としてよい．系 2.9 より

$$-\Delta w = 0 \quad \text{in } B_\rho \Longrightarrow [w]_{\kappa;B_{\rho/2}} \leq C_{n,\kappa}\rho^{-\kappa}|w|_{0;B_\rho} \quad (\kappa \geq 0) \tag{3.5}$$

$$-\Delta w = \lambda \text{ (const.)} \quad \text{in } B_\rho \Longrightarrow [w]_{2;B_{\rho/2}} \leq C_n\Big(\rho^{-2}|w|_{0;B_\rho} + |\lambda|\Big) \tag{3.6}$$

に注意する．なお (3.6) は調和関数 $w - \lambda|x|^2/2n$ に (3.5) を適用すると得られる．

■#1　$k = 0, 1, 2, \ldots,$ に対して，u_k を

$$\begin{cases} -\Delta u_k = f(0) & \text{in } B_{2^{-k}d} \\ \quad u_k = u & \text{on } \partial B_{2^{-k}d} \end{cases}$$

の解とする．$u_k - u$ と $\pm(2n)^{-1}|f(0) - f|_{0;B_{2^{-k}d}}\Big(|x|^2 - (2^{-k}d)^2\Big)$ に比較原理を適用して ($-\Delta(u_k - u) = f - f(0)$ に注意して)

$$\begin{aligned} |u_k - u|_{0;B_{2^{-k}d}} &\leq C(2^{-k}d)^2|f - f(0)|_{0;B_{2^{-k}d}} \leq C(2^{-k}d)^2[f]_{0,\alpha;\Omega}(2^{-k}d)^\alpha \\ &\leq Cd^{2+\alpha}[f]_{0,\alpha;\Omega}2^{-k(2+\alpha)} \end{aligned} \tag{3.7}$$

したがって三角不等式より

$$|u_{k+1} - u_k|_{0;B_{2^{-k-1}d}} \leq Cd^{2+\alpha}[f]_{0,\alpha;\Omega}2^{-k(2+\alpha)} \quad (k \geq 0) \tag{3.8}$$

を得る．また $u_{k+1} - u_k$ は調和なので (3.5)，(3.8) 式より

$$|u_{k+1} - u_k|_{2;B_{2^{-k-2}d}} \leq C(2^{-k-2}d)^{-2}|u_{k+1} - u_k|_{0;B_{2^{-k-1}d}} \leq Cd^\alpha[f]_{0,\alpha;\Omega}2^{-k\alpha} \tag{3.9}$$

が成り立つ．

■#2　次を示す：

$$D^2u(0) = \lim_{k\to\infty} D^2u_k(0) \tag{3.10}$$

$\widetilde{u}(x) \coloneqq u(0) + x \cdot Du(0)x + \frac{1}{2}x \cdot D^2u(0)x$ を 0 まわりの 2 次までの Taylor 展開とする．$u \in C^2(\Omega)$ より $u(x) - \widetilde{u}(x) = o(|x|^2)$ $(x \to 0)$ である．また $u_k - \widetilde{u}$ は調和なので，(3.5) などより

$$\begin{aligned} \left|D^2u_k(0) - D^2u(0)\right| &= \left|D^2u_k(0) - D^2\widetilde{u}(0)\right| \\ &\leq |u_k - \widetilde{u}|_{2;B_{2^{-k-1}d}} \\ &\leq C(2^{-k}d)^{-2}|u_k - \widetilde{u}|_{0;B_{2^{-k}d}} \\ &= C(2^{-k}d)^{-2}\|u - \widetilde{u}\|_{L^\infty(\partial B_{2^{-k}d})} \to 0 \quad (\text{as } k \to \infty) \end{aligned}$$

[*10] 証明は [FR, Theorem 2.14] を参照したが，一部改変している．初出は [Wan06] だそうである．

よって (3.10) が示された．

■#3　さて，$z \in \Omega'$，$|z| < 2^{-4}d$ とする．$k_0 \in \mathbb{N}$ で $2^{-k_0-4}d \le |z| < 2^{-k_0-3}d$ となるものを取る．

$$\left|D^2u(z) - D^2u(0)\right| \le \left|D^2u(0) - D^2u_{k_0}(0)\right| + \left|D^2u_{k_0}(z) - D^2u(z)\right| + \left|D^2u_{k_0}(0) - D^2u_{k_0}(z)\right| \tag{3.11}$$

と分けて各項を評価する：

■#4　まず第 1 項を評価する．(3.9)，(3.10) より

$$\left|D^2u(0) - D^2u_{k_0}(0)\right| \le \sum_{k=k_0}^{\infty} \left|D^2u_k(0) - D^2u_{k+1}(0)\right| \le Cd^\alpha[f]_{0,\alpha;\Omega} \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{-k\alpha} \le Cd^\alpha[f]_{0,\alpha;\Omega}2^{-k_0\alpha}$$

■#5　第 2 項の評価．ほぼ第 1 項のときと同じである．v_k を

$$\begin{cases} -\Delta v_k = f(z) & \text{in } B_{2^{-k}d}(z) \\ \quad v_k = u & \text{on } \partial B_{2^{-k}d}(z) \end{cases}$$

の解とする ($k = 0, 1, 2, \ldots$)．

$$\left|D^2u_{k_0}(z) - D^2u(z)\right| \le \left|D^2u_{k_0}(z) - D^2v_{k_0}(z)\right| + \left|D^2v_{k_0}(z) - D^2u(z)\right|$$

と分ける．第 2 項は先ほどと同様に

$$\left|D^2v_{k_0}(z) - D^2u(z)\right| \le Cd^\alpha[f]_{0,\alpha;\Omega}2^{-k_0\alpha}$$

と評価される．第 1 項について，$|z| < 2^{-k_0-3}d$ より $B_{2^{-k_0}d} \cap B_{2^{-k_0}d}(z) \supset B_{2^{-k_0-1}d}(z)$ であることに注意して

$$\begin{aligned} \left|D^2u_{k_0}(z) - D^2v_{k_0}(z)\right| &\le |u_{k_0} - v_{k_0}|_{2;B_{2^{-k_0-2}d}(z)} \\ &\le C\Big((2^{-k_0}d)^{-2}|u_{k_0} - v_{k_0}|_{0;B_{2^{-k_0-1}d}(z)} + |f(0) - f(z)|\Big) \\ &\le C\Big((2^{-k_0}d)^{-2}|u_{k_0} - v_{k_0}|_{0;B_{2^{-k_0-1}d}(z)} + [f]_{0,\alpha;\Omega}(2^{-k_0}d)^\alpha\Big) \end{aligned}$$

ここで (3.6) を用いた．さらに (3.7) 式より

$$\begin{aligned} |u_{k_0} - v_{k_0}|_{0;B_{2^{-k_0-1}d}(z)} &\le |u_{k_0} - u|_{0;B_{2^{-k_0-1}d}(z)} + |u - v_{k_0}|_{0;B_{2^{-k_0-1}d}(z)} \\ &\le |u_{k_0} - u|_{B_{2^{-k_0}d}} + |u - v_{k_0}|_{0;B_{2^{-k_0-1}d}(z)} \\ &\le Cd^{2+\alpha}[f]_{0,\alpha;\Omega}2^{-k_0(2+\alpha)} \end{aligned}$$

以上より，

$$\left|D^2u_{k_0}(z) - D^2v_{k_0}(z)\right| \le Cd^\alpha[f]_{0,\alpha;\Omega}2^{-k_0\alpha}$$

を得る．

■#6　最後に (3.11) の第 3 項を評価する．$k = 1, 2, \ldots, k_0$ に対して $h_k \coloneqq u_k - u_{k-1}$ は $B_{2^{-k}d}$ で調和である．(3.5) で $\kappa = 3$ とした場合より

$$\begin{aligned} \left|\frac{D^2h_k(z) - D^2h_k(0)}{|z|}\right| &\le [h_k]_{3;B_{2^{-k_0-3}d}} \\ &\le C(2^{-k}d)^{-3}|h_k|_{0;B_{2^{-k}d}} \\ &\le C(2^{-k}d)^{-3} \cdot d^{2+\alpha}[f]_{0,\alpha;\Omega}2^{-k(2+\alpha)} \quad \text{((3.8) を用いた)} \\ &\le Cd^{-1+\alpha}[f]_{0,\alpha;\Omega}2^{k(1-\alpha)} \end{aligned}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned}\left|D^2u_{k_0}(z)-D^2u_{k_0}(0)\right| &\le \left|D^2u_0(z)-D^2u_0(0)\right|+\sum_{k=1}^{k_0}\left|D^2h_k(z)-D^2h_k(0)\right|\\ &\le \left|D^2u_0(z)-D^2u_0(0)\right|+Cd^{-1+\alpha}[f]_{0,\alpha;\Omega}|z|\sum_{k=1}^{k_0}2^{k(1-\alpha)}\\ &\le \left|D^2u_0(z)-D^2u_0(0)\right|+Cd^{-1+\alpha}[f]_{0,\alpha;\Omega}|z|2^{k_0(1-\alpha)}\end{aligned}$$

また，$w=u_0-(2n)^{-1}f(0)(|x|^2-d^2)$ とおくと $-\Delta w=0 \quad \text{in } B_d$，$w=u_0 \quad \text{on } \partial B_d$ かつ $D^3u_0=D^3w$ である．よって

$$\left|\frac{D^2u_0(z)-D^2u_0(0)}{|z|}\right|\le [u_0]_{3;B_{d/2}}\le [w]_{3;B_{d/2}}\le Cd^{-3}|w|_{0;B_d}\le Cd^{-3}|w|_{0;\partial B_d}\le Cd^{-3}|u_0|_{0;B_d}$$

であり，(3.7) より $|u_0|_{0;B_d}\le Cd^{2+\alpha}[f]_{0,\alpha;\Omega}+|u|_{0;\Omega}$ なので

$$\left|D^2u_0(z)-D^2u_0(0)\right|\le Cd^{-3}|z|\Big(d^{2+\alpha}[f]_{0,\alpha;\Omega}+|u|_{0;\Omega}\Big)$$

$|z|\le 2^{-k-3}d$ に注意すると

$$\left|D^2u_{k_0}(z)-D^2u_{k_0}(0)\right|\le C\Big(d^{-2}|u|_{0,\Omega}+d^{\alpha}[f]_{0,\alpha;\Omega}\Big)2^{-k_0\alpha}$$

を得る．

#4，#5，#6 より (3.11) の右辺が

$$\begin{aligned}\left|D^2u(z)-D^2u(0)\right| &\le C\Big(d^{-2}|u|_{0,\Omega}+d^{\alpha}[f]_{0,\alpha;\Omega}\Big)2^{-k_0\alpha}\\ &\le Cd^{-2-\alpha}\Big(|u|_{0,\Omega}+d^{2+\alpha}[f]_{0,\alpha;\Omega}\Big)|z|^{\alpha}\quad (\forall z\in B_{2^{-4}d})\end{aligned}$$

と評価されることが示された．これで $|y-z|<2^{-4}d$ の場合に証明できた．

■#7　以上で示されたのは，任意の $y\in\Omega'$ に対して $u\in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega'\cap B_{2^{-5}d}(y)})$ かつ

$$[u]_{2,\alpha;\Omega'\cap B_{2^{-5}d}(y)}\le Cd^{-2-\alpha}\Big(|u|_{0;\Omega}+d^{2+\alpha}[f]_{0,\alpha;\Omega}\Big)$$

だということである．Hölder セミノルムに関する補間不等式 (定理 1.13) より

$$d^2[u]_{2;\Omega'\cap B_{2^{-5}d}(y)}\le C\Big(|u|_{0;\Omega}+d^{2+\alpha}[f]_{0,\alpha;\Omega}\Big)$$

が成り立つ．

さて，$y,z\in\Omega'$，$|y-z|\ge 2^{-4}d$ ならば

$$\begin{aligned}\left|D^2u(y)-D^2u(z)\right| &\le [u]_{2;\Omega'\cap B_{2^{-5}d}(y)}+[u]_{2;\Omega'\cap B_{2^{-5}d}(z)}\\ &\le 2Cd^{-2}\Big(|u|_{0;\Omega}+d^{2+\alpha}[f]_{0,\alpha;\Omega}\Big)\left(\frac{16|y-z|}{d}\right)^{\alpha}\\ &\le Cd^{-2-\alpha}\Big(|u|_{0;\Omega}+d^{2+\alpha}[f]_{0,\alpha;\Omega}\Big)|y-z|^{\alpha}\end{aligned}$$

である．以上で証明が終了した．　□

3.4.2 アプリオリ評価からの帰結

系 3.24. $u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega),\ f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}),\ \alpha \in (0,1)$ は $-\Delta u = f$ weakly in Ω を満たすとする．このとき $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ であり，定理 3.23 の評価が成り立つ．

Proof. $\{\eta_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ を mollifier の列とする. つまり $\eta \in C_c^\infty(B_1),\ \eta \geq 0,\ \int_{B_1} \eta\, dx = 1$ を取り $\eta_\varepsilon(x) = \eta^{-n}\eta(x/\varepsilon)$ とおく．すると $\eta_\varepsilon \in C_c^\infty(B_\varepsilon)$ かつ $\int_{B_\varepsilon} \eta\, dx = 1$ である．

$$u_\varepsilon \coloneqq u * \eta_\varepsilon \quad \text{in } \Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$$

とおく．つまり

$$u_\varepsilon(x) = \int_{B_\varepsilon} u(x-y)\eta_\varepsilon(y)\, dy \quad (x \in \Omega_\varepsilon)$$

である．すると $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ であり

$$-\Delta u_\varepsilon = f * \eta_\varepsilon =: f_\varepsilon \quad \text{in } \Omega_\varepsilon$$

である (弱微分と convolution は交換し，u_ε は滑らかなので弱微分と強微分は一致する)．よって定理 3.23 より

$$|u_\varepsilon|_{2,\alpha;\Omega'} \leq C_{n,\alpha}\Big((d-\varepsilon)^{-2-\alpha}|u_\varepsilon|_{0;\Omega_\varepsilon} + [f_\varepsilon]_{0,\alpha;\Omega_\varepsilon}\Big)$$

である．今，任意の $x, y \in \Omega_\varepsilon$ に対して

$$\begin{aligned}|u_\varepsilon(x)| &\leq \int_{B_\varepsilon} |u(x-z)|\eta_\varepsilon(z)\, dz \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \\ |f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)| &\leq \int_{B_\varepsilon} |f(x-z) - f(y-z)|\eta_\varepsilon(z)\, dz \leq [f]_{0,\alpha;\Omega}|x-y|^\alpha\end{aligned}$$

が成り立つ．つまり

$$[u_\varepsilon]_{0;\Omega_\varepsilon} \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad |f_\varepsilon|_{0,\alpha;\Omega_\varepsilon} \leq |f|_{0,\alpha;\Omega}$$

である．したがって $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ は $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega'})$ の有界列である．定理 1.14 のコンパクト埋め込み $C^{2,\alpha} \subset\subset C^2$ より $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ は $\overline{\Omega'}$ 上 C^2-収束する部分列を持つが，補題 1.3 より $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega'})$ を得る． □

系 3.25. $u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega),\ f \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}),\ k \in \mathbb{N},\ 0 < \alpha < 1$ は $-\Delta u = f$ weakly in Ω を満たすとする．このとき $u \in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$ であり，任意の $\Omega' \subset\subset \Omega$ に対して

$$|u|_{k+2,\alpha;\Omega'} \leq C_{n,k,\alpha,\Omega,\Omega'}(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + |f|_{k,\alpha;\Omega})$$

が成り立つ．

Proof. 同様にアプリオリ評価から帰結する．アプリオリ評価は帰納法で示せる． □

4 楕円型線形微分作用素に対する Schauder 評価

4.1 非発散型作用素の場合

次の微分作用素を考える：

$$Lu(x) = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)D_{ij}u(x) = \operatorname{tr}\big(A(x)D^2u(x)\big) \quad \text{in } \Omega$$

ただし $A=(a^{ij})_{i,j}$ は対称行列，つまり

$$a^{ij}=a^{ji} \quad (i,j=1,\dots,n) \tag{4.1}$$

だとする．

作用素 L が強楕円型であるとは，ある定数 $\lambda>0$ が存在して，

$$\lambda|\xi|^2 \le \sum_{i,j} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \quad (\forall x\in\Omega,\ \xi\in\mathbb{R}^n) \tag{4.2}$$

が成り立つことをいう．

さらに，L の係数 a^{ij} は有界だとし，定数 $\Lambda>0$ が

$$\sum_{i,j}\left|a^{ij}(x)\right|^2 \le \Lambda^2 \quad (\forall x\in\Omega) \tag{4.3}$$

を満たすとする．

以下，作用素 L は (4.1), (4.2), (4.3) を満たすとする．

注意 4.1 (定数係数の場合)**.** L の係数 a^{ij} たちが定数である場合を考える．$u\in C^2(\Omega),\ f\in C(\Omega)$ が

$$-Lu=f \quad \text{in } \Omega$$

を満たすと仮定する．$A=(a^{ij})_{i,j}$ が正定値対称行列なので，正定値な平方根 $A^{1/2}$ をただ一つ持つ．変数変換

$$z=A^{1/2}x\in\widetilde{\Omega}:=\left\{A^{1/2}x \mid x\in\Omega\right\}$$

により，$\widetilde{u}(z)=u(A^{-1/2}z),\ \widetilde{f}(z)=f(A^{-1/2}z)$ は

$$-\Delta\widetilde{u}=\widetilde{f} \quad \text{in } \widetilde{\Omega}$$

を満たす．実際，

$$-\sum_{i,j}a^{ij}(x)D_{ij}u(x)=\operatorname{tr}\big(A(x)D_x^2u(x)\big)=-\operatorname{tr}\Big(A^{1/2}D_x^2uA^{1/2}\Big)=-\operatorname{tr}\big(D_z^2u(z)\big)=-\Delta_z u$$

である．

このことから，定数係数の楕円型方程式は Laplacian の理論に帰着する．

4.1.1 最大値原理

命題 4.2 (最大値原理)**.** $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ を有界領域とし，$u\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ は $-Lu\le 0 \quad \text{in } \Omega$ をみたすと仮定する．このとき

$$\sup_{\Omega}u=\sup_{\partial\Omega}u$$

が成り立つ．

Proof.

■#1　まず $-Lu < 0 \quad \text{in } \Omega$ の場合に強最大値原理が成り立つことを示す．

$-Lu < 0 \quad \text{in } \Omega$ かつ $u(x_0) = \sup_\Omega u$ $(x_0 \in \Omega)$ と仮定する．このとき u は内点 x_0 で最大値を取っているので $Du(x_0) = 0$ かつ $D^2u(x_0) \le O$ である (つまり $D^2u(x_0)$ は半負定値対称行列)．よって $P \in \mathrm{O}(n)$ があり

$$
{}^tPD^2u(x_0)P = \mathrm{diam}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) =: D_{x_0},
$$

となる．$D^2u(x_0) \le O$ より $\lambda_i \le 0$ である．$A(x)$: $(a^{ij}(x))_{i,j}$ と定義し，

$$
A^P(x) := {}^tPA(x)P =: (a_P^{ij}(x))_{i,j}
$$

とおく．すると $A^P(x_0)$ は正定値であり，とくに $a_P^{ii}(x_0) \ge 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ である．

$$
\begin{aligned}
0 < Lu(x_0) = \mathrm{tr}\big(A(x_0)D^2u(x_0)\big) = \mathrm{tr}\big(A(x_0)PD_{x_0}\,{}^tP\big) = \mathrm{tr}\big({}^tPA(x_0)PD_{x_0}\big) &= \mathrm{tr}\big(A^P(x_0)D_{x_0}\big) \\
&= \sum_{i=1}^n a_P^{ii}(x_0)\lambda_i \le 0
\end{aligned}
$$

より矛盾．

■#2　結論を示す．$R > 0$ を十分大きく取って $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_1| < R\}$ となるようにする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$
u_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon e^{x_1}
$$

とおく．

$$
-Lu_\varepsilon = -Lu - \varepsilon a^{11}(x)e^{x_1} \le 0 - \varepsilon\lambda e^{x_1} < 0 \quad \text{in } \Omega
$$

なので#1 の場合から

$$
\sup_\Omega u \le \sup_\Omega u_\varepsilon = \sup_{\partial\Omega} u_\varepsilon \le \sup_{\partial\Omega} u + \varepsilon e^R
$$

となる．$\varepsilon \to +0$ として結論を得る．□

系 4.3. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界領域とする．$u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ が

$$
\begin{aligned}
-Lu &= f \quad \text{in } \Omega \\
u &= g \quad \text{on } \partial\Omega
\end{aligned}
$$

を満たせば,

$$
\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le C_{\Omega,\lambda,\Lambda}(\|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)})
$$

が成り立つ．

4.1.2　Schauder 評価

定理 4.4 (Schauder アプリオリ評価)**.** $a^{ij} \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$ を仮定する．$u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ が

$$
-Lu = f \quad \text{in } \Omega
$$

を満たすならば，任意の $\Omega' \subset\subset \Omega$ に対して

$$
|u|_{2,\alpha;\Omega'} \le C(|u|_{0;\Omega} + [f]_{0,\alpha;\Omega})
$$

が成り立つ．ここで

$$C = C_{n,\alpha,\lambda,\Lambda,K,\Omega,\Omega'}, \quad K = \sum_{i,j} \left|a^{ij}\right|_{0,\alpha;\Omega}$$

である．

以下，この定理を証明するが，$\Omega = B_1$，$\Omega' = B_{1/2}$ として示す (covering argument よりこれで十分である[*11])．

証明には blow-up analysis と呼ばれる手法を用いる．初出は [Sim97] だそうである．まずより弱い次の補題から始める．

補題 4.5. 定理 4.4 の仮定の下で，任意の $\delta > 0$ に対して

$$[u]_{2,\alpha;B_{1/2}} \leq \delta[u]_{2,\alpha;B_1} + C_\delta(|u|_{0;B_1} + [f]_{0,\alpha;B_1})$$

が成り立つ．ここで

$$C_\delta = C_{\delta,n,\alpha,\lambda,\Lambda,K}.$$

Proof. 補間不等式 (命題 1.11) より次を示せばよい：

$$[u]_{2,\alpha;B_{1/2}} \leq \delta[u]_{2,\alpha;B_1} + C_\delta([u]_{2;B_1} + [f]_{0,\alpha;B_1}) \quad (\forall\delta > 0)$$

背理法で示す．もしこれが成り立たないと仮定すると，ある $\delta_0 > 0$ が存在して，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $a_k^{ij}, f_k \in C^{0,\alpha}(\overline{B_1})$，$u_k \in C^{2,\alpha}(\overline{B_1})$ があり，

$$-\sum_{i,j} a_k^{ij} D_{ij} u_k = f_k \quad \text{in } B_1,$$

$$\sum_{i,j} |a_k^{ij}|_{0,\alpha;B_1} \leq K,$$

$$[u_k]_{2,\alpha;B_{1/2}} > \delta_0[u_k]_{2,\alpha;B_1} + k([u_k]_{2;B_1} + [f_k]_{0,\alpha;B_1})$$

となる．各 k に対して

$$\rho_k := |x_k - y_k|$$

とおき，$x_k, y_k \in B_{1/2}$ で

$$\frac{\left|D^2u_k(x_k) - D^2u_k(y_k)\right|}{\rho_k^\alpha} \geq \frac{1}{2}[u_k]_{2,\alpha,B_{1/2}}$$

となるものを選んでおく．

まず，

$$\frac{1}{2}[u_k]_{2,\alpha;B_{1/2}} \leq \frac{\left|D^2u_k(x_k) - D^2u_k(y_k)\right|}{\rho_k^\alpha} \leq \frac{2[u_k]_{2;B_1}}{\rho_k^\alpha} \leq \frac{2[u_k]_{2,\alpha;B_{1/2}}}{k\rho_k^\alpha}$$

より

$$\rho_k \leq 4^{1/\alpha}k^{-1/\alpha} \to 0 \quad (k \to \infty)$$

である．部分列を取って $\rho_k \searrow 0$ としてよい．

[*11] covering argument について追記する．

各 k に対して

$$\begin{aligned}
\widetilde{a}_k^{ij}(x) &\coloneqq a_k^{ij}(x_k+\rho_k x),\\
\widetilde{u}_k(x) &\coloneqq \frac{u_k(x_k+\rho_k x)-p_k(x)}{\rho_k^{2+\alpha}[u_k]_{2,\alpha;B_1}},\\
\widetilde{f}_k(x) &\coloneqq \frac{f_k(x_k+\rho_k x)-f_k(x_k)}{\rho_k^{\alpha}[u_k]_{2,\alpha;B_1}} \qquad (x\in B_{1/(2\rho_k)})
\end{aligned}$$

とおく．ここで p_k は

$$p_k(z)\coloneqq u_k(x_k)+\rho_k\sum_i D_iu_k(x_k)z_i+\frac{1}{2}\rho_k^2\sum_{i,j}D_{ij}u_k(x_k)z_iz_j$$

で与えられる．

まず $\widetilde{a}_k^{ij}$，$\widetilde{u}_k$，$\widetilde{f}_k$ たちの満たす方程式を求める．計算により

$$-\sum_{i,j}\widetilde{a}_k^{ij}D_{ij}\widetilde{u}_k=\widetilde{f}_k+\frac{1}{\rho_k^{\alpha}[u_k]_{2,\alpha;B_1}}\sum_{i,j}\Big(a_k^{ij}(x_k+\rho_k x)-a_k^{ij}(x_k)\Big)D_{ij}u_k(x_k) \tag{4.4}$$

がわかる．(4.4) 式で $k\to\infty$ とすることを考える．

まず，$\widetilde{u}_k$ について，定義より

$$\widetilde{u}_k(0)=0,\quad D\widetilde{u}_k(0)=0,\quad D^2\widetilde{u}_k(0)=O, \tag{4.5}$$

$$|\widetilde{u}_k(x)|\le C_{n,\alpha}|x|^{2+\alpha},\quad [\widetilde{u}_k]_{2,\alpha;B_{1/(2\rho_k)}}\le 1 \tag{4.6}$$

である．また

$$\xi_k\coloneqq\frac{y_k-x_k}{\rho_k}\in\partial B_1$$

とおくと

$$\left|D^2\widetilde{u}_k(\xi_k)\right|\ge\frac{\delta_0}{2} \tag{4.7}$$

である．(4.6) より，$\widetilde{u}_k$ はコンパクト集合上 $C^{2,\alpha}$-有界である．コンパクト埋め込み $C^{2,\alpha}\subset C^2$(定理 1.14) より $\widetilde{u}_k$ はある $\widetilde{u}\in C^2(\mathbb{R}^n)$ にコンパクト集合上 C^2-収束する．再び部分列を取って $\xi_k\to\xi\in\partial B_1$ となるようにしておく．

(4.5) と (4.7) 式より

$$\widetilde{u}(0)=0,\quad D\widetilde{u}(0)=0,\quad D^2\widetilde{u}(0)=O, \tag{4.8}$$

$$|\widetilde{u}(x)|\le C|x|^{2+\alpha}, \tag{4.9}$$

$$\left|D^2\widetilde{u}(\xi)\right|\ge\frac{\delta_0}{2} \tag{4.10}$$

である．

$\widetilde{a}_k^{ij}$ についても

$$|\widetilde{a}_k^{ij}|_{0;B_{1/(2\rho_k)}}\le K,\quad [\widetilde{a}_k^{ij}]_{0,\alpha;B_{1/(2\rho_k)}}\le K\rho_k^{\alpha}\to 0\quad (k\to\infty)$$

がわかるので部分列に移って

$$\widetilde{a}_k^{ij}\to\widetilde{a}^{ij}\in C(\mathbb{R}^n),\quad \text{コンパクト集合上一様収束}$$

となるが，$[\widetilde{a}^{ij}]_{0,\alpha;\mathbb{R}^n}=0$ より $\widetilde{a}^{ij}$ は定数である．
　また

$$|\widetilde{f}_k(x)|=\frac{f_k(x_k+\rho_k x)-f_k(x_k)}{\rho_k^\alpha[u_k]_{2,\alpha;B_1}}\le\frac{[f_k]_{0,\alpha;B_1}(\rho_k|x|)^\alpha}{\rho_k^\alpha[u_k]_{2,\alpha;B_1}}\le\frac{|x|^\alpha}{k}$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\rho_k^\alpha[u_k]_{2,\alpha;B_1}}\sum_{i,j}\Big(a_k^{ij}(x_k+\rho_k x)-a_k^{ij}(x_k)\Big)D_{ij}u_k(x_k)\right|&\le\frac{1}{\rho_k^\alpha[u_k]_{2,\alpha;B_1}}\sum_{i,j}[a_{ij}]_{0,\alpha;B_1}(\rho_k|x|)^\alpha[u_k]_{2;B_1}\\&\le\frac{K[u_k]_{2;B_1}}{[u_k]_{2,\alpha;B_{1/2}}}|x|^\alpha\\&\le\frac{K}{k}|x|^\alpha\end{aligned}$$

より，(4.4) の右辺は $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合上一様に 0 に収束することがわかる．
　以上より，(4.4) 式で $k\to\infty$ とすると

$$-\sum_{i,j}\widetilde{a}^{ij}D_{ij}\widetilde{u}=0$$

となる．$\widetilde{a}^{ij}$ は楕円性条件を満たす定数であるから，変数変換により $\widetilde{u}$ は調和関数に移る (注意 4.1 を見よ)．一方で (4.9) 式と Liouville の定理 (系 2.11) より $\widetilde{u}$ はたかだか 2 次式であるが，(4.8) より $\widetilde{u}\equiv 0$ となる．しかしこれは (4.10) に矛盾する． □

　そこで定理 4.4 の証明に戻る．

Proof of Theorem 4.4. Hölder セミノルムの亜種を

$$[u]^*_{2,\alpha;B_1}\coloneqq\sup_{B_\rho(x_0)\subset B_1}\rho^{2+\alpha}[u]_{2,\alpha;B_{\rho/2}(x_0)}$$

で定める．

■claim. $[u]^*_{2,\alpha;B_1}\le C\sup_{B_{\rho(x_0)}\subset B_1}\rho^{2+\alpha}[u]_{2,\alpha;B_{\rho/4}(x_0)}\quad(\forall u\in C^{2,\alpha}(B_1))$.
　$B_\rho(x_0)\subset B_1$ とし，$x,y\in B_{\rho/2}(x_0)$ を取る．

$$z_j\coloneqq x+\frac{j}{8}(y-x)\quad(j=0,\dots,7)$$

とおく．

$$\begin{aligned}\left|D^2u(x)-D^2u(y)\right|&\le\sum_{j=0}^{7}\left|D^2u(z_{j+1})-D^2u(z_j)\right|\\&\le\sum_{j=0}^{7}[u]_{2,\alpha;B_{\rho/8}(z_j)}|x-y|^\alpha\end{aligned}$$

だが，$B_{\rho/2}(z_j)\subset B_1$ より

$$\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2+\alpha}[u]_{2,\alpha;B_{\rho/8}(z_j)}\le\sup_{B_\rho(x_0)\subset B_1}\rho^{2+\alpha}[u]_{2,\alpha;B_{\rho/4}(x_0)}$$

が成り立つことに注意すると

$$\left|D^2u(x)-D^2u(y)\right| \le 8|x-y|^\alpha \left(\frac{\rho}{2}\right)^{-2-\alpha} \sup_{B_\rho(x_0)\subset B_1} \rho^{2+\alpha}[u]_{2,\alpha;B_{\rho/4}(x_0)}$$

よって

$$\rho^{2+\alpha}[u]_{2,\alpha;B_{\rho/2}(x_0)} \le 2^{5+\alpha} \sup_{B_{\rho(x_0)}\subset B_1} \rho^{2+\alpha}[u]_{2,\alpha;B_{\rho/4}(x_0)}$$

を得る．$B_\rho(x_0)\subset B_1$ について sup を取って claim の証明が完了する．

さて，補題 4.5 を $B_{\rho/2}(x_0)\subset B_\rho(x_0)\subset B_1$ に対して適用する．スケーリングで方程式がどのように変わるか注意すると

$$\begin{aligned}\rho^{2+\alpha}[u]_{2,\alpha;B_{\rho/4}(x_0)} &\le \delta\rho^{2+\alpha}[u]_{2,\alpha;B_{\rho/2}(x_0)} + C_\delta(|u|_{0;B_1}+\rho^\alpha[f]_{0,\alpha;B_1})\\ &\le \delta[u]^*_{2,\alpha;B_1} + C_\delta(|u|_{0;B_1}+[f]_{0,\alpha;B_1})\end{aligned}$$

となる．よって claim より

$$\frac{1}{C}[u]^*_{2,\alpha;B_1} \le \sup_{B_\rho(x_0)\subset B_1} \rho^{2+\alpha}[u]_{2,\alpha;B_{\rho/4}(x_0)} \le \delta[u]^*_{2,\alpha;B_1} + C_\delta(|u|_{0;B_1}+[f]_{0,\alpha;B_1})$$

となる．$\delta = 1/(2C)$ とおくと，

$$[u]_{2,\alpha;B_{1/2}} \le [u]^*_{2,\alpha;B_1} \le C(|u|_{0;B_1}+[f]_{0,\alpha;B_1})$$

を得る． □

系 4.6 (Higher order regularity)．$a^{ij}\in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$，$0<\alpha<1$，$k\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ とする．$u\in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$，$f\in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ が

$$-Lu = f \quad \text{in } \Omega$$

を満たすならば，任意の $\Omega'\subset\subset\Omega$ に対して

$$|u|_{k+2,\alpha;\Omega'} \le C(|u|_{0;\Omega}+|f|_{k,\alpha;\Omega})$$

が成り立つ．ここで

$$C = C_{n,k,\alpha,\lambda,\Lambda,K,\Omega,\Omega'}, \quad K=\sum_{i,j}|a^{ij}|_{k,\alpha;\Omega}$$

である．

Proof. $\Omega=B_1$，$\Omega'=B_{1/2}$ の場合に限って示す．$k=0$ の場合は示されている．そこで以下 $k-1$ $(k\ge 1)$ での成立を仮定し，a^{ij},u,f が定理の仮定を満たすとする．$e\in\mathbb{R}^n$，$|e|=1$ として $-\sum_{i,j}a^{ij}D_{ij}u=f$ を e 方向に微分して

$$-\sum_{i,j}a^{ij}D_{ij}D_eu = D_ef + \sum_{i,j}D_ea^{ij}D_{ij}u$$

となる．この式の左辺は $C^{k-1,\alpha}(\overline{\Omega})$ に含まれるので，帰納法より ($\Omega=B_{3/4}$，$\Omega'=B_{1/2}$ に適用して)

$$[D_eu]_{k+1,\alpha;B_{1/2}} \le C\left(|D_eu|_{0;B_{3/4}} + [D_ef]_{k-1,\alpha;B_{3/4}} + \sum_{i,j}\left|D_ea^{ij}D_{ij}u\right|_{k-1,\alpha;B_{3/4}}\right)$$

となる．ここで

$$|D_e u|_{0;B_{3/4}} \leq [u]_{1;B_{3/4}} \leq C(|u|_{0;B_1} + [u]_{2,\alpha;B_{3/4}}) \leq C(|u|_{0;B_1} + [f]_{0,\alpha;B_1})$$

であり (補間不等式と $k=0$ の場合を用いた)，$[D_e f]_{k-1,\alpha;B_{3/4}} \leq [f]_{k,\alpha;B_1}$，および

$$\left|D_e a^{ij} D_{ij} u\right|_{k-1;\alpha;B_1} \leq [a^{ij}]_{1;B_1}[u]_{k+1,\alpha;B_{3/4}} \leq CK(|u|_{0;B_1} + [f]_{k-1,\alpha;B_1})$$

などより

$$[D_e u]_{k+1,\alpha;B_{1/2}} \leq C(|u|_{0;B_1} + |f|_{k,\alpha;B_1})$$

がわかる．微分する方向 e は任意なので結論を得る． □

4.2 発散型作用素の場合 (弱解に対する Schauder 評価)

翻って次の形の作用素を考える．

$$Lu(x) = \operatorname{div}(A(x)Du(x)) = \sum_{i,j=1}^{n} D_i(a^{ij} D_j u(x)) \quad \text{in } \Omega$$

ただし $A = (a^{ij})_{i,j}$ は強楕円性条件を満たし有界だとする．つまり定数 $\lambda, \Lambda > 0$ があり

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \quad (x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n)$$

および

$$\sum_{i,j} |a^{ij}(x)|^2 \leq \Lambda^2 \quad (x \in \Omega)$$

を満たすとする．

この形の作用素に対しては，弱解が定義できる．

定義 4.7. $u \in H^1(\Omega)$ が $-Lu = f \quad \text{in } \Omega$ の弱解であるとは，

$$\int_\Omega ADu \cdot D\varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \quad (\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega))$$

となることをいう．

また，$-Lu \leq 0 \quad \text{in } \Omega$ であるということを，

$$\int_\Omega ADu \cdot D\varphi \, dx \leq 0 \quad (\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),\ \varphi \geq 0)$$

であることとして定義する．

4.2.1 最大値原理

命題 4.8 (最大値原理)**.** $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界領域とする．$u \in H^1(\Omega)$ が $-Lu \leq 0 \quad \text{in } \Omega$ を満たすならば

$$\sup_\Omega u = \sup_{\partial\Omega} u$$

である．なおここで

$$\sup_{\partial\Omega} u = \inf\left\{k \in \mathbb{R} \mid (u-k)^+ \in H_0^1(\Omega)\right\}.$$

Proof. 定義より任意の $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ に対して

$$\int_\Omega ADu \cdot D\varphi \leq 0$$

が成り立つ．test function として $\varphi = (u - \sup_{\partial\Omega} u)^+ \in H_0^1(\Omega)$ を取る (ほんとに取れる？*12)．楕円型条件より

$$0 \geq \int_\Omega ADu \cdot D\varphi = \int_\Omega AD\varphi \cdot D\varphi \geq \lambda \int_\Omega |D\varphi|^2$$

よって $D\varphi \equiv 0$ を得る．$\varphi \in H_0^1(\Omega)$ より $\varphi \equiv 0$ を得る (Poincaré の不等式)．これは $u \leq \sup_{\partial\Omega} u \quad \text{in } \Omega$ であることを示している． □

4.2.2 Schauder 評価

定理 4.9 (Schauder アプリオリ評価)**.** $a^{ij} \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$ と仮定する．$u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ は

$$-Lu = f \quad \text{in } \Omega$$

の弱解であるとする．ここで

$$f \in L^q(\Omega), \quad q \geq \frac{n}{1-\alpha}$$

ならば，任意の $\Omega' \subset\subset \Omega$ に対して

$$|u|_{1,\alpha;\Omega'} \leq C(|u|_{0;\Omega} + \|f\|_{L^q(\Omega)})$$

が成り立つ．ここで

$$C = C_{n,\alpha,\lambda,\Lambda,K,\Omega,\Omega'}, \quad K = \sum_{i,j} |a^{ij}|_{0,\alpha;\Omega}$$

である．

Proof. 証明は再び blow-up method による．$\Omega = B_1$, $\Omega' = B_{1/2}$ の場合を示すが，定理 4.4 を示した流れと同様に

$$[u]_{1,\alpha;B_{1/2}} \leq \delta[u]_{1,\alpha;B_1} + C_{\delta,n,\alpha,\lambda,\Lambda,K}([u]_{1;B_1} + \|f\|_{L^q(B_1)}) \quad (\forall \delta > 0)$$

を示せばよい．これが成り立たないと仮定する．つまり $\delta_0 > 0$ が存在して，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $a_k^{ij} \in C^{0,\alpha}$, $u_k \in C^{1,\alpha}$, $q_k \geq n/(1-\alpha)$, $f_k \in L^{q_k}$ が存在して

$$-\sum_{i,j} D_i(a_k^{ij} D_j u_k) = f_k \quad \text{in } B_1,$$

---

*12 取れる．$l = \sup_{\partial\Omega} u = \inf\left\{k \in \mathbb{R} \mid (u-k)^+ \in H_0^1(\Omega)\right\}$ とおき，この inf が attain されることを見ればよい．minimizing sequence $\{k_j\}_j$ を取る．つまり $k_j \searrow l$ かつ $(u-k_j)^+ \in H_0^1(\Omega)$．$H_0^1(\Omega)$ の定義より，各 j に対して $\left\{\varphi_i^{(j)}\right\}_i \subset C_0^\infty(\Omega)$ があり $\varphi_i^{(j)} \to (u-k_j)^+ \quad \text{in } H^1(\Omega)$ となる．

$$\left\|(u-l)^+ - \varphi_i^{(j)}\right\|_{H^1} \leq \left\|(u-l)^+ - (u-k_j)^+\right\|_{H^1} + \left\|(u-k_j)^+ - \varphi_i^{(j)}\right\|_{H^1}$$

である一方，

$$\left\|(u-l)^+ - (u-k_j)^+\right\|_{H^1} = \|u-l\|_{L^2(\{l<u<k_j\})} + \mathcal{L}^n(\Omega)(k_j - l) + \|Du\|_{L^2(\{l\leq u<k_j\})} \to 0 \quad (j \to \infty)$$

であることが dominated convergence などによりわかり，したがって $(u-l)^+$ に H^1-収束する $C_0^\infty(\Omega)$ の関数列が取れる．

$$\lambda < A_k := (a_k^{ij})_{i,j}, \quad \sum_{i,j} |a_k^{ij}|^2 \le \Lambda^2, \quad \sum_{i,j} |a_k^{ij}|_{0,\alpha;B_1} \le K,$$

$$[u_k]_{1,\alpha;B_{1/2}} > \delta_0 [u_k]_{1,\alpha;B_1} + k\Big([u_k]_{1;B_1} + \|f_k\|_{L^{q_k}(B_1)}\Big)$$

となる．

$x_k, y_k \in B_{1/2}$ で

$$\frac{\big|D^2 u_k(x_k) - D^2 u_k(y_k)\big|}{|x_k - y_k|^\alpha} \ge \frac{1}{2}[u_k]_{1,\alpha;B_{1/2}}$$

となるものを選んでおく．

$$\rho_k := \frac{|x_k - y_k|}{2}, \quad z_k := \frac{x_k + y_k}{2}$$

とおく．

まず，

$$\frac{1}{2}[u_k]_{1,\alpha;B_{1/2}} \le \frac{|Du_k(x_k) - Du_k(y_k)|}{(2\rho_k)^\alpha} \le \frac{2[u_k]_{1;B_1}}{2^\alpha \rho_k^\alpha} \le 2^{1-\alpha}\frac{[u_k]_{1,\alpha;B_{1/2}}}{k\rho_k^\alpha}$$

より

$$\rho_k \le 2^{2/\alpha - 1} k^{-1/\alpha} \to 0 \quad (k \to \infty)$$

である．部分列を取って $\rho_k \searrow 0$ としてよい．各 k に対して

$$\widetilde{u}_k(x) := \frac{u_k(z_k + \rho_k x) + u_k(z_k - \rho_k x) - 2u_k(z_k)}{\rho_k^{1+\alpha}[u_k]_{1,\alpha;B_1}},$$

$$\widetilde{a}_k^{ij}(x) := a_k^{ij}(z_k + \rho_k x), \quad \widetilde{A}_k(x) := (\widetilde{a}_k^{ij})_{i,j} \quad (x \in B_{1/(2\rho_k)}),$$

$$\xi_k := \frac{y_k - x_k}{2\rho_k}\partial B_1$$

とおく．

定義に従って計算すると

$$\widetilde{u}_k(0) = 0, \quad D\widetilde{u}_k(0) = 0,$$

$$|\widetilde{u}_k(x)| \le C_{n,\alpha}|x|^{1+\alpha}, \quad [\widetilde{u}_k]_{1,\alpha;B_{1/(2\rho_k)}} \le 2^\alpha,$$

$$|D\widetilde{u}_k(\xi_k)| \ge \frac{\delta_0}{2}$$

がわかる．コンパクト埋め込み $C^{1,\alpha} \subset C^1$ より，$\widetilde{u}_k$ のある部分列はある $\widetilde{u} \in C^1(\mathbb{R}^n)$ にコンパクト集合上 C^1-収束する．

再び部分列を取って $\xi_k \to \xi$ としてよい．すると

$$\widetilde{u}(0) = 0, \quad D\widetilde{u}(0) = 0,$$

$$|\widetilde{u}(x)| \le C_{n,\alpha}|x|^{1+\alpha},$$

$$|D\widetilde{u}(\xi)| \ge \frac{\delta_0}{2}$$

が成り立つ．

また

$$|\widetilde{a}_k^{ij}|_{0;B_{1/(2\rho_k)}} \le K, \quad [\widetilde{a}_k^{ij}]_{0,\alpha;B_{1/(2\rho_k)}} \le [a_k^{ij}]_{0,\alpha;B_1}\rho_k^\alpha \le K\rho_k^\alpha \to 0 \quad (k \to \infty)$$

より，$\widetilde{a}_k^{ij}$ のある部分列は定数 $\widetilde{a}^{ij}$ にコンパクト集合上一様収束する．

$\widetilde{a}_k^{ij}$, $\widetilde{u}_k$ たちの満たす方程式を求めよう．$\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ を固定する．十分大きな k に対して $\operatorname{supp}\varphi \subset B_{1/(2\rho_k)}$ である．そのような k に対して

$$\int_{\mathbb{R}^n} D\varphi \cdot \widetilde{A}_k D\widetilde{u}_k \, dx = \int D\varphi(x) \cdot A_k(z_k + \rho_k x) \frac{Du_k(z_k + \rho_k x) - Du_k(z_k - \rho_k x)}{\rho_k^\alpha [u_k]_{1,\alpha;B_1}} \, dx =: \mathrm{I} - \mathrm{II} \tag{4.11}$$

と分ける．ここで

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &\coloneqq \frac{1}{\rho_k^\alpha [u_k]_{1,\alpha;B_1}} \int D\varphi(x) \cdot A_k(z_k + \rho_k x) Du_k(z_k + \rho_k x) \, dx \\
&= \frac{1}{\rho_k^\alpha [u_k]_{1,\alpha;B_1}} \int D_y \varphi(\rho_k^{-1}(y - z_k)) \cdot A_k(y) Du_k(y) \, \rho_k^{-n+1} \, dy \\
&= \frac{\rho_k^{-n+1-\alpha}}{[u_k]_{1,\alpha;B_1}} \int \varphi(\rho_k^{-1}(y - z_k)) f_k(y) \, dy \\
&= \frac{\rho_k^{1-\alpha}}{[u_k]_{1,\alpha;B_1}} \int \varphi(x) f_k(z_k + \rho_k x) \, dx,
\end{aligned}$$

$$\mathrm{II} \coloneqq \frac{1}{\rho_k^\alpha [u_k]_{1,\alpha;B_1}} \int D\varphi(x) \cdot A_k(z_k + \rho_k x) Du_k(z_k - \rho_k x) \, dx =: \mathrm{II}_1 + \mathrm{II}_2,$$

と II を更に分け，

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}_1 &\coloneqq \frac{1}{\rho_k^\alpha [u_k]_{1,\alpha;B_1}} \int D\varphi(x) \cdot (A_k(z_k + \rho_k x) - A_k(z_k - \rho_k x)) Du_k(z_k - \rho_k x) \, dx, \\
\mathrm{II}_2 &\coloneqq \frac{1}{\rho_k^\alpha [u_k]_{1,\alpha;B_1}} \int D\varphi(x) \cdot A_k(z_k - \rho_k x) Du_k(z_k - \rho_k x) \, dx \\
&= \frac{\rho_k^{1-\alpha}}{[u_k]_{1,\alpha;B_1}} \int \varphi(x) f_k(z_k - \rho_k x) \, dx
\end{aligned}$$

とおく (II_2 の計算は I のそれと同様)．

以下，I, II_1, II_2 の各項が $k \to \infty$ で 0 に収束することを示す (したがって (4.11) の左辺は 0 に収束する)．

まず Hölder の不等式などより ($q_k^{-1} + q_k'^{-1} = 1$ として)

$$\begin{aligned}
|\mathrm{I}| &\le \frac{\rho_k^{1-\alpha}}{[u_k]_{1,\alpha;B_1}} \left| \int \varphi(x) f_k(z_k + \rho_k x) \, dx \right| \\
&\le \frac{\rho_k^{1-\alpha}}{[u_k]_{1,\alpha;B_1}} \|\varphi\|_{q_k'} \left(\int |f_k(z_k + \rho_k x)|^{q_k} \, dx \right)^{1/q_k} \\
&\le \frac{\rho_k^{1-\alpha}}{[u_k]_{1,\alpha;B_1}} \mathcal{L}^n(\operatorname{supp}\varphi)^{1/q_k'} \|\varphi\|_\infty \|f\|_{q_k} \rho_k^{-n/q_k} \\
&\le \max\{\mathcal{L}^n(\operatorname{supp}\varphi),\, 1\} \cdot \|\varphi\|_\infty \frac{\|f\|_{q_k}}{[u_k]_{1,\alpha;B_1}} \rho_k^{1-\alpha-n/q_k} \\
&\le C(\varphi) \frac{\rho_k^{1-\alpha-n/q_k}}{k} \to 0 \quad (k \to \infty)
\end{aligned}$$

である．なお仮定より $1-\alpha-n/q_k \geq 0$ である．同様に $\mathrm{I\!I}_2 \to 0$ がわかる．

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{I\!I}_1| &\leq \frac{1}{\rho_k^\alpha [u_k]_{1,\alpha;B_1}} \sum_{i,j} \left| \int (a^{ij}(z_k+\rho_k x) - a^{ij}(z_k-\rho_k x)) D_i\varphi(x) D_j u_k(z_k-\rho_k x)\, dx \right| \\
&\leq \frac{1}{\rho_k^\alpha [u_k]_{1,\alpha;B_1}} \sum_{i,j} \int [a^{ij}]_{0,\alpha;B_1} (2\rho_k |x|)^\alpha |D_i\varphi(x)| [u]_{1;B_1}\, dx \\
&\leq C(\varphi) K \frac{[u_k]_{1;B_1}}{[u_k]_{1,\alpha;B_1}} \\
&\leq C(\varphi) K \frac{1}{k} \to 0 \quad (k \to \infty).
\end{aligned}
$$

以上より (4.11) 式で $k \to \infty$ とすると，

$$
\int D\varphi \cdot \widetilde{A} D\widetilde{u}\, dx = 0
$$

を得る．つまり $\widetilde{u}$ は $\mathbb{R}^n$ 上の定数係数楕円型方程式の解になっており，変数変換により全空間上の調和関数に移る．先に示した $\widetilde{u}$ にかんする growth condition

$$
|\widetilde{u}(x)| \leq C|x|^{1+\alpha}
$$

より $\widetilde{u}$ はたかだか 1 次式である．一方 $\widetilde{u}(0)=0,\ D\widetilde{u}(0)=0$ より $\widetilde{u} \equiv 0$ となる．これは $|D\widetilde{u}(\xi)| \geq \delta_0/2$ に矛盾する． □

定理 4.10. $u \in C^{k+1,\alpha} \cap L^\infty(\Omega)$ を

$$
-Lu = f \quad \text{in } \Omega
$$

の古典解とする．ここでもし

$$
f \in C^{k-1,\alpha}(\overline{\Omega}), \quad a_{ij} \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}), \quad k \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ 0<\alpha<1
$$

ならば，任意の $\Omega' \subset\subset \Omega$ に対して

$$
|u|_{k+1,\alpha;\Omega'} \leq C(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + |f|_{k-1,\alpha;\Omega})
$$

が成り立つ．ここで

$$
C = C_{n,k,\alpha,\lambda,\Lambda,K,\Omega,\Omega'}, \quad K = \sum_{i,j} |a^{ij}|_{k,\alpha;\Omega}
$$

Proof. 帰納法による． □

5 De Giorgi–Nash 評価と Hilbert の第 19 問題

本節では De Girogi–Nash 評価とその応用として Hilbert の第 19 問題を取り扱う．$w \in H^1(\Omega)$ に対してエネルギー

$$
\mathscr{E}(w) = \frac{1}{2} \int_\Omega |Dw|^2\, dx
$$

を考えると，エネルギーの極小点として Laplace 方程式 $-\Delta u = 0$ の解が得られ，正則性の議論により u は C^∞ になるのだった．

そこでエネルギー汎関数を一般化して

$$I(w) = \int_\Omega L(Dw)\,dx$$

という形のものを考えてみる．ここで $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は滑らかかつ一様凸だとする．このときに I の極小点 u は滑らかか？ というのが Hilbert の第 19 問題である．

Hilbert の第 19 問題の解決に向けた道筋について簡単に (heuristic にではあるが) 説明しておきたい．極小点 u が満たす Euler–Lagrange 方程式は，形式的に計算すると

$$\operatorname{div}(DL(Du)) = \sum_{i=1}^n D_i(D_iL(Du)) = 0$$

となる．この方程式は今までとは違って非線形問題である．上式を (形式的に)k 方向に微分してみると

$$\sum_{i,j} D_i(D_{ij}L(Du)D_{jk}u) = 0,$$

つまり $a^{ij}(x) = D_{ij}L(Du(x))$, $v = D_ku$ とおくと $\sum_{i,j} D_i(a^{ij}D_jv) = 0$ という発散型方程式が得られる．

ここで 1 つ問題が生じる．この Euler–Lagrange 方程式の弱解 u は $H^1(\Omega)$ 内に存在が保証されるものであり，それよりも強い regularity が示されていない状況では Schauder 評価が使えないのである．実際，なんの仮定も課さなければ $a^{ij}(x) = D_{ij}L(Du(x))$ の Hölder 連続性は言えない．一方で，何らかの方法で u が $C^{1,\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ であることが示されれば，$a^{ij} \in C^{0,\alpha}$ が言え，Schauder 評価より $u \in C^{2,\alpha}$ が言える．これを繰り返すことで

$$u \in C^{1,\alpha} \Rightarrow a^{ij} \in C^{0,\alpha} \Rightarrow u \in C^{2,\alpha} \Rightarrow a^{ij} \in C^{1,\alpha} \Rightarrow u \in C^{3,\alpha} \Rightarrow \cdots \Rightarrow u \in C^\infty$$

となり Hilbert の第 19 問題は解ける (このような議論を bootstrap argument という)．そこで以下，当分の間は「係数の連続性を課さない線形方程式において解の Hölder 連続性を示すこと」が問題となる．

5.1 De Giorgi–Nash 評価

次の発散型線形微分作用素

$$Lu(x) = \operatorname{div}(A(x)Du(x)) = \sum_{i,j=1}^n D_i(a^{ij}(x)D_ju(x)) \quad \text{in } \Omega$$

を考える．

ただし，係数 a^{ij} は $L^\infty(\Omega)$ の関数であり，$A = (a^{ij})_{i,j}$ は一様楕円性の条件を満たすとする．つまり，定数 $\lambda, \Lambda > 0$ があり，次が成り立つと仮定する．

$$\lambda|\xi|^2 \le \sum_{i,j} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \quad (\forall x \in \Omega,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n),$$

$$\sum_{i,j} \left|a^{ij}(x)\right|^2 \le \Lambda^2 \quad (\forall x \in \Omega).$$

我々の目標は，次の定理である：

定理 5.1 (De Giorgi–Nash)**.** Ω は有界領域で，$v \in H^1(\Omega)$ は $-Lv = 0$ weakly in Ω を満たすとする．このとき定数 $\alpha = \alpha_{n,\lambda,\Lambda} \in (0,1)$ があり，$v \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ となる．さらに任意の $\Omega' \subset\subset \Omega$ に対して

$$|v|_{0,\alpha;\Omega'} \leq C_{n,\lambda,\Lambda,\Omega,\Omega'} \|v\|_{L^2}$$

となる．

以下，次の 2 ステップに分けて定理を証明する：

1. v の L^∞ ノルムを L^2 ノルムで上から抑える (解の先見的局所有界性).
2. v の oscillation decay を示すことで，Hölder 連続性を示す．

なお，定理 5.1 の結果は 1950 年代後半に De Giorgi と Nash によって独立に得られたものであるが，ここでは De Giorgi の手法に倣っている．

covering argument により $\Omega = B_1$, $\Omega = B_{1/2}$ としてよい．

5.1.1 L^2-L^∞ 評価

first step として「L^∞ ノルムを L^2 ノルムで」評価する．まず 2 つの補題を示す．

補題 5.2 (energy inequality)**.** $v \in H^1(B_1)$ が

$$v \geq 0 \quad \text{and} \quad -Lv \leq 0 \quad \text{in } B_1$$

を満たすと仮定する．このとき，任意の $\varphi \in C_c^\infty(B_1)$ に対して

$$\int_{B_1} |D(\varphi v)|^2 \, dx \leq C_{n,\lambda,\Lambda} \|D\varphi\|^2_{L^\infty(B_1)} \int_{\operatorname{supp}\varphi} v^2 \, dx$$

が成り立つ．

Proof. $\eta \coloneqq \varphi^2 v$ は $\eta \in H_0^1(\Omega)$ かつ $\eta \geq 0$ を満たすので $-Lv \leq 0$ の test function として使える：

$$\int_{B_1} D(\varphi^2 v) \cdot ADv \leq 0$$

この左辺を変形するのだが，その際

$$D(\varphi^2 v) = \varphi D(\varphi v) + \varphi v D\varphi, \quad D(\varphi v) = \varphi Dv + vD\varphi$$

に注意する．すると

$$\begin{aligned}
0 &\geq \int_{B_1} D(\varphi^2 v) \cdot ADv \\
&= \int_{B_1} \varphi D(\varphi v) \cdot ADv + \int_{B_1} \varphi v D\varphi \cdot ADv \\
&= \int_{B_1} D(\varphi v) \cdot AD(\varphi v) - \int_{B_1} vD(\varphi v) \cdot AD\varphi + \int_{B_1} \varphi v D\varphi \cdot ADv \\
&= \int_{B_1} D(\varphi v) \cdot AD(\varphi v) - \int_{B_1} vD(\varphi v) \cdot (A - {}^tA)D\varphi + \int_{B_1} \left(\varphi v D\varphi \cdot ADv - vD(\varphi v) \cdot {}^tAD\varphi\right) \\
&= \int_{B_1} D(\varphi v) \cdot AD(\varphi v) - \int_{B_1} vD(\varphi v) \cdot (A - {}^tA)D\varphi - \int_{B_1} v^2 D\varphi \cdot AD\varphi \\
&=: \mathrm{I} - \mathrm{II} - \mathrm{III}
\end{aligned}$$

を得る．第 2 項について Hölder の不等式などより

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} &= \int_{B_1} vD(\varphi v)\cdot(A-{}^tA)D\varphi \\
&\le \left(\int_{B_1} \left|v(A-{}^tA)D\varphi\right|^2\right)^{1/2}\left(\int_{B_1} |D(\varphi v)|^2\right)^{1/2} \\
&\le \left(\int_{B_1} 4\Lambda^2|vD\varphi|^2\right)^{1/2}\left(\int_{B_1} \frac{1}{\lambda}D(\varphi v)\cdot AD(\varphi v)\right)^{1/2} \\
&= \left(\frac{4\Lambda^2}{\lambda}\int_{B_1} |vD\varphi|^2\right)^{1/2}\left(\int_{B_1} D(\varphi v)\cdot AD(\varphi v)\right)^{1/2} \\
&\le \frac{2\Lambda^2}{\lambda}\int_{B_1} |vD\varphi|^2 + \frac{1}{2}\int_{B_1} D(\varphi v)\cdot AD(\varphi v)
\end{aligned}$$

となるので，

$$0 \ge \mathrm{I}-\mathrm{II}-\mathrm{III} \ge \frac{1}{2}\int_{B_1} D(\varphi v)\cdot AD(\varphi v) - \frac{2\Lambda^2}{\lambda}\int_{B_1}|vD\varphi|^2 - \int_{B_1} v^2 D\varphi\cdot AD\varphi$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned}
\int_{B_1}|D(\varphi v)|^2 &\le \frac{1}{\lambda}\int_{B_1} D(\varphi v)\cdot AD(\varphi v) \\
&\le \frac{2}{\lambda}\left(\frac{2\Lambda^2}{\lambda}\int_{B_1}|vD\varphi|^2 + \int_{B_1} v^2 D\varphi\cdot AD\varphi\right) \\
&\le \left(\frac{4\Lambda^2}{\lambda^2}+\frac{2\Lambda}{\lambda}\right)\|D\varphi\|_\infty^2 \int_{\operatorname{supp}\varphi} v^2
\end{aligned}$$

を得る． □

補題 5.3. $v\in H^1(\Omega),\ -Lv\le 0 \quad \text{in } B_1$ とする．このとき

$$-Lv^+ \le 0 \quad \text{in } B_1$$

である．

Proof. まず次を示す．

■claim　$F\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を滑らかかつ単調非減少な凸関数で $F'\in L^\infty(\mathbb{R}),\ F''\in L^\infty(\mathbb{R}),\ F(0)=0$ を満たすものとする．このとき $F(v)\in H^1(B_1)$ かつ $-L(F(v))\le 0$ である．

Proof of claim. $F(v)\in H^1(B_1)$ かつ $D(F(v))=F'(v)Dv$ であることはよい．$\eta\in C_c^\infty(B_1),\ \eta\ge 0$ を 1 つ固定する．このとき

$$\begin{aligned}
\int_{B_1} D\eta\cdot AD(F(v)) &= \int_{B_1} F'(v)D\eta\cdot ADv \\
&= \int_{B_1} D(F'(v)\eta)\cdot ADv - \int_{B_1}\eta F''(v)Dv\cdot ADv
\end{aligned}$$

である．

いま $F'(v)\eta \in H^1_0(B_1)$ かつ $F'(v)\eta \geq 0$ である ($F' \geq 0$ に注意せよ) から，$-Lv \geq 0$ の定義より

$$\int_{B_1} D(F'(v)) \cdot ADv \leq 0$$

である．また，$F'' \geq 0$ かつ $\eta \geq 0$ より

$$\int_{B_1} \eta F''(v) Dv \cdot ADv \geq \lambda \int_{B_1} \eta F''(v) |Dv|^2 \geq 0.$$

以上より

$$\int_{B_1} D\eta \cdot AD(F(v)) \leq 0$$

を得る．(claim の証明終わり) □

さて，結論を示す．$F(t) = \max\{t, 0\}$，$F_\varepsilon(t) = \max\left\{te^{-t/\varepsilon}, 0\right\}$ とおく．
$F_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$，$F_\varepsilon(0) = 0$ であり，

$$F'_\varepsilon(t) = \begin{cases} (1+\varepsilon/t)e^{-\varepsilon/t} & (t > 0) \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases}, \quad F''_\varepsilon(t) = \begin{cases} (\varepsilon/t^3)e^{-\varepsilon/t} & (t > 0) \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases}$$

と計算される．とくに $0 \leq F'_\varepsilon \leq 1$，$F''_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R})$，$F''_\varepsilon \geq 0$ がわかる．
さて $\eta \in C^\infty_c(B_1)$ を固定する．各 F_ε に対しては claim の結果が使えて

$$\int_{B_1} F'_\varepsilon(v) D\eta \cdot ADv = \int_{B_1} D\eta \cdot AD(F_\varepsilon(v)) \leq 0 \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

を得る．ここで $F'_\varepsilon(v) D\eta \cdot ADv \to D\eta \cdot ADv^+$ a.e. in B_1 であり，

$$|F'_\varepsilon(v) D\eta \cdot ADv| \leq |D\eta \cdot ADv| \in L^1(B_1)$$

より dominated convergence が使えて

$$\int_{B_1} D\eta \cdot ADv^+ \leq 0$$

を得る． □

次の命題が first step を証明する．

命題 5.4. 定数 $\delta = \delta_{n,\lambda,\Lambda}$ が存在して次が成り立つ：$v \in H^1(B_1)$ が

$$-Lv \leq 0 \quad \text{in } B_1, \qquad \int_{B_1} (v^+)^2 \, dx \leq \delta$$

を満たせば，$v \leq 1 \quad \text{in } B_{1/2}$ が成り立つ．

Proof. $k \geq 0$ に対して

$$\widetilde{B}_k := \left\{ |x| \leq \frac{1}{2} + 2^{-k-1} \right\},$$

$$v_k := (v - c_k)^+, \quad c_k := 1 - 2^{-k}$$

とおく．

$\varphi_k \in C_c^\infty(B_1)$ で

$$0 \le \varphi_k \le 1, \quad \varphi_k = \begin{cases} 1 & (\text{in } \widetilde{B}_k) \\ 0 & (\text{in } B_1 \setminus \widetilde{B}_k) \end{cases}$$

$$|D\varphi_k| \le C2^k, \quad C = C_n$$

となるものを取っておく．

$$V_k \coloneqq \int_{B_1} \varphi_k^2 v_k^2$$

とおく．

Sobolev の不等式および energy inequality(補題 5.2) より，$p = \begin{cases} 2^* = 2n/(n-2) & (n \ge 3) \\ 4 & (n = 1, 2) \end{cases}$ として[*13]

$$\begin{aligned}
\left(\int_{B_1} (\varphi_{k+1} v_{k+1})^p \right)^{2/p} &\le C \int_{B_1} |D(\varphi_{k+1} v_{k+1})|^2 \\
&\le C2^{2k} \int_{\widetilde{B}_k} v_{k+1}^2 \\
&\le C2^{2k} \int_{B_1} (\varphi_k v_k)^2 \\
&= C2^{2k} V_k
\end{aligned}$$

となる．一方で $\gamma \coloneqq 1 - 2/p = \begin{cases} 2/n & (n \ge 3) \\ 1/2 & (n = 1, 2) \end{cases}$ とおくと Hölder の不等式より ($(p/2)^{-1} + (1/\gamma)^{-1} = 1$ に注意して)

$$V_{k+1} = \int_{B_1} \varphi_{k+1}^2 v_{k+1}^2 \cdot \mathbb{1}_{\{\varphi_{k+1} v_{k+1} > 0\}} \le \left(\int_{B_1} (\varphi_{k+1} v_{k+1})^p \right)^{2/p} |\{\varphi_{k+1} v_{k+1} > 0\}|^\gamma$$

である．さらに Chebyshev の不等式より

$$|\{\varphi_{k+1} v_{k+1} > 0\}| \le \left| \{\varphi_k v_k > 2^{-k-1}\} \right| = \left| \{\varphi_k^2 v_k^2 > 2^{-2k-2}\} \right| \le 2^{2(k+1)} \int_{B_1} \varphi_k^2 v_k^2 = 2^{2(k+1)} V_k$$

である[*14]．したがって

$$\begin{aligned}
V_{k+1} &\le \left(\int_{B_1} (\varphi_{k+1} v_{k+1})^p \right)^{2/p} |\{\varphi_{k+1} v_{k+1} > 0\}|^\gamma \\
&\le C2^{2k} V_k (2^{2(k+1)} V_k)^\gamma \\
&\le C^{k+1} V_k^{1+\gamma}
\end{aligned}$$

という関係を得る ($C = C_{n,\lambda,\Lambda}$)．これを繰り返し用いて

$$V_k \le C^{k+(k-1)(1+\gamma)+\cdots+1\cdot(1+\gamma)^{k-1}} V_0^{(1+\gamma)^k} = C^{((1+\gamma)^{k+1} - (1+\gamma) - \gamma k)/\gamma^2} V_0^{(1+\gamma)^k}$$

[*13] $\Omega \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n \le 2}$ が有界開集合のとき，$u \in H_0^1(\Omega)$ に対して

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \le C_{n, \operatorname{diam}\Omega} \|Du\|_{L^2(\Omega)}$$

が成り立つ．証明は Hölder や Jensen の不等式を用いればできる．

[*14] $\varphi_{k+1} v_{k+1} > 0 \Rightarrow x \in B_k$ and $v - (1 - 2^{-k-1}) > 0 \Rightarrow \varphi_k(x) = 1$ and $v_k = (v - 2^{-k})^+ > 2^{-k-1}$.

となるので，例えば $V_0 = \int_{B_1}(v^+)^2 \leq 2^{-1}C^{-(1+\gamma)/\gamma^2} =: \delta$ ならば $V_k \to 0$ $(k \to \infty)$ となる．これは $\int_{B_{1/2}}((v-1)^+)^2 = 0$ であることを示しており，よって $v \leq 1 \quad \text{in } B_{1/2}$ を得る． □

次の命題が我々の目標であった：

命題 5.5 (from L^2 to L^∞)**.** $v \in H^1(B_1)$, $-Lv \leq 0 \quad \text{in } B_1$ とする．このとき

$$\|v^+\|_{L^\infty(B_{1/2})} \leq C_{n,\lambda,\Lambda}\|v^+\|_{L^2(B_1)}.$$

Proof. $\widetilde{v} = \delta^{1/2}v/\|v^+\|_{L^2(B_1)}$ とすると $-L\widetilde{v} \leq 0$ かつ $\int_{B_1}(\widetilde{v}^+)^2 \leq \delta$ なので, 先の命題より $\widetilde{v}^+ \leq 1 \quad \text{in } B_{1/2}$, つまり $v^+ \leq \delta^{-1/2}\|v^+\|_{L^2(B_1)}$ を得る． □

系 5.6. $v \in H^1(B_1)$, $-Lv = 0 \quad \text{in } B_1$ ならば

$$\|v\|_{L^\infty(B_{1/2})} \leq C_{n,\lambda,\Lambda}\|v\|_{L^2(B_1)}.$$

5.1.2 oscillation decay と L^∞-$C^{0,\alpha}$ 評価

次に $-Lu = 0$ の解の Hölder 連続性を示す．oscillation decay を示せばよい．まず補題から．

補題 5.7. 任意の $w \in H^1(B_1)$ に対して

$$|A|^2|D|^2 \leq C_n|E|\int_{B_1}|Dw|^2\,dx$$

が成り立つ．なおここで

$$A \coloneqq \{w \leq 0\} \cap B_1, \quad D \coloneqq \{w \geq 1/2\} \cap B_1, \quad E \coloneqq \{0 < w < 1/2\} \cap B_1.$$

Proof. $\overline{w} \coloneqq w^+ - (w-1/2)^- = \begin{cases} w & \text{in } E \\ 0 & \text{in } A \\ 1/2 & \text{in } D \end{cases}$ とおくと $\overline{w} \in H^1(B_1)$ であり，$D\overline{w} = 0 \quad \text{on } B_1 \setminus E$ である．また $\overline{w}_{B_1} \coloneqq \frac{1}{|B_1|}\int_{B_1}\overline{w}$ とおく．

$$\begin{aligned}
|A||D| &= 2\int_A dx\int_D dy\,|\overline{w}(x) - \overline{w}(y)| \\
&\leq 2\int_{B_1} dx\int_{B_1} dy\,(|\overline{w}(x) - \overline{w}_{B_1}| + |\overline{w}(y) - \overline{w}_{B_1}|) \\
&= 2\left(\int_{B_1}\omega_n|\overline{w}(x) - \overline{w}_{B_1}|\,dx + \int_{B_1}\omega_n|\overline{w}(y) - \overline{w}_{B_1}|\,dy\right) \\
&\leq C\int_{B_1}|\overline{w}(x) - \overline{w}_{B_1}|\,dx \\
&\leq C\int_E|D\overline{w}(x)|\,dx \\
&\leq C\left(\int_{B_1}|Dw|^2\right)^{1/2}|E|^{1/2}
\end{aligned}$$

より結論を得る．なお途中で Poincaré の不等式[*15]を用いた． □

補題 5.8. $\mu > 0$ とする．このとき定数 $\gamma = \gamma_{n,\lambda,\Lambda,\mu} > 0$ が存在して次が成り立つ：$v \in H^1(B_2)$ が $v \le 1$, $-Lv \le 0 \quad \text{in } B_2$ および

$$|\{v \le 0\} \cap B_1| \ge \mu$$

を満たすならば

$$\sup_{B_{1/2}} v \le 1 - \gamma$$

である．

Proof. $w_k \coloneqq 2^k\bigl(v - (1-2^{-k})\bigr)^+ \in H^1(B_2)$ とおく．このとき

$$w_k \le 1 \quad \text{and} \quad -Lw_k \le 0 \quad \text{in } B_2$$

である (補題 5.3)．さらに

$$\int_{B_1} |Dw_k|^2 \le C_0(n, \lambda, \Lambda)$$

が成り立つ．実際，$\varphi \in C_c^\infty(B_2)$ であって $0 \le \varphi \le 1 \quad \text{in } B_2$ かつ $\varphi = 1 \quad \text{in } B_1$ を満たすものを固定すると，energy inequality (補題 5.2) より

$$\int_{B_1} |Dw_k|^2 \le \int_{B_2} |D(\varphi w_k)|^2 \le C\|D\varphi\|_\infty^\infty \int_{B_2} w_k^2 \le 2^n \omega_n C \|D\varphi\|_\infty \le C_{n,\lambda,\Lambda}.$$

さらに，

$$|\{w_k \le 0\} \cap B_1| = \left|\left\{v \le 1 - 2^{-k}\right\} \cap B_1\right| \ge |\{v \le 0\} \cap B_1| \ge \mu$$

であることに注意する．

■claim　任意の $\delta > 0$ に対して $k_0 = k_0(n, \lambda, \Lambda, \mu, \delta) \in \mathbb{N}_0$ があり $\int_{B_1} w_{k_0}^2 \le \delta^2$ となる．

Proof of claim. 背理法で示す．任意の $k \in \mathbb{N}_0$ で $\int_{B_1} w_k^2 > \delta$ だと仮定する．このとき

$$|\{w_k \ge 1/2\} \cap B_1| \ge |\{w_{k+2} \ge 0\} \cap B_1| \ge \int_{B_1} w_{k+1}^2 \ge \delta^2$$

なので，補題 5.7 より

$$|\{0 < w_k < 1/2\} \cap B_1| \ge \frac{\mu\delta^2}{CC_0} \eqqcolon \beta = \beta_{n,\lambda,\Lambda,\delta,\mu}$$

となる．一方で集合 $\{0 < w_k < 1/2\} \cap B_1$ $(k = 0, 1, \ldots)$ は disjoint であるから，

$$\infty > |B_1| \ge \sum_{k=0}^\infty |\{0 < w_k < 1/2\} \cap B_1| \ge \sum_{k=0}^\infty \beta = \infty$$

となり矛盾．(claim の証明終わり) □

[*15] $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界 Lipschitz 領域，$1 \le p \le \infty$ とする．このとき任意の $u \in W^{1,p}(\Omega)$ に対して

$$\|u - u_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \le C_{n,p,\Omega} \|Du\|_{L^p(\Omega)}, \quad \text{where } u_\Omega = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\,dx$$

が成り立つ．証明は [Eva, Section 5.8.1] を見よ．

さて，命題 5.5 より任意の $v \in H^1(B_1)$, $-Lv \le 0$ に対して $\|v^+\|_{L^\infty(B_{1/2})} \le C_1(n,\lambda,\Lambda)\|v^+\|_{L^2(B_1)}$ が成り立つのだった．

claim において $\delta = \delta_{n,\lambda,\Lambda} = (2C_1)^{-1}$ とおくと

$$\|w_{k_0}\|_{L^\infty(B_{1/2})} \le C_1\|w_{k_0}\|_{L^2(B_1)} \le C_1\delta = \frac{1}{2}, \quad k_0 = k_0(n,\lambda,\Lambda,\mu)$$

となる．これはつまり $v \le 1 - 2^{-k_0-1} =: 1-\gamma \quad \text{in } B_{1/2}$ ということである． □

以上の準備の下 oscillation decay を示す：

命題 5.9 (oscillation decay)**.** $v \in H^1(B_2)$, $-Lv = 0 \quad \text{in } B_2$ とする．このとき

$$\operatorname*{osc}_{B_{1/2}} v \le (1-\theta)\operatorname*{osc}_{B_2} v, \quad \theta = \theta_{n,\lambda,\Lambda} \in (0,1)$$

が成り立つ．

Proof.

$$w(x) := \frac{2}{\operatorname{osc}_{B_2} v}\left(v(x) - \frac{\sup_{B_2} v + \inf_{B_2} v}{2}\right)$$

とおく．$-1 \le w \le 1 \quad \text{in } B_2$ であることに注意する．

対称性より $|\{w \le 0\} \cap B_1| \ge |B_1|/2$ が成り立つと仮定してよい (もし $|\{w \ge 0\} \cap B_1| \ge |B_1|/2$ ならば $-v$ を考えればよい)．すると

$$w \le 1,\ -Lw \le 0 \quad \text{in } B_2, \quad |\{w \le 0\} \cap B_1| \ge |B_1|/2 =: \mu$$

なので，補題 5.8 より，$\gamma = \gamma_{n,\lambda,\Lambda}$ があり

$$\sup_{B_{1/2}} w \le 1 - \gamma$$

つまり $\operatorname{osc}_{B_{1/2}} v = (1-\gamma/2)\operatorname{osc}_{B_2} v$ となる． □

系 5.10 (Hölder continuity)**.** $v \in H^1(B_1)$, $-Lv = 0 \quad \text{in } B_1$ ならば，定数 $\alpha = \alpha_{n,\lambda,\Lambda} \in (0,1)$ が存在して

$$|v|_{0,\alpha;B_{1/2}} \le C\|v\|_{L^\infty(B_1)}, \quad C = C_{n,\lambda,\Lambda}$$

となる．

Proof. "oscillation decay $\Longrightarrow$ Hölder 連続性" を証明する典型的な議論による．系 3.22 と同様だが，今一度復習しておく．

次を示せばよい：

$$|v(x) - v(0)| \le C\|v\|_{L^\infty(B_1)}|x|^\alpha \quad (\forall x \in B_{1/2})$$

$x \in B_{1/2}$ に対して $2^{-k-1} \le |x| < 2^{-k}$ となる $k \in \mathbb{N}$ を取る．oscillation decay を繰り返し用いて

$$\begin{aligned} |u(x) - u(0)| &\le \operatorname*{osc}_{B_{2^{-k}}} v \le (1-\theta)\operatorname*{osc}_{B_{2^{-k+1}}} v \le \cdots \le (1-\theta)^k \operatorname*{osc}_{B_1} v \\ &\le (1-\theta)^k \cdot 2\|v\|_{L^\infty(B_1)} \end{aligned}$$

となるので，$\alpha = -\log_2(1-\theta)$ とおくと，

$$|u(x) - u(0)| \le 2^{1+\alpha}\|v\|_{L^\infty(B_1)}2^{-(k+1)\alpha} \le 2^{1+\alpha}\|v\|_{L^\infty(B_1)}|x|^\alpha$$

を得る． □

命題 5.5 と系 5.10 を組み合わせることで定理 5.1 の証明が完了する．

5.2 Hilbert の第 19 問題

Hilbert の第 19 問題について考えよう．設定は次のとおりであった：$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界領域とする．

$$L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

を滑らかな一様凸関数，つまり $L \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ であって定数 $0 < \lambda \leq \Lambda$ が存在して

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j} D_{ij}L(p)\xi_i\xi_j \quad (\forall p, \xi \in \mathbb{R}^n),$$

$$\sum_{i,j} |D_{ij}L(p)|^2 \leq \Lambda^2 \quad (\forall p \in \mathbb{R}^n)$$

が成り立つものとする．このとき L を Lagrangean に持つ作用汎関数 I を

$$I\colon H^1(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad I(w) \coloneqq \int_\Omega L(Dw(x))\,dx$$

で定める．与えられた境界条件のもとで I を最小化せよ，という変分問題を考える．

なお以下の補題より $I(w)$ は有限値を取り well-defined である．

補題 5.11 (structual inequalities)**.** $p, q \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$L(p) + DL(p)\cdot q + \frac{\lambda}{2}|q|^2 \leq L(p+q) \leq L(p) + DL(p)\cdot q + \frac{\Lambda}{2}|q|^2, \tag{5.1}$$

とくに

$$c_1|p|^2 - c_2 \leq L(p) \leq c_3|p|^2 + c_4. \tag{5.2}$$

ただし c_1, c_2, c_3, c_4 $(c_1, c_3 > 0)$ は $\lambda, \Lambda, L(0), DL(0)$ のみに依存する定数．

さらに $t \in [0,1]$ に対して

$$L(tp + (1-t)q) + \lambda|p-q|^2 t(1-t) \leq tL(p) + (1-t)L(q) \tag{5.3}$$

である．よって L は (狭義) 凸である．

Proof. (5.1) 式は L の Taylor 展開を考えれば明らか．$p = 0$ とすれば (5.2) が出る．(5.1) 式の左辺で p, q を適当に取りなおせば

$$L(tp + (1-t)q) + (1-t)DL(tp + (1-t)q)\cdot(p-q) + \frac{\lambda}{2}(1-t)^2|p-q|^2 \leq L(p),$$

$$L(tp + (1-t)q) - tDL(tp + (1-t)q)\cdot(p-q) + \frac{\lambda}{2}t^2|p-q|^2 \leq L(q)$$

を得る．上辺に t を，下辺に $(1-t)$ をかけて足すと (5.3) 式を得る． □

直接法で I の minimizer の一意存在を示す．

定理 5.12. 任意の $g \in H^1(\Omega)$ に対して次を満たす $u \in H^1(\Omega)$ がただ 1 つ存在する．

$$u - g \in H_0^1(\Omega),$$

$$I(u) = \min\left\{ I(w) \mid w \in H^1(\Omega),\ w - g \in H^1(\Omega) \right\}.$$

Proof. 存在性は補題 3.4 から従う．

一意性を示す．$u, \widetilde{u}$ を 2 つの minimizer とし $I(u) = I(\widetilde{u}) = I_*$ とする．このとき $w = (u + \widetilde{u})/2$ とおけば $w - g \in H_0^1(\Omega)$ であるから $I_* \le I(w)$ である．一方で (5.3) 式より

$$I(w) + \frac{\lambda}{4}\int_\Omega |Du - D\widetilde{u}|^2\,dx \le tI_* + (1-t)I_* = I_* \le I(w)$$

である．したがって $D(u - \widetilde{u}) = 0$ a.e. in Ω．$u - \widetilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ なので Poincaré の不等式より $u = \widetilde{u}$ を得る． □

次に minimizer u が満たす Euler–Lagrange 方程式を導出する．

定理 5.13. u を定理 5.12 で得られた minimizer とする．すると u は

$$\operatorname{div}(DL(Du)) = 0 \quad \text{in } \Omega \tag{5.4}$$

を (弱い意味で) 満たす．つまり

$$\int_\Omega DL(Du(x)) \cdot D\varphi(x)\,dx = 0 \quad (\forall \varphi \in C_c^1(\Omega)).$$

Proof. $\varphi \in C_c^1(\Omega)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ とする．このとき $u + \varepsilon\varphi$ も境界値 g を持つので最小性から $I(u) \le I(u + \varepsilon\varphi)$ が成り立つ．よって (5.1) より

$$0 \le I(u+\varepsilon\varphi) - I(u) = \int_\Omega (L(u+\varepsilon\varphi) - L(u))\,dx \le \varepsilon\int_\Omega DL(Du)\cdot D\varphi\,dx + \frac{\lambda}{2}\varepsilon^2\int_\Omega |D\varphi|^2\,dx$$

となる．これが任意の $\varepsilon \in \mathbb{R}$ で成り立つには

$$\int_\Omega DL(Du)\cdot D\varphi\,dx = 0$$

となるしかない． □

さて，最後に minimizer u の regularity について考察しよう．

de Giorgi の結果に加えて次の Hölder 連続関数の difference quotient による特徴づけに関する補題を用意する．

補題 5.14. $\alpha \in (0,1]$, $u \in L^\infty(\Omega)$ とする．定数 $C_0 > 0$ が存在して，$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le C_0$ かつ十分小さな $|h| > 0$ に対して

$$[\Delta_i^h u]_{0,\alpha;\Omega_h} \le C_0$$

を満たすとする (定数 C_0 が h に依らないということが重要である)．なお

$$\Delta_i^h u(x) = \frac{u(x+he_i) - u(x)}{h}$$

は difference quotient で，

$$\Omega_h = \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > |h|\}$$

と定義する．すると $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ であり，

$$|u|_{1,\alpha;\overline{\Omega}} \le CC_0, \quad C = C_{n,\alpha}$$

Proof. 追記予定. □

定理 5.15 (Solution to Hilbert's XIXth problem)**.** u を定理 5.12 の minimizer とする．このとき $u \in C^\infty(\Omega)$ である．

Proof. $\Omega' \subset\subset \Omega$ を固定する．$\varphi \in C_0^1(\Omega')$ とし，$h \in \mathbb{R}$ を $|h| > 0$ が十分小さいように取る．すると Euler–Lagrange 方程式 (5.4) より

$$\int_\Omega (DL(Du(x+he_i)) - DL(Du(x))) \cdot D\varphi(x)\,dx = 0$$

である．被積分関数は微積分学の基本定理より

$$DL(Du(x+he_i)) - DL(Du(x)) = \int_0^1 D^2L(tDu(x+he_i) + (1-t)Du(x))(Du(x+he_i) - Du(x))\,dt$$

と書けるので，

$$\widetilde{A}(x) = \int_0^1 D^2L(tDu(x+he_i) - (1-t)Du(x))\,dt$$

とおくと

$$\int_\Omega \widetilde{A}(x) D(\Delta_i^h u)(x) \cdot D\varphi(x)\,dx = 0$$

となる．したがって de Giorgi の定理 (定理 5.1) から $\forall \Omega'' \subset\subset \Omega$ に対して

$$\left|\Delta_i^h u\right|_{0,\alpha;\Omega''} \le C\left\|\Delta_i^h u\right\|_{L^2(\Omega')} \le C\|Du\|_{L^2(\Omega)}, \quad C = C_{n,\lambda,\Lambda,\Omega',\Omega''}$$

となる．したがって前の補題から $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega''})$ であり

$$|u|_{1,\alpha;\Omega''} \le C\|Du\|_{L^2(\Omega)}$$

となる．

Schauder 評価 (定理 4.9) を用いた bootstrap argument により証明が完了する：

$$u \in C^{1,\alpha} \Rightarrow \widetilde{A} \in C^{0,\alpha},\ \Delta_i^h u \in C^{1,\alpha} \Rightarrow u \in C^{2,\alpha} \Rightarrow \cdots \Rightarrow u \in C^\infty.$$

□