命題 1. フィボナッチ数の一般項

> フィボナッチ数の一般項は $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ として
>
> $$F_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \tag{1}$$
>
> と書ける。

Proof. 略。ググったら簡単に出てくる。 □

命題 2. フィボナッチ数

> F_n は $\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$ に最も近い整数

Proof.

$$\begin{aligned}
&F_n \text{は} \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} \text{に最も近い整数} && (2)\\
\Leftrightarrow &F_n = \left[\frac{\phi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\right] \text{([] はガウス記号)} && (3)\\
\Leftrightarrow &F_n \text{は} \left[\frac{\phi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\right] - 1 < F_n < \left[\frac{\phi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\right] + 1 \text{ を満たす整数} && (4)
\end{aligned}$$

(i) $n = 2\mathcal{N}$ のとき
$0 < \frac{\psi^n}{\sqrt{5}} < 1/2$ より

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\phi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\right] - 1 = \left[\frac{\phi^n}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\right] &\leq \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2} && (5)\\
&< \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\psi^n}{\sqrt{5}} = F_n && (6)\\
&< \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} \leq \left[\frac{\phi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\right] + 1 && (7)
\end{aligned}$$

より式 (4) が成立。

(ii) $n = 2\mathcal{N} - 1$ のとき
$-1/2 < \frac{\psi^n}{\sqrt{5}} < 0$ より

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\phi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\right] - 1 &\leq \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} && (8)\\
&< \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\psi^n}{\sqrt{5}} = F_n && (9)\\
&< \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \leq \left[\frac{\phi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\right] + 1 && (10)
\end{aligned}$$

より式 (4) が成立。

(i), (ii) より $\forall n \in \mathcal{N}$ に対し式 (4) が成立する i.e. F_n は $\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$ に最も近い整数 □

Proof. 別証。

$$F_n\text{は}\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}\text{に最も近い整数} \tag{11}$$

$$\Leftrightarrow \left|F_n - \frac{\phi^n}{\sqrt{5}}\right| < \frac{1}{2} \tag{12}$$

より式 (12) を示せばよい。

$$\left|F_n - \frac{\phi^n}{\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{\psi^n}{\sqrt{5}}\right| < \frac{\psi^0}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2} \tag{13}$$

$\square$