

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)  
ФИЗТЕХ-ШКОЛА АЭРОКОСМИЧЕСКИХ ТЕХНОЛОГИЙ

Отчет о выполнении лабораторной работы 1.2.5

**Измерение вынужденной регулярной  
прецессии гироскопа**

Ефремова Татьяна, Б03-503

29 октября 2025 г.

# 1 Аннотация

Цели работы: исследовать вынужденную прецессию гироскопа; установить зависимость скорости вынужденной прецессии от величины момента сил, действующих на ось гироскопа; определить скорость вращения ротора гироскопа и сравнить её со скоростью, рассчитанной по скорости прецессии.

## 2 Теоретические сведения

Уравнения движения твёрдого тела можно представить в виде:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}, \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (2)$$

Здесь (1) выражает закон движения центра масс тела, а (2) – уравнение моментов. Если сила  $\vec{F}$  не зависит от угловой скорости, а момент сил  $\vec{M}$  – от скорости поступательного движения, то уравнения можно рассматривать независимо друг от друга. В данной работе для описания движения гироскопа потребуется только уравнение (2).

Момент импульса твёрдого тела в его главных осях можно выразить по формуле

$$\vec{L} = \vec{i}I_x\omega_x + \vec{j}I_y\omega_y + \vec{k}I_z\omega_z, \quad (3)$$

где  $I_x, I_y, I_z$  – главные моменты инерции, а  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – компоненты вектора угловой скорости  $\vec{\omega}$ .

Быстро вращающееся тело, для которого произведение момента инерции на компоненту угловой скорости одной из осей много больше произведений для двух других осей, принято называть гироскопом. Гироскоп называется уравновешенным, если центр его масс неподвижен.

В силу (2) приращение момента импульса определяется интегралом

$$\Delta\vec{L} = \int \vec{M}dt. \quad (4)$$

Если момент внешних сил действует в течение короткого промежутка времени, из интеграла (4) следует, что приращение  $\Delta\vec{L}$  момента импульса значительно меньше самого момента импульса. С этим связана устойчивость гироскопа, приведенного в быстрое вращение.

Рассмотрим маховик, вращающийся вокруг оси  $z$ , перпендикулярной к его плоскости. Будем считать, что

$$\omega_z = \omega_0, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_x = 0.$$

Пусть ось вращения повернулась в плоскости  $zx$  по направлению к оси  $x$  на бесконечно малый угол  $d\phi$ . Такой поворот означает добавочное вращение маховика вокруг оси  $y$ , так что

$$d\phi = \Omega dt$$

, где  $\Omega$  – угловая скорость вращения. Если к оси гироскопа прикладывать небольшой момент силы, то он будет вращаться с угловой скоростью  $\Omega$ , и при этом, где  $\omega$  – угловая скорость вращения гироскопа в основном направлении.

Скорость прецессии в этом случае равна

$$\Omega = \frac{mgl}{I_z\omega_0} \quad (5)$$

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (6)$$

где  $\rho$  – плотность среды.

В общем случае звуковые волны в твёрдых телах могут быть не только продольными, но и поперечными (деформация сдвига перпендикулярна распространению волны), однако в данной работе будет исследован наиболее простой случай упругих волн, распространяющихся в длинных тонких стержнях. Если длины

волны  $\lambda$  и стержня  $L$  много больше его радиуса  $R$ , то такая волна может свободно распространяться лишь вдоль стержня, и его упругие свойства описываются только модулем Юнга.

Акустическая волна, распространяющаяся в стержне конечной длины  $L$ , отражается от торцов стержня. Если при этом на длине стержня укладывается целое число полувольт, то отражённые волны будут складываться в фазе с падающими, что приведёт к резкому усилению амплитуды их колебаний и возникновению акустического резонанса в стержне. Измеряя соответствующие резонансные частоты, можно определить скорость звуковой волны в стержне и, таким образом, измерить модуль Юнга его материала.

Скорость  $u$  определяется как:

$$u = 2L \frac{f_n}{n}, \quad (7)$$

где  $n$  – номер гармоники.

Согласно теории, зависимость  $f_n(n)$  линейна, и для всех резонансных частот отношение  $\frac{f_n}{n}$  постоянно. Однако, если в идеальном случае резонанс достигался бы при строгом совпадении частот  $f = f_n$ , в реальности возбуждение стоячей волны возможно при относительно малом отклонении частоты от резонансной. Амплитуда как функция частоты  $A(f)$  имеет резкий максимум при  $f = f_n$ . При этом ширина резонансного максимума  $\Delta f$  определяется добротностью  $Q$  колебательной системы:

$$\Delta f \approx \frac{f_{\text{рез}}}{Q} \quad (8)$$

Именно конечная ширина резонанса  $\Delta f$  определяет в основном погрешность измерения частоты.

## 3 Оборудование

### 3.1 Используемое оборудование

Генератор звуковых частот, частотомер, осциллограф, электромагнитные излучатель и приёмник колебаний, набор стержней из различных материалов, малые цилиндры из различных материалов, весы, штангенциркуль, микрометр.

### 3.2 Инструментальные погрешности

**весы :**  $\Delta_b = \pm 0.001$  г.

**штангенциркуль:**  $\Delta_{\text{шт}} = \pm 0,1$  мм.

**микрометр:**  $\Delta_{\text{мкм}} = \pm 0,01$  мм.

## 4 Результаты измерений и обработка данных

### 4.1 Добротность стержней

Ширина максимума функции  $A(f - f_n)$  связана с добротностью  $Q$  стержня как колебательной системы: если  $\Delta f$  – ширина амплитудно-частотной характеристики на уровне  $A = \frac{A_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$ , то  $Q = \frac{f_n}{\Delta f}$ .

Таблица 1: Частоты максимума амплитуды; добротность

|        | $f(A_{\text{max}})$ , Гц | $f_1(0,7A_{\text{max}})$ , Гц | $f_2(0,7A_{\text{max}})$ , Гц | $\Delta f$ , Гц | Q    |
|--------|--------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-----------------|------|
| Медь   | 3218.6                   | 3218.0                        | 3219.2                        | 1.2             | 2682 |
| Сталь  | 4131.1                   | 4130.2                        | 4132.0                        | 1.8             | 2295 |
| Дюраль | 4254.0                   | 4253.0                        | 4255.5                        | 2.5             | 1701 |

Используемые в работе металлические стержни являются весьма высокодобротными системами; ширина резонанса мала, то есть и погрешность поиска резонансных частот – тоже. Тем не менее, время установления резонансных колебаний, которое можно оценить как  $\tau_{\text{уст}} \approx \frac{1}{\Delta f}$ , оказывается достаточно велико (до нескольких секунд), из-за чего поиск резонанса следует проводить, изменяя частоту генератора максимально медленно.

## 4.2 Измерение скорости $u$ распространения акустических волн

Так как в реальном стержне могут возбуждаться как продольные, так и поперечные колебания, сопровождающиеся множеством «паразитных» частот, для выделения нужных резонансов проводится предварительный анализ.

Первую резонансную частоту можно оценить по формуле  $f_{\text{теор}} = \frac{U}{2L}$ , где  $U \approx 3.7 \cdot 10^3$  м/с. Тогда  $f_{\text{теор}} \approx 3083.3$  Гц. Последующие резонансные частоты можно оценить как  $f_n \approx n \cdot f_1$ .

Таблица 2: Частоты резонанса для стержней различных материалов

|                                 | 1     | 2     | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      |
|---------------------------------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $f_{\text{меди}}, \text{кГц}$   | 3.219 | 6.083 | 9.666  | 12.880 | 16.104 | 19.228 | 21.877 |
| $f_{\text{стали}}, \text{кГц}$  | 4.131 | 8.276 | 12.411 | 16.529 | 20.681 | 25.355 | 28.196 |
| $f_{\text{дюрэли}}, \text{кГц}$ | 4.254 | 8.497 | 12.766 | 17.026 | 21.535 | 24.989 | 29.101 |

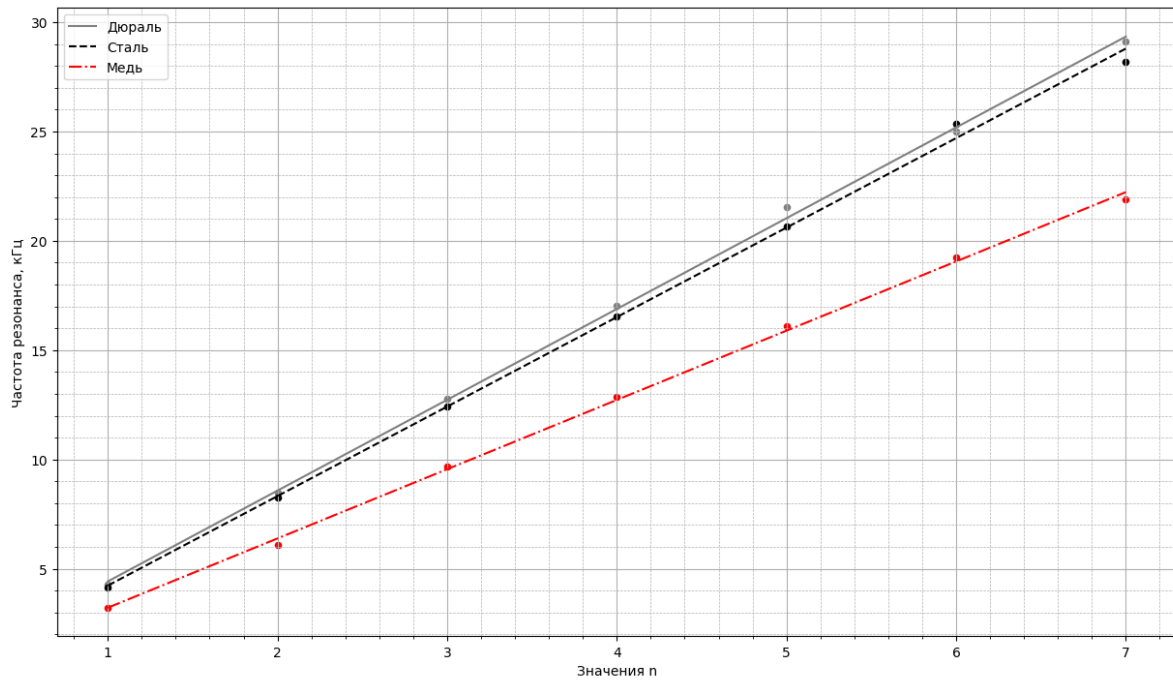


Рис. 1: Линейная аппроксимация результатов измерения частот резонанса  $f$  в зависимости от значения  $n$  методом наименьших квадратов

Т. к. зависимость  $f_n$  от  $n$  линейная, по методу наименьших квадратов:

$$k = \left( \frac{\bar{f}_n}{n} \right) = \frac{\langle n f_n \rangle}{\langle n^2 \rangle}, \quad \sigma_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\langle f_n^2 \rangle}{\langle n \rangle} - k^2}$$

Тогда

$$u = 2Lk, \quad \sigma_u = u \sqrt{\left( \frac{\sigma_L}{L} \right)^2 + \frac{\sigma_k^2}{k^2}}$$

Таблица 3: Скорости распространения волн

|        | $k, \text{Гц}$ | $\sigma_k, \text{Гц}$ | $u, \text{м/с}$ | $\sigma_u, \text{м/с}$ |
|--------|----------------|-----------------------|-----------------|------------------------|
| Медь   | 3168           | 41                    | 3801            | 49                     |
| Сталь  | 4094           | 64                    | 4913            | 77                     |
| Дюраль | 4153           | 45                    | 4983            | 54                     |

### 4.3 Измерение плотности стержней

$$\rho = \frac{m}{\pi R^2 \cdot L}; \sigma_\rho = \rho \sqrt{\frac{\Delta_v^2}{m^2} + 2 \frac{\Delta_{mk}^2}{R^2} + \frac{\Delta_{шт}^2}{L^2}}$$

Таблица 4: Характеристики различных материалов

|        | L, мм | R, мм | m, г   | $\rho$ , кг/м <sup>3</sup> | $\sigma_\rho$ , кг/м <sup>2</sup> |
|--------|-------|-------|--------|----------------------------|-----------------------------------|
| Медь   | 40.0  | 6.04  | 40.955 | 8904                       | 30                                |
| Сталь  | 41.0  | 6.15  | 36.902 | 7562                       | 25                                |
| Дюраль | 41.3  | 6.05  | 13.224 | 2780                       | 9                                 |

### 4.4 Вычисление модуля Юнга

Из формулы (1):

$$E = \rho \cdot u^2; \sigma_E = \sqrt{\frac{\sigma_\rho}{\rho} + 2 \frac{\sigma_u}{u}}$$

$E_{\text{меди}} = 128.6 \pm 2.4$  ГПа;  $E_{\text{стали}} = 182.5 \pm 4.1$  ГПа;  $E_{\text{дюралю}} = 69.0 \pm 1.1$  ГПа.

## 5 Выводы

В результате работы было измерено удельное сопротивление образца нихромовой проволоки с точностью  $\approx 6,8\%$ . Табличные значения для нихрома при  $20^\circ$  лежат в диапазоне от  $0,97 \cdot 10^{-6}$  м до  $1,12 \cdot 10^{-6}$  м (согласно справочнику "Физические величины. М.: Энергоиздат, 1991. С. 444). Наиболее близкое значение к полученному в работе имеет сплав 70 – 80% Ni, 20% Cr, 0 – 2% Mn.