

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
ФИЗТЕХ-ШКОЛА АЭРОКОСМИЧЕСКИХ ТЕХНОЛОГИЙ

Отчет о выполнении лабораторной работы 1.2.2

**Экспериментальная проверка
закона вращательного движения
на крестообразном маятнике**

Ефремова Татьяна, Б03-503

29 октября 2025 г.

1 Аннотация

Цели работы: 1) экспериментально проверить уравнение вращательного движения тела вокруг закрепленной оси, получить зависимость углового ускорения от момента инерции и момента прикладываемых к системе сил; 2) проанализировать влияние сил трения, действующих в оси вращения; 3) определить момент инерции маятника.

2 Теоретические сведения

Уравнение вращательного движения тела вокруг закрепленной оси:

$$I\ddot{\varphi} = M, \quad (1)$$

где $\ddot{\varphi} = \dot{\omega} = \beta$ – угловое ускорение (ω – угловая скорость), I – полный момент инерции тела относительно оси вращения, M – суммарный момент внешних сил относительно этой оси.

Момент силы натяжения нити:

$$M_n = m_n r (g - \beta r), \quad (2)$$

где $m_n = m_{\text{п}} + m_{\text{пг}}$ – масса платформы с перегрузком.

Таким образом, с учетом (2) уравнение (1) может быть записано как:

$$(I + m_n r^2) \beta = m_n g r - M_{\text{тр}}, \quad (3)$$

где $M_{\text{тр}}$ – момент силы трения в оси вращения.

В проведенных опытах $m_n r^2 \ll I$, поэтому можно считать, что маятник раскручивается с постоянным угловым ускорением:

$$\beta_0 = \frac{1}{I} m_n g r - \frac{M_{\text{тр}}}{I} \quad (4)$$

Т. к. грузы имеют форму полых цилиндров с внутренним и внешним радиусами и образующей a_1 и a_2 и h соответственно, момент инерции системы I вычисляется при помощи теоремы Гюйгенса-Штейнера:

$$I = I_0 + \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{12} m_i h^2 + \frac{1}{4} m_i (a_1^2 + a_2^2) + m_i R_i^2 \right). \quad (5)$$

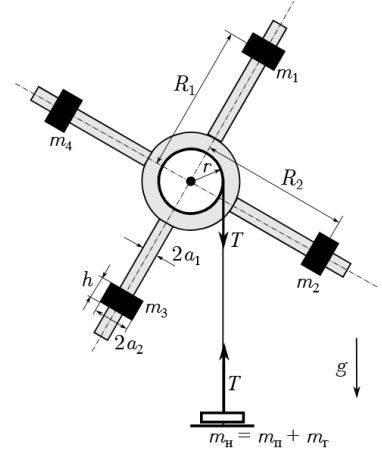


Рис. 1: Маятник Обербека

3 Используемое оборудование

Крестообразный маятник, набор перегрузков, секундомер, линейка, весы, штангенциркуль.

Инструментальные погрешности:

весы : $\Delta_{\text{в}} = 0.1$ г

штангенциркуль : $\Delta_{\text{шт}} = 0.1$ мм

4 Результаты измерений и обработка данных

4.1 Оценка момента силы трения

Для оценки момента силы трения в подшипниках проверялось наличие движения в системе при отсутствии перегрузков на платформе. Маятник не приходил в движение вплоть до добавления груза массой 6,65 г. Измерения проводились на шкифе радиусом $R = 17,5$ мм, масса подвеса $m_{\text{п}} = 6,17$ г. Тогда граничное значение момента силы трения: $M_0 = (m_{\text{гр}} + m_{\text{тр}})gR \approx 0.0022$ Н · м.

4.2 Измерения углового ускорения

Измерения углового ускорения проводились для трех различных положений грузов на маятнике при 5 различных значениях массы перегрузка. Радиус шкифа $R = 17,5$ мм, масса подвеса $m_n = 6,17$ г.

Таблица 1: Измерения углового ускорения

| | | r = 140 мм | | r = 100 мм | | r = 60 мм | |
|--------|----------|------------------------------|-------------------------------------|------------------------------|-------------------------------------|------------------------------|-------------------------------------|
| m, гр | M, Н · м | β , рад/с ² | σ_β , рад/с ² | β , рад/с ² | σ_β , рад/с ² | β , рад/с ² | σ_β , рад/с ² |
| 33,27 | 0,0057 | 0,214 | 0,005 | 0,369 | 0,003 | 0,945 | 0,013 |
| 58,17 | 0,0099 | 0,467 | 0,002 | 0,623 | 0,004 | 0,911 | 0,014 |
| 106,17 | 0,0182 | 0,609 | 0,002 | 1,227 | 0,003 | 1,784 | 0,020 |
| 154,63 | 0,0273 | 1,146 | 0,004 | 1,696 | 0,005 | 2,403 | 0,020 |
| 206,17 | 0,0354 | 1,404 | 0,003 | 2,215 | 0,005 | 3,252 | 0,022 |

По результатам измерений можно построить графики зависимостей углового ускорения β от момента силы перегрузка M :

$$\beta = kM - b,$$

где $k = \frac{1}{I}$, $b = \frac{M_{тр}}{I}$.

Таким образом:

$$I = \frac{1}{k}, \quad \sigma_I = I \frac{\sigma_k}{k}$$

$$M_{тр} = Ib, \quad \sigma_{тр} = M_{тр} \sqrt{\left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_I}{I}\right)^2}$$

Полученные значения представлены в таблице 2, полученные зависимости изображены на рисунке 2.

| R, мм | k, $\frac{1}{\text{кг} \cdot \text{м}^2}$ | σ_k , $\frac{1}{\text{кг} \cdot \text{м}^2}$ | b, $\frac{\text{Н}}{\text{кг} \cdot \text{м}}$ | σ_b , $\frac{\text{Н}}{\text{кг} \cdot \text{м}}$ | I, $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ | σ_I | M _{тр} , Н · м | $\sigma_{тр}$ |
|-------|---|---|--|--|---------------------------------|------------|-------------------------|---------------|
| 60 | 80.8 | 2.53 | 0.298 | 0.135 | 0.0124 | 0.0005 | 0.0035 | 0.0015 |
| 100 | 62.0 | 1.43 | 0.137 | 0.054 | 0.0171 | 0.0003 | 0.0024 | 0.0009 |
| 140 | 39.9 | 0.99 | 0.093 | 0.035 | 0.0250 | 0.0006 | 0.0022 | 0.0008 |

Таблица 2: Значения коэффициентов прямых, моментов инерции и моментов силы трения

$\bar{M}_{тр} = 0.0027 \pm 0.0010$ Н · м. Получается, измеренное $M_0 = 0.0022$ Н · м лежит в пределах погрешности.

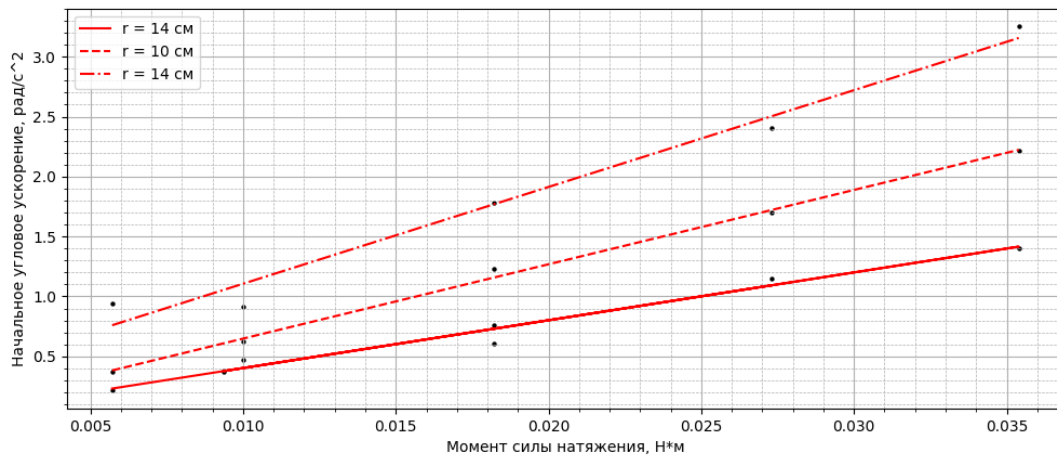


Рис. 2: Зависимости углового ускорения от момента сил тяжести

4.3 Вычисление момента инерции маятника

$m_1 = 151.7$ г, $m_2 = 147.6$ г, $m_3 = 147.7$ г, $m_4 = 149.1$ г, $a_1 = 3.8$ мм, $a_2 = 17.5$ мм, $h = 25$ мм.

$$I_0 = I - \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{12} m_i h^2 + \frac{1}{4} m_i (a_1^2 + a_2^2) + m_i R_i^2 \right) \quad (6)$$

Выражение имеет вид $I = b + kR^2$. Тогда по МНК можно вычислить коэффициенты b и k :
 $k = 1.26 \pm 0.02$, $b = -0.0118 \pm 0.0002$

Поскольку массы грузов и расстояния почти не отличаются, $I_i = \frac{1}{12}m_i h^2 + \frac{1}{4}m_i(a_1^2 + a_2^2) \approx 4I_1$
 $4I_1 \approx 79 \cdot 10^{-6}$, что на порядок меньше коэффициента b . Тогда $|b| \approx I_0$, $\sigma_b \approx \sigma_{I_0}$

Рассчитаем значения момента инерции маятника по формуле (6):

$I_0(60\text{мм}) = 0.0097 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $I_0(100\text{мм}) = 0.0109 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $I_0(140\text{мм}) = 0.0122 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Тогда:

$\bar{I}_0 = 0,0109 \pm 0.0002 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$

5 Выводы

Полученные в ходе работы значения собственного момента инерции маятника для разных положений грузов приблизительно равны. Для разных моментов инерции маятника вычисленные моменты силы трения в оси оказались приблизительно равными, что соответствует действительности и подтверждает справедливость используемых формул и допустимых приближений. Точности эксперимента достаточно, чтобы проверить все рассмотренные в работе теоретические закономерности, однако для измерения моментов инерции предпочтительнее другие методы, так как ошибка в данном опыте слишком велика для более точных измерений.