

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)  
ФИЗТЕХ-ШКОЛА АЭРОКОСМИЧЕСКИХ ТЕХНОЛОГИЙ

Отчет о выполнении лабораторной работы 1.2.2

**Экспериментальная проверка  
закона вращательного движения  
на крестообразном маятнике**

Ефремова Татьяна, Б03-503

# 1 Аннотация

Цели работы: 1) экспериментально проверить уравнение вращательного движения тела вокруг закрепленной оси, получить зависимость углового ускорения от момента инерции и момента прикладываемых к системе сил; 2) проанализировать влияние сил трения, действующих в оси вращения; 3) определить момент инерции маятника.

## 2 Теоретические сведения

Уравнение вращательного движения тела вокруг закрепленной оси:

$$I\ddot{\varphi} = M, \quad (1)$$

где  $\ddot{\varphi} = \dot{\omega} = \beta$  – угловое ускорение ( $\omega$  – угловая скорость),  $I$  – полный момент инерции тела относительно оси вращения,  $M$  – суммарный момент внешних сил относительной этой оси.

Момент силы натяжения нити:

$$M_h = m_h r(g - \beta r), \quad (2)$$

где  $m_h = m_n + m_p$  – масса платформы с перегрузком.

Таким образом, с учетом (2) уравнение (1) может быть записано как:

$$(I + m_h r^2)\beta = m_h gr - M_{tp}, \quad (3)$$

где  $M_{tp}$  – момент силы трения в оси вращения.

В проведенных опытах  $m_h r^2 \ll I$ , поэтому можно считать, что маятник раскручивается с постоянным угловым ускорением:

$$\beta_0 = \frac{1}{I}m_h gr - \frac{M_{tp}}{I} \quad (4)$$

Т. к. грузы имеют форму полых цилиндров с внутренним и внешним радиусами и образующей  $a_1$  и  $a_2$  и  $h$  соответственно, момент инерции системы  $I$  вычисляется при помощи теоремы Гюйгенса-Штейнера:

$$I = I_0 + \sum_{i=1}^4 \left( \frac{1}{12}m_i h^2 + \frac{1}{4}m_i(a_1^2 + a_2^2) + m_i R_i^2 \right). \quad (5)$$

## 3 Используемое оборудование

Крестообразный маятник, набор перегрузков, секундомер, линейка, весы, штангенциркуль.

Инструментальные погрешности:

**весы** :  $\Delta_b = 0.1$  г

**штангенциркуль** :  $\Delta_{шт} = 0.1$  мм

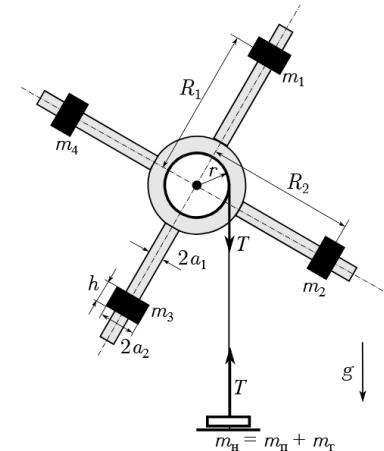


Рис. 1: Маятник Обербека

## 4 Результаты измерений и обработка данных

### 4.1 Оценка момента силы трения

Для оценки момента силы трения в подшипниках проверялось наличие движения в системе при отсутствии перегрузок на платформе. Маятник не приходил в движение вплоть до добавления груза массой 6,65 г. Измерения проводились на шкифе радиусом  $R = 17,5$  мм, масса подвеса  $m_n = 6,17$  г. Тогда граничное значение момента силы трения:  $M_0 = (m_{gp} + m_{rp})gR \approx 0.0022$  Н · м.

## 4.2 Измерения углового ускорения

Измерения углового ускорения проводились для трех различных положений грузов на маятнике при 5 различных значениях массы перегрузка. Радиус шкифа  $R = 17,5$  мм, масса подвеса  $m_{\text{п}} = 6,17$  г.

Таблица 1: Измерения углового ускорения

m, гр	M, Н · м	r = 140 мм		r = 100 мм		r = 60 мм	
		$\beta$ , рад/ $c^2$	$\sigma_\beta$ , рад/ $c^2$	$\beta$ , рад/ $c^2$	$\sigma_\beta$ , рад/ $c^2$	$\beta$ , рад/ $c^2$	$\sigma_\beta$ , рад/ $c^2$
33,27	0,0057	0,214	0,005	0,369	0,003	0,945	0,013
58,17	0,0099	0,467	0,002	0,623	0,004	0,911	0,014
106,17	0,0182	0,609	0,002	1,227	0,003	1,784	0,020
154,63	0,0273	1,146	0,004	1,696	0,005	2,403	0,020
206,17	0,0354	1,404	0,003	2,215	0,005	3,252	0,022

По результатам измерений можно построить графики зависимостей углового ускорения  $\beta$  от момента силы перегрузка  $M$ :

$$\beta = kM - b,$$

где  $k = \frac{1}{I}$ ,  $b = \frac{M_{\text{tp}}}{I}$ .

Таким образом:

$$I = \frac{1}{k}, \quad \sigma_I = I \frac{\sigma_k}{k}$$

$$M_{\text{tp}} = Ib, \quad \sigma_{\text{tp}} = M_{\text{tp}} \sqrt{\left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_I}{I}\right)^2}$$

Полученные значения представлены в таблице 2, полученные зависимости изображены на рисунке 2.

$R$ , мм	$k$ , $\frac{1}{\text{кг} \cdot \text{м}^2}$	$\sigma_k$ , $\frac{1}{\text{кг} \cdot \text{м}^2}$	$b$ , $\frac{\text{Н}}{\text{кг} \cdot \text{м}}$	$\sigma_b$ , $\frac{\text{Н}}{\text{кг} \cdot \text{м}}$	$I$ , $\text{кг} \cdot \text{м}^2$	$\sigma_I$	$M_{\text{tp}}$ , $\text{Н} \cdot \text{м}$	$\sigma_{\text{tp}}$
60	80.8	2.53	0.298	0.135	0.0124	0.0005	0.0035	0.0015
100	62.0	1.43	0.137	0.054	0.0171	0.0003	0.0024	0.0009
140	39.9	0.99	0.093	0.035	0.0250	0.0006	0.0022	0.0008

Таблица 2: Значения коэффициентов прямых, моментов инерции и моментов силы трения

$\bar{M}_{\text{tp}} = 0.0027 \pm 0.0010$  Н · м. Получается, измеренное  $M_0 = 0.0022$  Н · м лежит в пределах погрешности.

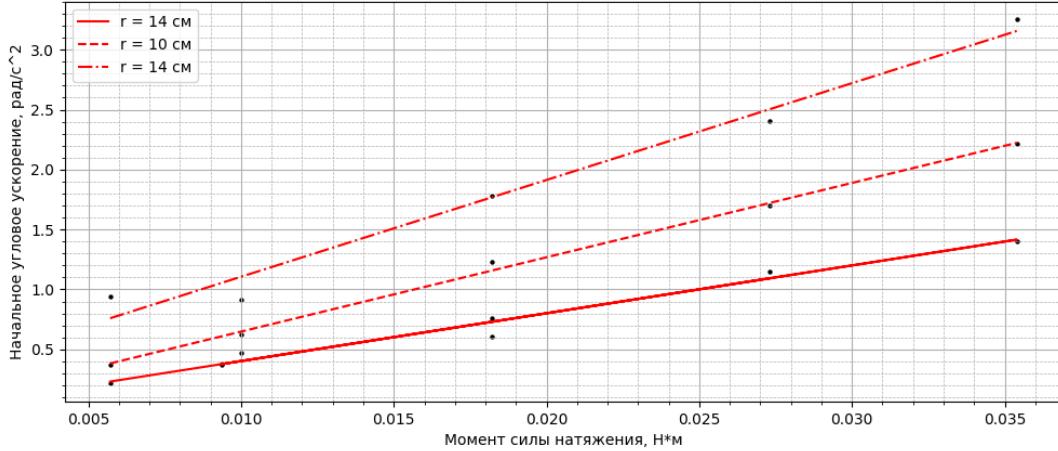


Рис. 2: Зависимости углового ускорения от момента сил тяжести

## 4.3 Вычисление момента инерции маятника

$m_1 = 151.7$  г,  $m_2 = 147.6$  г,  $m_3 = 147.7$  г,  $m_4 = 149.1$  г,  $a_1 = 3.8$  мм,  $a_2 = 17.5$  мм,  $h = 25$  мм.

$$I_0 = I - \sum_{i=1}^4 \left( \frac{1}{12} m_i h^2 + \frac{1}{4} m_i (a_1^2 + a_2^2) + m_i R_i^2 \right) \quad (6)$$

Выражение имеет вид  $I = b + kR^2$ . Тогда по МНК можно вычислить коэффициенты  $b$  и  $k$ :

$$k = 1.26 \pm 0.02, b = -0.0118 \pm 0.0002$$

Поскольку массы грузов и расстояния почти не отличаются,  $I_i = \frac{1}{12}m_i h^2 + \frac{1}{4}m_i(a_1^2 + a_2^2) \approx 4I_1$   
 $4I_1 \approx 79 \cdot 10^{-6}$ , что на порядок меньше коэффициента  $b$ . Тогда  $|b| \approx I_0$ ,  $\sigma_b \approx \sigma_{I_0}$

Рассчитаем значения момента инерции маятника по формуле (6):

$$I_0(60\text{мм}) = 0.0097 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, I_0(100\text{мм}) = 0.0109 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, I_0(140\text{мм}) = 0.0122 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Тогда:

$$\bar{I}_0 = 0,0109 \pm 0.0002 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

## 5 Выводы

Полученные в ходе работы значения собственного момента инерции маятника для разных положений грузов приблизительно равны. Для разных моментов инерции маятника вычисленные моменты силы трения в оси оказались приблизительно равными, что соответствует действительности и подтверждает справедливость используемых формул и допустимых приближений. Точности эксперимента достаточно, чтобы проверить все рассмотренные в работе теоретические закономерности, однако для измерения моментов инерции предпочтительнее другие методы, так как ошибка в данном опыте слишком велика для более точных измерений.