

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
ФИЗТЕХ-ШКОЛА АЭРОКОСМИЧЕСКИХ ТЕХНОЛОГИЙ

Отчет о выполнении лабораторной работы 1.4.8

**Определение модуля Юнга методом
акустического резонанса**

Ефремова Татьяна, Б03-503

1 Аннотация

Цели работы: исследовать явление акустического резонанса в тонком стержне; измерить скорость распространения продольных звуковых колебаний в тонких стержнях из различных материалов и различных размеров; измерить модули Юнга различных материалов.

2 Теоретические сведения

Основной характеристикой упругих свойств твёрдого тела является его модуль Юнга E . Согласно закону Гука, если к элементу среды приложено некоторое механическое напряжение σ , действующее вдоль некоторой оси x (напряжения по другим осям при этом отсутствуют), то в этом элементе возникнет относительная деформация вдоль этой же оси $E = \Delta x / x_0$.

Если с помощью кратковременного воздействия в некотором элементе твёрдого тела создать малую деформацию, она будет далее распространяться в среде в форме акустической волны. Волны, распространяющиеся вдоль оси, по которой происходит деформация, называются продольными. Скорость u распространения такой волны в простейшем случае длинного тонкого стержня определяется соотношением

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (1)$$

где ρ — плотность среды.

В общем случае звуковые волны в твёрдых телах могут быть не только продольными, но и поперечными (деформация сдвига перпендикулярна распространению волны), однако в данной работе будет исследован наиболее простой случай упругих волн, распространяющихся в длинных тонких стержнях. Если длины волны λ и стержня L много больше его радиуса R , то такая волна может свободно распространяться лишь вдоль стержня, и его упругие свойства описываются только модулем Юнга.

Акустическая волна, распространяющаяся в стержне конечной длины L , отражается от торцов стержня. Если при этом на длине стержня укладывается целое число полуволн, то отражённые волны будут складываться в фазе с падающими, что приведёт к резкому увеличению амплитуды их колебаний и возникновению акустического резонанса в стержне. Измеряя соответствующие резонансные частоты, можно определить скорость звуковой волны в стержне и, таким образом, измерить модуль Юнга его материала.

Скорость u определяется как:

$$u = 2L \frac{f_n}{n}, \quad (2)$$

где n — номер гармоники.

Согласно теории, зависимость $f_n(n)$ линейна, и для всех резонансных частот отношение $\frac{f_n}{n}$ постоянно. Однако, если в идеальном случае резонанс достигался бы при строгом совпадении частот $f = f_n$, в реальности возбуждение стоячей волны возможно при относительно малом отклонении частоты от резонансной. Амплитуда как функция частоты $A(f)$ имеет резкий максимум при $f = f_n$. При этом ширина резонансного максимума Δf определяется добротностью Q колебательной системы:

$$\Delta f \approx \frac{f_{\text{рез}}}{Q} \quad (3)$$

Именно конечная ширина резонанса Δf определяет в основном погрешность измерения частоты.

3 Оборудование

3.1 Используемое оборудование

Генератор звуковых частот, частотомер, осциллограф, электромагнитные излучатель и приёмник колебаний, набор стержней из различных материалов, малые цилиндры из различных материалов, весы, штангенциркуль, микрометр.

3.2 Инструментальные погрешности

весы : $\Delta_{\text{в}} = \pm 0.001$ г.

штангенциркуль: $\Delta_{\text{шт}} = \pm 0,1$ мм.

микрометр: $\Delta_{\text{мкм}} = \pm 0,01$ мм.

4 Результаты измерений и обработка данных

4.1 Добротность стержней

Ширина максимума функции $A(f - f_n)$ связана с добротностью Q стержня как колебательной системы: если Δf — ширина амплитудно-частотной характеристики на уровне $A = \frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$, то $Q = \frac{f_n}{\Delta f}$.

Таблица 1: Частоты максимума амплитуды; добротность

	$f(A_{max})$, Гц	$f_1(0, 7A_{max})$, Гц	$f_2(0, 7A_{max})$, Гц	Δf , Гц	Q
Медь	3218.6	3218.0	3219.2	1.2	2682
Сталь	4131.1	4130.2	4132.0	1.8	2295
Дюраль	4254.0	4253.0	4255.5	2.5	1701

Используемые в работе металлические стержни являются весьма высокодобротными системами; ширина резонанса мала, то есть и погрешность поиска резонансных частот — тоже. Тем не менее, время установления резонансных колебаний, которое можно оценить как $\tau_{уст} \approx \frac{1}{\Delta f}$, оказывается достаточно велико (до нескольких секунд), из-за чего поиск резонанса следует проводить, изменяя частоту генератора максимально медленно.

4.2 Измерение скорости и распространения акустических волн

Так как в реальном стержне могут возбуждаться как продольные, так и поперечные колебания, сопровождающиеся множеством «паразитных» частот, для выделения нужных резонансов проводится предварительный анализ.

Первую резонансную частоту можно оценить по формуле $f_{теор} = \frac{U}{2L}$, где $U \approx 3.7 \cdot 10^3$ м/с. Тогда $f_{теор} \approx 3083.3$ Гц. Последующие резонансные частоты можно оценить как $f_n \approx n \cdot f_1$.

Таблица 2: Частоты резонанса для стержней различных материалов

	1	2	3	4	5	6	7
$f_{меди}$, кГц	3.219	6.083	9.666	12.880	16.104	19.228	21.877
$f_{стали}$, кГц	4.131	8.276	12.411	16.529	20.681	25.355	28.196
$f_{дюрали}$, кГц	4.254	8.497	12.766	17.026	21.535	24.989	29.101

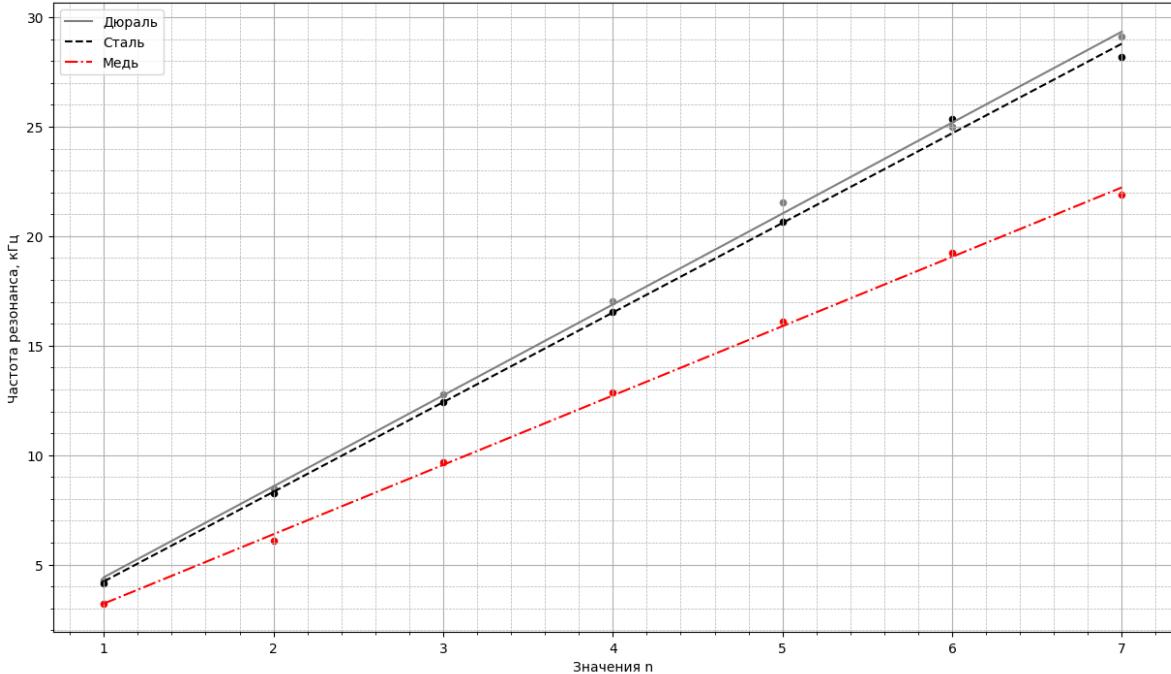


Рис. 1: Линейная аппроксимация результатов измерения частот резонанса f в зависимости от значения n методом наименьших квадратов

Т. к. зависимость f_n от n линейная, по методу наименьших квадратов:

$$k = \left(\frac{\bar{f}_n}{n} \right) = \frac{\langle n f_n \rangle}{\langle n^2 \rangle}, \quad \sigma_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\langle f_n^2 \rangle}{\langle n \rangle} - k^2}$$

Тогда

$$u = 2Lk, \quad \sigma_u = u \sqrt{\left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2}$$

Таблица 3: Скорости распространения волн

	$k, \text{ Гц}$	$\sigma_k, \text{ Гц}$	$u, \text{ м/с}$	$\sigma_u, \text{ м/с}$
Медь	3168	41	3801	49
Сталь	4094	64	4913	77
Дюраль	4153	45	4983	54

4.3 Измерение плотности стержней

$$\rho = \frac{m}{\pi R^2 \cdot L}; \quad \sigma_\rho = \rho \sqrt{\frac{\Delta_{\text{в}}^2}{m} + 2 \frac{\Delta_{\text{мк}}^2}{R} + \frac{\Delta_{\text{шт}}^2}{L}}$$

Таблица 4: Характеристики различных материалов

	$L, \text{ мм}$	$R, \text{ мм}$	$m, \text{ г}$	$\rho, \text{ кг/м}^3$	$\sigma_\rho, \text{ кг/м}^2$
Медь	40.0	6.04	40.955	8904	30
Сталь	41.0	6.15	36.902	7562	25
Дюраль	41.3	6.05	13.224	2780	9

4.4 Вычисление модуля Юнга

Из формулы (1):

$$E = \rho \cdot u^2; \quad \sigma_E = \sqrt{\frac{\sigma_\rho}{\rho} + 2 \frac{\sigma_u}{u}}$$

$E_{\text{меди}} = 128.6 \pm 2.4 \text{ ГПа}; E_{\text{стали}} = 182.5 \pm 4.1 \text{ ГПа}; E_{\text{дюрали}} = 69.0 \pm 1.1 \text{ ГПа}.$

5 Выводы

В результате работы были измерены Модули Юнга для меди, стали и дюрали с точностью не меньше 2,2%. Все теоретические закономерности, рассмотренные в данной работе, также выполнились в пределах точности эксперимента.