

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)  
ФИЗТЕХ-ШКОЛА АЭРОКОСМИЧЕСКИХ ТЕХНОЛОГИЙ

Отчет о выполнении лабораторной работы 1.3.1

**Определение модуля Юнга на основе  
исследования деформации растяжения и изгиба**

Ефремова Татьяна, Б03-503

12 ноября 2025 г.

# 1 Аннотация

Цели работы: экспериментально получить зависимость между напряжением и деформацией для двух простейших напряженных состояний упругих тел: одностороннего сжатия и чистого изгиба; по результатам эксперимента вычислить модуль Юнга.

## 2 Определение модуля Юнга по измерениям растяжения проволоки

### 2.1 Теоретические сведения

Растяжение проволоки соответствует напряженному состоянию вдоль одной оси, которое описывается формулой:

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l}. \quad (1)$$

Эту формулу можно записать в виде:

$$F = k \Delta l, \quad (2)$$

где  $k = \frac{ES}{l}$  – жесткость проволоки. Для определения модуля Юнга используется прибор Лермонтова, схема которого изображена на рис. 1. Верхний конец проволоки П, изготовленной из исследуемого материала, прикреплен к консоли К, а нижний – к цилиндру, которым оканчивается шарнирный кронштейн Ш. На этот же цилиндр опирается рычаг  $r$ , связанный с зеркальцем 3. Направим зрительную трубку на зеркальце. Выведем формулу для расчета растяжения длины проволоки по показаниям шкалы прибора. Так как мы считаем проволоку слабо растяжимой,  $\Delta l$  значительно меньше  $r$ . Тогда угол наклона зеркальца к горизонтали можно найти как  $\varphi = \frac{\Delta l}{r}$ .

С другой стороны, из соображений геометрической оптики угол  $\varphi$  можно найти как угол между продолжениями соответствующих лучей:

$$\varphi = \frac{n}{2h}, \quad (3)$$

где  $n$  – показания шкалы,  $h$  – расстояние от шкалы до зеркальца. Таким образом, удлинение проволоки выражается как:

$$\Delta l = n \frac{r}{2h}, \quad (4)$$

Отсюда формулу (1) можно переписать как:

$$F = \frac{ESr}{2lh} n, \quad (5)$$

Таким образом, удлинение проволоки можно измерить по углу поворота зеркальца. Натяжение проволоки можно менять перекалыванием грузов с площадки О на площадку М, не меняя при этом нагрузку на кронштейн, и, как следствие, его деформацию.

### 2.2 Используемое оборудование

Прибор Лермонтова, проволока из исследуемого материала, зрительная труба со шкалой, набор грузов, микрометр, рулетка.

### 2.3 Инструментальные погрешности

микрометр :  $\Delta_{\text{мк}} = \pm 0.01$  мм.

рулетка:  $\Delta_{\text{р}} = \pm 5$  мм.

шкала прибора:  $\Delta_{\text{ш}} = \pm 0.1$  мм.

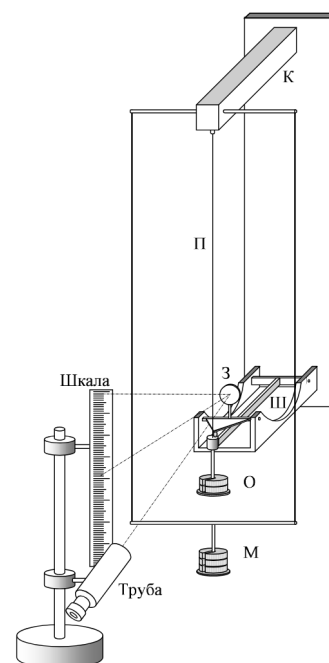


Рис. 1: Прибор Лермонтова

## 2.4 Результаты измерений и обработка данных

Сведем характеристики установки в таблицу:

$d$ , мм	$r$ , мм	$l$ , см	$h$ , см	$\sigma$ , кг/мм <sup>2</sup>
$0.51 \pm 0.01$	$20 \pm 0.1$	$173.4 \pm 0.5$	$139,6 \pm 0.5$	90

Оценим, сколько грузов можно повесить к проволоке. Для этого найдем площадь сечения проволоки и погрешность:

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = 0.204 \text{ мм}^2, \quad \sigma_S = 2S \frac{\sigma_d}{d} = 0.01 \text{ мм}^2.$$

Рабочая нагрузка:

$$m_{\max} = 0.3 \sigma_{\text{пр}} S = 5.51 \text{ кг}, \quad \sigma_{m_{\max}} = 0.27 \text{ кг}.$$

Будем последовательно добавлять грузы.

Таблица 1: Зависимость показаний шкалы от нагрузки

$m$ , гр	$P$ , Н	$n_{\uparrow}$ , мм	$n_{\downarrow}$ , мм	$n_{\uparrow}$ , мм	$n_{\downarrow}$ , мм	$n_{\uparrow}$ , мм	$n_{\downarrow}$ , мм	$\Delta l$ , мм
244,8	2,40	18,9	16,8	18,9	16,7	18,9	16,8	2,12
245,8	2,41	20,9	18,9	21,0	19,0	20,9	18,9	2,01
245,9	2,41	22,7	20,9	22,7	21,0	22,8	20,9	1,78
245,2	2,40	24,5	22,7	24,5	22,6	24,6	22,7	1,86
245,3	2,41	26,1	24,5	26,2	24,6	26,2	24,6	1,62
245,3	2,41	27,9	26,3	27,9	26,3	27,8	26,2	1,58
245,2	2,40	29,5	28,0	29,6	28,0	29,5	28,0	1,55
245,5	2,40	31,1	29,6	31,2	29,6	31,1	29,6	1,55
244,0	2,39	32,6	31,2	32,7	31,2	32,7	31,1	1,50
244,2	2,39	34,2	32,7	34,3	32,7	34,2	32,7	1,55

Т. к. зависимость  $n$  от  $P$  линейна, по методу наименьших квадратов:

$$k = \frac{2lh}{ESr} = \frac{\langle nP \rangle}{\langle P^2 \rangle} \approx 0,702, \quad \sigma_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\langle n^2 \rangle}{\langle P \rangle} - k^2} \approx 0,008.$$

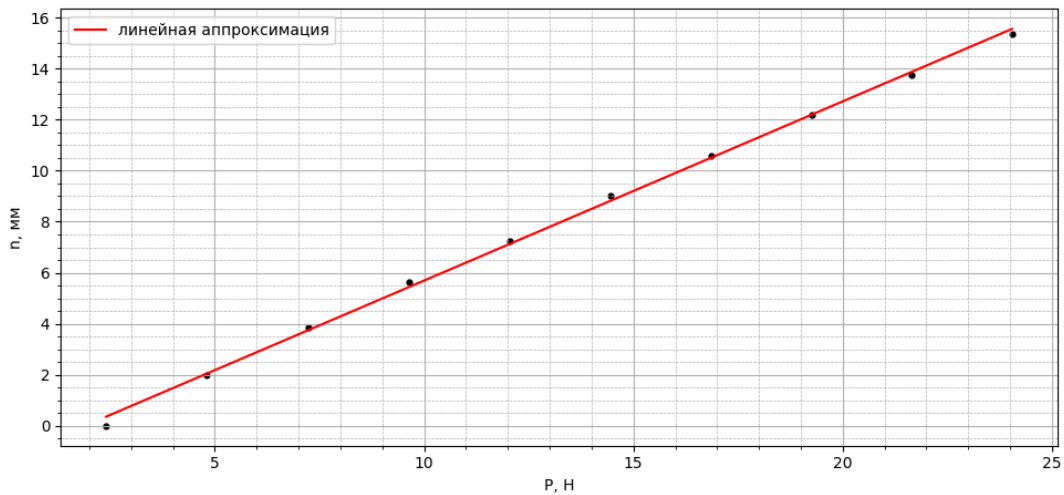


Рис. 2: Линейная аппроксимация зависимости растяжения проволоки от силы тяжести методом наименьших квадратов

Тогда:

$$E = \frac{2lh}{kSr} \approx 169 \text{ ГПа}, \quad \varepsilon_E = \sqrt{\varepsilon_l^2 + \varepsilon_h^2 + \varepsilon_k^2 + \varepsilon_S^2 + \varepsilon_r^2} \approx 0.10, \quad \sigma_E = E \varepsilon_E \approx 17 \text{ ГПа}.$$

### 3 Определение модуля Юнга по измерениям изгиба балки

#### 3.1 Теоретические сведения

Модуль Юнга материала стержня  $E$  связан с величиной прогиба  $y_{\max}$  как:

$$E = \frac{Pl^3}{4ab^3y_{\max}}, \quad (6)$$

где  $P$  - нагрузка на стержень,  $l$  - расстояние между точками опоры,  $a$  - ширина балки,  $b$  - высота балки.

Экспериментальная установка состоит из прочной стойки с опорными призмами А и Б (рис. 3). На ребра призм опирается исследуемый стержень В. В середине стержня на призме Д подвешена площадка П с грузами. Измерять величину прогиба можно с помощью индикатора И, укрепляемого на отдельной штанге. Полный оборот большой стрелки индикатора соответствует 1 мм и одному делению малого циферблата.

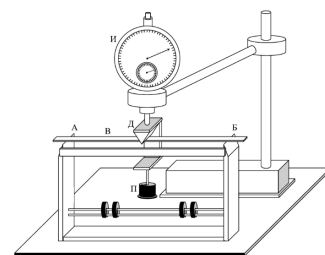


Рис. 3: Схема установки

#### 3.2 Используемое оборудование

Стержни из исследуемого материала, набор грузов, линейка, микрометр, индикатор для измерения стрелы прогиба.

#### 3.3 Инструментальные погрешности

микрометр :  $\Delta_{\text{мк}} = \pm 0.01$  мм.

линейка:  $\Delta_{\text{л}} = \pm 5$  мм.

шкала прибора:  $\Delta_{\text{ш}} = \pm 0.01$  мм.

#### 3.4 Результаты измерений и обработка данных

1. Сведем характеристики установки и балок в таблицу:

	$l$ , см	$a$ , мм	$b$ , мм
Сталь	54,0	21,10	3,75
Медь	54,0	21,69	3,90
Дерево	54,0	20,17	10,20

2. Будем последовательно добавлять и снимать грузы на каждую из сторон балок.

Т. к. зависимость  $n$  от  $P$  линейна, по методу наименьших квадратов:

$$k = \frac{4ab^3}{El^3} = \frac{\langle nP \rangle}{\langle P^2 \rangle}, \quad \sigma_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\langle n^2 \rangle}{\langle P \rangle} - k^2}.$$

Тогда:

$$E = \frac{l^3}{4kab^3} \quad \varepsilon_E = \sqrt{3\varepsilon_l^2 + 3\varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2 + \varepsilon_k^2}, \quad \sigma_E = E\varepsilon_E.$$

Сведем все средние значения угловых коэффициентов и модулей Юнга в таблицу:

	$k$ , Н/мм	$\varepsilon_k$	$E$ , ГПа	$\varepsilon_E$	$\sigma_E$
Сталь	0.568	0,02	191	0,10	19
Медь	1,000	0,02	105	0,11	12
Дерево	0.467	0,03	11	0,05	1

Таблица 2: Показания для стали

$m$ , гр	$P$ , Н	$n_{\uparrow}$ , мм	$n_{\downarrow}$ , мм	$n_{\uparrow}$ , мм	$n_{\downarrow}$ , мм
508,7	4,99	0,20	0,21	0,24	0,29
503,5	4,94	0,90	0,91	0,94	1,01
496,2	4,87	1,60	1,59	1,64	1,64
503,0	4,93	2,31	2,28	2,32	2,35
500,0	4,91	3,02	2,98	3,05	3,11
472,3	4,63	3,64	3,71	3,69	3,73
461,8	4,53	4,30	4,30	4,35	4,35

Таблица 3: Показания для меди

$m$ , гр	$P$ , Н	$n_{\uparrow}$ , мм	$n_{\downarrow}$ , мм	$n_{\uparrow}$ , мм	$n_{\downarrow}$ , мм
508,7	4,99	0,61	0,62	0,61	0,64
503,5	4,94	1,85	1,89	1,88	1,90
496,2	4,87	3,04	3,07	3,06	3,11
503,0	4,93	4,28	4,32	4,33	4,37
500,0	4,91	5,49	5,55	5,52	5,58
472,3	4,63	6,66	6,66	6,75	6,75

Таблица 4: Показания для дерева

$m$ , гр	$P$ , Н	$n_{\uparrow}$ , мм	$n_{\downarrow}$ , мм	$n_{\uparrow}$ , мм	$n_{\downarrow}$ , мм
508,7	4,99	0,28	0,35	0,20	0,22
503,5	4,94	0,90	0,96	0,78	0,83
496,2	4,87	1,42	1,46	1,33	1,40
503,0	4,93	2,00	2,03	1,94	2,01
500,0	4,91	2,59	2,62	2,50	2,59
472,3	4,63	3,11	3,17	3,05	3,11
461,8	4,53	3,68	3,68	3,59	3,59

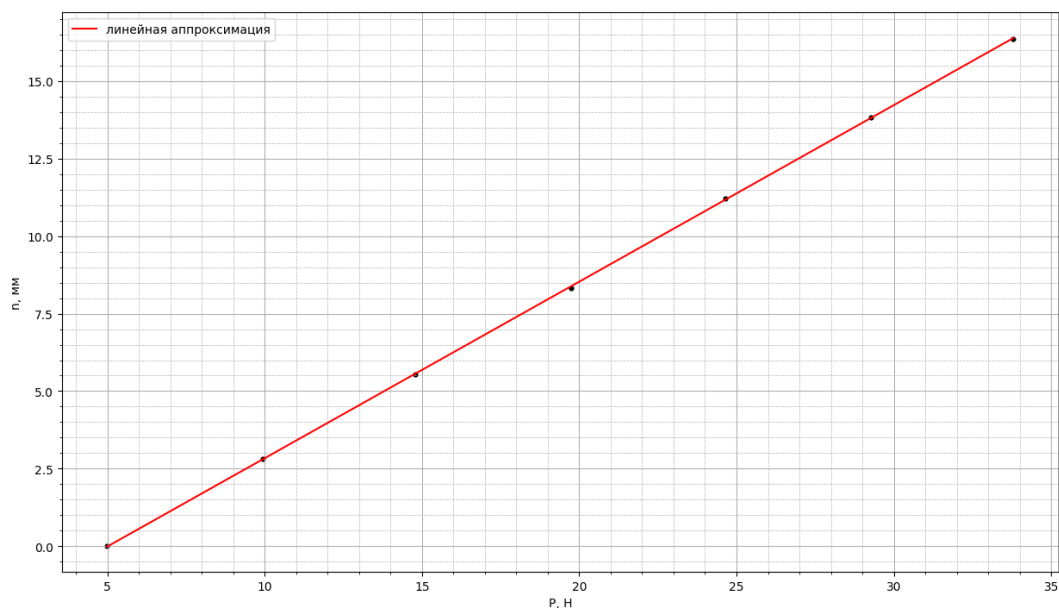


Рис. 4: Линейная аппроксимация показаний для стали

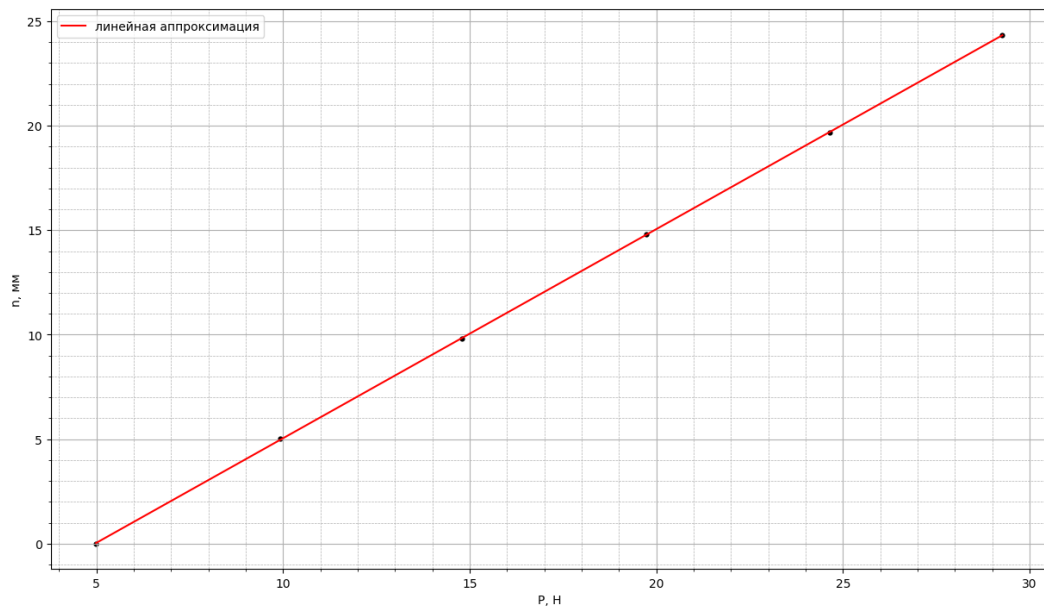


Рис. 5: Линейная аппроксимация показаний для меди

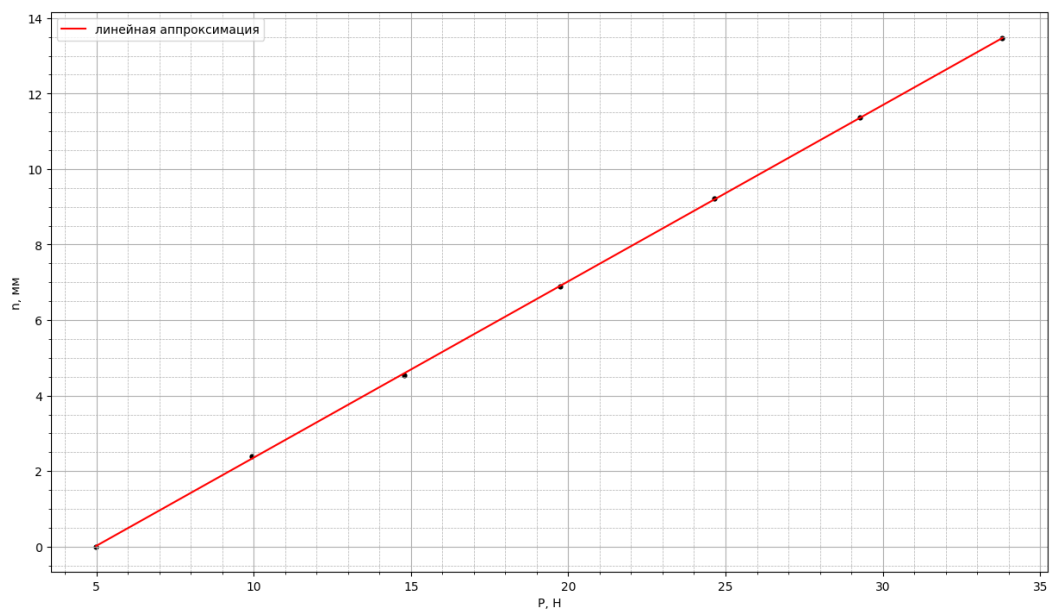


Рис. 6: Линейная аппроксимация показаний для дерева

## 4 Выводы

Полученные экспериментальным методом значения модуля Юнга совпали с табличными в пределах погрешности. Все теоретические закономерности, рассмотренные в данной работе, также выполнялись в пределах точности эксперимента.