Workshop 3-2

行列モデルを使った集団生物学：発展編（生育段階構成モデルとその基本統計量）

行列モデルの数学的基礎

高田　壮則（北海道大学）

生態学における数理モデル

動態モデル：Malthusモデル、Logisticモデル、競争方程式、
Lotka-Volterraモデル、推移行列モデル、
拡散方程式モデル、格子モデル・・・

最適戦略モデル：卵サイズモデル、展葉・落葉戦略モデル
(Optimal strategy model)　繁殖スケジュールモデル、採餌戦略モデル

ESSモデル：タカハトゲーム、性比モデル、分散モデル
(Evolutionarily Stable Strategy)
進化的に安定な戦略

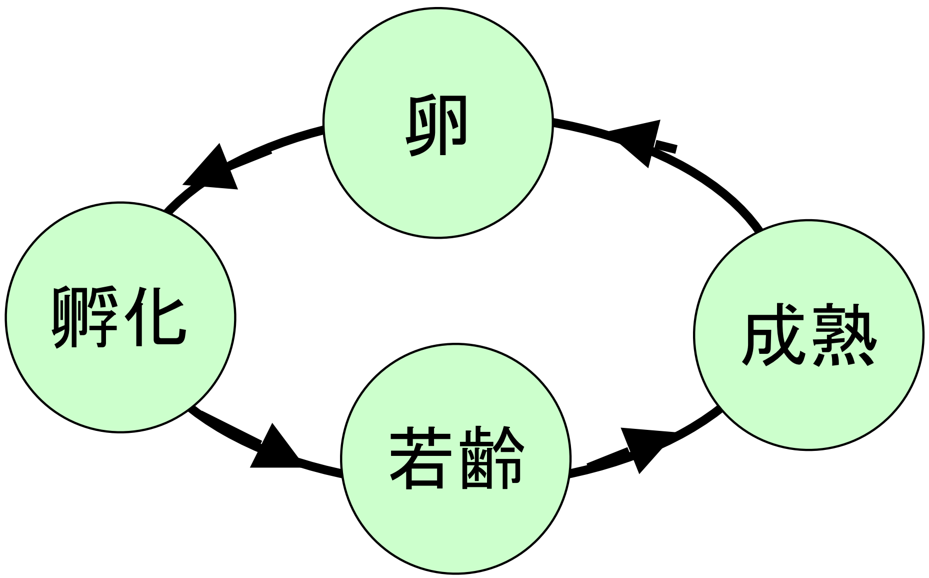
ウミガメ保護に使われたモデル

- 世界の7種類のウミガメはすべて絶滅危惧指定
- 保護対策：産卵場所、卵、ふ化直後の個体

Q1：本当に絶滅しそうなのか？
Q2：絶滅の至近要因は何か？
Q3：従来の保護対策が必要なのか？
Q4：従来の保護対策で十分なのか？

ウミガメの生活史の
データが必要

生活史段階の動態
を記述するモデルが必要



生活史段階の動態
を記述するモデルが必要

推移行列モデル
（複数の状態をもつ主体の動態）
Dynamics of an entity with multiple states

アカウミガメ

推移行列

	ふ化個体	若齢個体1	若齢個体2	前成熟個体	成熟個体1	成熟個体2	成熟個体3
ふ化個体	0	0	0	0	127	4	80
若齢個体1	0.675	0.737	0	0	0	0	0
若齢個体2	0	0.049	0.661	0	0	0	0
前成熟個体	0	0	0.015	0.691	0	0	0
成熟個体1	0	0	0	0.052	0	0	0
成熟個体2	0	0	0	0	0.809	0	0
成熟個体3	0	0	0	0	0	0.809	0.808

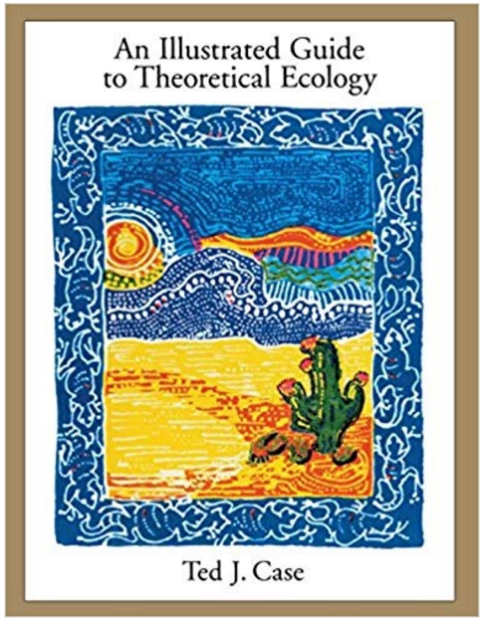
ふ化個体の
生存率

成熟個体あたりの
ふ化個体生産数

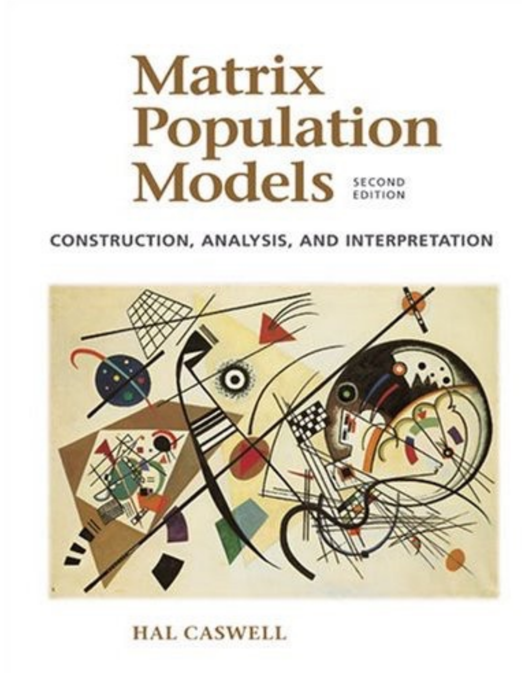
広範な応用範囲　　　個体群動態・保全生態学

参考文献

Case (2000)
行列モデルの初
歩は3＆ 4章に。

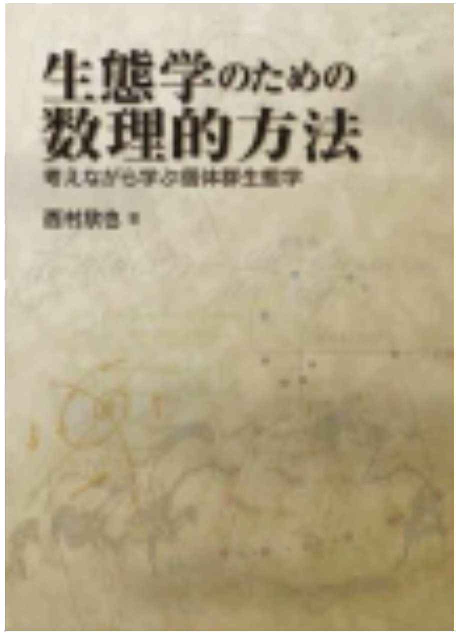


Hal Caswell (2001)
720pp.
詳細な解説書



草木を見つめる科学
（種生物学会編）
３章、４章に応用的解説
数学的基礎の付録

生態学のための数理
的方法（西村欣也）



目次

第１章　量の変化（一変数）
第２章　量の変化（二変数）
第３章　生物学における行列モデル
第４章　行列モデルを用いた様々な統計量
第５章　感度分析
第６章　行列モデルのデータへの応用

第1章　　量の変化(一変数)

第1章　量の変化(一変数)

•時間変化(動態)の記述 (description of dynamics)

微分方程式（時間連続）　ある時刻 t の量を $x(t)$ とする　$\dfrac{dx}{dt} = f(x)$

差分方程式（時間離散）　ある時刻t の量を x_t とする　$x_{t+1} = f(x_t)$

変化のルール

例 : 札幌市の人口、年齢、惑星の数、定期預金

変化のルールが決まると、未来予測ができる

第1節　変化のルール　$x_{t+1} = f(x_t)$

- 例１　不変　惑星の数
- 例２　定数増加　年齢
- 例３　定数倍　細胞分裂、定期預金
- 例４　より複雑　生物集団の個体数など多くの場合

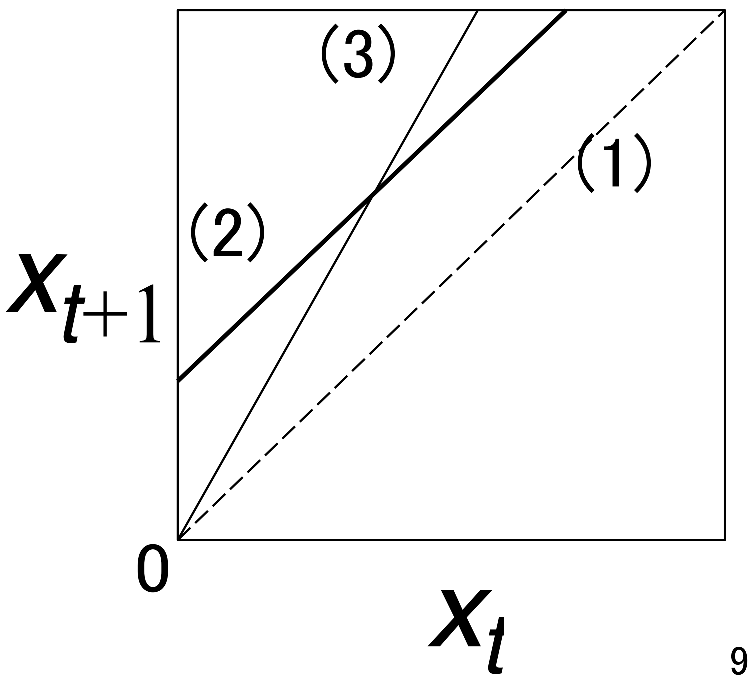
■ ルールをグラフで表す

横軸：x_t　縦軸：x_{t+1}

ルールの式　$f(x_t)$　(1) x_t　(2) $x_t + b$　(3) ax_t

例１と例２はちょっと
ずらすと同じ

線形：$x_{t+1} = rx_t + b$



第１節　変化のルール　$x_{t+1} = f(x_t)$

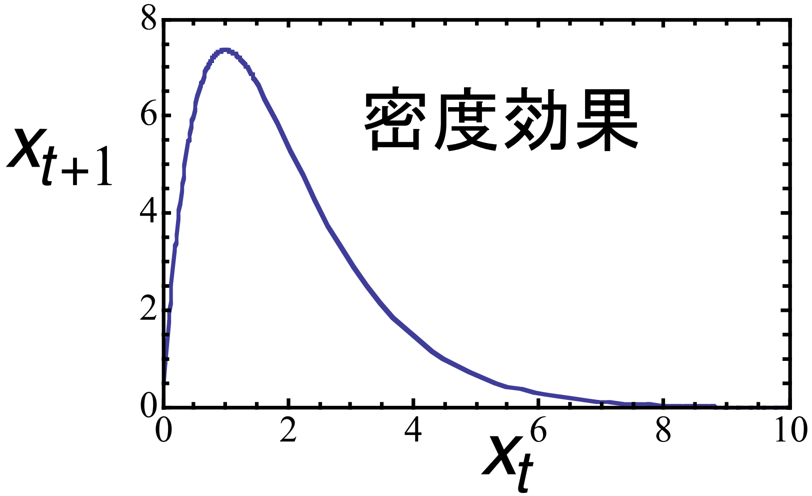
- 例１　不変　惑星の数
- 例２　定数増加　年齢
- 例３　定数倍　細胞分裂、定期預金
- 例４　より複雑　多くの場合

■　ルールをグラフで表す

横軸：x_t　縦軸：x_{t+1}

ルールの式は複雑な関数

ヒメナズナ（砂丘の一年草）
ルールf (x_t)：一山型の関数



第2節　将来の予測

線形：$x_{t+1} = rx_t + b$

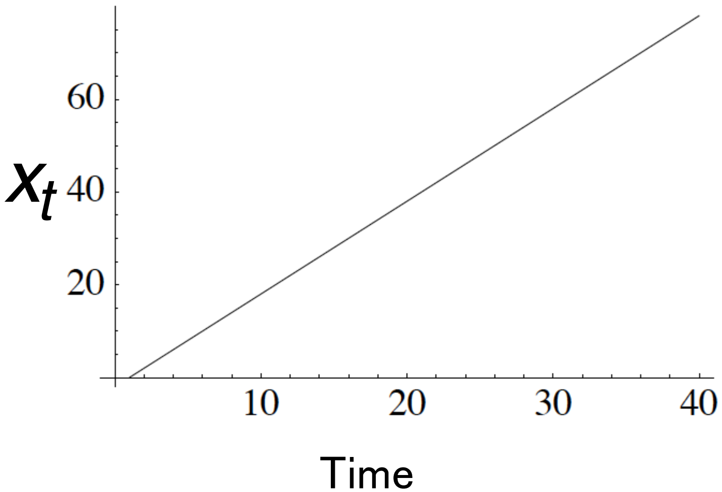
代入

（1）　グラフ　横軸： t　　縦軸：　x_t
（2）　数式で解く(線形の場合、可能。多くの場合、不可能)
　———＞　コンピュータシミュレーション、数値計算

例1	不変	$x_t = x_0$	$r = 1, b = 0$　x_0：初期値
例2	定数増加	$x_t = x_0 + bt$	$r = 1,\ b$:等差
例3	定数倍	$x_t = x_0 r^t$	$b = 0,\ r$:等比

線形の例：1，2，3

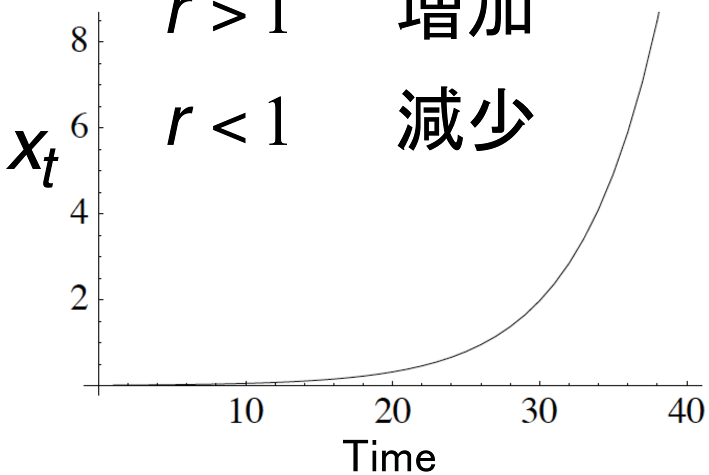
例2



例3

$r > 1$　増加

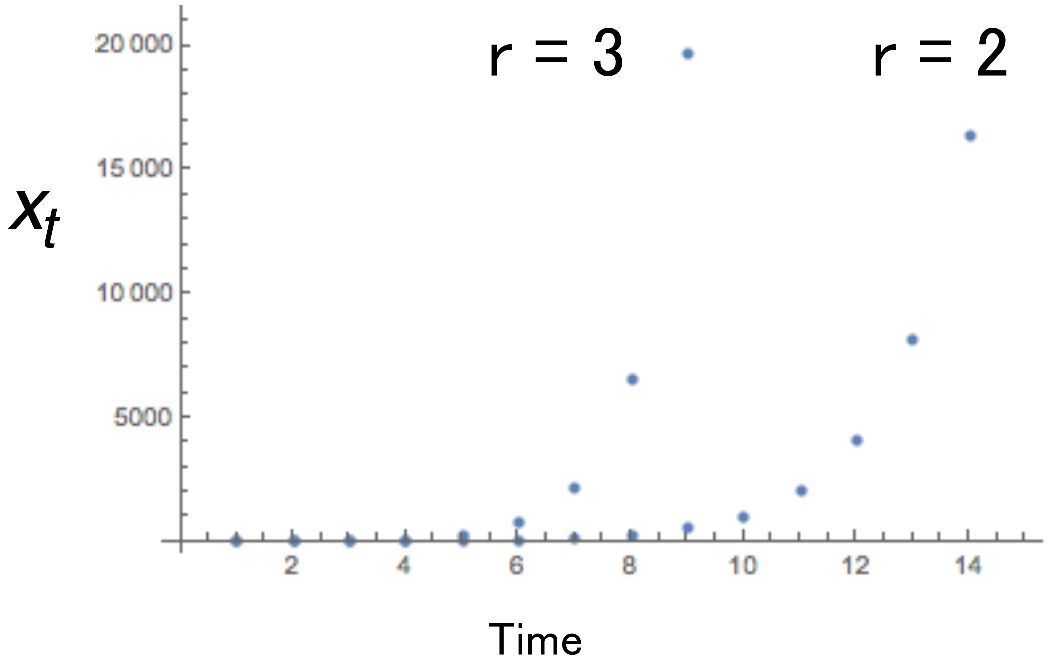
$r < 1$　減少



覚えておいてほしいこと：片対数グラフ

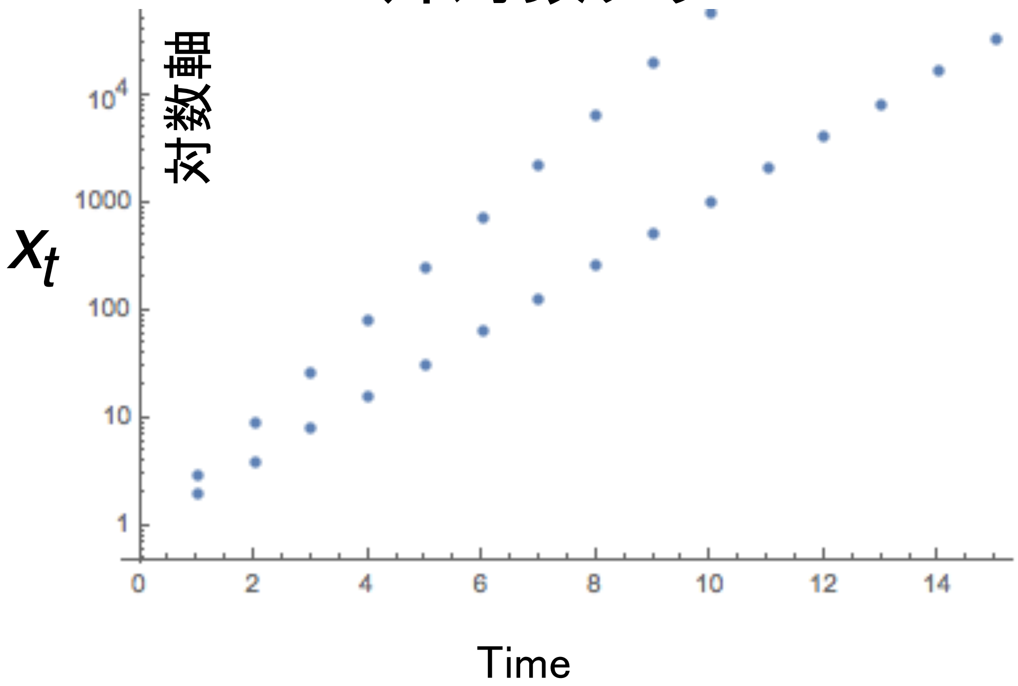
$$x_t = x_0 r^t$$

等比数列
幾何級数 geometric series
指数関数的増加 exponential increase



違いが大きすぎる

片対数グラフ



指数増加は直線増加に変わる

指数増加は直線増加に変わる

$$x_t = x_0 r^t$$

$$\ln x_t = \ln(x_0 r^t) = \ln x_0 + \ln(r^t)$$

$$= \ln r \times t + \ln x_0$$

Y ＝ ln r X+ ln x_0

（傾きln r 、切片ln x_0の直線）

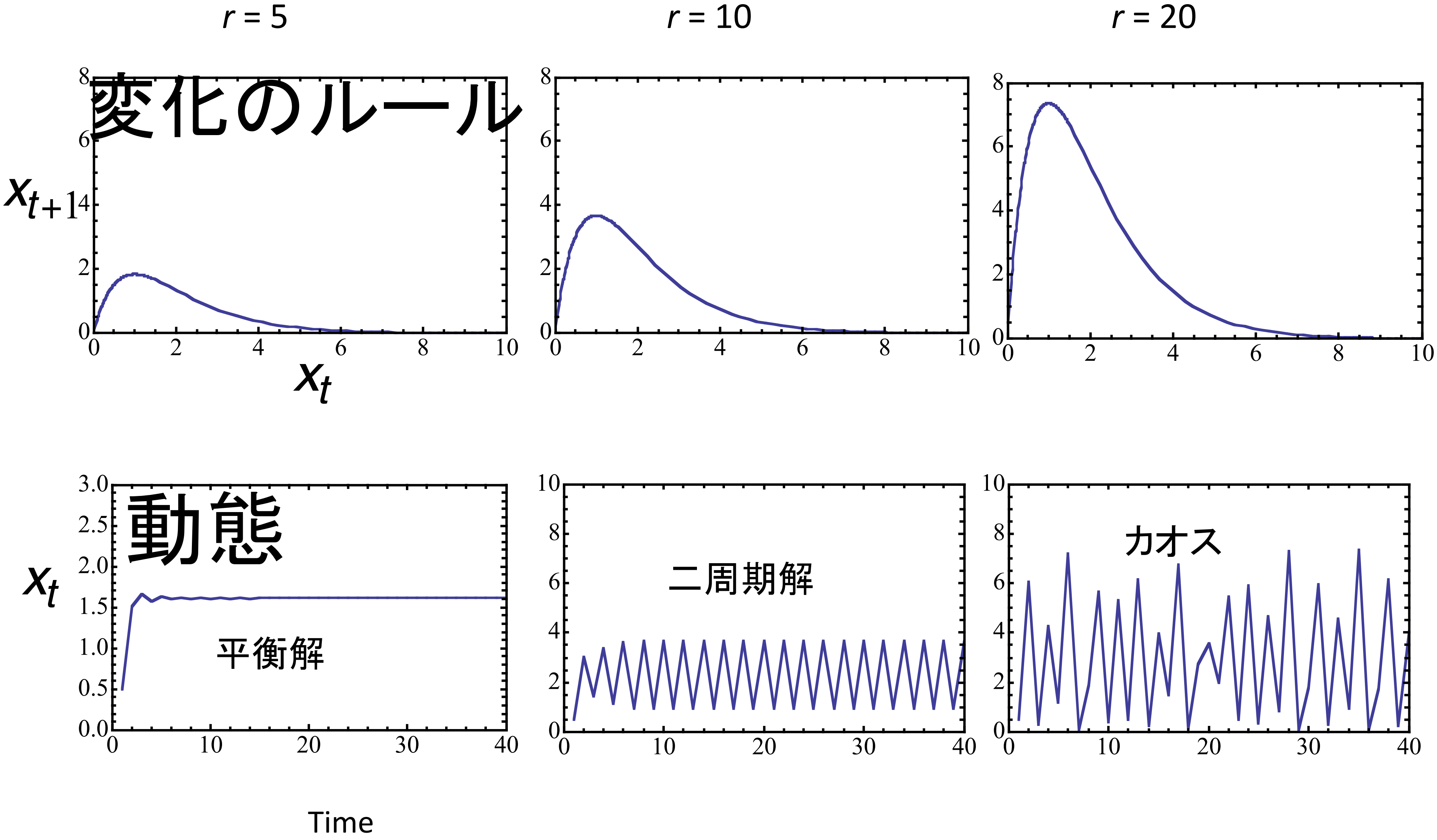
傾きln r はr >1 or r <1で正負が変わる。

直線増加あるいは直線減少

例4:ヒメナズナ(砂丘の一年草)　　ルール $f(x_t) = r\,x_t \exp(-x_t)$　r:繁殖率

変化のルールは、同じ形で倍率だけが違う
例えば、実生の出現率が変化するとか

(Ricker型密度依存関数)



まとめ

◇変化のルールは簡単なもの（線形）から複雑なものまである

◇簡単なものだと解析的に解けるが、普通はそうではない

◇一変数だから動態が簡単に計算できるし、図示化が容易

現実の問題の解決にはならない。
なぜなら、多くの場合複数の量が同時に変化しているから。

おとぎ話：ある村の子供と大人の人口

ある村には大人と子供が住んでいる．子供が翌年に子供でいる確率は7割で、大人になる確率は1割である。また、大人の死ぬ確率は4割で、大人は一人当り平均１．２人の子供を産む。さて、この村の人口は増加傾向にあるだろうか？

第2章　量の変化（二変数）

第2章　量の変化(二変数)

第1節　変化のルール:f(ベクトル)

$$\vec{x}_{t+1} = \vec{f}(\vec{x}_t)$$

$$\vec{x}_t = \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad \text{---->} \quad \begin{cases} x_{1,t+1} = f_1(x_{1,t}, x_{2,t}) \\ x_{2,t+1} = f_2(x_{1,t}, x_{2,t}) \end{cases}$$

(1)二つの量が独立

E：単位行列

例1　変化しない　　地球の半径と月の半径

$$\begin{cases} x_{1,t+1} = x_{1,t} \\ x_{2,t+1} = x_{2,t} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$$

一変数と同じ

例2 定数倍　　異なる利率を持つ二つの定期預金

$$\begin{cases} x_{1,t+1} = (1 + a_1)x_{1,t} \\ x_{2,t+1} = (1 + a_2)x_{2,t} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + a_1 & 0 \\ 0 & 1 + a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$$

一変数と同じ

年利率の定義を！！　　対角行列であるところがミソ

（２）二つの量が非独立（「相互作用がある」と言ってもよい）
例３　札幌市とそれ以外の道内の人口（札幌への移住のみ、移住率一定c）

札幌

それ以外

$$\begin{cases} x_{1,t+1} = x_{1,t} + c x_{2,t} \\ x_{2,t+1} = (1-c) x_{2,t} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1-c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$$

例４　札幌市とそれ以外の道内の人口（札幌への移住とそれ以外への移住、
　移住率一定c_1，c_2）

$$\begin{cases} x_{1,t+1} = (1-c_2) x_{1,t} + c_1 x_{2,t} \\ x_{2,t+1} = c_2 x_{1,t} + (1-c_1) x_{2,t} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-c_2 & c_1 \\ c_2 & 1-c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$$

対角行列じゃない！でも、ルールを決めて式を書けば、
行列に書ける簡単な場合がある。

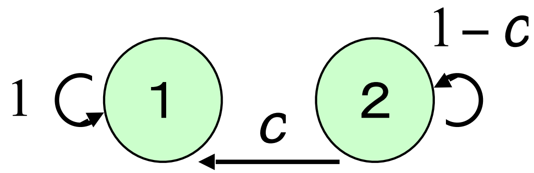
見方を変えよう！
「個体数の変化」ではなく、「状態間の（個体の）流れ」

例３　　札幌市とそれ以外の道内の人口（札幌への移住のみ、移住率一定c）

札幌
それ以外

$$\begin{cases} x_{1,t+1} = x_{1,t} + cx_{2,t} \\ x_{2,t+1} = (1-c)x_{2,t} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1-c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$$

流れ図



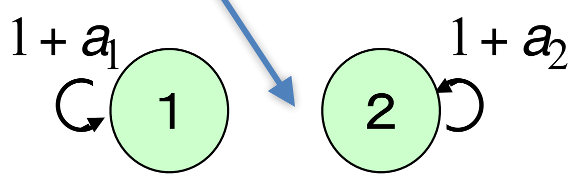
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1-c \end{pmatrix}$$

状態 j から状態 i への矢印のパラメーターを、
i 行 j 列に配置すると、行列ができる。

流れ図と行列(projection matrix)

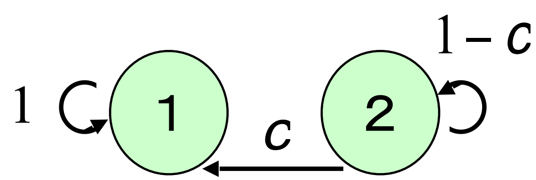
独立の時、対角行列かつ
流れがつながらない

例2



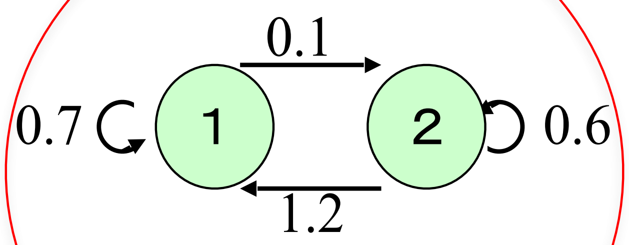
$$\begin{pmatrix} 1+a_1 & 0 \\ 0 & 1+a_2 \end{pmatrix}$$

例3



$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1-c \end{pmatrix}$$

例5



$$\begin{pmatrix} 0.7 & 1.2 \\ 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$$

状態 j から状態 i への矢印についている係数をi 行 j 列の要素とする行列

$$\begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a_1 & 0 \\ 0 & 1+a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1-c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 1.2 \\ 0.1 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$$

この推移行列を用いることで、線形差分方程式を記述することができる

$$\vec{x}_{t+1} = \mathbf{A}\vec{x}_t$$

$\vec{x}_{t+1} = \vec{f}(\vec{x}_t)$ の簡単な場合に当たる

例5 おとぎ話: ある村の子供と大人の人口

ある村には大人と子供が住んでいる. 子供が翌年に子供でいる確率は7割で、大人になる確率は1割である。また、大人の死ぬ確率は4割で、大人は一人当り平均1.２人の子供を産む。さて、この村の人口は増加傾向にあるだろうか？

$$\begin{cases} x_{1,t+1} = 0.7x_{1,t} + 1.2x_{2,t} \\ x_{2,t+1} = 0.1x_{1,t} + 0.6x_{2,t} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 1.2 \\ 0.1 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$$

リアル話:ある村の人口動態

n 歳の子供が翌年に n +1歳である確率は n に依存しており、n が異なるとその確率が異なったりする。・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

複雑になる。どうやって解くのだろう？

「解く」：x_i を時刻 t の関数として表す

第2節　線形2変数ダイナミクスを図にする

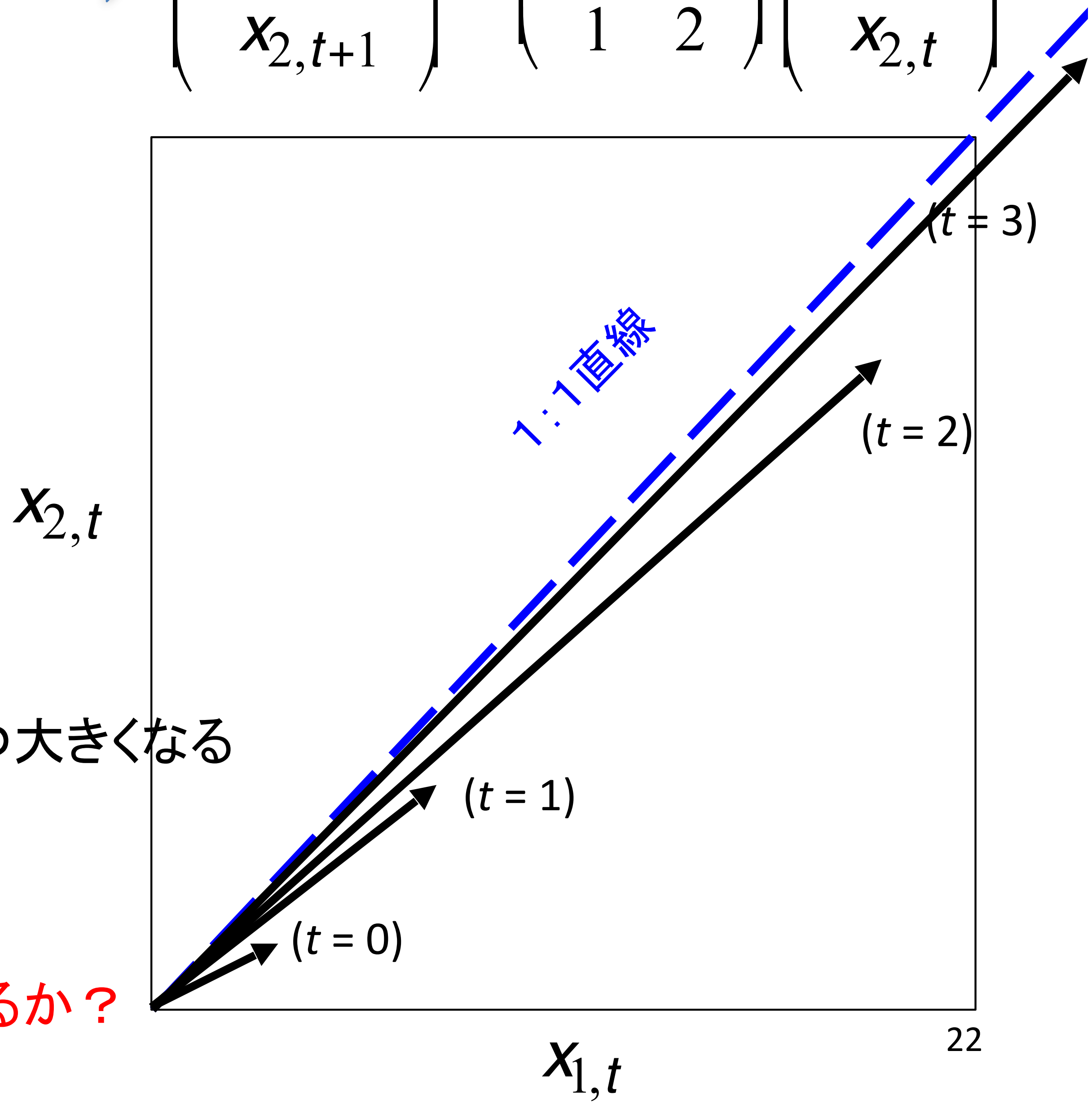
コース1の内容

西

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \qquad \vec{x}_{t+1}=\mathbf{A}\vec{x}_t \Rightarrow \begin{pmatrix}x_{1,t+1}\\ x_{2,t+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{1,t}\\ x_{2,t}\end{pmatrix}$$

初期ベクトル $\begin{pmatrix}x_{1,0}\\ x_{2,0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$

t	0	1	2	3		∞
x1	2	5	14	41	・・・	α
x2	1	4	13	40	・・・	α



ベクトルは時間とともに約3倍ずつ大きくなる
成分の比が1 : 1に収束する

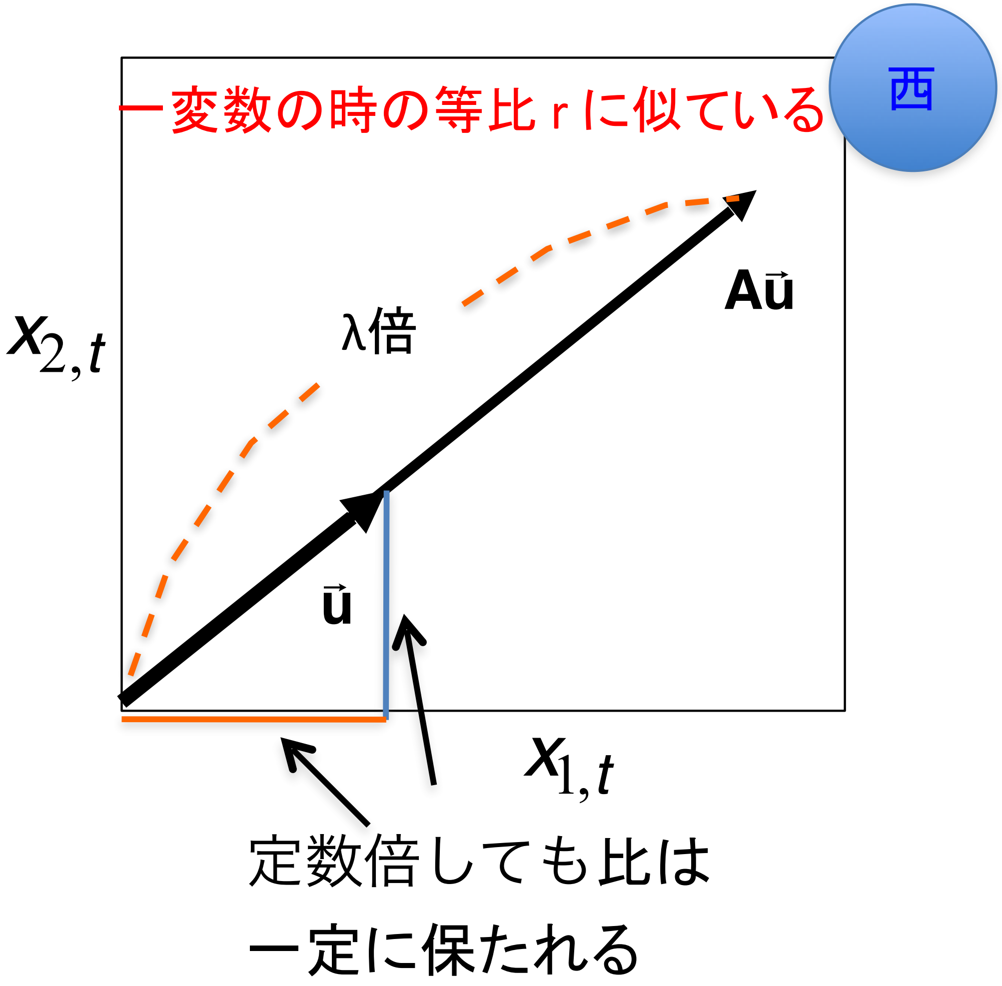
時間が十分に経過すると3倍ずつ
大きくなる。その倍率や比がわかるか？

倍率や比を求めるには？

行列Aを乗じる　$\mathbf{A}\vec{\mathbf{u}}$

倍率λを乗じる　$\lambda\vec{\mathbf{u}}$

たまたまこの二つが一致する
ベクトル　$\vec{\mathbf{u}}$　はあるだろうか？



$$\lambda\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{u}} \qquad \lambda\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

◇ 普通は零ベクトルが答え（自明解）
trivial solution

$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ これじゃあ意味がない！！

◇ 特殊な場合；零ベクトル以外の解がある条件

$$\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0$$

次頁で説明

$$\det(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})=0 \Rightarrow \frac{\lambda-2}{-1}=\frac{-1}{\lambda-2}$$

$$\lambda\vec{\mathbf{u}}=\mathbf{A}\vec{\mathbf{u}}$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\frac{\lambda-2}{-1}=\frac{-1}{\lambda-2}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda-2&-1\\-1&\lambda-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

◇二つの方程式が独立じゃない

$$(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})\vec{\mathbf{u}}=\vec{0}$$

$$\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\frac{\lambda-2}{-1}=\frac{-1}{\lambda-2} \Longleftrightarrow \det(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})=0$$ （続き）

$$(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})\vec{\mathbf{u}}=\vec{0} \Rightarrow \mathbf{P}\vec{\mathbf{u}}=\vec{0}$$

定理 $\mathbf{P}\vec{\mathbf{u}}=\vec{0}$ が $\vec{\mathbf{u}}=\vec{0}$（自明な解）以外の解を持つ必要十分条件は

ウエブでチェックしてください

$$\det\mathbf{P}=0$$ （Pの行列式がゼロ）

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の場合 $\mathbf{P}=\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{pmatrix}$

$$\det\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{pmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-2)-(-1)(-1)=0$$

$$\frac{\lambda-2}{-1}=\frac{-1}{\lambda-2} \Longleftrightarrow \det(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})=0$$ （さらに続き）

$$\det\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{pmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-2)-(-1)(-1)=0$$

$$\frac{\lambda-2}{-1}=\frac{-1}{\lambda-2} \Rightarrow \lambda^2-4\lambda+3=(\lambda-3)(\lambda-1)=0 \Rightarrow \lambda_1=3,\ \lambda_2=1$$

$\lambda_1=3$ の場合 $\quad \mathbf{P}=\begin{pmatrix} 3-2 & -1 \\ -1 & 3-2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3-2 & -1 \\ -1 & 3-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} u_1-u_2=0 \\ -u_1+u_2=0 \end{matrix} \Rightarrow \frac{u_1}{u_2}=\frac{1}{1}$$

◇二つの方程式が独立じゃない

$$\vec{\mathbf{u}}_1=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

同様に $\lambda_2=1$ の場合 $\quad \mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ -1 & 1-2 \end{pmatrix}$

$$\vec{\mathbf{u}}_2=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \end{pmatrix}$$

まとめると

問題: 行列Aを乗じた結果と倍率λを乗じた結果、たまたまこの二つが一致するベクトル(**u**)はあるだろうか？

$$\lambda\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{u}} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

比1:1の直線に矢印が収束した理由

$$\lambda_1 = 3 \quad \vec{\mathbf{u}}_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

このベクトルは定数倍の任意性をもつ

$$\lambda_2 = 1 \quad \vec{\mathbf{u}}_2 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \end{pmatrix}$$

それぞれ固有値、それに属する(右)固有ベクトルという

定数倍の任意性: $\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ どれでもいい

行列モデルでよく使われるのは、要素の和が1になる $\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$,

演習問題

以下の行列の固有値(λ)、(右)固有ベクトル($\mathbf{u}$)を求めよ。

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0.7 & 1.2 \\ 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

おとぎ話の村の例

解答

(a)

$$\lambda = 7, -2$$

$$\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 4\alpha \\ 5\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \end{pmatrix}$$

(b)

$$\lambda = 1,\ \ 0.3$$

$$\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 0.97\alpha \\ 0.24\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.95\beta \\ -0.32\beta \end{pmatrix}$$

おとぎ話の村は増えも減りもしない

(c)

$$\lambda = -1, -3$$

$$\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ 2\beta \end{pmatrix}$$

(d)

$$\lambda = 6,\ \ 1,\ \ -1$$

$$\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 5\alpha \\ 3\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3\beta \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma \\ -2\gamma \\ 3\gamma \end{pmatrix}$$

第3節　線形ダイナミクスの解
（n行n列行列の一般解）

一変数の時の等比 r に似ている

$$\vec{x}_{t+1} = \mathbf{A}\vec{x}_t$$

初期値 $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \end{pmatrix}$

$$\vec{x}_t = \mathbf{A}^t \vec{x}_0$$

アカウミガメ

	ふ化個体	若齢個体1	若齢個体2	前成熟個体	成熟個体1	成熟個体2	成熟個体3
ふ化個体	0	0	0	0	127	4	80
若齢個体1	0.675	0.737	0	0	0	0	0
若齢個体2	0	0.049	0.661	0	0	0	0
前成熟個体	0	0	0.015	0.691	0	0	0
成熟個体1	0	0	0	0.052	0	0	0
成熟個体2	0	0	0	0	0.809	0	0
成熟個体3	0	0	0	0	0	0.809	0.808

ベクトル・行列公式集

公式１：横ベクトルと縦ベクトルの積

$$\mathbf{a}\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

結果はスカラー

ベクトル**a, b**の内積

公式２：行列と縦ベクトルの積

公式１より

$$\begin{array}{c} \mathbf{a_1} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1\mathbf{b} \\ \mathbf{a}_2\mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n\mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_k \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k} b_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk} b_k \end{pmatrix}$$

結果は縦ベクトル

ベクトル・行列公式集（続き）

公式３：横ベクトルと行列の積

結果は横ベクトル

$$
\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \mathbf{b_1} & & & \end{array} \\
\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}
\end{array}
= \mathbf{a} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} \mathbf{ab}_1 & \mathbf{ab}_2 & \cdots \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_k b_{k2} & \cdots \end{pmatrix}
$$

公式２、３から行列同士の積の公式もできる

公式４：行列と対角行列との積

公式１より

$$
\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \cdots & \lambda_n v_n \end{pmatrix}
$$

v1などが縦ベクトルに変わっても

$$
\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbf{v}_1 & \lambda_2 \mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_n \mathbf{v}_n \end{pmatrix}
$$

結果は行列

解を知るには準備が必要：行列の対角化（ちょっと数学）

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

固有値、$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n,$

固有ベクトル、$\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{1n} \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2=\begin{pmatrix} u_{21} \\ \vdots \\ u_{2n} \end{pmatrix}, \cdots, \mathbf{u}_n=\begin{pmatrix} u_{n1} \\ \vdots \\ u_{nn} \end{pmatrix}$

固有値の式

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_1=\lambda_1\mathbf{u}_1$$
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_2=\lambda_2\mathbf{u}_2$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_n=\lambda_n\mathbf{u}_n$$

縦ベクトル＝縦ベクトル

n本を横に並べると

$$\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_1, \mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_n\right)=\left(\lambda_1\mathbf{u}_1, \lambda_2\mathbf{u}_2, \cdots, \lambda_n\mathbf{u}_n\right)$$

n 行 n 列　＝　n 行 n 列

行列の対角化

$$\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n) = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1n} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \vdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_1 &= \lambda_1 \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_2 &= \lambda_2 \mathbf{u}_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_n &= \lambda_n \mathbf{u}_n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_1, \mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_n\right)}_{\text{n 行 n 列}} \underset{=}{=} \underbrace{\left(\lambda_1\mathbf{u}_1, \lambda_2\mathbf{u}_2, \cdots, \lambda_n\mathbf{u}_n\right)}_{\text{n 行 n 列}}$$

公式４を使う

$$\mathbf{A}\cdot\underbrace{\left(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\right)}_{\text{n 行 n 列}} = \underbrace{\left(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\right)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\text{n 行 n 列}}$$

全部をまとめて
行列を使うと
簡単になりました

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{U} = \mathbf{U}\cdot\Lambda$$

行列の対角化

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{U}=\mathbf{U}\cdot\Lambda \quad \xrightarrow[\text{逆行列をかけると}]{\text{右からUの}} \quad \mathbf{A}=\mathbf{U}\cdot\Lambda\cdot\mathbf{U}^{-1}$$

行列Aの t 乗を求めてみよう

$$\mathbf{A}^t=(\mathbf{U}\cdot\Lambda\cdot\mathbf{U}^{-1})^t$$

$$=\overbrace{(\mathbf{U}\cdot\Lambda\cdot\mathbf{U}^{-1})(\mathbf{U}\cdot\Lambda\cdot\mathbf{U}^{-1})\cdots(\mathbf{U}\cdot\Lambda\cdot\mathbf{U}^{-1})}^{t}$$

$$=\mathbf{U}\cdot\overbrace{(\Lambda\cdot\underbrace{\mathbf{U}^{-1}\cdot\mathbf{U}}_{\mathbf{E}})(\Lambda\cdot\underbrace{\mathbf{U}^{-1}\cdot\mathbf{U}}_{\mathbf{E}})\cdots(\Lambda\cdot\underbrace{\mathbf{U}^{-1}\cdot\mathbf{U}}_{\mathbf{E}})}^{t-1}\cdot\Lambda\cdot\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{U}\cdot\Lambda^t\cdot\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{U}\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1^t & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n^t\end{pmatrix}\cdot\mathbf{U}^{-1}$$

$$\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}^{-1}\cdot\mathbf{U}=\mathbf{U}\cdot\mathbf{U}^{-1}=\mathbf{E}$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{x}(t) = \overbrace{\mathbf{U} \cdot \Lambda^t \cdot \mathbf{U}^{-1}}^{\mathbf{A}^t} \cdot \mathbf{x}(0) = \boxed{\mathbf{U} \cdot \Lambda^t} \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{U} \cdot \Lambda^t = \left(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\right) \begin{pmatrix} \lambda_1^t & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^t \end{pmatrix}$$

公式４を使う

$$= \left(\lambda_1^t \mathbf{u}_1,\ \lambda_2^t \mathbf{u}_2,\ \cdots\ ,\ \lambda_n^t \mathbf{u}_n\right)$$

連立差分方程式：行列モデル

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{x}(0)$$

$$= \mathbf{U} \cdot \Lambda^t \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{x}(0) = \mathbf{U} \cdot \Lambda^t \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{U} \cdot \Lambda^t = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^t & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^t \end{pmatrix},$$

$$= \left(\lambda_1^t \mathbf{u}_1,\ \lambda_2^t \mathbf{u}_2,\ \cdots,\ \lambda_n^t \mathbf{u}_n \right)$$

$$\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

公式１を複数回使う

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \lambda_1^t \mathbf{u}_1 + c_2 \lambda_2^t \mathbf{u}_2 + \cdots + c_n \lambda_n^t \mathbf{u}_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i (\lambda_i)^t \vec{\mathbf{u}}_i$$

$$\mathbf{x}(0) = c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + c_n \mathbf{u}_n$$

n行n列行列の一般解のまとめ

＊行列Aの一次独立な右固有ベクトルがn個　$\vec{\mathbf{u}}_1,\ \vec{\mathbf{u}}_2, \cdots$　存在すれば、

解は
（＊）
$$\vec{x}_t = \sum_{i=1}^{n} c_i (\lambda_i)^t \vec{\mathbf{u}}_i$$

式中、c_i は $\vec{x}_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i \vec{\mathbf{u}}_i$ を満たす係数

λ_iは行列Aの固有値　$\lambda_i \vec{\mathbf{u}}_i = \mathbf{A} \vec{\mathbf{u}}_i$　（固有ベクトルは定数倍の任意性をもつ）

λ_i は　$\det(\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0$（固有値方程式）によって求められる　**E** : 単位行列

まとめ

◇ 二変数のモデルであっても、変化のルールが複雑であれば、一般には解くことができない。また、解の予測をすることも難しい。

◇線形のモデルでは、流れ図により変化のルールを直観的に理解できる。また、n変数のモデルであっても解析的に解くことができる。

◇線形モデルを解く鍵は、固有値とその（右）固有ベクトルである。

◇おとぎ話の村の人口は、少し時間が経つと増えも減りもしなくなる(理由は以下）。

$$\lambda = 1,\ \ 0.3$$

$$\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 0.97\alpha \\ 0.24\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.95\beta \\ -0.32\beta \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_t = \sum_{i=1}^{2} c_i (\lambda_i)^t \vec{\mathbf{u}}_i = c_1 (\lambda_1)^t \vec{\mathbf{u}}_1 + c_2 (\lambda_2)^t \vec{\mathbf{u}}_2$$

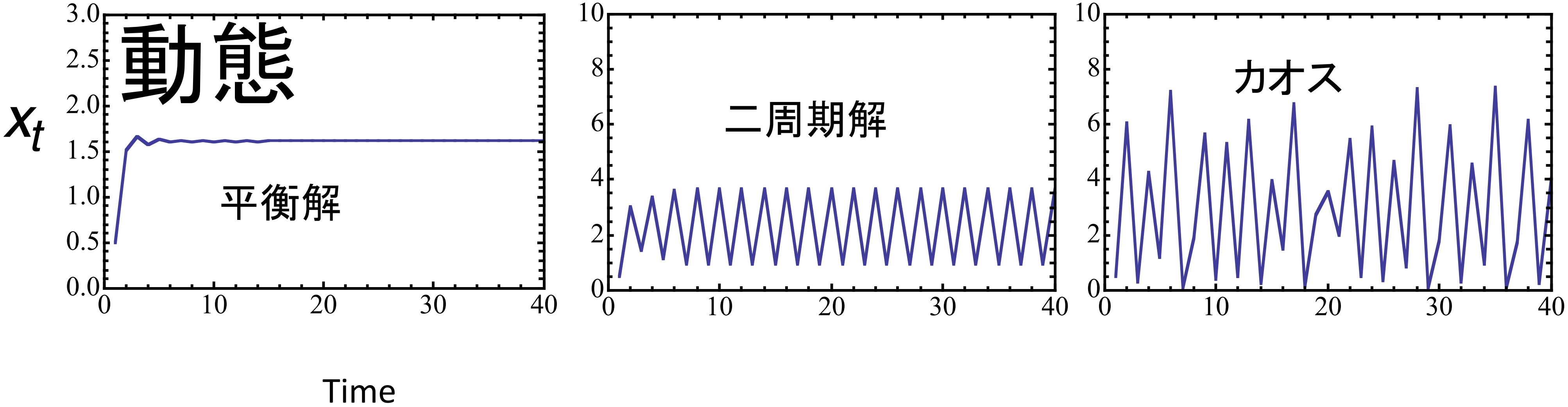
$$= c_1 (1)^t \begin{pmatrix} 0.97 \\ 0.24 \end{pmatrix} + c_2 (0.3)^t \begin{pmatrix} 0.95 \\ -0.32 \end{pmatrix}$$

$$\approx c_1 (1)^t \begin{pmatrix} 0.97 \\ 0.24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.97 c_1 \\ 0.24 c_1 \end{pmatrix}$$

例4：ヒメナズナ（砂丘の一年草）　　ルール $f(x_t) = r\, x_t \exp(-x_t)$　r：繁殖率

（Ricker型密度依存関数）

蜘蛛の巣法(Cob-web diagram)



n行n列行列の一般解のまとめ

＊行列Aの一次独立な右固有ベクトルがn個 $\vec{\mathbf{u}}_1$, $\vec{\mathbf{u}}_2, \cdots$ 存在すれば、

存在する条件を調べよう。ダメな例も