

Workshop 2-2

行列モデルを使った集団生物学：
発展編(生育段階構成モデルとその基本統計量)

行列モデルの数学的基礎

高田 壮則(北海道大学)

生態学における数理モデル

動態モデル: Malthusモデル、Logisticモデル、競争方程式、
Lotka-Volterraモデル、**推移行列モデル**、
拡散方程式モデル、格子モデル…

最適戦略モデル: 卵サイズモデル、展葉・落葉戦略モデル
(Optimal strategy model) 繁殖スケジュールモデル、採餌戦略モデル

ESSモデル: タカハトゲーム、性比モデル、分散モデル
(Evolutionarily Stable Strategy)
進化的に安定な戦略

ウミガメ保護に使われたモデル

- 世界の7種類のウミガメはすべて絶滅危惧指定
- 保護対策:産卵場所、卵、ふ化直後の個体

Q1:本当に絶滅しそうなのか?

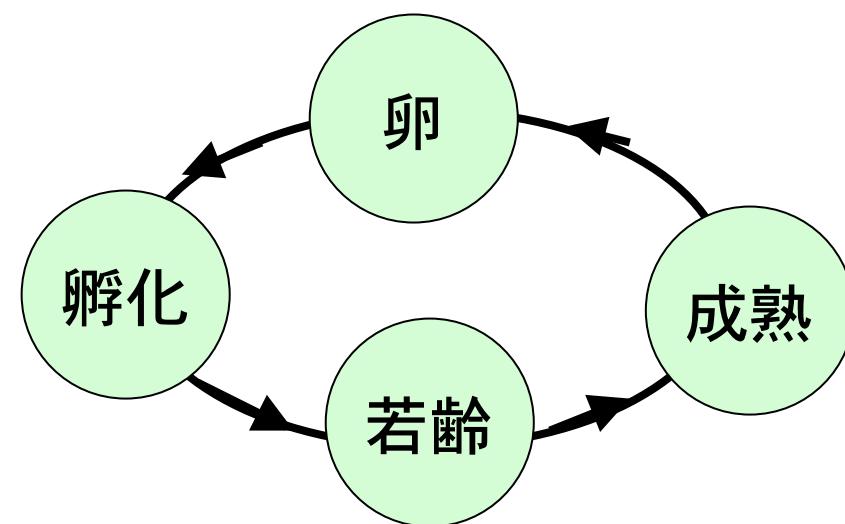
Q2:絶滅の至近要因は何か?

Q3:従来の保護対策が必要なのか?

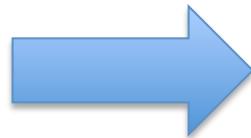
Q4:従来の保護対策で十分なのか?

ウミガメの生活史の
データが必要

生活史段階の動態
を記述するモデルが必要



生活史段階の動態
を記述するモデルが必要



推移行列モデル
(複数の状態をもつ主体の動態)
Dynamics of an entity with multiple states

アカウミガメ



推移行列

	ふ化個体	若齢個体	若齢個体	前成熟個 体	成熟個体	成熟個体	成熟個体
ふ化個体	0	0	0	0	127	4	80
若齢個体1	0.675	0.737	0	0	0	0	0
若齢個体2	0	0.049	0.661	0	0	0	0
前成熟個体	0	0	0.015	0.691	0	0	0
成熟個体1	0	0	0	0.052	0	0	0
成熟個体2	0	0	0	0	0.809	0	0
成熟個体3	0	0	0	0	0	0.809	0.808

ふ化個体の
生存率

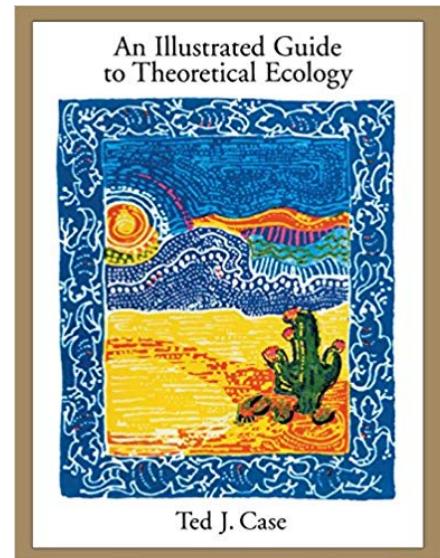
成熟個体あたりの
ふ化個体生産数

広範な応用範囲

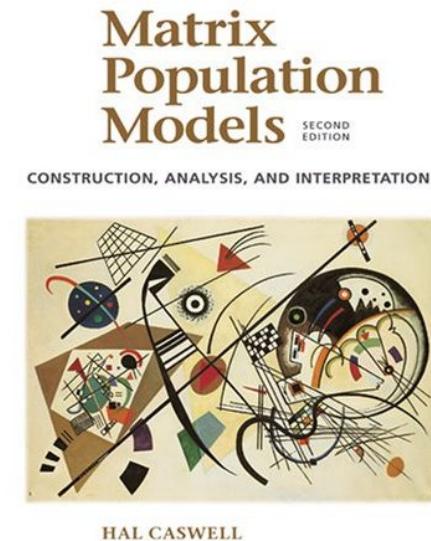
個体群動態・保全生態学

参考文献

Case (2000)
行列モデルの初
歩は3& 4章に。



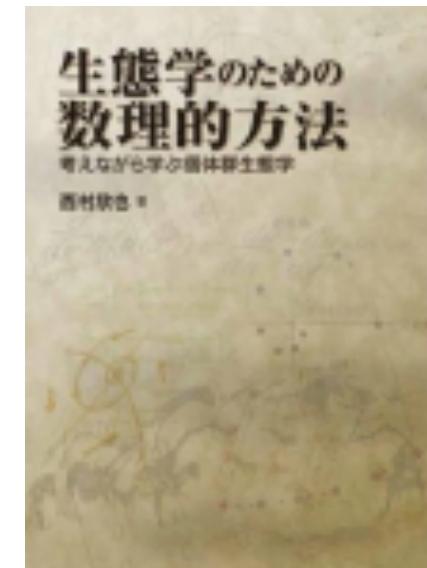
Hal Caswell (2001)
720pp.
詳細な解説書



草木を見つめる科学
(種生物学会編)
3章、4章に応用的解説
数学的基礎の付録



生態学のための数理的方法(西村欣也)



目次

第1章 量の変化(一変数)

第2章 量の変化(二変数)

第3章 生物学における行列モデル

第4章 行列モデルを用いた様々な統計量

第5章 感度分析

第6章 行列モデルのデータへの応用

第1章 量の変化(一変数)

第1章 量の変化(一変数)

- 時間変化(動態)の記述 (description of dynamics)

微分方程式 ある時刻 t の量を $x(t)$ とする $\frac{dx}{dt} = f(x)$
(時間連続)

差分方程式 ある時刻 t の量を x_t とする $x_{t+1} = f(x_t)$
(時間離散)

例：札幌市の人口、年齢、惑星の数、定期預金

変化のルール

変化のルールが決まると、未来予測ができる

第1節 変化のルール

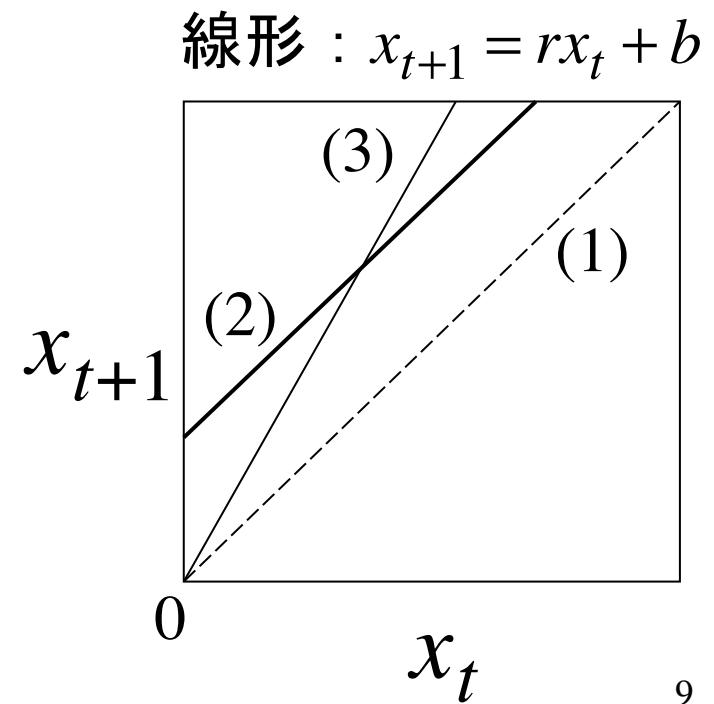
$$x_{t+1} = f(x_t)$$

- 例1 不変 惑星の数
- 例2 定数增加 年齢
- 例3 定数倍 細胞分裂、定期預金
- 例4 より複雑 生物集団の個体数など多くの場合

■ ルールをグラフで表す

横軸 : x_t 縦軸 : x_{t+1}

ルールの式 $f(x_t)$ (1) x_t (2) $x_t + b$
(3) ax_t



第1節 変化のルール

$$x_{t+1} = f(x_t)$$

- 例1 不変 惑星の数
- 例2 定数增加 年齢
- 例3 定数倍 細胞分裂、定期預金
- 例4 より複雑 多くの場合

■ ルールをグラフで表す



横軸 : x_t

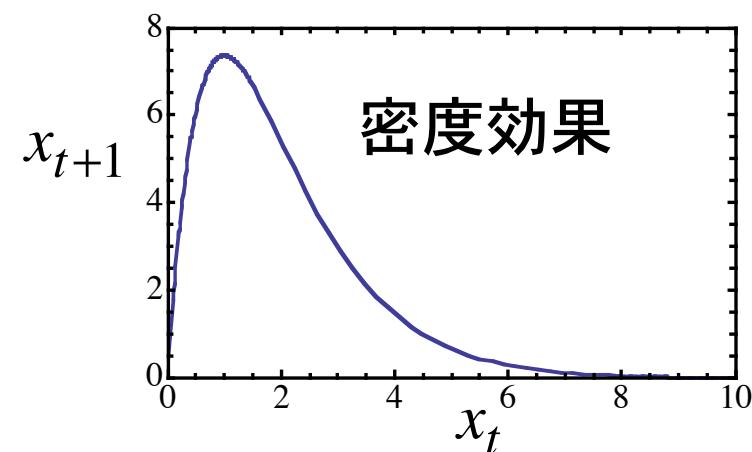
縦軸 : x_{t+1}

ルールの式

$$f(x_t)$$

(4) 複雑な関数
関数で書けないかも

ヒメナズナ(砂丘の一年草)
ルール $f(x_t)$:一山型の関数



第2節 将来の予測

線形 : $x_{t+1} = rx_t + b$

(1) グラフ 横軸: t 縦軸: x_t

(2) 解析的に解く(線形の場合、可能。多くの場合、不可能)

→ コンピュータシミュレーション、数値計算

例1 不変

$$x_t = x_0 \quad r = 1, b = 0 \quad x_0 : \text{初期値}$$

例2 定数増加

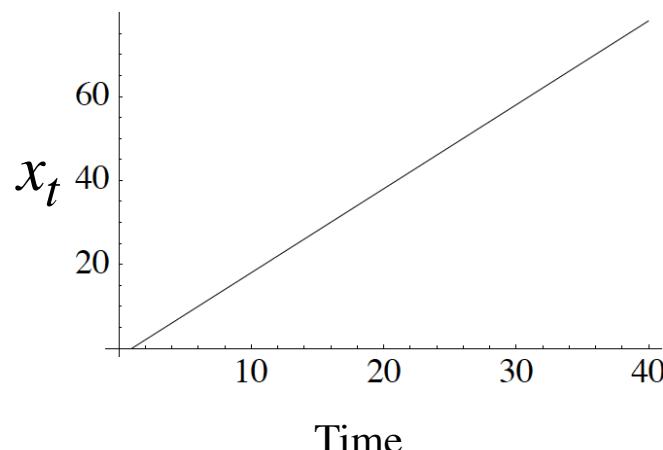
$$x_t = x_0 + bt \quad r = 1, b : \text{等差}$$

例3 定数倍

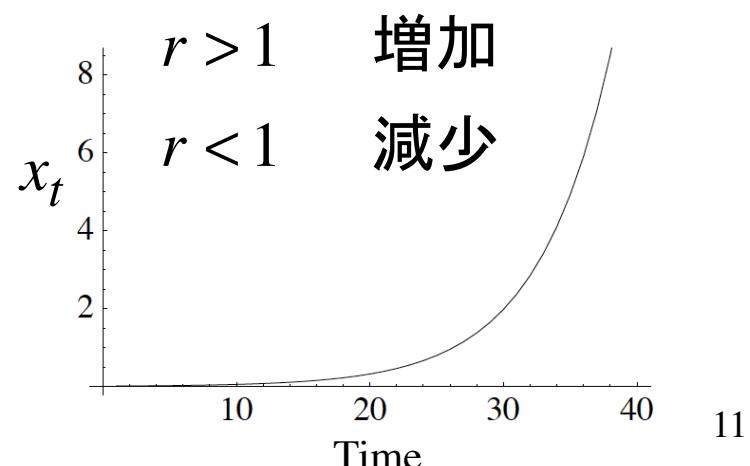
$$x_t = x_0 r^t \quad b = 0, r : \text{等比}$$

線形の例: 1, 2, 3

例2



例3



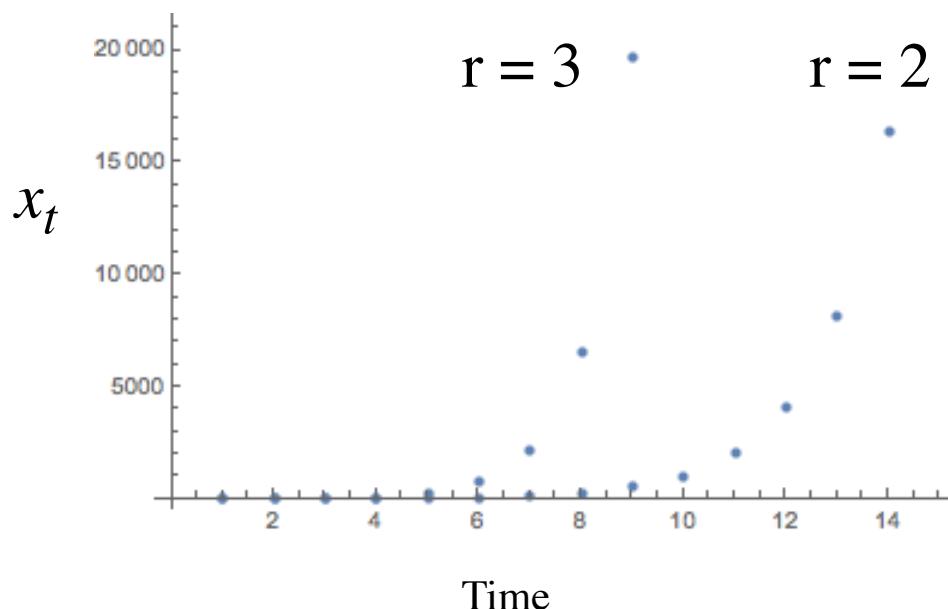
覚えておいてほしいこと: 片対数グラフ

$$x_t = x_0 r^t$$

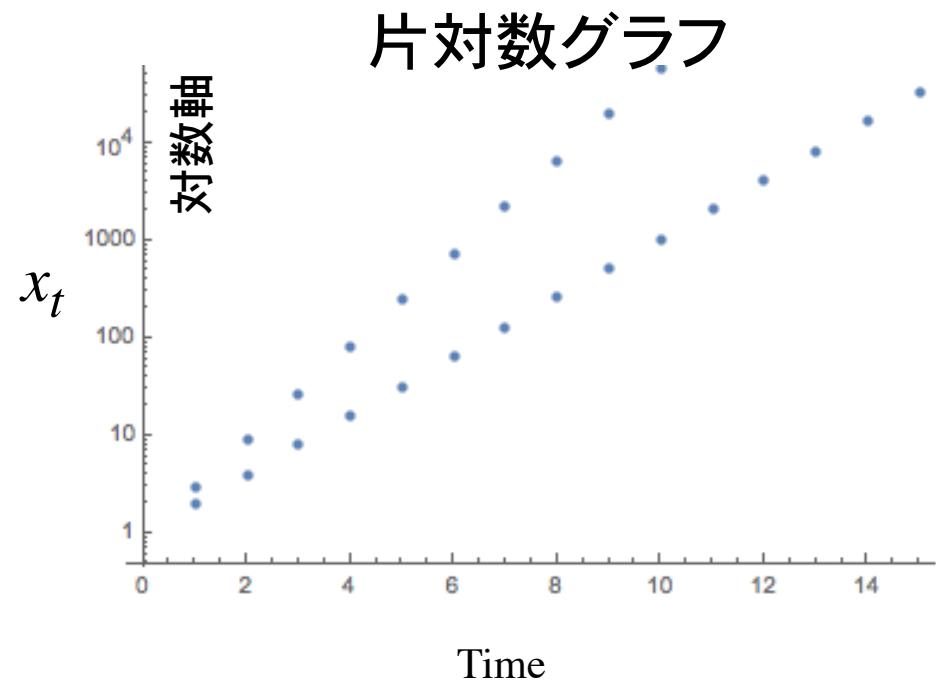
等比数列

幾何級数 geometric series

指数関数的増加 exponential increase



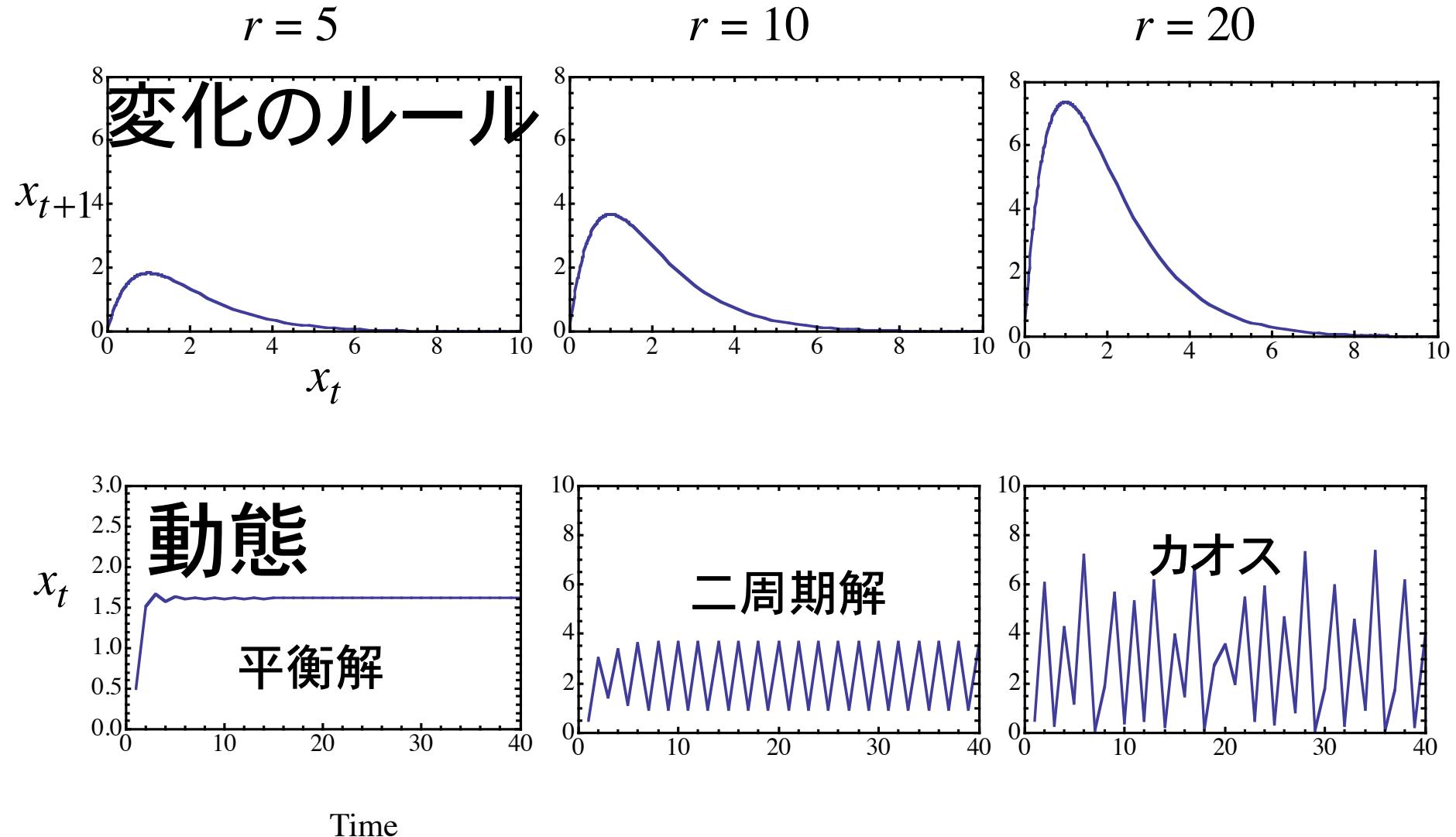
違いが大きすぎる



指数増加は直線増加に変わる

例4:ヒメナズナ(砂丘の一年草) ルール $f(x_t) = r x_t \exp(-x_t)$ r : 繁殖率

変化のルールは、同じ形で倍率だけが違う →
例えば、実生の出現率が変化するとか



まとめ

- ✧ 変化のルールは簡単なもの(線形)から複雑なものまである
- ✧ 簡単なものだと解析的に解けるが、普通はそうではない
- ✧ 一変数だから動態が簡単に計算できるし、図示化が容易

現実の問題の解決にはならない。

なぜなら、多くの場合複数の量が同時に変化しているから。

おとぎ話：ある村の子供と大人の人口

ある村には大人と子供が住んでいる。子供が翌年に子供でいる確率は7割で、大人になる確率は1割である。また、大人の死ぬ確率は4割で、大人は一人当たり平均1.2人の子供を産む。さて、この村の人口は増加傾向にあるだろうか？

第2章 量の変化(二変数)

第2章 量の変化(二変数)

第1節 変化のルール: f (ベクトル)

$$\vec{x}_{t+1} = \vec{f}(\vec{x}_t)$$

$$\vec{x}_t = \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_{1,t+1} = f_1(x_{1,t}, x_{2,t}) \\ x_{2,t+1} = f_2(x_{1,t}, x_{2,t}) \end{cases}$$

(1) 二つの量が独立

例1 変化しない

地球の半径と月の半径

$$\begin{cases} x_{1,t+1} = x_{1,t} \\ x_{2,t+1} = x_{2,t} \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} E: \text{単位行列} \\ \text{一変数と同じ} \end{array}$$

例2 定数倍

異なる利率を持つ二つの定期預金

$$\begin{cases} x_{1,t+1} = (1 + a_1)x_{1,t} \\ x_{2,t+1} = (1 + a_2)x_{2,t} \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + a_1 & 0 \\ 0 & 1 + a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$$

対角行列であるところがミソ

一変数と同じ
16

(2)二つの量が非独立(「相互作用がある」と言ってもよい)

例3 札幌市とそれ以外の道内の人ロ(札幌への移住のみ、移住率一定 c)

$$\begin{array}{ll} \text{札幌} & \left\{ \begin{array}{l} x_{1,t+1} = x_{1,t} + cx_{2,t} \\ x_{2,t+1} = (1 - c)x_{2,t} \end{array} \right. \\ \text{それ以外} & \left\{ \begin{array}{l} x_{1,t+1} = x_{1,t} + cx_{2,t} \\ x_{2,t+1} = (1 - c)x_{2,t} \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 - c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$$

例4 札幌市とそれ以外の道内の人ロ(札幌への移住とそれ以外への移住、移住率一定 c_1, c_2)

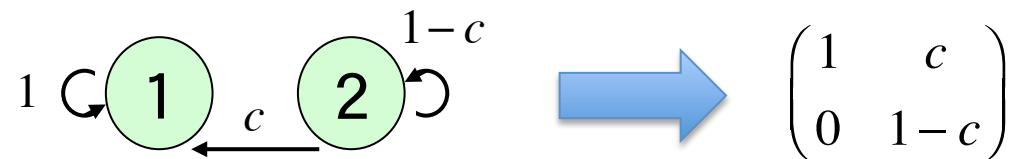
$$\begin{array}{ll} & \left\{ \begin{array}{l} x_{1,t+1} = (1 - c_2)x_{1,t} + c_1x_{2,t} \\ x_{2,t+1} = c_2x_{1,t} + (1 - c_1)x_{2,t} \end{array} \right. \\ & \left\{ \begin{array}{l} x_{1,t+1} = (1 - c_2)x_{1,t} + c_1x_{2,t} \\ x_{2,t+1} = c_2x_{1,t} + (1 - c_1)x_{2,t} \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - c_2 & c_1 \\ c_2 & 1 - c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$$

対角行列じゃない!でも、ルールを決めて式を書けば、行列に書ける簡単な場合がある。

見方を変えよう！
「状態の変化」ではなく、「状態間の（個体の）流れ」

例3 札幌市とそれ以外の道内の人団（札幌への移住のみ、移住率一定 c ）

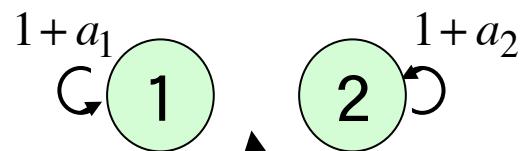
$$\begin{array}{ll} \text{札幌} & \left\{ \begin{array}{l} x_{1,t+1} = x_{1,t} + cx_{2,t} \\ x_{2,t+1} = (1 - c)x_{2,t} \end{array} \right. \\ \text{それ以外} & \left(\begin{array}{l} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 1 & c \\ 0 & 1 - c \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{array} \right) \end{array}$$



状態 j から状態 i への矢印のパラメーターを、
 i 行 j 列に配置すると、行列ができる。

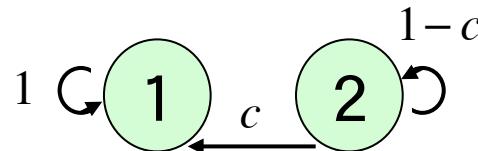
流れ図と推移行列(projection matrix)

例2



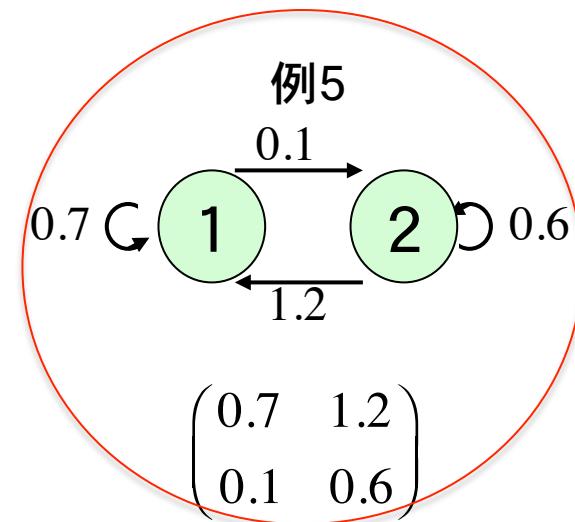
$$\begin{pmatrix} 1+a_1 & 0 \\ 0 & 1+a_2 \end{pmatrix}$$

例3



$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1-c \end{pmatrix}$$

例5



$$\begin{pmatrix} 0.7 & 1.2 \\ 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$$

変数 j から変数 i への矢印についている係数を i 行 j 列の要素とする行列

独立の時、対角行列かつ流れがつながらない

この推移行列を用いることで、線形差分方程式を記述することができる

$$\vec{x}_{t+1} = \mathbf{A}\vec{x}_t$$

$$\vec{x}_{t+1} = \vec{f}(\vec{x}_t) \text{ の簡単な場合}$$

例5 おとぎ話：ある村の子供と大人の人口

ある村には大人と子供が住んでいる。子供が翌年に子供でいる確率は7割で、大人になる確率は1割である。また、大人の死ぬ確率は4割で、大人は一人当たり平均1.2人の子供を産む。さて、この村の人口は増加傾向にあるだろうか？

$$\begin{cases} x_{1,t+1} = 0.7x_{1,t} + 1.2x_{2,t} \\ x_{2,t+1} = 0.1x_{1,t} + 0.6x_{2,t} \end{cases} \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 1.2 \\ 0.1 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$$

リアル話：ある村の子供と大人の人口

n 歳の子供が翌年に $n+1$ 歳である確率は n に依存しており、 n が異なると異なったりする。.....

複雑化。どうやって解くのだろう？

第2節 線形2変数ダイナミクスを図にする

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_{t+1} = A\vec{x}_t$$

$$\begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$$

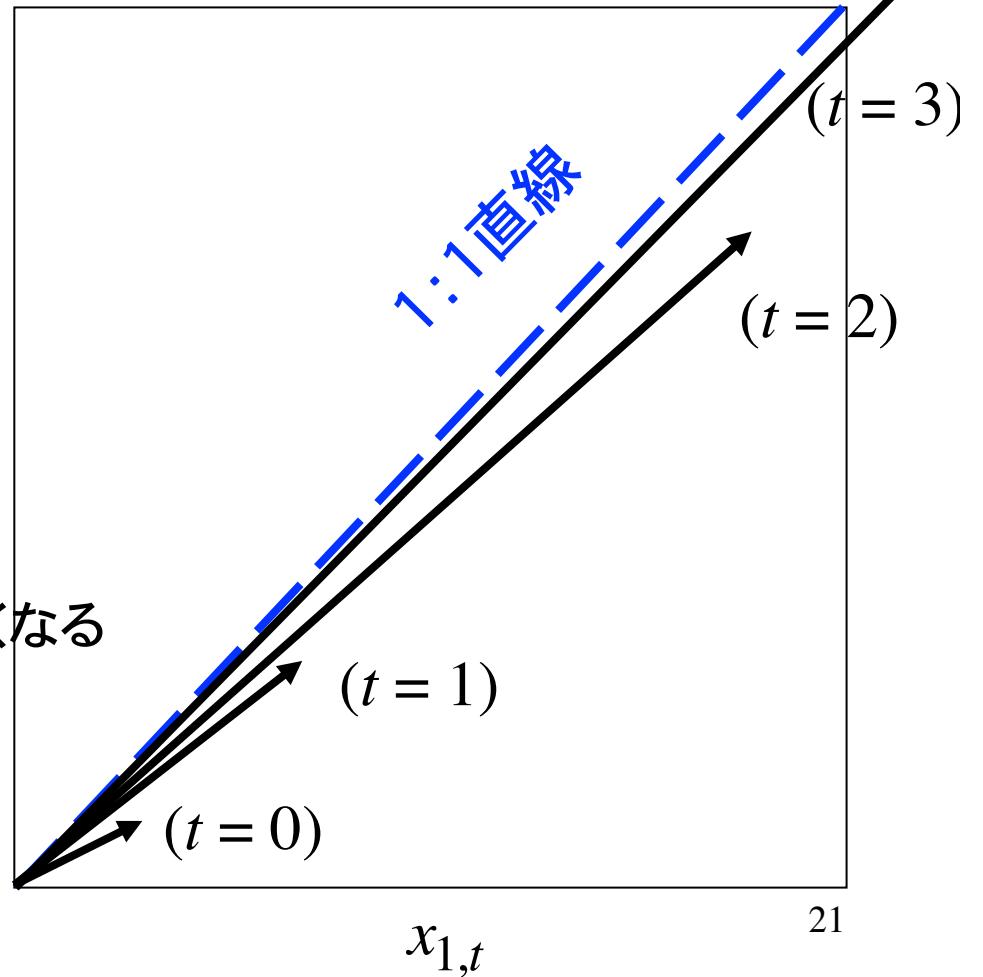
$$\begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

t	0	1	2	3	\dots	∞
x_1	2	5	14	41	\dots	α
x_2	1	4	13	40	\dots	α

$x_{2,t}$

ベクトルは時間とともに約3倍ずつ大きくなる
成分の比が1:1に収束する

時間が十分に経過すると3倍ずつ
大きくなる。その倍率や比がわかるか？



倍率や比を求めるには?

行列Aを乗じる

$$A\vec{u}$$

倍率λを乗じる

$$\lambda\vec{u}$$

たまたまこの二つが一致するベクトル \vec{u} はあるだろうか?

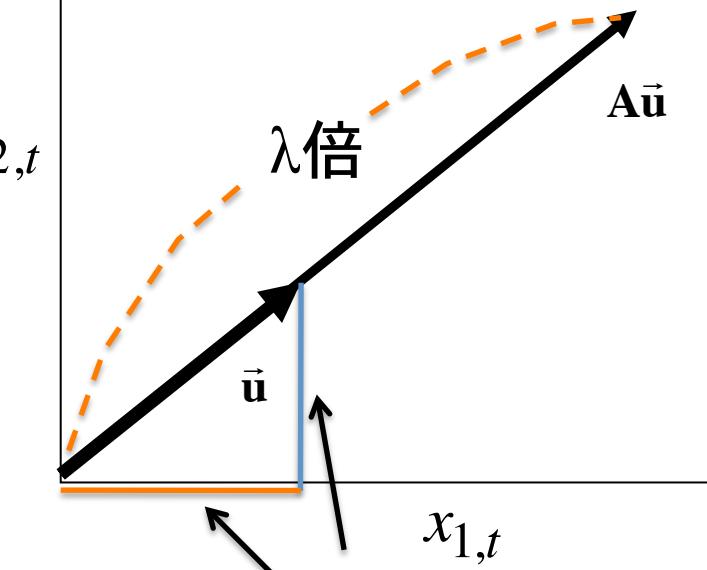
$$\lambda\vec{u} = A\vec{u}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda E - A)\vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

❖ 普通は零ベクトルが答え(自明解)
trivial solution

一変数の時の等比 r に似ている



比は一定に保たれる

❖ 特殊な場合 = 二つの方程式が非独立

$$\frac{\lambda - 2}{-1} = \frac{-1}{\lambda - 2} \iff \det(\lambda E - A) = 0$$

次頁で説明 22

$$\frac{\lambda - 2}{-1} = \frac{-1}{\lambda - 2} \iff \det(\lambda E - A) = 0$$

$$\lambda \vec{u} = A \vec{u}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$



$$\lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda E - A) \vec{u} = \vec{0}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

固有值方程式

$$\frac{\lambda - 2}{-1} = \frac{-1}{\lambda - 2} \iff \det(\lambda E - A) = 0 \quad (\text{続き})$$

$$(\lambda E - A)\vec{u} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad P\vec{u} = \vec{0}$$

定理 $P\vec{u} = \vec{0}$ が $\vec{u} = \vec{0}$ (自明な解)以外の解を持つ
必要十分条件は

ウェブでチェック
してください

$$\det P = 0 \quad (P \text{ の行列式がゼロ})$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ の場合 } P = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 2) - (-1)(-1) = 0$$

$$\frac{\lambda - 2}{-1} = \frac{-1}{\lambda - 2} \iff \det(\lambda E - A) = 0 \quad (\text{さらに続き})$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 2) - (-1)(-1) = 0$$

$$\frac{\lambda - 2}{-1} = \frac{-1}{\lambda - 2} \rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$$

$\lambda_1 = 3$ の場合 $P = \begin{pmatrix} 3-2 & -1 \\ -1 & 3-2 \end{pmatrix}$

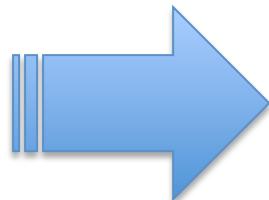
$$\begin{pmatrix} 3-2 & -1 \\ -1 & 3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} u_1 - u_2 = 0 \\ -u_1 + u_2 = 0 \end{array} \rightarrow \frac{u_1}{u_2} = \frac{1}{1}$$

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

同様に $\lambda_2 = 1$ の場合 $P = \begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ -1 & 1-2 \end{pmatrix}$

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \end{pmatrix}$$

問題：行列Aを乗じた結果と倍率 λ を乗じた結果、たまたまこの二つが一致するベクトル(\vec{u})はあるだろうか？



$$\lambda \vec{u} = A \vec{u}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

比1:1の直線に
矢印が収束した理由

$$\lambda_1 = 3 \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \end{pmatrix}$$

このベクトルは
定数倍の任意性をもつ

それぞれ固有値、それに属する(右)固有ベクトルという

定数倍の任意性: $\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ どれでもいい

26

行列モデルでよく使われるのは、要素の和が1になる $\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$,

演習問題

以下の行列の固有値(λ)、(右)固有ベクトル(\mathbf{u})を求めよ。

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 0.7 & 1.2 \\ 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

おとぎ話の村の例

解答

(a)

$$\lambda = 7, -2$$

$$\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 4\alpha \\ 5\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \end{pmatrix}$$

(b)

$$\lambda = 1, 0.3$$

$$\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 0.97\alpha \\ 0.24\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.95\beta \\ -0.32\beta \end{pmatrix}$$

(c)

$$\lambda = -1, -3$$

$$\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ 2\beta \end{pmatrix}$$

(d)

$$\lambda = 6, 1, -1$$

$$\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 5\alpha \\ 3\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3\beta \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma \\ -2\gamma \\ 3\gamma \end{pmatrix}$$

おとぎ話の村は増えも減りもしない

第3節 線形ダイナミクスの解 (n 行 n 列行列の一般解)

一変数の時の等比 r に似ている

$$\vec{x}_{t+1} = \vec{A}\vec{x}_t$$

初期値 $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{pmatrix}$

$\vec{x}_t = \vec{A}^t \vec{x}_0$

アカウミガメ



	ふ化個体	若齢個体	若齢個体	前成熟個	成熟個体	成熟個体	成熟個体
	1	2	3	1	2	3	4
ふ化個体	0	0	0	0	127	4	80
若齢個体1	0.675	0.737	0	0	0	0	0
若齢個体2	0	0.049	0.661	0	0	0	0
前成熟個体	0	0	0.015	0.691	0	0	0
成熟個体1	0	0	0	0.052	0	0	0
成熟個体2	0	0	0	0	0.809	0	0
成熟個体3	0	0	0	0	0	0.809	0.808

解を知るには準備が必要：行列の対角化（ちょっと数学）

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \text{固有値、} \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \\ \text{固有ベクトル、} \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{1n} \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} u_{21} \\ \vdots \\ u_{2n} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{u}_n = \begin{pmatrix} u_{n1} \\ \vdots \\ u_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

固有値の式

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_1 = \lambda_1 \mathbf{u}_1$$

n 本を横に
並べると

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_2 = \lambda_2 \mathbf{u}_2$$

\vdots

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_n = \lambda_n \mathbf{u}_n$$



$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_1, \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_n) = (\lambda_1 \mathbf{u}_1, \lambda_2 \mathbf{u}_2, \dots, \lambda_n \mathbf{u}_n)$$

行列の対角化

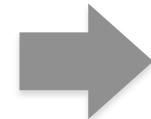
$$\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1n} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_1 = \lambda_1 \mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_2 = \lambda_2 \mathbf{u}_2$$

⋮

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_n = \lambda_n \mathbf{u}_n$$



$$\underbrace{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_1, \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_n)}_{\text{left bracket}} = \underbrace{(\lambda_1 \mathbf{u}_1, \lambda_2 \mathbf{u}_2, \dots, \lambda_n \mathbf{u}_n)}_{\text{right bracket}}$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

全部をまとめて
行列を使うと
簡単になりました

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U} \cdot \Lambda$$

行列の対角化

$$A \cdot U = U \cdot \Lambda \quad \xrightarrow{\begin{array}{l} \text{右から } U \text{ の} \\ \text{逆行列をかけると} \end{array}} \quad A = U \cdot \Lambda \cdot U^{-1}$$

$$A^t = (U \cdot \Lambda \cdot U^{-1})^t \quad \text{行列 } A \text{ の } t \text{ 乗を求めてみよう}$$

$$= \overbrace{(U \cdot \Lambda \cdot U^{-1})(U \cdot \Lambda \cdot U^{-1}) \cdots (U \cdot \Lambda \cdot U^{-1})}^t$$

$$= U \cdot \underbrace{(\Lambda \cdot \underbrace{U^{-1} \cdot U}_E)}_{E} \underbrace{(\Lambda \cdot \underbrace{U^{-1} \cdot U}_E) \cdots (\Lambda \cdot \underbrace{U^{-1} \cdot U}_E)}_{E} \cdot \Lambda \cdot U^{-1}$$

$$= U \cdot \Lambda^t \cdot U^{-1}$$

$$= U \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^t & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^t \end{pmatrix} \cdot U^{-1}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$U^{-1} \cdot U = U \cdot U^{-1} = E$$

連立差分方程式：行列モデル

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{x}(t) = \overbrace{\mathbf{U} \cdot \Lambda^t \cdot \mathbf{U}^{-1}}^{\mathbf{A}^t} \cdot \mathbf{x}(0) = [\mathbf{U} \cdot \Lambda^t] \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{x}(0)$$

$$\downarrow$$
$$\mathbf{U} \cdot \Lambda^t = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1^t & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^t \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda_1^t \mathbf{u}_1, \lambda_2^t \mathbf{u}_2, \dots, \lambda_n^t \mathbf{u}_n)$$

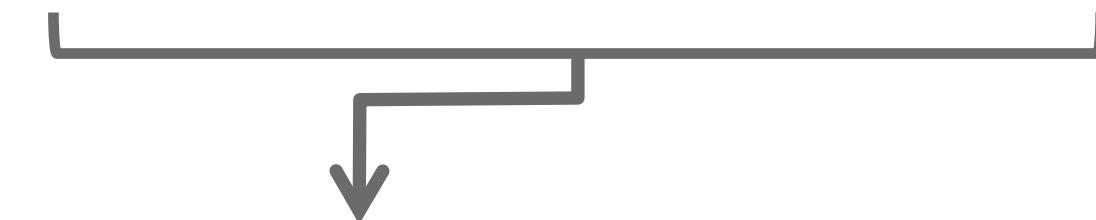
連立差分方程式：行列モデル

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{x}(0)$$

$$= \mathbf{U} \cdot \Lambda^t \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{x}(0) = \boxed{\mathbf{U} \cdot \Lambda^t} \cdot \boxed{\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{x}(0)}$$

$$\mathbf{U} \cdot \Lambda^t = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^t & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \text{[Redacted]} \\ \text{[Redacted]} \\ \text{[Redacted]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda_1^t \mathbf{u}_1, \lambda_2^t \mathbf{u}_2, \dots, \lambda_n^t \mathbf{u}_n)$$



$$\mathbf{x}(t) = c_1 \lambda_1^t \mathbf{u}_1 + c_2 \lambda_2^t \mathbf{u}_2 + \cdots + c_n \lambda_n^t \mathbf{u}_n$$

$$= \sum_{i=1}^n c_i (\lambda_i)^t \vec{\mathbf{u}}_i$$

$$\mathbf{x}(0) = c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + c_n \mathbf{u}_n$$

$n \times n$ 行列の一般解のまとめ

* 行列Aの一次独立な右固有ベクトルがn個 $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots$ 存在すれば、

解は
$$\vec{x}_t = \sum_{i=1}^n c_i (\lambda_i)^t \vec{u}_i \quad (*)$$

式中、 c_i は $\vec{x}_0 = \sum_{i=1}^n c_i \vec{u}_i$ を満たす係数

λ_i は行列Aの固有値 $\lambda_i \vec{u}_i = A \vec{u}_i$ (固有ベクトルは定数倍の任意性をもつ)

λ_i は $\det(\lambda_i E - A) = 0$ (固有値方程式)によって求められる

E : 単位行列

まとめ

- ❖ 二変数のモデルでは、変化のルールが複雑であれば、一般には解くことができない。また、解の予測をすることも難しい。
- ❖ 線形のモデルでは、流れ図により変化のルールを直観的に理解できる。また、解析的に解くことができる。
- ❖ 線形モデルを解く鍵は、固有値とその(右)固有ベクトルである。
- ❖ おとぎ話の村の人口は、少し時間が経つと増えも減りもしなくなる(理由は以下)。

$$\lambda = 1, 0.3$$

$$\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 0.97\alpha \\ 0.24\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.95\beta \\ -0.32\beta \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_t = \sum_{i=1}^2 c_i (\lambda_i)^t \vec{\mathbf{u}}_i = c_1 (\lambda_1)^t \vec{\mathbf{u}}_1 + c_2 (\lambda_2)^t \vec{\mathbf{u}}_2$$

$$= c_1 (1)^t \begin{pmatrix} 0.97 \\ 0.24 \end{pmatrix} + c_2 (0.3)^t \begin{pmatrix} 0.95 \\ -0.32 \end{pmatrix}$$

$$\approx c_1 (1)^t \begin{pmatrix} 0.97 \\ 0.24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.97c_1 \\ 0.24c_1 \end{pmatrix}$$