

Workshop 3-2

行列モデルを使った集団生物学：
発展編(生育段階構成モデルとその基本統計量)

行列モデルの数学的基礎

高田 壮則(北海道大学)

解答

$$(1) \sum_{x=1}^n x_i p(xi)$$

$$(2) \det\mathbf{A} = ad - bc$$

$$\begin{aligned} \det\mathbf{B} = & aei + cdh + bfg - \\ & ceg - bdi - afh \end{aligned}$$

$$(3) \frac{\sum_{x=y}^{\infty} l(x)}{l(y)}$$

$$(4) \sum_{x=0}^{\infty} b(x)l(x)$$

生態学における数理モデル

動態モデル：Malthusモデル、Logisticモデル、競争方程式、
Lotka-Volterraモデル、**個体群行列モデル**、
拡散方程式モデル、格子モデル・・・

最適戦略モデル：卵サイズモデル、展葉・落葉戦略モデル
(Optimal strategy model) 繁殖スケジュールモデル、採餌戦略モデル

ESSモデル：タカハトゲーム、性比モデル、分散モデル
(Evolutionarily Stable Strategy)
進化的に安定な戦略

ウミガメ保護に使われたモデル

- 世界の7種類のウミガメはすべて絶滅危惧指定
- 保護対策：産卵場所、卵、ふ化直後の個体

Q1：本当に絶滅しそうなのか？

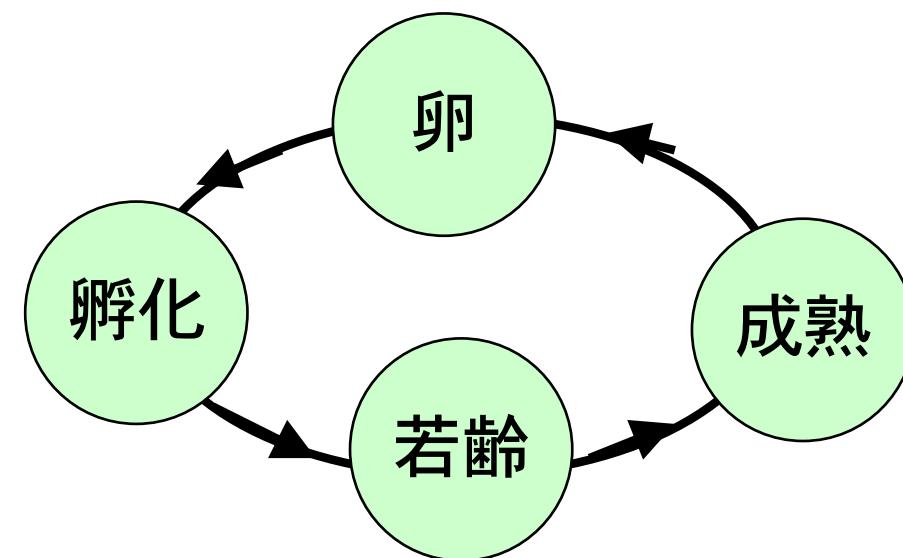
Q2：絶滅の至近要因は何か？

Q3：従来の保護対策が必要なのか？

Q4：従来の保護対策で十分なのか？

ウミガメの生活史の
データが必要

生活史段階の動態
を記述するモデルが必要



生活史段階の動態
を記述するモデルが必要



個体群行列モデル
(複数の状態をもつ主体の動態)

Dynamics of an entity with multiple states

アカウミガメ



行列	ふ化個体	若齢個体1	若齢個体2	前成熟個体	成熟個体1	成熟個体2	成熟個体3
ふ化個体	0	0	0	0	127	4	80
若齢個体1	0.675	0.737	0	0	0	0	0
若齢個体2	0	0.049	0.661	0	0	0	0
前成熟個体	0	0	0.015	0.691	0	0	0
成熟個体1	0	0	0	0.052	0	0	0
成熟個体2	0	0	0	0	0.809	0	0
成熟個体3	0	0	0	0	0	0.809	0.808

Crouse et al. 1987

ふ化個体の
生存率

成熟個体あたりの
ふ化個体生産数

広範な応用範囲

個体群動態・保全生態学

目次

- 第1章 量の変化（一変数）
- 第2章 量の変化（二変数）
- 第3章 生物学における行列モデル
- 第4章 行列モデルを用いた様々な統計量
- 第5章 感度分析
- 第6章 行列モデルのデータへの応用
- ・
- ・
- ・

第1章 量の変化（一変数）

第1章 量の変化（一変数）

- 時間変化（動態）の記述 (description of dynamics)

微分方程式 ある時刻 t の量を $x(t)$ とする $\frac{dx}{dt} = f(x)$
(時間連続)

差分方程式 ある時刻 t の量を x_t とする $x_{t+1} = f(x_t)$
(時間離散)

この講義

例：札幌市の人口、年齢、惑星の数、定期預金

↑
変化のルール

変化のルールが決まると、未来予測ができる

第1節 変化のルール $x_{t+1} = f(x_t)$

- 例1 不変 惑星の数
- 例2 定数增加 年齢
- 例3 定数倍 細胞分裂、定期預金
- 例4 より複雑 生物集団の個体数など多くの場合

■ ルールをグラフで表す

横軸 : x_t

縦軸 : x_{t+1}

ルールの式

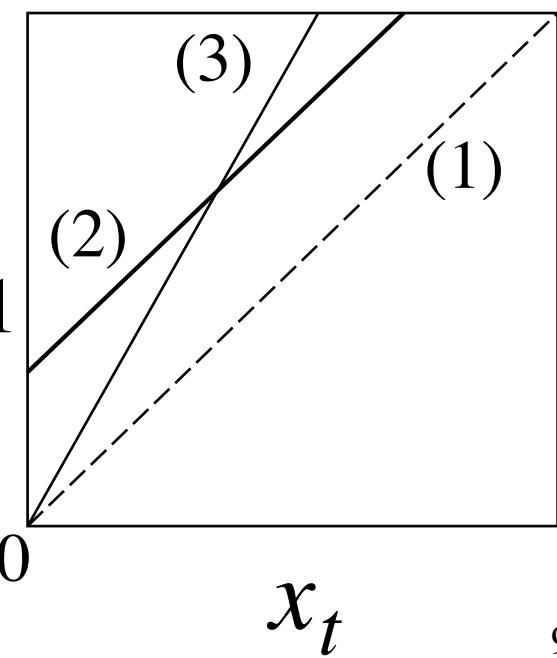
$f(x_t)$

(1) x_t

(2) $x_t + b$

(3) ax_t

線形 : $x_{t+1} = rx_t + b$



例1と例2はちょっとずらすと同じ

第1節 変化のルール $x_{t+1} = f(x_t)$

- 例1 不変
 - 例2 定数增加
 - 例3 定数倍
 - 例4 より複雑
- 惑星の数
年齢
細胞分裂、定期預金
多くの場合



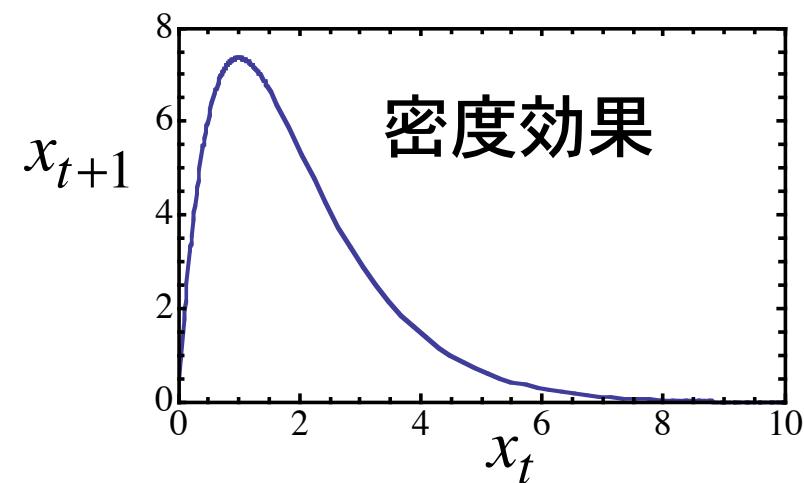
■ ルールをグラフで表す

横軸 : x_t

縦軸 : x_{t+1}

ルールの式は複雑な関数
数式で書けないかも。
もちろん線形ではない。

ヒメナズナ（砂丘の一年草）
ルール $f(x_t)$: 一山型の関数



第 2 節

将来の予測

線形 : $x_{t+1} = rx_t + b$

(1)

グラフ 横軸 : t

縦軸 : x_t

(2)

解析的に解く (線形の場合、可能。多くの場合、不可能)

----> コンピュータシミュレーション、数値計算

例 1

不变

$x_t = x_0 \quad r = 1, b = 0 \quad x_0$: 初期値

例 2

定数増加

$x_t = x_0 + bt \quad r = 1, b$: 等差

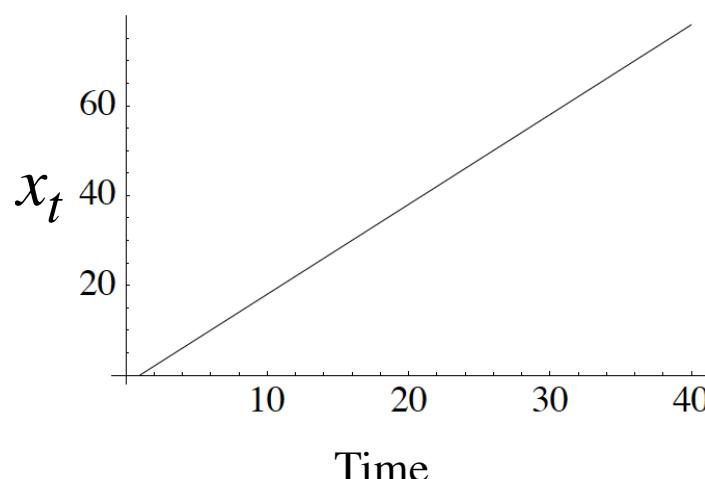
例 3

定数倍

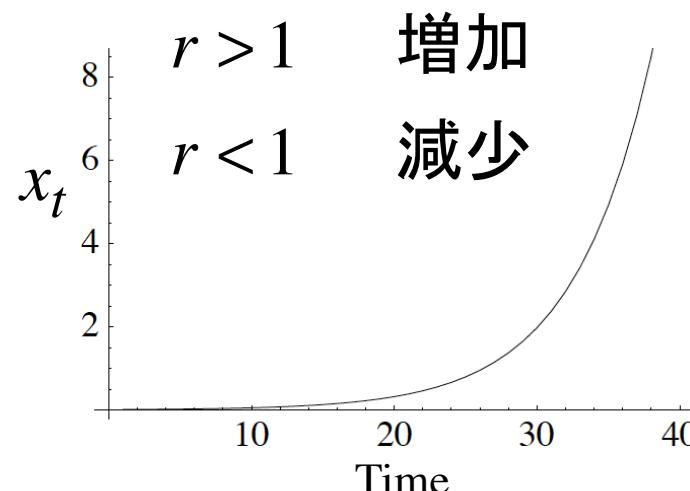
$x_t = x_0 r^t \quad b = 0, r$: 等比

例 1, 2, 3 は線形

例 2



例 3



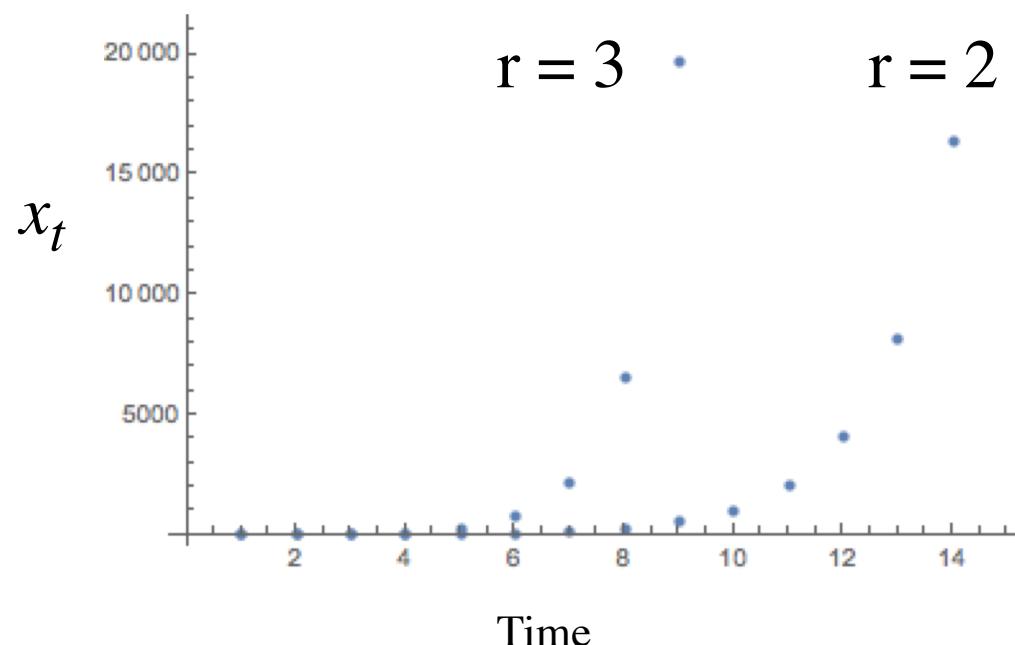
覚えておいてほしいこと：片対数グラフ

$$x_t = x_0 r^t$$

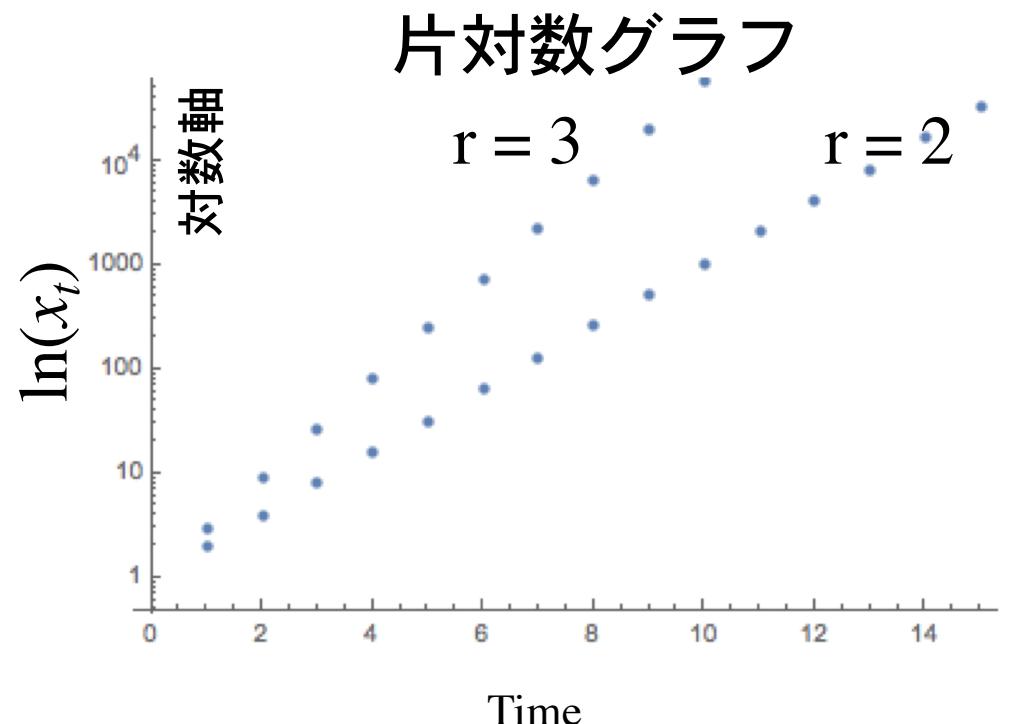
等比数列

幾何級数 (geometric series)

指数関数的増加 (exponential increase)



違いが大きすぎる



指数増加は直線増加に変わる

片対数グラフでは、指数増加は直線増加に変わる

$$x_t = x_0 r^t$$

$$\begin{aligned}\ln x_t &= \ln(x_0 r^t) = \ln(x_0) + \ln(r^t) \\ &= \ln r \times t + \ln x_0\end{aligned}$$

$$Y = \frac{\ln r}{\ln x_0} \times X + \frac{\ln x_0}{\ln x_0}$$

(傾き $\ln r$, 切片 $\ln x_0$ の直線)

傾き $\ln r$ は $r > 1$ or $r < 1$ で正負が変わる。

直線増加あるいは直線減少

例 4 : ヒメナズナ (砂丘の一年草)

ルール $f(x_t) = rx_t \exp(-x_t)$

r : 繁殖率

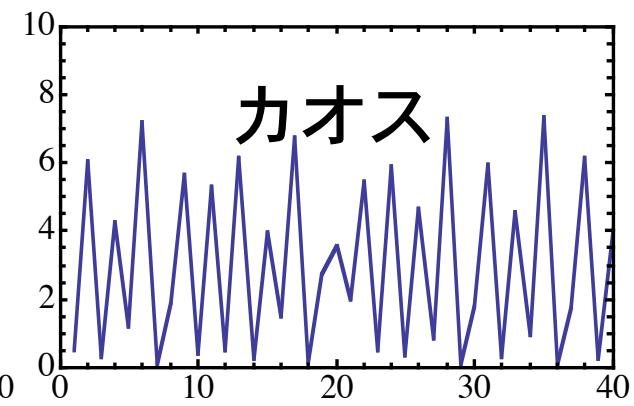
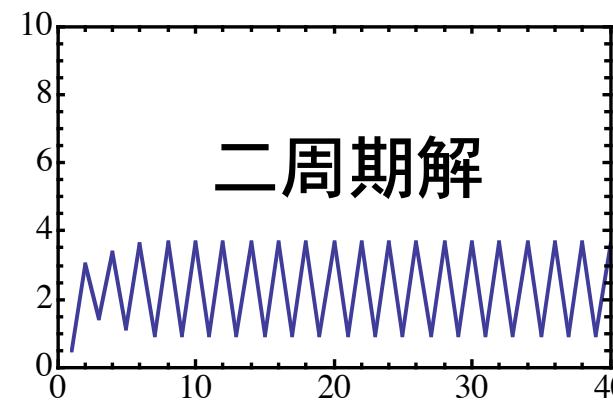
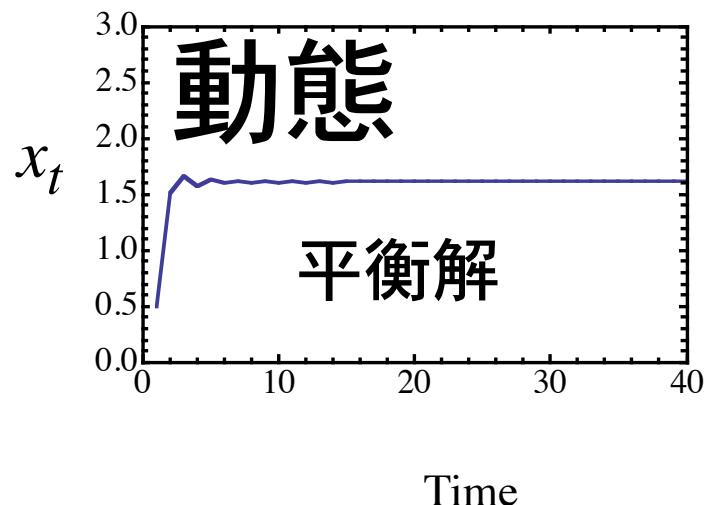
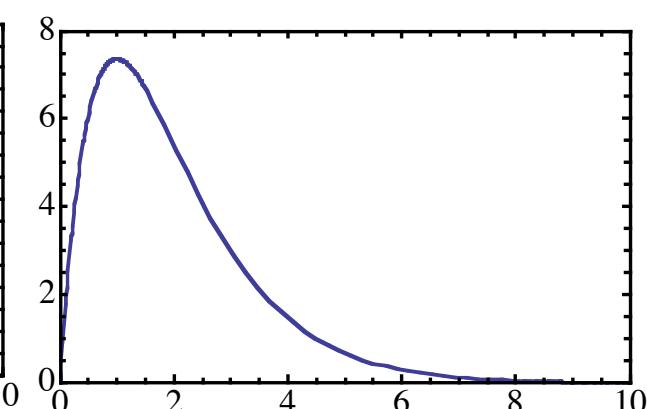
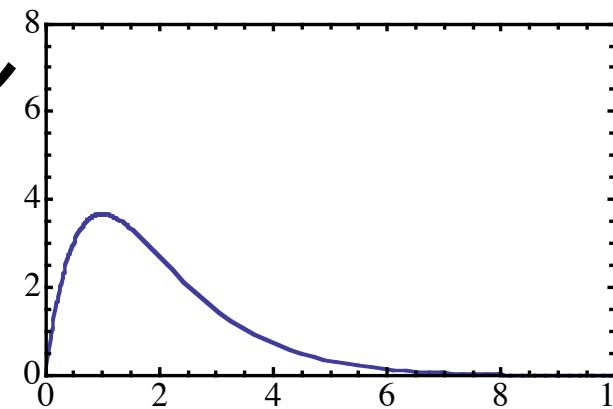
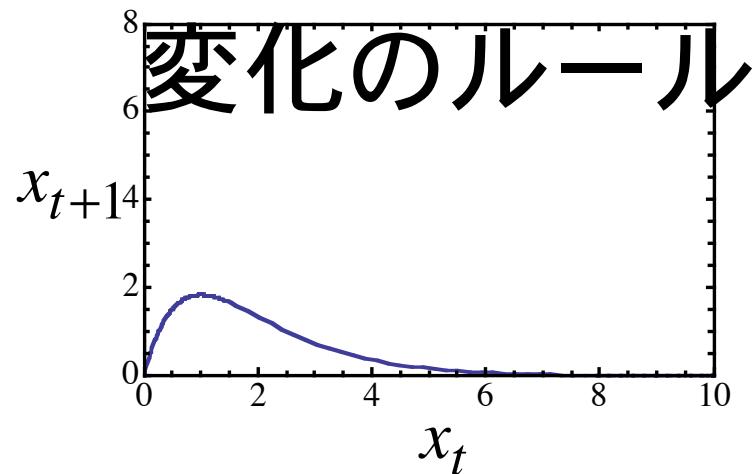
(Ricker型密度依存関数)

変化のルールは、同じ形で倍率だけが違う。
例えば、実生の出現率が変化するとか

$$r = 5$$

$$r = 10$$

$$r = 20$$



練習問題

次の差分方程式を解きなさい。：

$$x_{t+1} = f(x_t)$$

x_0 : 時刻ゼロでの値（初期値）

- EX 1 不変 $f(x_t) = x_t$
- EX 2 定数増加 $f(x_t) = x_t + b$
- EX 3 定数倍 $f(x_t) = rx_t$
- 一般の線形差分方程式 $f(x_t) = rx_t + b$

Note: 線形差分方程式は解析的に解くことができる。

まとめ

- ✧ 変化のルールは簡単なもの（線形）から複雑なものまである
- ✧ 簡単なものだと解析的に解けるが、普通はそうではない
- ✧ 一変数だから動態が簡単に計算できるし、図示化が容易

現実の問題の解決にはならない。

なぜなら、多くの場合複数の量が同時に関連しあって（相互作用あり）変化しているから。

おとぎ話： ある村の子供と大人の人口

ある村には大人と子供が住んでいる。子供が翌年に子供でいる確率は7割で、大人になる確率は1割である。また、大人の死ぬ確率は4割で、大人は一人当たり平均1.2人の子供を産む。さて、この村の人口は増加傾向にあるだろうか？₁₆

第2章 量の変化（二変数）

第2章 量の変化 (二変数)

第1節

変化のルール : f (ベクトル)

$$\vec{x}_t = \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_{t+1} = \vec{f}(\vec{x}_t) \quad \rightarrow$$

$$\begin{cases} x_{1,t+1} = f_1(x_{1,t}, x_{2,t}) \\ x_{2,t+1} = f_2(x_{1,t}, x_{2,t}) \end{cases}$$

(1) 二つの量が独立

例1 変化しない

$$\begin{array}{ll} \text{地球} & \begin{cases} x_{1,t+1} = x_{1,t} \\ x_{2,t+1} = x_{2,t} \end{cases} \\ \text{月} & \end{array}$$

地球の半径と月の半径

E : 単位行列

$$\begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$$

一変数と同じ

例2 定数倍

異なる利率を持つ二つの定期預金

$$\begin{cases} x_{1,t+1} = (1 + a_1)x_{1,t} \\ x_{2,t+1} = (1 + a_2)x_{2,t} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + a_1 & 0 \\ 0 & 1 + a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$$

対角行列であるところがミソ

一変数と同じ

(2) 二つの量が非独立（「相互作用がある」と言ってもよい）

例3 札幌市とそれ以外の道内の人ロ（札幌への移住のみ、移住率一定 c ）

$$\begin{array}{ll} \text{札幌} & \left\{ \begin{array}{l} x_{1,t+1} = x_{1,t} + cx_{2,t} \\ x_{2,t+1} = (1-c)x_{2,t} \end{array} \right. \\ \text{それ以外} & \left(\begin{array}{l} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1-c \end{pmatrix} \left(\begin{array}{l} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{array} \right) \end{array}$$

例4 札幌市とそれ以外の道内の人ロ（札幌への移住とそれ以外への移住、移住率一定 c_1, c_2 ）

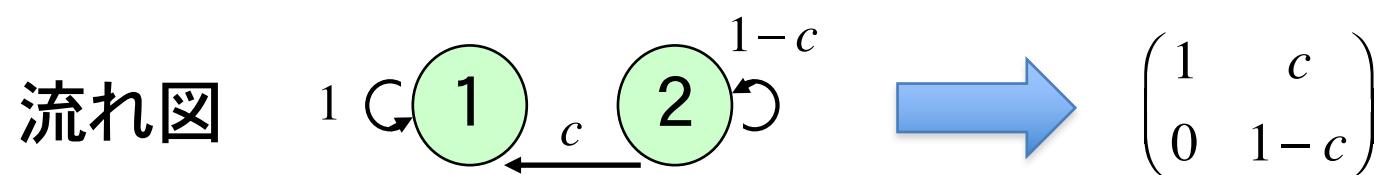
$$\begin{array}{ll} & \left\{ \begin{array}{l} x_{1,t+1} = (1-c_2)x_{1,t} + c_1x_{2,t} \\ x_{2,t+1} = c_2x_{1,t} + (1-c_1)x_{2,t} \end{array} \right. \\ & \left(\begin{array}{l} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1-c_2 & c_1 \\ c_2 & 1-c_1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{l} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{array} \right) \end{array}$$

対角行列じゃない！でも、ルールを決めて式を書けば、行列に書ける簡単な場合がある。

見方を変えよう！
「状態の変化」ではなく、「状態間の（個体の）流れ」

例 3 札幌市とそれ以外の道内の人囗（札幌への移住のみ、移住率一定 c ）

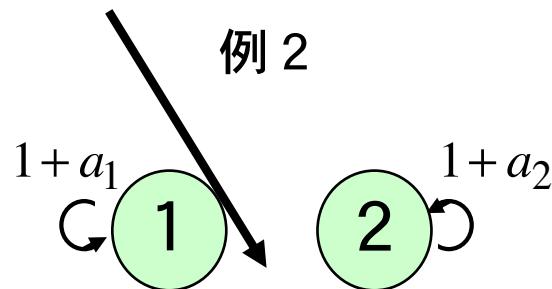
札幌	$x_{1,t+1} = x_{1,t} + cx_{2,t}$	$\begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1-c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$
それ以外	$x_{2,t+1} = (1 - c)x_{2,t}$	



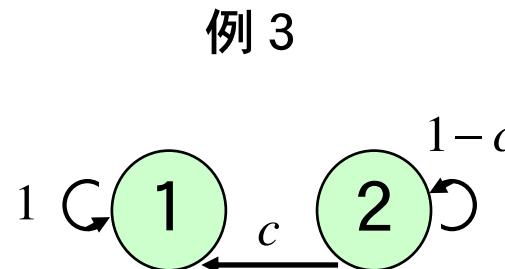
状態 j から状態 i への矢印のパラメーターを、
 i 行 j 列に配置すると、行列ができる。

独立の時、対角行列かつ流れがつながらない

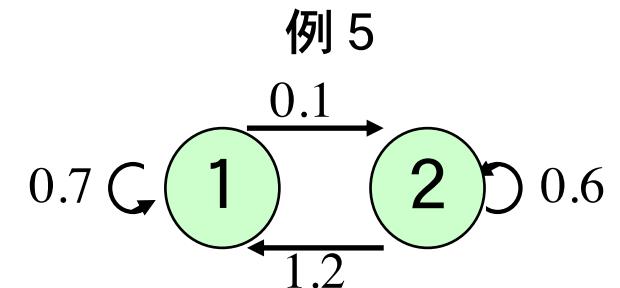
流れ図と行列(Flow chart and matrix)



$$\begin{pmatrix} 1+a_1 & 0 \\ 0 & 1+a_2 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1-c \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0.7 & 1.2 \\ 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$$

変数 j から変数 i への矢印についている係数を i 行 j 列の要素とする行列

$$\begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a_1 & 0 \\ 0 & 1+a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1-c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 1.2 \\ 0.1 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$$

行列を用いることで、線形差分方程式を記述することができる

$$\vec{x}_{t+1} = \mathbf{A}\vec{x}_t$$

$$\vec{x}_{t+1} = \vec{f}(\vec{x}_t) \text{ の簡単な場合}$$

例 5 おとぎ話：ある村の子供と大人の人口

ある村には大人と子供が住んでいる。子供が翌年に子供でいる確率は7割で、大人になる確率は1割である。また、大人の死ぬ確率は4割で、大人は一人当たり平均1.2人の子供を産む。さて、この村の人口は増加傾向にあるだろうか？

$$\begin{cases} x_{1,t+1} = 0.7x_{1,t} + 1.2x_{2,t} \\ x_{2,t+1} = 0.1x_{1,t} + 0.6x_{2,t} \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 1.2 \\ 0.1 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$$

リアル話：ある村の子供と大人の人口

n 歳の子供が翌年に $n+1$ 歳である確率は n に依存しており、 n が異なると
異なったりする。・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

複雑化。どうやって解くのだろう？
「解く」： x_i を時刻 t の関数として表す

第2節 線形2変数ダイナミクスを図にする

西

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \vec{x}_{t+1} = A \vec{x}_t \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$$

初期ベクトル $\begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

練習問題

時刻1, 2, 3, 4, 5の解を
自分で求めてください
使用する式は

$$\vec{x}_{t+1} = A \vec{x}_t$$



t	0	1	2	3	\dots	∞
x_1	2	5	14	41	\dots	α
x_2	1	4	13	40	\dots	α

何か法則性が見出せますか？

横軸が時間ではない図を作つて動態を見る

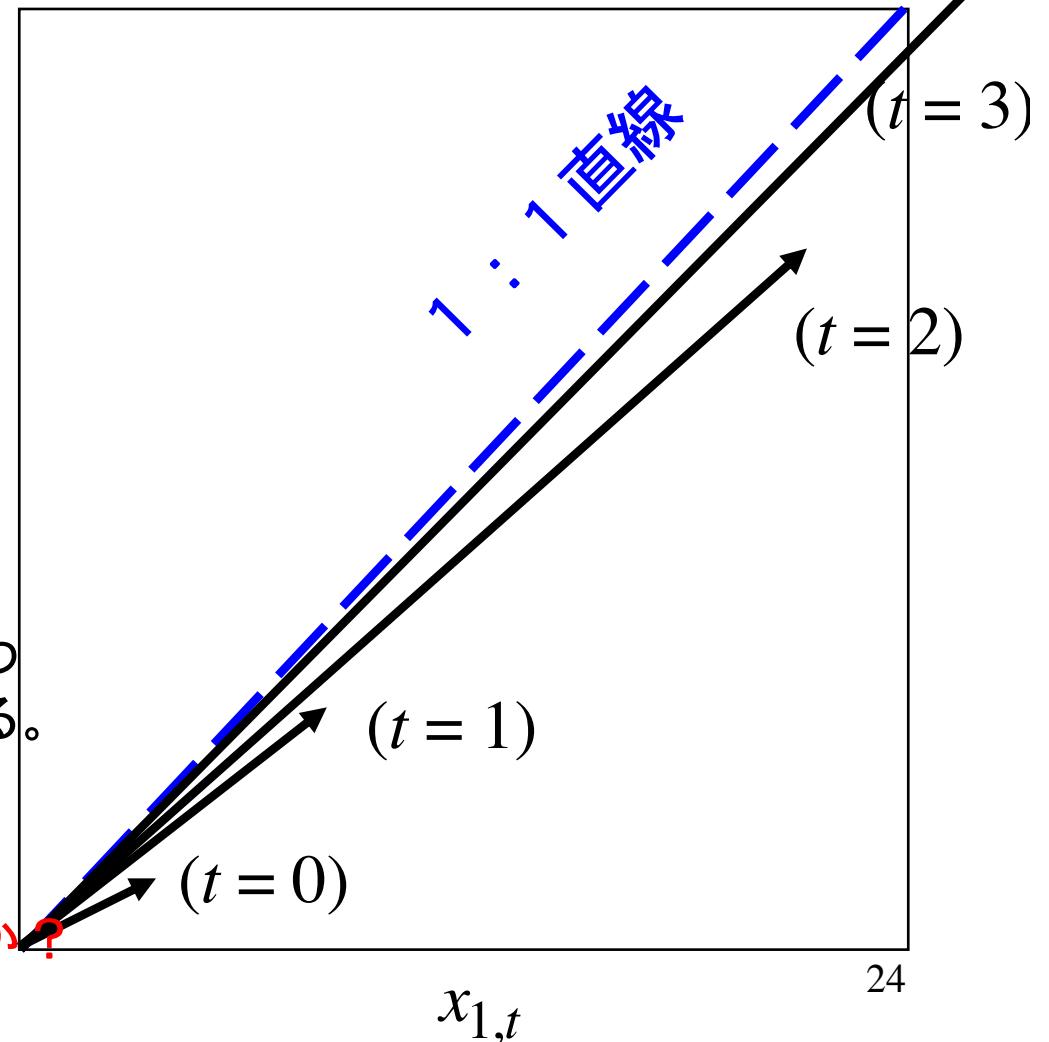
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \vec{x}_{t+1} = A \vec{x}_t \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$$

初期ベクトル $\begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

t	0	1	2	3	\dots	∞
x_1	2	5	14	41	\dots	α
x_2	1	4	13	40	\dots	α

ベクトルの長さは時間とともに約 3 倍ずつ大きくなる。成分の比が 1 : 1 に収束する。

時間が十分に経過すると 3 倍ずつ大きくなる。その倍率や比がわかるか？



倍率や比を求めるには？

行列Aを乗じる $A\vec{u}$

倍率λを乗じる $\lambda\vec{u}$

たまたまこの二つが一致する
ベクトル \vec{u} はあるだろうか？

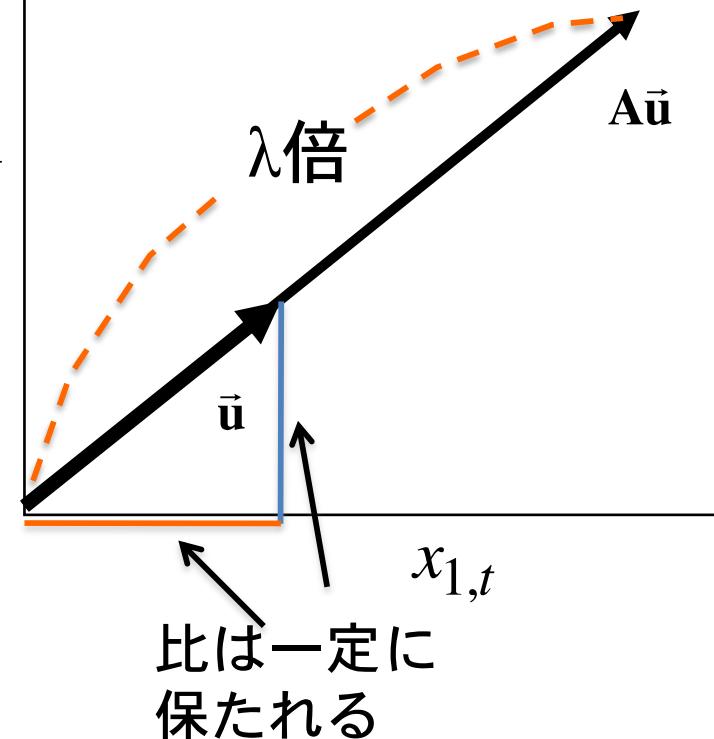
$$\lambda\vec{u} = A\vec{u} \quad \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda E - A)\vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

❖ 普通は零ベクトルが答え（自明解）
trivial solution

$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ これじゃあ意味がない！！

一変数の時の等比 r に似ている



❖ 特殊な場合： 零ベクトル以外の解がある

$$\det(\lambda E - A) = 0 \quad (\text{次頁に続く})$$

$$\lambda \vec{u} = A \vec{u} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{cc} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{array} \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda E - A)\vec{u} = \vec{0}$$

固有値方程式 $\det(\lambda E - A) = 0$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(次頁に続く)

$$(\lambda E - A)\vec{u} = \vec{0}$$



$$P\vec{u} = \vec{0}$$

定理

$P\vec{u} = \vec{0}$ が $\vec{u} = \vec{0}$ (自明な解) 以外の解を持つ
必要十分条件は

ウェブでチェック
してください

$$\det P = 0 \quad (P \text{ の行列式がゼロ})$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ の場合 } P = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 2) - (-1)(-1) = 0$$

(次頁に続く)

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 2) - (-1)(-1) = 0 \rightarrow \frac{\lambda - 2}{-1} = \frac{-1}{\lambda - 2}$$

実際に解こうと
すると $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$

$\lambda_1 = 3$ の場合 $P = \begin{pmatrix} 3-2 & -1 \\ -1 & 3-2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3-2 & -1 \\ -1 & 3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} u_1 - u_2 = 0 \\ -u_1 + u_2 = 0 \end{array} \rightarrow \frac{u_1}{u_2} = \frac{1}{1}$$

二つの方程式が
独立じゃない

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

同様に $\lambda_2 = 1$ の場合 $P = \begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ -1 & 1-2 \end{pmatrix}$

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \end{pmatrix}$$

(終わり)
28

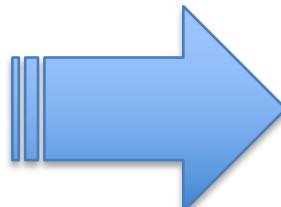
まとめると

問題： 行列Aを乗じた結果と倍率 λ を乗じた結果、たまたまこの二つが一致するベクトル (\vec{u})はあるだろうか？

$$\lambda \vec{u} = A \vec{u}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

比1:1の直線に
矢印が収束した理由
(あとでわかる)



$$\lambda_1 = 3 \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \end{pmatrix}$$

このベクトルは
定数倍の任意性をもつ

それぞれ固有値、それに属する（右）固有ベクトルという

定数倍の任意性: $\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ どれでもいい

個体群行列モデルでよく使われるのは、要素の和が1になる $\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$,

演習問題

以下の行列の固有値 (λ) 、(右) 固有ベクトル (\vec{u})を求めよ。

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 0.7 & 1.2 \\ 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

おとぎ話の村の例

解答

(a)

$$\lambda = 7, -2$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 4\alpha \\ 5\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \end{pmatrix}$$

(b)

$$\lambda = 1, 0.3$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0.97\alpha \\ 0.24\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.95\beta \\ -0.32\beta \end{pmatrix}$$

(c)

$$\lambda = -1, -3$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ 2\beta \end{pmatrix}$$

(d) $\lambda = 6, 1, -1$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 5\alpha \\ 3\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3\beta \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma \\ -2\gamma \\ 3\gamma \end{pmatrix}$$

おとぎ話の村は増えも減りもしない
ことを想起させる

第3節 線形ダイナミクスの解 (n 行 n 列行列の一般解)

一変数の時の等比 r に似ている

$$\vec{x}_{t+1} = \vec{A}\vec{x}_t$$

初期値 $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \end{pmatrix}$

$\vec{x}_t = \vec{A}^t \vec{x}_0$

アカウミガメ



	ふ化個体	若齢個体1	若齢個体2	前成熟個体	成熟個体1	成熟個体2	成熟個体3
ふ化個体	0	0	0	0	127	4	80
若齢個体1	0.675	0.737	0	0	0	0	0
若齢個体2	0	0.049	0.661	0	0	0	0
前成熟個体	0	0	0.015	0.691	0	0	0
成熟個体1	0	0	0	0.052	0	0	0
成熟個体2	0	0	0	0	0.809	0	0
成熟個体3	0	0	0	0	0	0.809	0.808

公式1: 横ベクトルと縦ベクトルの積

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

結果はスカラー

ベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} の内積

公式2: 行列と縦ベクトルの積

公式1より

$$\begin{matrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{matrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \mathbf{b} \\ \mathbf{a}_2 \mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k} b_k \\ \sum_{k=1}^n a_{2k} b_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{nk} b_k \end{pmatrix}$$

結果は縦ベクトル

公式3: 横ベクトルと行列の積

結果は横ベクトル

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}\mathbf{b}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_k b_{k1} & \sum_{k=1}^n a_k b_{k2} & \cdots \end{pmatrix}$$

公式2、3から行列同士の積の公式もできる。練習しては？

公式4: 行列と対角行列の積

公式1より

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \cdots & \lambda_n v_n \end{pmatrix}$$

v_1 などが縦ベクトルに変わっても

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbf{v}_1 & \lambda_2 \mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_n \mathbf{v}_n \end{pmatrix}$$

結果は行列

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{固有値、}\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \quad \text{固有ベクトル、}\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{1n} \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} u_{21} \\ \vdots \\ u_{2n} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{u}_n = \begin{pmatrix} u_{n1} \\ \vdots \\ u_{nn} \end{pmatrix}$$

固有値の式

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_1 = \lambda_1 \mathbf{u}_1$$

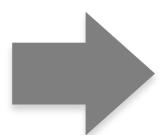
n 本を横に並べると

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_2 = \lambda_2 \mathbf{u}_2$$

\vdots

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_n = \lambda_n \mathbf{u}_n$$

縦ベクトル=縦ベクトル



$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_1, \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_n) = (\lambda_1 \mathbf{u}_1, \lambda_2 \mathbf{u}_2, \dots, \lambda_n \mathbf{u}_n)$$

n 行 n 列 = n 行 n 列

行列の対角化

西

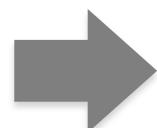
$$U = (u_1, u_2, \dots, u_n) = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1n} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$A \cdot u_1 = \lambda_1 u_1$$

$$A \cdot u_2 = \lambda_2 u_2$$

⋮

$$A \cdot u_n = \lambda_n u_n$$



$$(A \cdot u_1, A \cdot u_2, \dots, A \cdot u_n) = (\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2, \dots, \lambda_n u_n)$$

n 行 n 列

n 行 n 列

公式 4 を使う

$$A \cdot (u_1, u_2, \dots, u_n) = (u_1, u_2, \dots, u_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

全部をまとめて
行列を使うと
簡単になりました

$$A \cdot U = U \cdot \Lambda$$

行列の対角化

西

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U} \cdot \Lambda \quad \xrightarrow{\substack{\text{右からUの} \\ \text{逆行列をかけると}}} \quad \mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \Lambda \cdot \mathbf{U}^{-1}$$

$$\mathbf{A}^t = (\mathbf{U} \cdot \Lambda \cdot \mathbf{U}^{-1})^t \quad \text{行列Aの } t \text{ 乗を求めてみよう}$$

$$= \overbrace{(\mathbf{U} \cdot \Lambda \cdot \mathbf{U}^{-1})(\mathbf{U} \cdot \Lambda \cdot \mathbf{U}^{-1}) \cdots (\mathbf{U} \cdot \Lambda \cdot \mathbf{U}^{-1})}^t$$

$$= \mathbf{U} \cdot \underbrace{(\Lambda \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{U})}_{\mathbf{E}} \underbrace{(\Lambda \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{U})}_{\mathbf{E}} \cdots \underbrace{(\Lambda \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{U})}_{\mathbf{E}} \cdot \Lambda \cdot \mathbf{U}^{-1}$$

$$= \mathbf{U} \cdot \Lambda^t \cdot \mathbf{U}^{-1}$$

$$= \mathbf{U} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^t & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^t \end{pmatrix} \cdot \mathbf{U}^{-1}$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{E}$$

連立差分方程式：行列モデル

西

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{x}(t) = \overbrace{\mathbf{U} \cdot \Lambda^t \cdot \mathbf{U}^{-1}}^{\mathbf{A}^t} \cdot \mathbf{x}(0) = [\mathbf{U} \cdot \Lambda^t] \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{x}(0)$$

$$\downarrow \quad \mathbf{U} \cdot \Lambda^t = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^t & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^t \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda_1^t \mathbf{u}_1, \lambda_2^t \mathbf{u}_2, \dots, \lambda_n^t \mathbf{u}_n)$$

公式 4 を使う

連立差分方程式：行列モデル

西

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{x}(0)$$

$$= \mathbf{U} \cdot \Lambda^t \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{x}(0) = [\mathbf{U} \cdot \Lambda^t] \cdot [\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{x}(0)]$$

$$\mathbf{U} \cdot \Lambda^t = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^t & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^t \end{pmatrix},$$

$$= (\lambda_1^t \mathbf{u}_1, \lambda_2^t \mathbf{u}_2, \dots, \lambda_n^t \mathbf{u}_n)$$

$$\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \text{[]} \\ \text{[]} \\ \text{[]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{[]} \\ \text{[]} \\ \text{[]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

公式 1 を複数回使う

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \lambda_1^t \mathbf{u}_1 + c_2 \lambda_2^t \mathbf{u}_2 + \cdots + c_n \lambda_n^t \mathbf{u}_n$$

$$\mathbf{x}(0) = c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + c_n \mathbf{u}_n$$

$$= \sum_{i=1}^n c_i (\lambda_i)^t \vec{\mathbf{u}}_i$$

$n \times n$ 行列の一般解のまとめ

* 行列 A の一次独立な右固有ベクトルが n 個 $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots$ 存在すれば、

$$\text{解は } (\ast) \quad \vec{x}_t = \sum_{i=1}^n c_i (\lambda_i)^t \vec{u}_i$$

式中、 c_i は $\vec{x}_0 = \sum_{i=1}^n c_i \vec{u}_i$ を満たす係数

解法の鍵：固有値と固有ベクトル（何個もある）

λ_i は行列 A の固有値 $\lambda_i \vec{u}_i = A \vec{u}_i$ (固有ベクトルは定数倍の任意性をもつ)

λ_i は $\det(\lambda_i E - A) = 0$ (固有値方程式) によって求められる

E : 単位行列

おとぎ話の村

ある村には大人と子供が住んでいる。子供が翌年に子供でいる確率は7割で、大人になる確率は1割である。また、大人の死ぬ確率は4割で、大人は一人当たり平均1.2人の子供を産む。さて、この村の人口は増加傾向にあるだろうか？

$$\begin{cases} x_{1,t+1} = 0.7x_{1,t} + 1.2x_{2,t} \\ x_{2,t+1} = 0.1x_{1,t} + 0.6x_{2,t} \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 1.2 \\ 0.1 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$$

$$(\lambda E - A)\vec{u} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \det \begin{pmatrix} \lambda - 0.7 & -1.2 \\ -0.1 & \lambda - 0.6 \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda = 1, 0.3$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0.97\alpha \\ 0.24\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.95\beta \\ -0.32\beta \end{pmatrix}$$

(to be continued)

解の公式

$$\vec{x}_t = \sum_{i=1}^n c_i(\lambda_i)^t \vec{u}_i$$

$$\vec{x}_t = \sum_{i=1}^2 c_i(\lambda_i)^t \vec{u}_i = c_1(\lambda_1)^t \vec{u}_1 + c_2(\lambda_2)^t \vec{u}_2$$

$$= \sum_{i=1}^2 c_i(\lambda_i)^t \vec{u}_i = c_1(1)^t \begin{pmatrix} 0.97 \\ 0.24 \end{pmatrix} + c_2(0.3)^t \begin{pmatrix} 0.95 \\ -0.32 \end{pmatrix}$$

$$\approx (\text{ほぼ等しい}) c_1(1)^t \begin{pmatrix} 0.97 \\ 0.24 \end{pmatrix}$$

定数!

$$= \begin{pmatrix} 0.97c_1 \\ 0.24c_1 \end{pmatrix}$$

時刻が消えて、時間に依存しない解になりました。

時間が経過すると、増えも減りもせずに一定になる

まとめ

- ❖ 二変数のモデルでは、変化のルールが複雑であれば、一般には解くことができない。また、解の予測をすることも難しい。
- ❖ 線形のモデルでは、流れ図により変化のルールを直観的に理解できる。また、解析的に解くことができる。
- ❖ 線形モデルを解く鍵は、固有値とその（右）固有ベクトルである。
- ❖ おとぎ話の村の人口は、少し時間が経つと増えも減りもしなくなる

もし余裕があれば、

Obtain the solution of $\mathbf{x}(t)$ in the following difference equation.

$$\vec{x}_{t+1} = \mathbf{A}\vec{x}_t$$

Initial vector: $\begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Hint: obtain λ_i, \vec{u}_i first and obtain c_i so that the initial vector is satisfied when $t = 0$.

例4:ヒメナズナ(砂丘の一年草)

ルール $f(x_t) = r x_t \exp(-x_t)$ r : 繁殖率

蜘蛛の巣法(Cob-web diagram)

* 行列Aの一次独立な右固有ベクトルがn個存在すれば、

存在する条件を調べよう。ダメな例も