Workshop 3-2

行列モデルを使った集団生物学：発展編（生育段階構成モデルとその基本統計量）

行列モデルの数学的基礎

高田　壮則（北海道大学）

解答

(1) $\sum_{x=1}^{n} x_i p(xi)$

(2) $\det\mathbf{A} = ad - bc$

$\det\mathbf{B} = aei + cdh + bfg - ceg - bdi - afh$

(3) $\frac{\sum_{x=y}^{\infty} l(x)}{l(y)}$

(4) $\sum_{x=0}^{\infty} b(x)l(x)$

生態学における数理モデル

動態モデル：Malthusモデル、Logisticモデル、競争方程式、
Lotka-Volterraモデル、**個体群行列モデル**、
拡散方程式モデル、格子モデル・・・

最適戦略モデル：卵サイズモデル、展葉・落葉戦略モデル
(Optimal strategy model) 繁殖スケジュールモデル、採餌戦略モデル

ＥＳＳモデル：タカハトゲーム、性比モデル、分散モデル
(Evolutionarily Stable Strategy)
進化的に安定な戦略

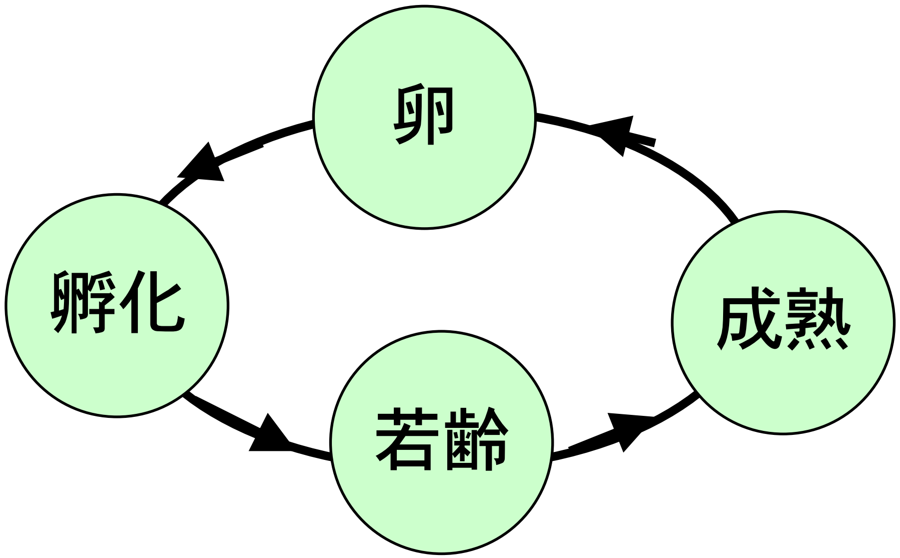
ウミガメ保護に使われたモデル

- 世界の７種類のウミガメはすべて絶滅危惧指定
- 保護対策：産卵場所、卵、ふ化直後の個体

Ｑ１：本当に絶滅しそうなのか？
Ｑ２：絶滅の至近要因は何か？
Ｑ３：従来の保護対策が必要なのか？
Ｑ４：従来の保護対策で十分なのか？

ウミガメの生活史の
データが必要

生活史段階の動態
を記述するモデルが必要



生活史段階の動態
を記述するモデルが必要

個体群行列モデル
（複数の状態をもつ主体の動態）
Dynamics of an entity with multiple states

アカウミガメ

行列	ふ化個体	若齢個体１	若齢個体２	前成熟個体	成熟個体１	成熟個体２	成熟個体３
ふ化個体	0	0	0	0	127	4	80
若齢個体１	0.675	0.737	0	0	0	0	0
若齢個体２	0	0.049	0.661	0	0	0	0
前成熟個体	0	0	0.015	0.691	0	0	0
成熟個体１	0	0	0	0.052	0	0	0
成熟個体２	0	0	0	0	0.809	0	0
成熟個体３	0	0	0	0	0	0.809	0.808

ふ化個体の
生存率

成熟個体あたりの
ふ化個体生産数

広範な応用範囲　　個体群動態・保全生態学

目次

・
・
・

第１章　　量の変化（一変数）

第１章　　量の変化（一変数）

•時間変化（動態）の記述　(description of dynamics)

微分方程式　ある時刻 t の量を $x(t)$ とする　$\frac{dx}{dt} = f(x)$
(時間連続)

差分方程式　ある時刻 t の量を x_t とする $x_{t+1} = f(x_t)$
(時間離散)

この講義

変化のルール

例　：　札幌市の人口、年齢、惑星の数、定期預金

変化のルールが決まると、未来予測ができる

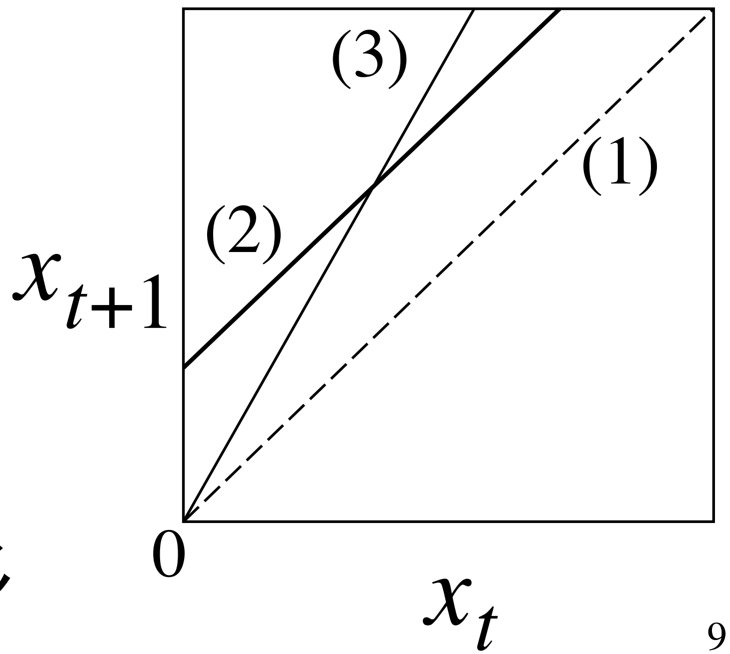
第１節　　変化のルール　$x_{t+1} = f(x_t)$

- 例１　　不変　　　　　惑星の数
- 例２　　定数増加　　　年齢
- 例３　　定数倍　　　　細胞分裂、定期預金
- 例４　　より複雑　　　生物集団の個体数など多くの場合

■　ルールをグラフで表す

横軸：x_t　　縦軸：x_{t+1}

線形：$x_{t+1} = rx_t + b$



ルールの式　$f(x_t)$

(1) x_t

(2) $x_t + b$

(3) ax_t

例１と例２はちょっとずらすと同じ

第１節　　変化のルール　$x_{t+1} = f(x_t)$

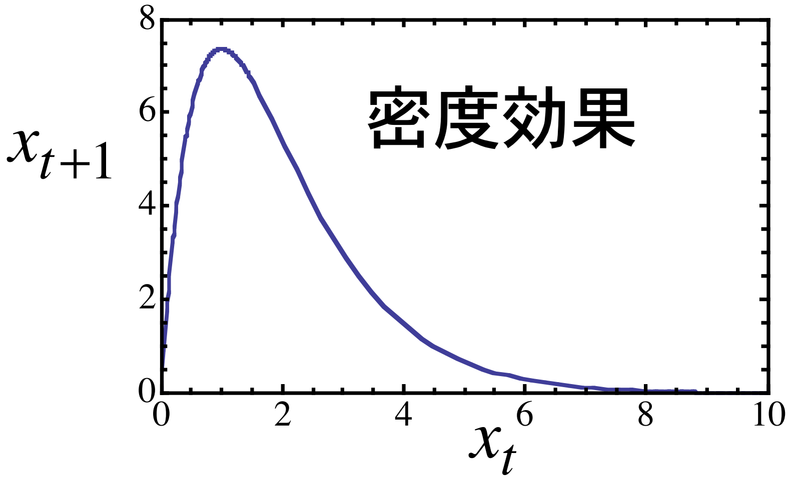
- 例１　　不変　　　　惑星の数
- 例２　　定数増加　　年齢
- 例３　　定数倍　　　細胞分裂、定期預金
- 例４　　より複雑　　多くの場合

■　ルールをグラフで表す

ヒメナズナ（砂丘の一年草）

横軸：x_t　　縦軸：x_{t+1}

ルール f（x_t)：一山型の関数



ルールの式は複雑な関数
数式で書けないかも。
もちろん線形ではない。

第２節　　将来の予測

線形：$x_{t+1} = rx_t + b$

代入

（１）　　グラフ　　横軸：　t　　　縦軸：　x_t

（２）　　解析的に解く（線形の場合、可能。多くの場合、不可能）

ーーー＞　コンピュータシミュレーション、数値計算

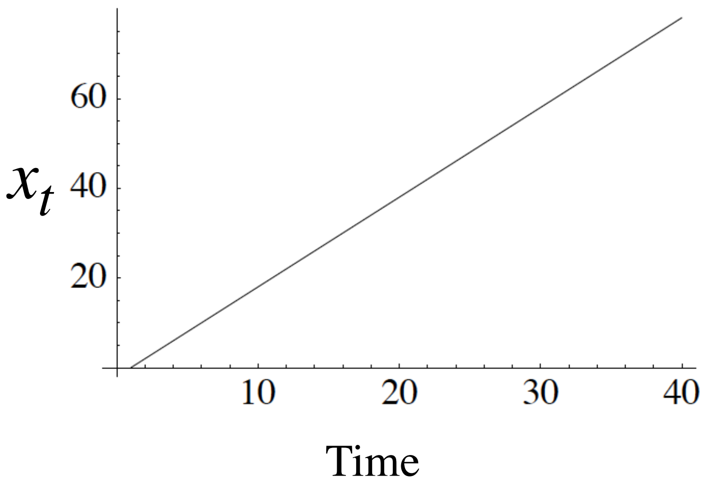
例１　　不変　　$x_t = x_0$　　$r = 1, b = 0$　x_0：　初期値

例２　　定数増加　　$x_t = x_0 + bt$　　$r = 1,\ b$：等差

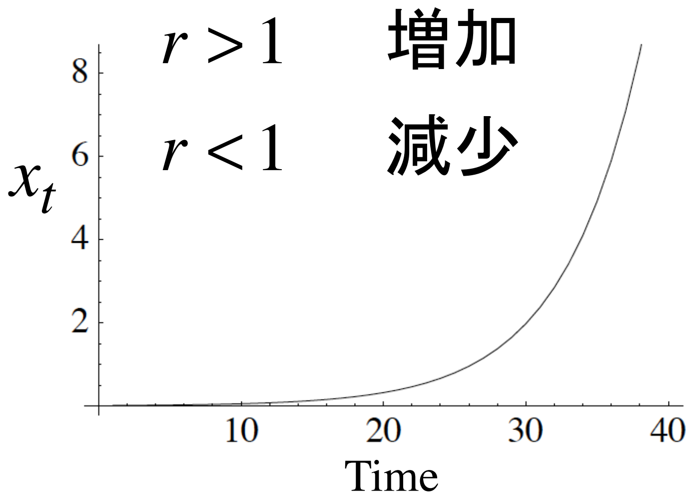
例３　　定数倍　　$x_t = x_0 r^t$　　$b = 0,\ r$：等比

例１，２，３は線形

例２



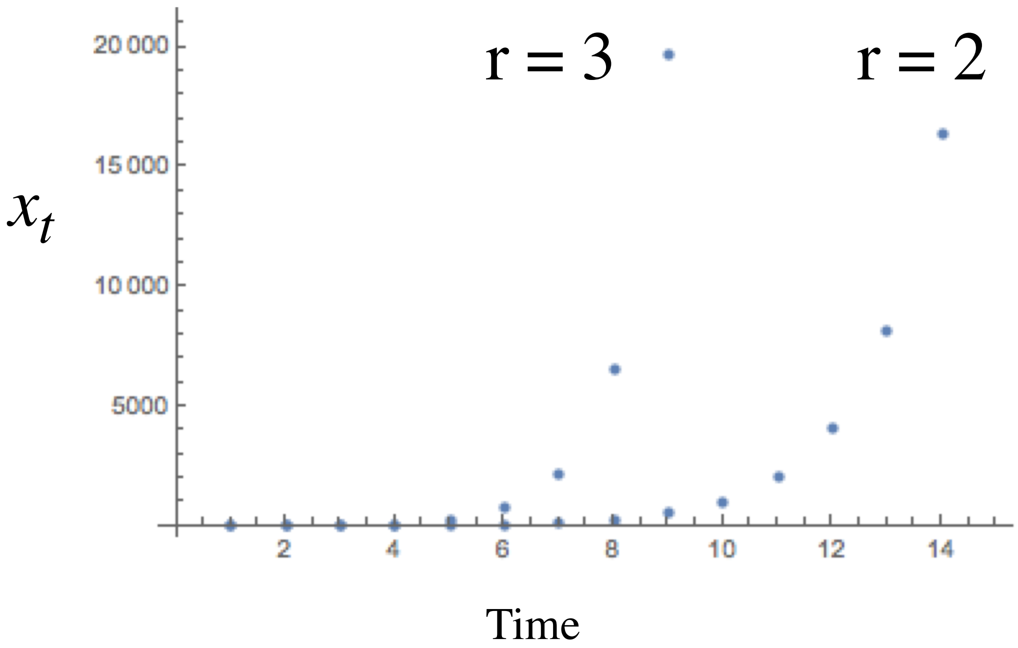
例３



覚えておいてほしいこと：片対数グラフ

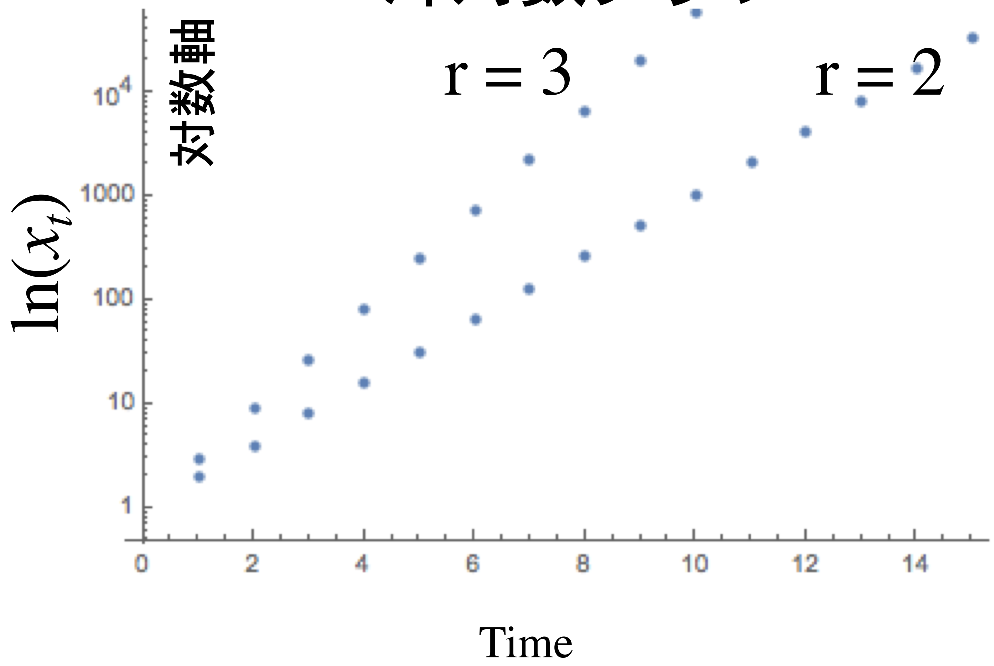
$x_t = x_0 r^t$

等比数列
幾何級数　(geometric series)
指数関数的増加 (exponential increase)



違いが大きすぎる

片対数グラフ



指数増加は直線増加に変わる

片対数グラフでは、指数増加は直線増加に変わる

$$x_t = x_0 r^t$$

$$\ln x_t = \ln(x_0 r^t) = \ln(x_0) + \ln(r^t)$$

$$= \ln r \times t + \ln x_0$$

$Y = \underline{\ln r} \times X + \underline{\ln x_0}$

(傾き ln r,　切片 $\ln x_0$ の直線)

傾きln r は$r > 1$ or $r < 1$で正負が変わる。

直線増加あるいは直線減少

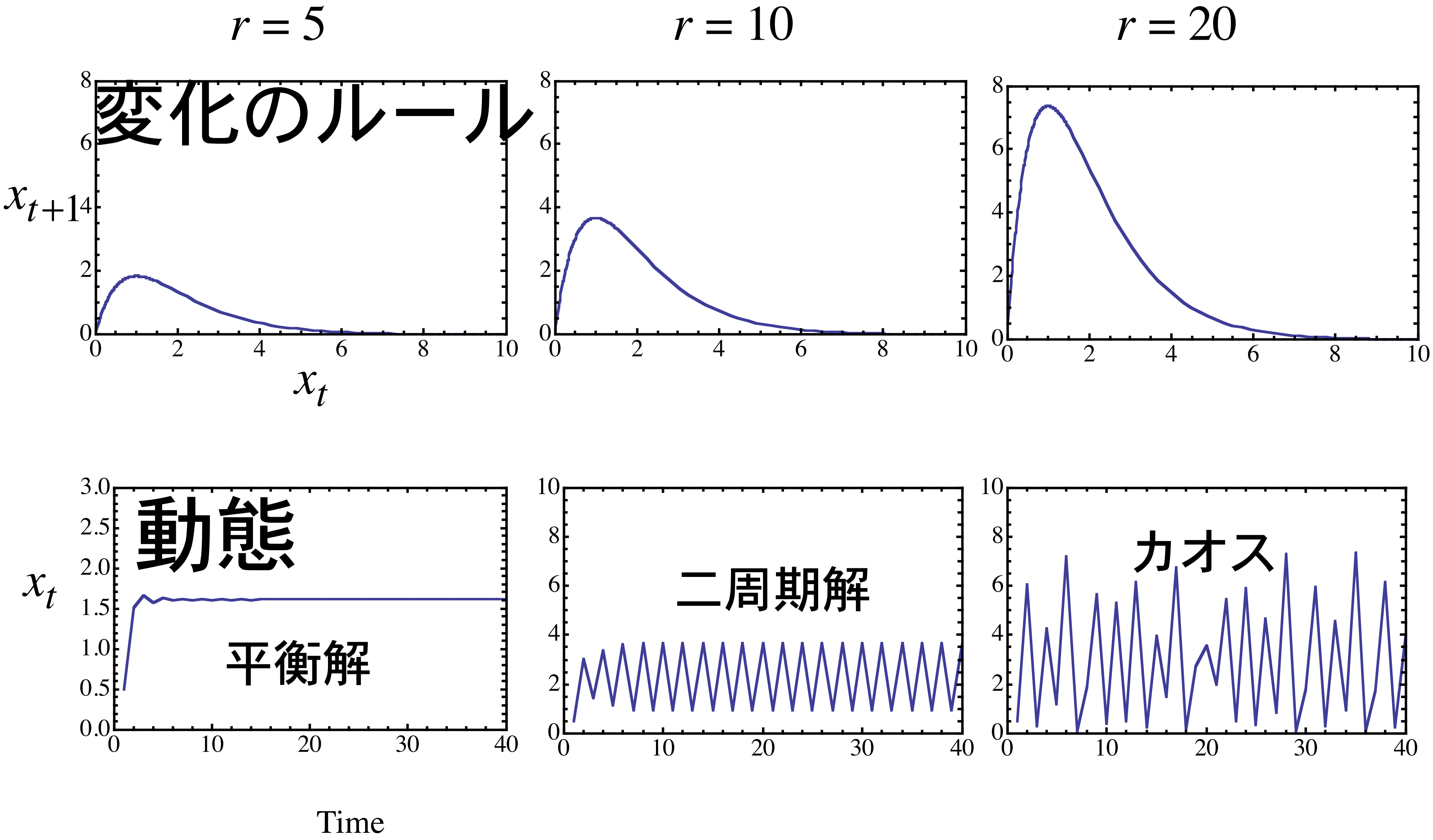
例４：ヒメナズナ（砂丘の一年草）

ルール $f(x_t) = r\,x_t \exp(-x_t)$

r: 繁殖率

(Ricker型密度依存関数）

変化のルールは、同じ形で倍率だけが違う。
例えば、実生の出現率が変化するとか



練習問題

次の差分方程式を解きなさい。：

$$x_{t+1} = f(x_t)$$

x_0: 時刻ゼロでの値（初期値）

- EX 1 　不変 　$f(x_t) = x_t$
- EX 2 　定数増加 　$f(x_t) = x_t + b$
- EX 3 　定数倍 　$f(x_t) = rx_t$
- 一般の線形差分方程式 　$f(x_t) = rx_t + b$

Note: 線形差分方程式は解析的に解くことができる.

まとめ

✧変化のルールは簡単なもの（線形）から複雑なものまである

✧簡単なものだと解析的に解けるが、普通はそうではない

✧一変数だから動態が簡単に計算できるし、図示化が容易

現実の問題の解決にはならない。
なぜなら、多くの場合複数の量が同時に関連しあって
（相互作用あり）変化しているから。

おとぎ話： ある村の子供と大人の人口

　ある村には大人と子供が住んでいる．子供が翌年に子供でいる確率は7割で、大人になる確率は１割である。また、大人の死ぬ確率は４割で、大人は一人当り平均１． ２人の子供を産む。さて、この村の人口は増加傾向にあるだろうか？

第２章　　　量の変化（二変数）

第２章　　量の変化（二変数）

第１節　　変化のルール：f（ベクトル）

$$\vec{x}_t = \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_{t+1} = \vec{f}(\vec{x}_t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_{1,t+1} = f_1(x_{1,t}, x_{2,t}) \\ x_{2,t+1} = f_2(x_{1,t}, x_{2,t}) \end{cases}$$

（１）二つの量が独立

例１　　変化しない　　　　地球の半径と月の半径

E：単位行列

$$\begin{array}{l} \text{地球} \\ \text{月} \end{array} \begin{cases} x_{1,t+1} = x_{1,t} \\ x_{2,t+1} = x_{2,t} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$$

一変数と同じ

例２　　定数倍　　　　異なる利率を持つ二つの定期預金

$$\begin{cases} x_{1,t+1} = (1+a_1)x_{1,t} \\ x_{2,t+1} = (1+a_2)x_{2,t} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a_1 & 0 \\ 0 & 1+a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$$

一変数と同じ

対角行列であるところがミソ

（２）二つの量が非独立（「相互作用がある」と言ってもよい）

例３　札幌市とそれ以外の道内の人口（札幌への移住のみ、移住率一定 c）

札幌
それ以外

$$\begin{cases} x_{1,t+1} = x_{1,t} + c x_{2,t} \\ x_{2,t+1} = (1-c) x_{2,t} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1-c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$$

例４　札幌市とそれ以外の道内の人口（札幌への移住とそれ以外への移住、移住率一定 c_1，　c_2）

$$\begin{cases} x_{1,t+1} = (1-c_2) x_{1,t} + c_1 x_{2,t} \\ x_{2,t+1} = c_2 x_{1,t} + (1-c_1) x_{2,t} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-c_2 & c_1 \\ c_2 & 1-c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$$

対角行列じゃない！でも、ルールを決めて式を書けば、
行列に書ける簡単な場合がある。

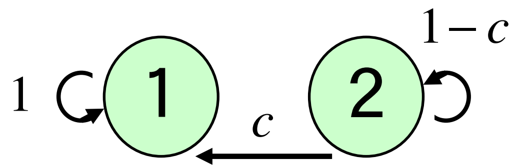
見方を変えよう！
「状態の変化」ではなく、「状態間の（個体の）流れ」

例３　　　札幌市とそれ以外の道内の人口（札幌への移住のみ、移住率一定 c）

札幌
それ以外

$$\begin{cases} x_{1,t+1} = x_{1,t} + c x_{2,t} \\ x_{2,t+1} = (1-c) x_{2,t} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1-c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$$

流れ図



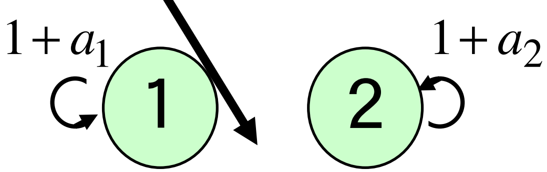
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1-c \end{pmatrix}$$

状態 j から状態 i への矢印のパラメーターを、
i 行 j 列に配置すると、行列ができる。

流れ図と行列(Flow chart and matrix)

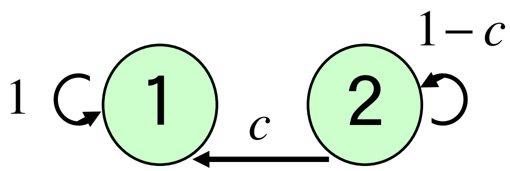
独立の時、対角行列かつ流れがつながらない

例 2



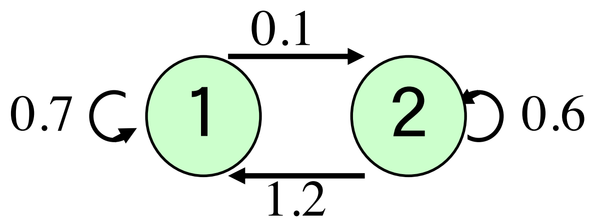
$$\begin{pmatrix} 1+a_1 & 0 \\ 0 & 1+a_2 \end{pmatrix}$$

例 3



$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1-c \end{pmatrix}$$

例 5



$$\begin{pmatrix} 0.7 & 1.2 \\ 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$$

変数 j から変数 i への矢印についている係数を i 行 j 列の要素とする行列

$$\begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a_1 & 0 \\ 0 & 1+a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1-c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 1.2 \\ 0.1 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$$

行列を用いることで、線形差分方程式を記述することができる

$$\vec{x}_{t+1} = \mathbf{A}\vec{x}_t$$

$\vec{x}_{t+1} = \vec{f}(\vec{x}_t)$ の簡単な場合

例５　　おとぎ話：ある村の子供と大人の人口

　ある村には大人と子供が住んでいる．子供が翌年に子供でいる確率は7割で、大人になる確率は１割である。また、大人の死ぬ確率は４割で、大人は一人当り平均１．２人の子供を産む。さて、この村の人口は増加傾向にあるだろうか？

$$\begin{cases} x_{1,t+1} = 0.7x_{1,t} + 1.2x_{2,t} \\ x_{2,t+1} = 0.1x_{1,t} + 0.6x_{2,t} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 1.2 \\ 0.1 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$$

リアル話：ある村の子供と大人の人口

　n 歳の子供が翌年に $n+1$ 歳である確率は n に依存しており、n が異なると
異なったりする。・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

複雑化。どうやって解くのだろう？
「解く」：x_i を時刻 t の関数として表す

第２節　　線形２変数ダイナミクスを図にする

西

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_{t+1} = \mathbf{A}\vec{x}_t \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$$

初期ベクトル $\begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

練習問題

時刻$1, 2, 3, 4, 5$の解を
自分で求めてください
使用する式は

$$\vec{x}_{t+1} = \mathbf{A}\vec{x}_t$$

t	0	1	2	3		∞
$x1$	2	5	14	41	⋰	α
$x2$	1	4	13	40	⋰	α

何か法則性が見出せますか？

横軸が時間ではない図を作って動態を見る

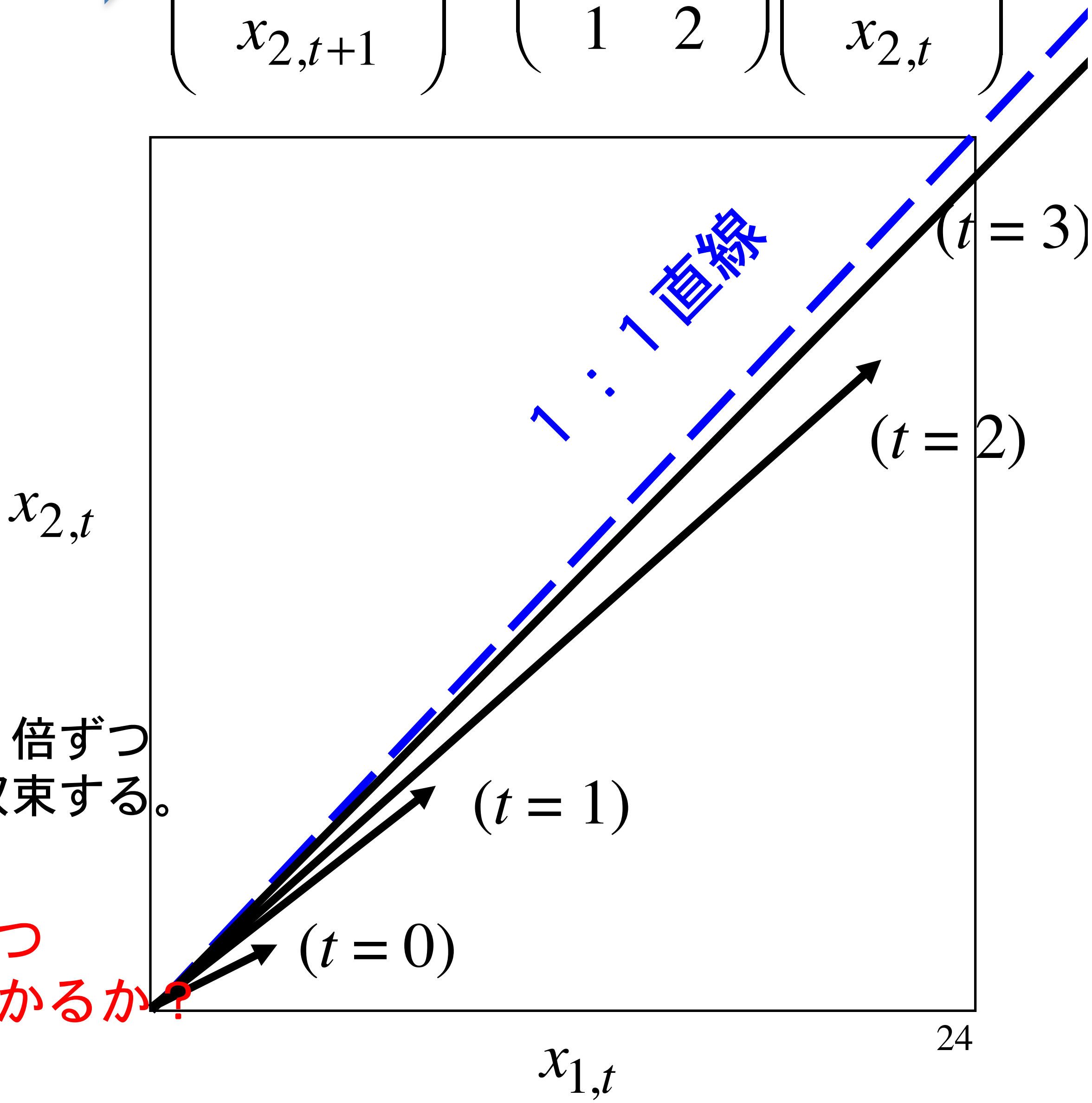
西

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_{t+1} = \mathbf{A}\vec{x}_t \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$$

初期ベクトル $\begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

t	0	1	2	3		∞
$x1$	2	5	14	41	∴	α
$x2$	1	4	13	40	∴	α

ベクトルの長さは時間とともに約３倍ずつ大きくなる。成分の比が１：１に収束する。



時間が十分に経過すると３倍ずつ大きくなる。その倍率や比がわかるか？

倍率や比を求めるには？

西

行列Aを乗じる　$\mathbf{A}\vec{\mathbf{u}}$

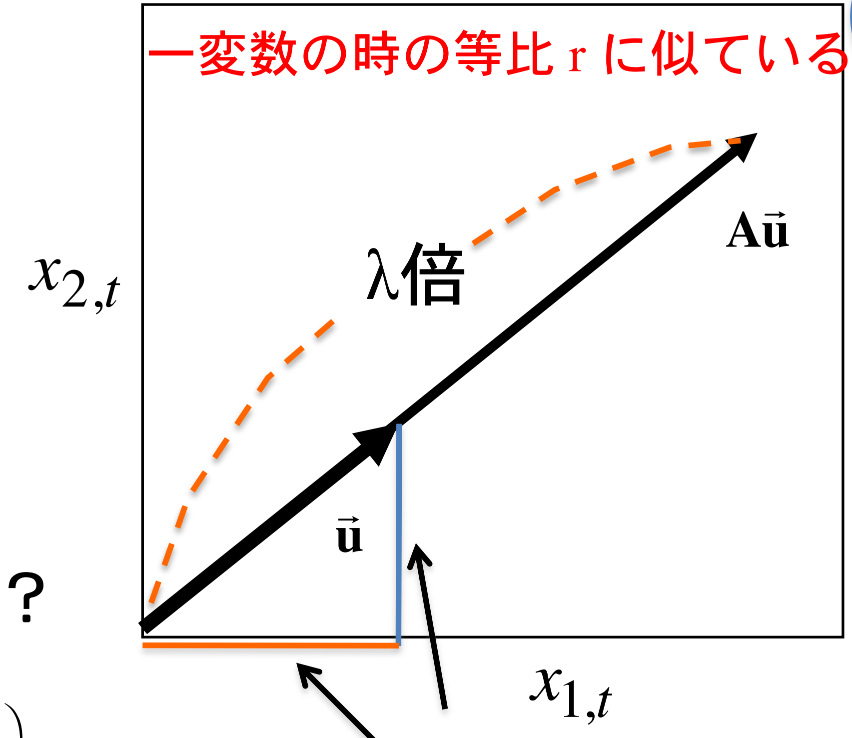
倍率λを乗じる　$\lambda\vec{\mathbf{u}}$

たまたまこの二つが一致する
ベクトル　$\vec{\mathbf{u}}$　はあるだろうか？

$$\lambda\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{u}} \qquad \lambda\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

一変数の時の等比 r に似ている



比は一定に
保たれる

✧ 普通は零ベクトルが答え（自明解）
trivial solution

$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ これじゃあ意味がない！！

✧ 特殊な場合 ： 零ベクトル以外の解がある

$$\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0$$

（次頁に続く）

$$\lambda\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{u}} \quad \Rightarrow \quad \lambda\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\vec{\mathbf{u}} = \vec{0}$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

固有値方程式　$\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0$

（次頁に続く）

$$(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})\vec{\mathbf{u}}=\vec{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}\vec{\mathbf{u}}=\vec{0}$$

西

定理 $\mathbf{P}\vec{\mathbf{u}}=\vec{0}$ が $\vec{\mathbf{u}}=\vec{0}$ （自明な解）以外の解を持つ必要十分条件は

$$\det\mathbf{P}=0$$ （Pの行列式がゼロ）

ウエブでチェックしてください

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の場合 $\mathbf{P}=\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{pmatrix}$

$$\det\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{pmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-2)-(-1)(-1)=0$$

（次頁に続く）

$$\det\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{pmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-2)-(-1)(-1)=0 \Rightarrow \frac{\lambda-2}{-1} = \frac{-1}{\lambda-2}$$

実際に解こうとすると $\lambda^2-4\lambda+3=(\lambda-3)(\lambda-1)=0 \Rightarrow \lambda_1=3,\ \lambda_2=1$

$\lambda_1=3$ の場合 $\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 3-2 & -1 \\ -1 & 3-2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3-2 & -1 \\ -1 & 3-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} u_1-u_2=0 \\ -u_1+u_2=0 \end{matrix} \Rightarrow \frac{u_1}{u_2}=\frac{1}{1}$$

二つの方程式が独立じゃない

$$\vec{\mathbf{u}}_1=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

同様に $\lambda_2=1$ の場合 $\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ -1 & 1-2 \end{pmatrix}$

$$\vec{\mathbf{u}}_2=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \end{pmatrix}$$

（終わり）

まとめると

問題：　行列Aを乗じた結果と倍率λを乗じた結果、たまたまこの二つが一致するベクトル（u)はあるだろうか？

$$\lambda\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{u}} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

比1:1の直線に
矢印が収束した理由
（あとでわかる）

$$\lambda_1 = 3 \;\; \vec{\mathbf{u}}_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 \;\; \vec{\mathbf{u}}_2 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \end{pmatrix}$$

このベクトルは
定数倍の任意性をもつ

それぞれ固有値、それに属する（右）固有ベクトルという

定数倍の任意性: $\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ どれでもいい

個体群行列モデルでよく使われるのは、要素の和が１になる $\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$,

演習問題

以下の行列の固有値（λ）、（右）固有ベクトル（$\mathbf{u}$)を求めよ。

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0.7 & 1.2 \\ 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

おとぎ話の村の例

解答

(a)

$$\lambda = 7, -2$$

$$\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 4\alpha \\ 5\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \end{pmatrix}$$

(b)

$$\lambda = 1,\ \ 0.3$$

$$\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 0.97\alpha \\ 0.24\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.95\beta \\ -0.32\beta \end{pmatrix}$$

(c)

$$\lambda = -1, -3$$

$$\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ 2\beta \end{pmatrix}$$

(d)

$$\lambda = 6,\ \ 1,\ \ -1$$

$$\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 5\alpha \\ 3\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3\beta \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma \\ -2\gamma \\ 3\gamma \end{pmatrix}$$

おとぎ話の村は増えも減りもしない
ことを想起させる

第３節　線形ダイナミクスの解
（n行n列行列の一般解）

一変数の時の等比 r に似ている

$$\vec{x}_{t+1} = \mathbf{A}\vec{x}_t$$

初期値 $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ \\ \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \vec{x}_t = \mathbf{A}^t \vec{x}_0$$

アカウミガメ

	ふ化個体	若齢個体 1	若齢個体 2	前成熟個体	成熟個体 1	成熟個体 2	成熟個体 3
ふ化個体	0	0	0	0	127	4	80
若齢個体 1	0.675	0.737	0	0	0	0	0
若齢個体 2	0	0.049	0.661	0	0	0	0
前成熟個体	0	0	0.015	0.691	0	0	0
成熟個体 1	0	0	0	0.052	0	0	0
成熟個体 2	0	0	0	0	0.809	0	0
成熟個体 3	0	0	0	0	0	0.809	0.808

ベクトル・行列公式集

西

公式１：横ベクトルと縦ベクトルの積

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

結果はスカラー

ベクトルa, bの内積

公式２：行列と縦ベクトルの積

公式１より

$$\begin{array}{c} \mathbf{a}_1 \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1\mathbf{b} \\ \mathbf{a}_2\mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n\mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_k \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k} b_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk} b_k \end{pmatrix}$$

結果は縦ベクトル

ベクトル・行列公式集（続き）

西

公式３：横ベクトルと行列の積

結果は横ベクトル

$$
\left(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n \right)
\begin{array}{c} \mathbf{b}_1 \\ \left(\begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \cdots & b_{nn} \end{array} \right) \end{array}
= \mathbf{a} \left(\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3 \right) = \left(\mathbf{ab}_1 \quad \mathbf{ab}_2 \quad \cdots \right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_{k1} \quad \sum_{k=1}^{n} a_k b_{k2} \quad \cdots \right)
$$

公式２、３から行列同士の積の公式もできる。練習しては？

公式４：行列と対角行列の積

公式１より

$$
\left(v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n \right)
\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}
= \left(\lambda_1 v_1 \quad \lambda_2 v_2 \quad \cdots \quad \lambda_n v_n \right)
$$

v1などが縦ベクトルに変わっても

$$
\left(\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n \right)
\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}
= \left(\lambda_1 \mathbf{v}_1 \quad \lambda_2 \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \lambda_n \mathbf{v}_n \right)
$$

結果は行列

解を知るには準備が必要：行列の対角化（ちょっと数学）

西

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

固有値、$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$,

固有ベクトル、$\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{1n} \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2=\begin{pmatrix} u_{21} \\ \vdots \\ u_{1n} \end{pmatrix}, \cdots, \mathbf{u}_n=\begin{pmatrix} u_{n1} \\ \vdots \\ u_{nn} \end{pmatrix}$

固有値の式

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_1=\lambda_1\mathbf{u}_1$$
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_2=\lambda_2\mathbf{u}_2$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_n=\lambda_n\mathbf{u}_n$$

縦ベクトル＝縦ベクトル

n本を横に並べると

$$\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_1, \mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_n\right)=\left(\lambda_1\mathbf{u}_1, \lambda_2\mathbf{u}_2, \cdots, \lambda_n\mathbf{u}_n\right)$$

n 行 n 列　＝　n 行 n 列

行列の対角化

西

$$\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n) = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1n} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \vdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_1 = \lambda_1 \mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_2 = \lambda_2 \mathbf{u}_2$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_n = \lambda_n \mathbf{u}_n$$

$$\Rightarrow \left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_1, \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_n\right) = \left(\lambda_1 \mathbf{u}_1, \lambda_2 \mathbf{u}_2, \cdots, \lambda_n \mathbf{u}_n\right)$$

n 行 n 列　＝　n 行 n 列　　公式４を使う

$$\mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\right) = \left(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\right) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

n 行 n 列　＝　n 行 n 列

全部をまとめて
行列を使うと
簡単になりました

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U} \cdot \Lambda$$

行列の対角化

西

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{U}=\mathbf{U}\cdot\boldsymbol{\Lambda}$$

右からUの

逆行列をかけると

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\cdot\boldsymbol{\Lambda}\cdot\mathbf{U}^{-1}$$

$$\mathbf{A}^t=(\mathbf{U}\cdot\boldsymbol{\Lambda}\cdot\mathbf{U}^{-1})^t$$

行列Aの　t　乗を求めてみよう

$$=\overbrace{(\mathbf{U}\cdot\boldsymbol{\Lambda}\cdot\mathbf{U}^{-1})(\mathbf{U}\cdot\boldsymbol{\Lambda}\cdot\mathbf{U}^{-1})\cdots(\mathbf{U}\cdot\boldsymbol{\Lambda}\cdot\mathbf{U}^{-1})}^{t}$$

$$=\mathbf{U}\cdot\overbrace{(\boldsymbol{\Lambda}\cdot\underbrace{\mathbf{U}^{-1}\cdot\mathbf{U}}_{\mathbf{E}})(\boldsymbol{\Lambda}\cdot\underbrace{\mathbf{U}^{-1}\cdot\mathbf{U}}_{\mathbf{E}})\cdots(\boldsymbol{\Lambda}\cdot\underbrace{\mathbf{U}^{-1}\cdot\mathbf{U}}_{\mathbf{E}})}^{t-1}\cdot\boldsymbol{\Lambda}\cdot\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{U}\cdot\boldsymbol{\Lambda}^t\cdot\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{U}\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{\lambda}_1^t & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \boldsymbol{\lambda}_n^t\end{pmatrix}\cdot\mathbf{U}^{-1}$$

$$\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}^{-1}\cdot\mathbf{U}=\mathbf{U}\cdot\mathbf{U}^{-1}=\mathbf{E}$$

連立差分方程式：行列モデル

西

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{x}(t) = \overbrace{\mathbf{U} \cdot \Lambda^t \cdot \mathbf{U}^{-1}}^{\mathbf{A}^t} \cdot \mathbf{x}(0) = \boxed{\mathbf{U} \cdot \Lambda^t} \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{U} \cdot \Lambda^t = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}_1^t & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \boldsymbol{\lambda}_n^t \end{pmatrix}$$

公式４を使う

$$= \left(\boldsymbol{\lambda}_1^t \mathbf{u}_1,\ \boldsymbol{\lambda}_2^t \mathbf{u}_2,\ \cdots\ ,\ \boldsymbol{\lambda}_n^t \mathbf{u}_n \right)$$

連立差分方程式：行列モデル

西

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{x}(0)$$

$$= \mathbf{U} \cdot \Lambda^t \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{x}(0) = \boxed{\mathbf{U} \cdot \Lambda^t} \cdot \boxed{\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{x}(0)}$$

$$\mathbf{U} \cdot \Lambda^t = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^t & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^t \end{pmatrix},$$

$$= \left(\lambda_1^t \mathbf{u}_1,\ \lambda_2^t \mathbf{u}_2,\ \cdots\ ,\ \lambda_n^t \mathbf{u}_n \right)$$

$$\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

公式１を複数回使う

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \lambda_1^t \mathbf{u}_1 + c_2 \lambda_2^t \mathbf{u}_2 + \cdots + c_n \lambda_n^t \mathbf{u}_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i (\lambda_i)^t \vec{\mathbf{u}}_i$$

$$\mathbf{x}(0) = c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + c_n \mathbf{u}_n$$

n行n列行列の一般解のまとめ

西

＊行列Ａの一次独立な右固有ベクトルがn個　$\vec{\mathbf{u}}_1,\ \vec{\mathbf{u}}_2, \cdots$　存在すれば、

解は
（＊）
$$\vec{x}_t = \sum_{i=1}^{n} c_i (\lambda_i)^t \vec{\mathbf{u}}_i$$

式中、c_i は　$\vec{x}_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i \vec{\mathbf{u}}_i$　を満たす係数

解法の鍵：固有値と固有ベクトル（何個もある）

λ_i は行列Ａの固有値　$\lambda_i \vec{\mathbf{u}}_i = \mathbf{A} \vec{\mathbf{u}}_i$（固有ベクトルは定数倍の任意性をもつ）

λ_i　は　$\det(\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0$　（固有値方程式）によって求められる

$\mathbf{E}$：単位行列

おとぎ話の村

ある村には大人と子供が住んでいる．子供が翌年に子供でいる確率は7割で、大人になる確率は１割である。また、大人の死ぬ確率は４割で、大人は一人当り平均１．２人の子供を産む。さて、この村の人口は増加傾向にあるだろうか？

$$\begin{cases} x_{1,t+1} = 0.7x_{1,t} + 1.2x_{2,t} \\ x_{2,t+1} = 0.1x_{1,t} + 0.6x_{2,t} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 1.2 \\ 0.1 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$$

$$(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})\vec{\mathbf{u}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \det\begin{pmatrix} \lambda - 0.7 & -1.2 \\ -0.1 & \lambda - 0.6 \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda = 1,\ 0.3$$

$$\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 0.97\alpha \\ 0.24\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.95\beta \\ -0.32\beta \end{pmatrix}$$

(to be continued)

解の公式 $$\vec{\boldsymbol{x}}_t = \sum_{i=1}^{n} c_i(\lambda_i)^t \vec{\boldsymbol{u}}_i$$

$$\vec{\boldsymbol{x}}_t = \sum_{i=1}^{2} c_i(\lambda_i)^t \vec{\boldsymbol{u}}_i = c_1(\lambda_1)^t \vec{\boldsymbol{u}}_1 + c_2(\lambda_2)^t \vec{\boldsymbol{u}}_2$$

$$= \sum_{i=1}^{2} c_i(\lambda_i)^t \vec{\boldsymbol{u}}_i = c_1(1)^t \begin{pmatrix} 0.97 \\ 0.24 \end{pmatrix} + c_2(0.3)^t \begin{pmatrix} 0.95 \\ -0.32 \end{pmatrix}$$

$$\approx (\text{ほぼ等しい}) c_1(1)^t \begin{pmatrix} 0.97 \\ 0.24 \end{pmatrix}$$

定数! $$= \begin{pmatrix} 0.97c_1 \\ 0.24c_1 \end{pmatrix}$$

時刻が消えて、時間に依存しない解になりました。

時間が経過すると、増えも減りもせずに一定になる

まとめ

✧ 二変数のモデルでは、変化のルールが複雑であれば、一般には解くことができない。また、解の予測をすることも難しい。

✧線形のモデルでは、流れ図により変化のルールを直観的に理解できる。また、解析的に解くことができる。

✧線形モデルを解く鍵は、固有値とその（右）固有ベクトルである。

✧おとぎ話の村の人口は、少し時間が経つと増えも減りもしなくなる

もし余裕があれば、

Obtain the solution of $\mathbf{x}(t)$ in the following difference equation.

$$\vec{x}_{t+1} = \mathbf{A}\vec{x}_t \qquad \text{Initial vector: } \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ (b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Hint: obtain $\lambda_i, \vec{\boldsymbol{u}}_i$ first and obtain g_i so that the initial vector is satisfied when $t = 0$.

例4:ヒメナズナ（砂丘の一年草）　ルール $f(x_t) = r\,x_t \exp(-x_t)$　r : 繁殖率

蜘蛛の巣法(Cob-web diagram)

＊行列Ａの一次独立な右固有ベクトルがn個存在すれば、

存在する条件を調べよう。ダメな例も