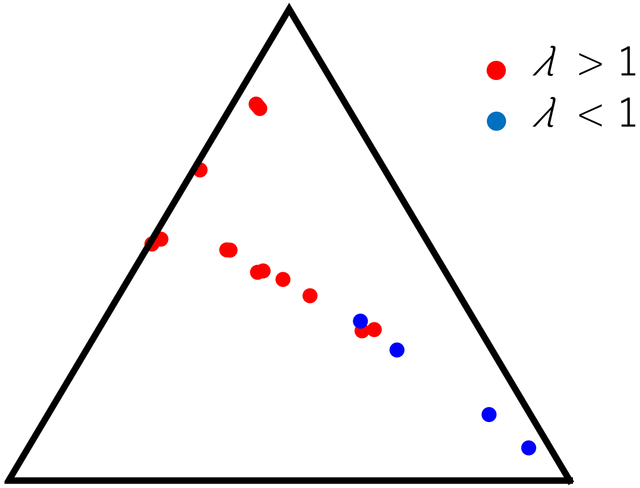
Workshop3-4new2
26ページ

IPADREデータベースでの一回繁殖型植物

Takada & Kawai (2020)

この１４個の個体群はどうやって得られているのか？場所の違い？調査年の違い？

Alliaria petiolata
(ニンニクガラシ14個体群)



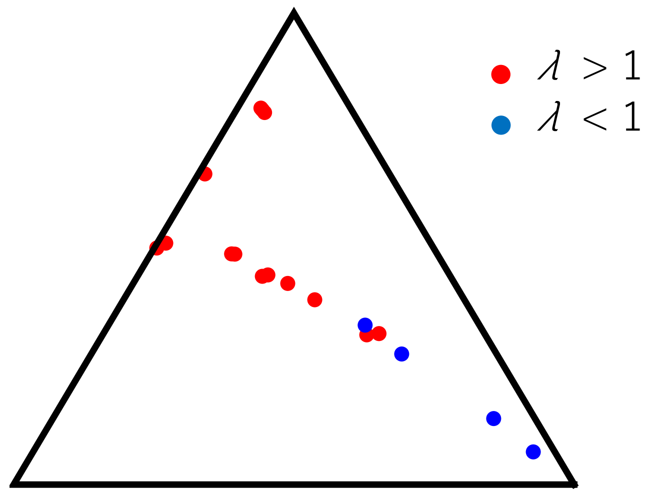
個体群成長率が１を超えるものは左上

COMPADREデータベースでの一回繁殖型植物

Takada & Kawai (2020)

Evans et al. (2012) Ecol. Appl.
DOI: 10.1890/11-1291.1

Alliaria petiolata
(ニンニクガラシ14個体群)



四年間のセンサス(2005-2008)
１３集団の３推移の時間平均＋全集団の平均

緯度、経度、高度＋気候帯

３行３列の個体群行列全部で１４個

個体群成長率が１を
超えるものは左上

詳しい情報は次頁
（COMPADREデータベースからの抜粋）

COMPADREデータベースからの抜粋

緯度経度が違う

SpeciesAuth	Speci	Comn	Famil	Orgar	Authors	Journal	YearPublicat	DOI.ISBN	StudyDuratio	StudyStart	StudyEnd	Lat	Lon	Altitude	Country	Ecoregion	MatrixCompo
Alliaria_petio	Alliari	Garlic	Brass	Herba	Evans; Davis;	Ecol Appl	2012	10.1890/11-	4	2005	2008	NA	NA	NA	USA	TBM	Mean
Alliaria_petio	Alliari	Garlic	Brass	Herba	Evans; Davis;	Ecol Appl	2012	10.1890/11-	4	2005	2008	40.7166667	-88.5	205	USA	TBM	Mean
Alliaria_petio	Alliari	Garlic	Brass	Herba	Evans; Davis;	Ecol Appl	2012	10.1890/11-	4	2005	2008	41.9666667	-84.016667	286	USA	TBM	Mean
Alliaria_petio	Alliari	Garlic	Brass	Herba	Evans; Davis;	Ecol Appl	2012	10.1890/11-	4	2005	2008	40.6833333	-88.516667	219	USA	TBM	Mean
Alliaria_petio	Alliari	Garlic	Brass	Herba	Evans; Davis;	Ecol Appl	2012	10.1890/11-	4	2005	2008	42.1	-87.8	248	USA	TBM	Mean
Alliaria_petio	Alliari	Garlic	Brass	Herba	Evans; Davis;	Ecol Appl	2012	10.1890/11-	4	2005	2008	42.7666667	-85.8	199	USA	TBM	Mean
Alliaria_petio	Alliari	Garlic	Brass	Herba	Evans; Davis;	Ecol Appl	2012	10.1890/11-	4	2005	2008	40.05	-86.033333	201	USA	TBM	Mean
Alliaria_petio	Alliari	Garlic	Brass	Herba	Evans; Davis;	Ecol Appl	2012	10.1890/11-	4	2005	2008	40.0666667	-87.8	223	USA	TBM	Mean
Alliaria_petio	Alliari	Garlic	Brass	Herba	Evans; Davis;	Ecol Appl	2012	10.1890/11-	4	2005	2008	41.9666667	-82.083333	250	USA	TBM	Mean
Alliaria_petio	Alliari	Garlic	Brass	Herba	Evans; Davis;	Ecol Appl	2012	10.1890/11-	4	2005	2008	42.9166667	-84.233333	179	USA	TBM	Mean
Alliaria_petio	Alliari	Garlic	Brass	Herba	Evans; Davis;	Ecol Appl	2012	10.1890/11-	4	2005	2008	42.8	-83.6	253	USA	TBM	Mean
Alliaria_petio	Alliari	Garlic	Brass	Herba	Evans; Davis;	Ecol Appl	2012	10.1890/11-	4	2005	2008	42	-84.033333	262	USA	TBM	Mean
Alliaria_petio	Alliari	Garlic	Brass	Herba	Evans; Davis;	Ecol Appl	2012	10.1890/11-	4	2005	2008	42.8833333	-83.966667	250	USA	TBM	Mean
Alliaria_petio	Alliari	Garlic	Brass	Herba	Evans; Davis;	Ecol Appl	2012	10.1890/11-	4	2005	2008	42.8833333	-83.966667	250	USA	TBM	Mean

Workshop4-2new2
4ページ

◆　推移行列（U）の求め方

推移頻度表	翌年＼今年	1	2	3
	1	0	0	0
	2	12	6	0
	3	0	4	9
	死亡	18	10	1
	合計	30	20	10

m_{ij}

最尤推定法はどうするんだっけ？

推移行列	翌年	1	2	3
	1	0	0	0
	2	0.4	0.3	0
	3	0	0.2	0.9
	死亡	0.6	0.5	0.1

u_{ij}

$$u_{ij}\text{（推移確率）} = \frac{m_{ij}}{\sum_i m_{ij}} = \frac{j\text{から}i\text{への推移頻度}}{j\text{列の総和}}$$

（最尤推定法で尤度最大になることが証明されている）

２生育段階モデルの最尤推定（１）

Stage 1　　滞留

n_1個体 → m_{11}個体　Stage 1　　死亡は（n_1 − m_{11} − m_{21}）個体

　　　　→ m_{21}個体　Stage2

　　　　成長

$\boxed{\text{滞留}}$ 確率p_{11}で起こることがm_{11}回起こった：　その確率はp_{11}のm_{11}乗

$\boxed{\text{成長}}$ 確率p_{21}で起こることがm_{21}回起こった：　その確率はp_{21}のm_{21}乗

$\boxed{\text{死亡}}$ 確率$(1 - p_{11} - p_{21})$で起こることが(n_1 − m_{11} − m_{21})回起こった

：その確率は$(1 - p_{11} - p_{21})^{n_1 - m_{11} - m_{21}}$

Stage 2 も同様　　　　　⋮

＜データが得られる確率（尤度）＞　多項分布の尤度関数

$$p_{11}{}^{m_{11}} p_{21}{}^{m_{21}} (1 - p_{11} - p_{21})^{(n_1 - m_{11} - m_{21})}$$
$$\times p_{12}{}^{m_{12}} p_{22}{}^{m_{22}} (1 - p_{12} - p_{22})^{(n_2 - m_{12} - m_{22})}$$

２生育段階モデルの最尤推定（２）

＜対数をとると（対数尤度関数）＞

$$
\begin{aligned}
& l(p_{11}, p_{21}, p_{12}, p_{22}) \\
& = m_{11} \ln(p_{11}) + m_{21} \ln(p_{21}) + (n_1 - m_{11} - m_{21}) \ln\left((1 - p_{11} - p_{21}\right) \\
& + m_{12} \ln(p_{12}) + m_{22} \ln(p_{22}) + (n_2 - m_{12} - m_{22}) \ln\left((1 - p_{12} - p_{22}\right)
\end{aligned}
$$

＜対数尤度が最大（尤度が最大と等価）になる$p_{11}{}^*$, $p_{12}{}^*$,…を求めると＞

$$\frac{\partial l}{\partial p_{11}} = \frac{m_{11}}{p_{11}{}^*} - \frac{n_1 - m_{11} - m_{21}}{1 - p_{11}{}^* - p_{21}{}^*} = 0 \qquad \frac{\partial l}{\partial p_{21}} = \frac{m_{21}}{p_{21}{}^*} - \frac{n_1 - m_{11} - m_{21}}{1 - p_{11}{}^* - p_{21}{}^*} = 0$$

・・・・・・・・・

その結果、

$$p_{11}{}^* = \frac{m_{11}}{n_1} \qquad p_{21}{}^* = \frac{m_{21}}{n_1} \qquad p_{12}{}^* = \frac{m_{12}}{n_2} \qquad p_{22}{}^* = \frac{m_{22}}{n_2}$$

Workshop4-2new2
12, 16ページ

定理 $(\mathbf{E}+\mathbf{A})^{n-1}$ が正行列ならその非負行列は既約行列。
がゼロの要素を持てば、可約行列
n：行列サイズ（行列次元）

定理 $\mathbf{A}^{n^2-2n+2}$ が正行列ならその既約行列は原始行列。
そうでなければ、非原始行列
by Wielandt n：行列サイズ（行列次元）

この定理に名前はあるのか？

Horn and Johnson (1985,pp. 533, 543) Matrix Analysis

二つの定理が載っている。特に、名前は付けられていない。
一番目の定理には引用文献がある。これがオリジナルかは不明。

Herstein, I. (1954). A Note on Primitive Matrices. The American Mathematical Monthly, 61(1), 18-20. doi:10.2307/2306888
Gantmacher, F. R. 1959. The Theory of Matrices. 2 vols. Chelsea, New York.

二番目の定理には、 Wielandtの名前が括弧書きされている。

Wielandt, H. Unzerlegbare, nicht negative Matrizen. Math Z 52, 642–648 (1950).
https://doi.org/10.1007/BF02230720

Workshop4-2new2
１７ページ

まとめ

$\boldsymbol{u} > 0$
すべての要素が正
$\boldsymbol{u} \geq 0$
ゼロの要素を含む

非負行列

周期行列(Periodic matrix)と
非原始行列(imprimitive matrix) の違いは？

$\lambda_1 \geq \ 0$ 最大固有値
$\lambda_1 \geq |\lambda_j|$
$\boldsymbol{u} \geq 0$ 右固有ベクトル

安定生育段階構成、感度、弾性度の意味をよく考えよう

非原始行列
$\lambda_1 > \ 0$
$\lambda_1 = |\lambda_j|, \lambda_1 > |\lambda_k|$
$\boldsymbol{u} > 0$

安定生育段階構成、感度、弾性度は使えない。

原始行列
$\lambda_1 > \ 0$
$\lambda_1 > \ |\lambda_j|$
$\boldsymbol{u} > 0$

原始行列・非原始行列の背景

＊原始行列(primitive)は、既約行列を何回かべき乗した時に正行列になる行列。

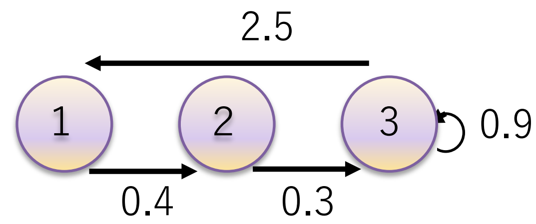
＊何回かべき乗しても正行列にならない時がある～～～＞非原始行列(imprimitive)

有向グラフの理論の文脈では、

閉路の長さ：ある段階から始まって元に戻ってくるまでの経路の長さ（タイムステップ数）

閉路の長さの最大公約数≠1	原始行列	二つの赤字は同値であることが証明されている
閉路の長さの最大公約数＝1	非原始行列	Horn ＆ Johnson (1985) pp. 541–543

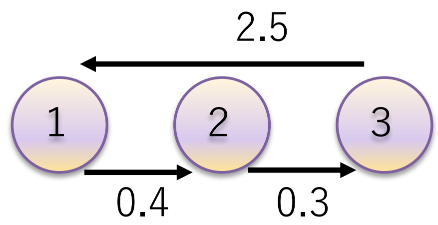
原始行列



閉路の長さ：　1, 3

最大公約数：　1

非原始行列

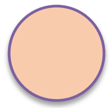


閉路の長さ：　3

最大公約数：　3

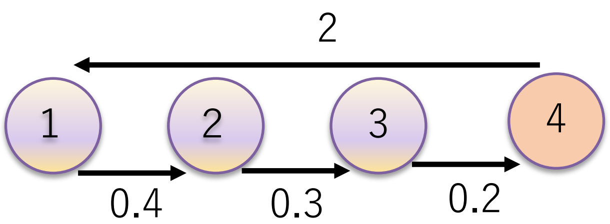
レズリー行列での周期

Bulmer “Theoretical Evolutionary Ecology” p. 62


：繁殖齢

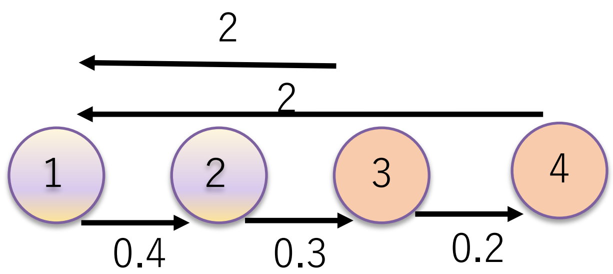
Periodic matrices（周期行列）：レズリー行列での周期を考えている
周期の定義：繁殖が可能である年齢

周期の最大公約数≠1　周期行列
周期の最大公約数＝1　非周期行列



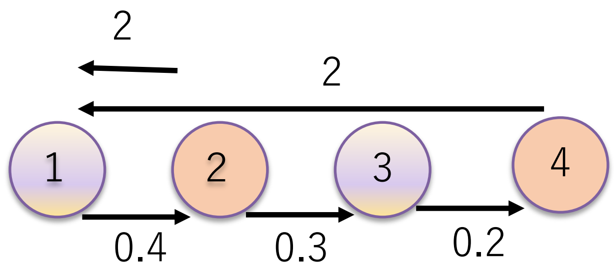
周期４

最大公約数　4（周期行列）



周期 3，４

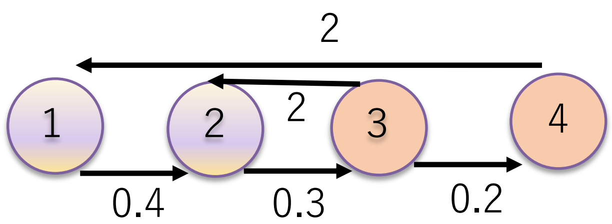
最大公約数　1（非周期行列）



周期　2，４

最大公約数　2（周期行列）

レズリー行列ではないが、
非原始行列



周期　2，４

周期(period), サイクル(cycle), 閉路の長さ(length of closed path) 言葉の違い

Periodic matrices（周期行列）：レズリー行列での周期を考えている
周期の定義：繁殖が可能である年齢　＝　閉路の長さ　＝　サイクル(cyclic)

Periodic matrices（周期的行列）：in Caswell(2001)

$$\mathbf{x}(t+m) = (\mathbf{B}_m \cdots\cdots \mathbf{B}_2\mathbf{B}_1)\mathbf{x}(t)$$

周期 m 年の環境変動

混乱を避けるために原始行列・非原始行列とその定義を使いたい

Cyclic matrices（巡回行列）：また別の行列

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_{n-1} & \cdots & c_2 & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_{n-1} & & c_2 \\ \vdots & c_1 & c_0 & \ddots & \vdots \\ c_{n-2} & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_1 & c_0 \end{bmatrix}$$