環状 **PSF** の局所的逆フィルタリング法

西形 淳

1. 着想

1.1. 曲線の族の定義. $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ とする。

i). 曲線 $\chi(t,u,0)$ は弧長表示されている。
ii). 任意の t に対して、曲線 $\chi(t,u,v)$ は u,v に関する $\mathscr{C}^1$ 級である。
iii). $\{\chi(t,u,0)\}$ の u に関する部分族は、不動点 $\chi(t,u,0)(t)$ をもつ。
iv). 或る関数 $\gamma : (a,b)^2 \to \mathbb{R}$ が存在して $\partial_u \chi(t,u,0)(s) = \gamma(t,s)\partial_v \chi(t,u,0)(s)$ が成立する。
v). 関数 $1/\gamma(t,s)$ は擬ヒルベルト積分核である。

以上の全ての条件を満足するような曲線の族 $\{\chi(t,u,v) : (a,b) \to \mathbb{R}^n\}$ を考える。簡単に言うと、変分ベクトル場 ∂_u, ∂_v に関する条件が課せられていると考えればよい。

さて、条件の最後に記載した擬ヒルベルト積分核という用語は弊社独自のものである。簡単に説明しておく。

i). 関数 κ は $\mathscr{C}^0$ 級である。
ii). 定数 $c_0 > 1$ が存在して、任意の $(x,y) \in (a,b)^2$ に対して $-1 \leq (x-y)\kappa(x,y) \leq c_0$ が成立する。
iii). $\mathscr{C}^0$ 級の或る有界関数 $\eta : (a,b) \to \mathbb{R}^+$ が存在して、任意の $x, y_1, y_2 \in (a,b), y_1 < y_2$ に対して

$$-\eta(y_1)\{1 + (x-y_1)\kappa(x,y_1)\}(x-y_2) + \eta(y_2)\{1 + (x-y_2)\kappa(x,y_2)\}(x-y_1) \geq 0$$

が成立する。

以上の全ての条件を満足する関数 $\kappa : (a,b)^2 \to \mathbb{R}$ に対して、

$$K[\kappa] : (a,b)^2 \setminus \{(y,y) : y \in (a,b)\} \ni (x,y) \mapsto \frac{1}{x-y} + \kappa(x,y)$$

を、擬ヒルベルト積分核と呼ぶことにする。擬ヒルベルト積分核を積分核とする積分変換 (擬ヒルベルト変換という) は、単射である。この性質を用いたいため、曲線の族の最後の条件に擬ヒルベルト積分核が組み込まれている。

1.2. 積分変換の定義と反転公式. 関数空間 $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n)$ に作用する積分変換を定義する。

$$\mathscr{E}f(t,u,v) = \int_a^b f(\chi(t,u,v)(s))\,ds$$

v に関して偏微分すると

$$\begin{aligned}\partial_v \mathscr{E}f(t,u,0) &= \int_a^b \langle \partial_v \chi, \nabla \rangle f\,ds \\ &= \int_a^b \frac{1}{\gamma} \langle \partial_u \chi, \nabla \rangle f\,ds \\ &= \partial_u \mathrm{pv} \int_a^b \frac{1}{\gamma} f(\chi)\,ds\end{aligned}$$

ここに擬ヒルベルト変換

$$\mathscr{H}f(t,u)=\mathrm{pv}\int_a^b \frac{1}{\gamma(t,s)}f(\chi(t,u,0)(s))\,ds$$

を定義すると、偏微分の結果は $\partial_v\mathscr{E}f(t,u,0)=\partial_u\mathscr{H}f(t,u)$ と書くことができる。これを u で積分することにより

$$\int_{u_0}^{u}\partial_v\mathscr{E}f(t,u,0)\,du=\mathscr{H}f(t,u)-\mathscr{H}f(t,u_0).$$

さて、或る u_1,u_2 が存在して

$$C(t)=\int_{u_1}^{u_2}\mathscr{H}f(t,u)\,du$$

が既知の関数であると仮定する。

$$\int_{u_1}^{u_2}du\int_{u_0}^{u}\partial_v\mathscr{E}f(t,u,0)\,du=C(t)-(u_2-u_1)\mathscr{H}f(t,u_0),$$

より、擬ヒルベルト変換は

$$\mathscr{H}f(t,u)=\int_{u_0}^{u}\partial_v\mathscr{E}f(t,u,0)\,du+\frac{C(t)}{u_2-u_1}-\frac{1}{u_2-u_1}\int_{u_1}^{u_2}du\int_{u_0}^{u}\partial_v\mathscr{E}f(t,u,0)\,du$$

と書くことができる。右辺は全て既知の関数である。したがって、擬ヒルベルト逆変換を作用させれば f に関して解くことができる。

2. 一般論

数学的に当たりの付け難い問題を考える際重要なことは、メカニズムをよく理解することである。最もよく用いられる手法は、次元の一般化である。

2.1. 積分変換の定義. まず、いくつかの準備をしなければならない。微分形式を定義する。

$$\omega_x=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}x^i\,dx^1\wedge\cdots\hat{i}\cdots\wedge dx^n,$$

$$\omega_x^y=\sum_{i,j=1}^{n}(-1)^{i+j}\mathrm{sgn}(i-j)y^ix^j\,dx^1\wedge\cdots\hat{i}\hat{j}\cdots\wedge dx^n$$

$y\in S^{n-1}$ に対して $(n-1)$ 次元半球面を定義する。

$$U_y=\{x\in S^{n-1}:\langle x,y\rangle>0\}$$

$y\in S^{n-1}$ に対して $(n-2)$ 次元球面を定義する。

$$S_y=\{x\in S^{n-1}:\langle x,y\rangle=0\}$$

準備は以上。関数空間 $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n)$ に作用する積分変換を定義する。

$$\mathscr{S}_if:\mathbb{R}^+\times S^{n-1}\times\mathbb{R}^n\ni(r,q,z)\mapsto\mathrm{pv}\int_{S^{n-1}}\frac{\{1-\langle q,x\rangle\}\{x-\langle q,x\rangle q\}}{\{1-\langle q,x\rangle^2\}^{i/2}}f(rx+rq+z)\omega_x,$$

$$\mathscr{T}_if:\mathbb{R}^+\times S^{n-1}\times\mathbb{R}^n\ni(r,q,z)\mapsto\mathrm{pv}\int_{S^{n-1}}\frac{f(rx+rq+z)}{\{1-\langle q,x\rangle^2\}^{(i-2)/2}}\omega_x$$

ここに $i=2,4,\dots,2\lfloor n/2\rfloor$ である。この定義のままでは計算が困難であるため

$$\mathscr{S}_if(r,q,z)=\int_0^{\pi}\left\{\int_{S_q}x\sin^{n-i-1}\varphi(1-\cos\varphi)f(\alpha)\omega_x^q\right\}d\varphi,$$

$$\mathscr{T}_i f(r,q,z) = \int_0^\pi \left\{ \int_{S_q} \sin^{n-i}\varphi f(\alpha)\omega_x^q \right\} d\varphi.$$

と式変形しておく。ここに $\alpha = r\sin\varphi x + r\cos\varphi q + rq + z$ である。

2.2. 積分変換が満足する漸化式. 積分変換 $\mathscr{S}_i, \mathscr{T}_i$ を適当に偏微分する。

$$\partial_r \mathscr{S}_i f(r,q,z) = \int_0^\pi \left\{ \int_{S_q} x \sin^{n-i}\varphi \{(1-\cos\varphi)\partial_x + \sin\varphi\partial_q\} f(\alpha)\omega_x^q \right\} d\varphi,$$

$$\partial_{qu}\mathscr{S}_i f(r,q,z) + \langle u, \mathscr{S}_i f(r,q,z)\rangle q = r\int_0^\pi \left\{ \int_{S_q} x\sin^{n-i}\varphi\{-\langle u,x\rangle(1-\cos\varphi)\partial_q + \sin\varphi\partial_u\} f(\alpha)\omega_x^q \right\} d\varphi$$

$$\int_{S_q} \left(\sum_{j=1}^{n-1} u_j \partial_{u_j} - x\partial_x \right) f(\alpha)\omega_x^q = \frac{n-2}{r\sin\varphi}\int_{S_q} x f(\alpha)\omega_x^q$$

ここに $p, q \in S^{n-1}, \langle p, q\rangle = 0$ に対して

$$\partial_{pq} = -\langle q, x\rangle\partial_p + \langle p, x\rangle\partial_q$$

これらを用いて積分変換 $\mathscr{S}_i, \mathscr{T}_i$ の漸化式が得られる。

$$\begin{aligned}
&\mathscr{T}_{i+2} f(r,q,z) \\
&= \frac{n-i}{n-i-1}\mathscr{T}_i f(r,q,z) - \frac{r}{2(n-i-1)}\left\{ \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n} \langle u_j, u_j^k \partial_{z^k}\mathscr{S}_i f(r,q,z)\rangle + \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\langle u_j, u_j^k\partial_{z^k}\mathscr{S}_i(r,-q,z+2rq)\rangle \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2(n-i-1)}\left\{ \sum_{j=1}^{n-1}\langle u_j, \partial_{qu_j}\mathscr{S}_i f(r,q,z)\rangle + \sum_{j=1}^{n-1}\langle u_j, \partial_{qu_j}\mathscr{S}_i f(r,-q,z+2rq)\rangle \right\},
\end{aligned}$$

$$\partial_r\mathscr{S}_{i+2} f(r,q,z) + \frac{n-2}{r}\mathscr{S}_{i+2} f(r,q,z) = 2\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n} u_j u_j^k \partial_{z^k}\mathscr{T}_{i+2} f(r,q,z) - \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{n-1} u_j\partial_{qu_j}\mathscr{T}_{i+2} f(r,q,z),$$

$$\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{n-1}\langle u_j, \partial_{qu_j}\mathscr{S}_{i+2} f(r,q,z)\rangle = \partial_r\mathscr{T}_{i+2} f(r,q,z) - 2\sum_{k=1}^{n} q^k\partial_{z^k}\mathscr{T}_{i+2} f(r,q,z)$$

2.3. ファンク変換及び球面ラドン変換との関連性.

$$\partial_{qu_j}\langle u_k, \mathscr{S}_i f(r,q,z)\rangle = \partial_{qu_k}\langle u_j, \mathscr{S}_i f(r,q,z)\rangle$$

が成立することに注意する。ポアンカレの補題を用いると、或る関数 $\tilde{S}(r,q,z)$ が存在して $\partial_{qu}\tilde{S}(r,q,z) = \langle u, \mathscr{S}_i f(r,q,z)\rangle$ が成立する。したがって

$$\begin{aligned}
r\int_{U_v}\left(\partial_r - 2\sum_{k=1}^{n} q^k\partial_{z^k}\right)\mathscr{T}_i f(r,q,z)\omega_q &= -\int_{S_v}\langle v, \mathscr{S}_i f(r,q,z)\rangle\omega_q^v \\
&= -\int_{S_v}\partial_{qv}\tilde{S}(r,q,z)\omega_q^v
\end{aligned}$$

この式の右辺は、$\tilde{S}$ のファンク変換のラプラシアン像である。また、

$$r\int_{S_v}\left(\partial_r - 2\sum_{k=1}^{n} q^k\partial_{z^k}\right)\mathscr{T}_i f(r,q,z)\omega_q^v = \int_{S_v}\Delta^S\tilde{S}(r,q,z)\omega_q^v$$

の右辺は $\tilde{S}$ の球面ラドン変換のラプラシアン像である。ファンク変換は奇関数に対して単射であり、球面ラドン変換は偶関数に対して単射である。したがって 2 つの式を連立させれば $\tilde{S}$ に関して解くことができる。$\tilde{S}$ から $\mathscr{S}_i f$ を計算することは容易である。

$$\mathscr{S}_i f(r,q,z) = \sum_{j=1}^{n-1} u_j \partial_{qu_j} \tilde{S}(r,q,z)$$

以上より、$\mathscr{T}_i f$ が与えられれば $\mathscr{S}_i f$ が計算できる。

2.4. 帰納的な手順. 前提条件として $\mathscr{T}_2 f$ が与えられているとする。まず、ファンク逆変換と球面ラドン逆変換より $\mathscr{S}_2 f$ が計算される。次に漸化式の 1 つ目を用いて $\mathscr{T}_4 f$ が計算される。これで帰納的なループが作成できた。

2.5. 積分変換 $\mathscr{T}_2$ の反転公式. 次元 n の偶奇により方針が異なる。必要な命題は 2 次元のものであるから、偶数次元の場合の話をする。帰納的手順で最後に得られる関数は

$$\mathscr{S}_n f(r,q,z) = \int_0^\pi \left\{ \int_{S_q} x \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} f(\alpha)\omega^q \right\} d\varphi,$$
$$\mathscr{T}_n f(r,q,z) = \int_0^\pi \left\{ \int_{S_q} x f(\alpha)\omega^q \right\} d\varphi$$

右辺は擬ヒルベルト変換であり

$$\mathscr{T}_2 f \mapsto \int_{S_q} x f(\alpha)\omega^q$$

なる計算手順が構築される。右辺はファンク変換の導関数であり、これを q 方向へ偏微分したものは球面ラドン変換の導関数である。したがって

$$\int_{S_q} x f(\alpha)\omega^q \mapsto f$$

なる計算手順も構築できる。

2.6. 環状 PSF の逆フィルタリング. 環状 PSF による畳込みを定義する。

$$\psi f : (r_0,\infty)\times\mathbb{R}^n \ni (r,y) \mapsto \int_{S^{n-1}} f(rx+y)\omega_x$$

ψ と $\mathscr{T}_2$ の間には $\psi f(r,rq+z) = \mathscr{T}_2 f(r,q,z)$ なる関係がある。既に $\mathscr{T}_2$ の反転公式は求まっているため ψf を f に関して解くことは容易である。

3. 逆フィルタの極小化

3.1. 指向性フィルタ. 特別に $n=2$ の場合を考える。

$$\mathscr{S}_2 f(r,\theta,z) = e(\theta+\pi/2)\mathrm{pv}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} f(re(\varphi+\theta)+re(\theta)+z)\,d\varphi$$

ここに $\mathscr{S} f = \|\mathscr{S}_2 f\|$ とおくと

$$\frac{\partial_\theta \mathscr{S} f}{r} = (\partial_r - \cos\theta\partial_{y^1} - \sin\theta\partial_{y^2})\psi f(r, re(\theta)+z)$$

これを $\mathscr{S} f$ に関して解くと

$$\frac{\mathscr{S} f}{r} = \int_0^\theta (\partial_r - \cos\theta\partial_{y^1} - \sin\theta\partial_{y^2})\psi f(r, re(\theta)+z)\,d\theta$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2\pi - \theta)(\partial_r - \cos\theta \partial_{y^1} - \sin\theta \partial_{y^2}) \psi f(r, re(\theta) + z)\, d\theta$$

一方、$\mathscr{S}$ の反転公式は

$$\mathrm{pv} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(\theta - \tau)}{\sin(\theta - \tau)} \mathscr{S} f(r, \theta + \pi, z + re(\theta))\, d\theta = 4\pi^2 f(re(\tau) + z) - 2\pi \psi f(r, z)$$

変数を置き換える。

$$4\pi^2 f(z) = \mathrm{pv} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(\theta - \tau)}{\sin(\theta - \tau)} \mathscr{S} f(r, \theta + \pi, z - re(\tau) + re(\theta))\, d\theta + 2\pi \psi f(r, z - re(\tau))$$

これは ψ の逆フィルタであるが、変数 τ の指向性をもっており不完全である。

3.2. 無指向性フィルタ. 指向性をもつフィルタを無指向に変換するには、原因となる変数に関して積分すればよい。

$$8\pi^3 f(z) = \int_0^{2\pi} d\tau\, \mathrm{pv} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(\theta - \tau)}{\sin(\theta - \tau)} \mathscr{S} f(r, \theta + \pi, z - re(\tau) + re(\theta))\, d\theta + 2\pi \int_0^{2\pi} \psi f(r, z - re(\tau))\, d\tau$$

3.3. 無指向性フィルタの極小化. 次の式が成立する。

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \psi f(r, z + re(\tau))\, d\tau \\ &\quad - \frac{1}{2\pi^2} \int_0^r X\, dX \int_0^{2\pi} d\tau \left\{ \frac{r}{r^2 - X^2} \partial_r \psi f(r, z + Xe(\tau)) - \frac{X}{r^2 - X^2} \partial_{e(\tau)} \psi f(r, z + Xe(\tau)) \right\} \end{aligned}$$

このフィルタは、半径 r であるから極小であることは明らか。もう少し計算を進めて

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \psi f(r, z + re(\tau))\, d\tau - \frac{r}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \partial_r \psi f(r, z + re(\tau))\, d\tau \\ &\quad + \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^r dX \frac{r}{r + X} \left(\partial_r + \frac{1}{r + X} \right) \psi f(r, z + Xe(\tau)) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^r dX \frac{r}{r - X} \{ \partial_r \psi f(r, z + Xe(\tau)) - \partial_r \psi f(r, z + re(\tau)) \} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^r dX \frac{r}{(r - X)^2} \{ \psi f(r, z + Xe(\tau)) - (X - r) \partial_{e(\tau)} \psi f(r, z + re(\tau)) - \psi f(r, z + re(\tau)) \} \end{aligned}$$

と式変形しておくと使いやすいであろう。

Casley Consulting Inc. Yebisu Garden Place Tower 31F, 4-20-3, Ebisu, Shibuya-ku, Tokyo Japan
E-mail address: jun.nishigata@casleyconsulting.co.jp