光学画像に対するデコンボリューション概論

西形 淳

1. 光の正体

「光学画像に対するデコンボリューション」ということは、「光学画像」とは何であるか、更に掘り下げて「光」とは何であるか知っておく必要がある。光は電磁波の一種である。したがって、電磁波のことを知れば、光がどのようにして振舞うのか理解することができる。

電場と磁場に関する 4 つの経験則から始めて、マクスウェル方程式の導出、波動方程式の導出、キルヒホッフの積分定理の導出と順に辿っていき、光学系のモデル化を目指すことにしよう。

1.1. 磁束の保存則.

経験上、磁束は閉じている。すなわち任意の単連結な領域 V へ流入する磁束と流出する磁束は等しい。

$$\int_{\partial V} B_x\,dy\wedge dz - B_y\,dx\wedge dz + B_z\,dx\wedge dy = 0$$

ストークスの公式を用いると

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\partial V} B_x\,dy\wedge dz - B_y\,dx\wedge dz + B_z\,dx\wedge dy \\
&= \int_V d(B_x\,dy\wedge dz - B_y\,dx\wedge dz + B_z\,dx\wedge dy) \\
&= \int_V \mathrm{div}B\,dx\wedge dy\wedge dz
\end{aligned}$$

と式変形できる。ここで領域 V の任意性に注意すると、$\mathrm{div}B = 0$ が成立することが解る。この式の意味は、磁束はモノポール場ではないということ。

1.2. ファラデーの法則.

閉じた電気回路を貫く磁束が時間変化すると、回路には電場が発生する。この法則はファラデーの法則として知られている。任意の曲面 S に対して ∂S が回路であると考え、

$$\partial_t \int_S B_x\,dy\wedge dz - B_y\,dx\wedge dz + B_z\,dx\wedge dy = -\int_{\partial S} E_x\,dx + E_y\,dy + E_z\,dz$$

ストークスの公式を用いると

$$\begin{aligned}
\partial_t \int_S B_x\,dy\wedge dz - B_y\,dx\wedge dz + B_z\,dx\wedge dy &= -\int_{\partial S} E_x\,dx + E_y\,dy + E_z\,dz \\
&= -\int_S d(E_x\,dx + E_y\,dy + E_z\,dz) \\
&= -\int_S \langle \mathrm{rot}E, (dy\wedge dz, -dx\wedge dz, dx\wedge dy)\rangle
\end{aligned}$$

と式変形できる。ここに曲面 S の任意性に注意して $\partial_t B + \mathrm{rot}E = 0$ が成立することが解る。

1.3. **ガウスの法則.** 電荷によって生じるクーロン力は逆二乗則に従う場である。故に、任意の単連結な領域 V に対して $r_0 \notin V$ での電荷 $\delta(r-r_0)\rho(r_0)$ が発生させる電場を ∂V 上で積分すると零になる。同じく、$r_0 \in V$ での電荷 $\delta(r-r_0)\rho(r_0)$ が発生させる電場を $\partial V \cup \partial U_\varepsilon(r_0)$ 上で積分しても零となる。ここに $\partial U_\varepsilon(r_0)$ 上での電場の積分は $-\varepsilon_0^{-1}\rho(r_0)$ であるから、結局 ∂V 上での電場の積分は $\varepsilon_0^{-1}\rho(r_0)$ となることが解る。更に、電場は重ね合わせ則を満足するので電荷分布 ρ に対して

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, dx\wedge dy\wedge dz = \int_{\partial V} E_x\, dy\wedge dz - E_y\, dx\wedge dz + E_z\, dx\wedge dy$$

が成立する。ストークスの公式を用いると

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, dx\wedge dy\wedge dz &= \int_{\partial V} E_x\, dy\wedge dz - E_y\, dx\wedge dz + E_z\, dx\wedge dy \\ &= \int_V d(E_x\, dy\wedge dz - E_y\, dx\wedge dz + E_z\, dx\wedge dy) \\ &= \int_V \mathrm{div}E\, dx\wedge dy\wedge dz\end{aligned}$$

と式変形できる。ここで領域 V の任意性に注意すると、$\varepsilon_0 \mathrm{div}E = \rho$ が成立することが解る。

1.4. **アンペールの法則.** 電流によって生じる磁束は逆二乗則に従う場である。直線 L に流れる電流が発生させる磁束は、ビオ=サバールの法則に従い

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_L \frac{\|I\|(r-\tilde{r})}{\|r-\tilde{r}\|^3} \times d\tilde{r}$$

任意の平面上の任意の領域 S に対して ∂S 上での磁束の積分は

$$\begin{aligned}\int_{\partial S}\langle B, dr\rangle &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\partial S}\int_L \frac{\|I\|}{\|r-\tilde{r}\|^3}\langle (r-\tilde{r})\times d\tilde{r}, dr\rangle \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\partial S}\int_L \frac{\|I\|}{\|r-\tilde{r}\|^3}\langle d\tilde{r}\times dr, (r-\tilde{r})\rangle\end{aligned}$$

特に、定常電流に対しては

$$\int_{\partial S}\langle B, dr\rangle = \frac{\mu_0\|I\|}{4\pi}\int_{\partial S}\int_L \frac{1}{\|r-\tilde{r}\|^3}\langle d\tilde{r}\times dr, (r-\tilde{r})\rangle$$

となる。$r-\tilde{r}$ が張る曲面の有向な立体角を用いて右辺を計算すると、L が S を貫かない場合は零、貫く場合は

$$\int_{\partial S}\langle B, dr\rangle = \mu_0\langle I, \nu\rangle$$

電流を定常的な電流密度 j に書き換えると

$$\int_{\partial S}\langle B, dr\rangle = \mu_0\int_S \langle j, dS\rangle$$

ストークスの公式を用いると

$$\begin{aligned}\mu_0\int_S\langle j, dS\rangle &= \int_S d\langle B, dr\rangle \\ &= \int_S \langle \mathrm{rot}B, dS\rangle\end{aligned}$$

と式変形できる。領域 S の任意性に注意すると、$\mathrm{rot}B = \mu_0 j$ が得られる。電流密度が定常的ではない場合の補正を行なう。

$$\mathrm{rot}B = \mu_0 j + \partial_t C$$

と補正してみると

$$\mu_0 \mathrm{div} j + \mathrm{div} \partial_t C = \mathrm{divrot} B = 0$$

さて、ガウスの法則

$$\varepsilon_0 \int_V \mathrm{div} E \, dx \wedge dy \wedge dz = \int_V \rho \, dx \wedge dy \wedge dz$$

を時間微分して

$$\varepsilon_0 \int_V \partial_t \mathrm{div} E \, dx \wedge dy \wedge dz = -\int_{\partial V} j_x \, dy \wedge dz - j_y \, dx \wedge dz + j_z \, dx \wedge dy$$

ストークスの公式を用いると

$$\varepsilon_0 \int_V \partial_t \mathrm{div} E \, dx \wedge dy \wedge dz = -\int_V \mathrm{div} j \, dx \wedge dy \wedge dz$$

更に、領域 V の任意性より $\varepsilon_0 \partial_t \mathrm{div} E = -\mathrm{div} j$ が得られることに注意する。$C = \varepsilon_0 \mu_0 E$ なる特殊解は物理学的に正しく、結局 $\mathrm{rot} B = \mu_0 j + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t E$ が得られる。

1.5. **マクスウェル方程式と波動方程式.** 電場と磁場に関する 4 つの方程式は、マクスウェル方程式と呼ばれる。特に真空中では $\rho = 0, j = 0$ が成立するため、このときのマクスウェル方程式は

$$\begin{aligned} &\mathrm{div} B = 0, \\ &\partial_t B = -\mathrm{rot} E, \\ &\mathrm{div} E = 0, \\ &\mathrm{rot} B = \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t E \end{aligned}$$

連立すると

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 B &= -\mathrm{rot}(\varepsilon_0 \mu_0 \partial_t E) \\ &= -\mathrm{rotrot} B \\ &= -\mathrm{graddiv} B + \Delta B \\ &= \Delta B \end{aligned}$$

及び

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 E &= \mathrm{rot} \partial_t B \\ &= -\mathrm{rotrot} E \\ &= -\mathrm{graddiv} E + \Delta E \\ &= \Delta E \end{aligned}$$

が得られる。ここに現れる電場と磁場が満たす方程式 $\Delta f = \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 f$ は、波動方程式と呼ばれる。

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

とおき $\Delta f = c^{-2} \partial_t^2 f$ と変形しておく。$f = f(x - ct)$ が波動方程式の解となることから解るように、定数 c は波動の伝播速度を意味している。

波動方程式の解で有名なものは定常波 $f = u e^{\pm i \omega t}$ である。実際に波動方程式に代入すると

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{c^2} u = 0$$

この、時間パラメタを含まない方程式は、ヘルムホルツ方程式と呼ばれる。

1.6. **キルヒホッフの積分定理.** ヘルムホルツ方程式の特殊解を考える。任意の点 (X,Y,Z) を中心とする回転対称な解を v とおき、さらに v の動径方向成分を $\tilde{v}$ とおく。v をヘルムホルツ方程式に代入すると

$$\partial^2\tilde{v}+\frac{2}{r}\partial\tilde{v}+\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{v}=0$$

ここで、ラプラス演算子の動径方向・回転方向への分離を実行した。更に、$r\tilde{v}=\hat{v}$ として変形すると

$$\partial^2\hat{v}+\frac{\omega^2}{c^2}\hat{v}=0$$

すなわち $\hat{v}=e^{\pm i\omega r/c}$ なる特殊解が見つかる。したがって

$$\tilde{v}=\frac{e^{\pm i\omega r/c}}{r}$$

この特殊解は、球面波と呼ばれる。さて、u をヘルムホルツ方程式の任意の解、v を球面波、(X,Y,Z) を内部に含む任意の単連結領域を V とする。

$$\int_{V\setminus U_\varepsilon(X,Y,Z)}(u\Delta v-v\Delta u)\,dx\wedge dy\wedge dz=0$$

の成立は自明である。ストークスの公式を用いて

$$\begin{aligned}0&=\int_{V\setminus U_\varepsilon(X,Y,Z)}(u\Delta v-v\Delta u)\,dx\wedge dy\wedge dz\\&=\int_{V\setminus U_\varepsilon}d(u(\partial_x v\,dy\wedge dz-\partial_y v\,dx\wedge dz+\partial_z v\,dx\wedge dy)-v(\partial_x u\,dy\wedge dz-\partial_y u\,dx\wedge dz+\partial_z u\,dx\wedge dy))\\&=\int_{\partial V\cup\partial U_\varepsilon}u(\partial_x v\,dy\wedge dz-\partial_y v\,dx\wedge dz+\partial_z v\,dx\wedge dy)-v(\partial_x u\,dy\wedge dz-\partial_y u\,dx\wedge dz+\partial_z u\,dx\wedge dy)\end{aligned}$$

$\partial V\cup\partial U_\varepsilon$ 上の外向き単位法ベクトル場を ν として

$$(dy\wedge dz,-dx\wedge dz,dx\wedge dy)=\nu dS$$

とおくと

$$\int_{\partial V\cup\partial U_\varepsilon}(u\partial_\nu v-v\partial_\nu u)\,dS=0$$

更に計算を進めて

$$\begin{aligned}\int_{\partial V}(u\partial_\nu v-v\partial_\nu u)\,dS&=-\int_{\partial U_\varepsilon}(u\partial_\nu v-v\partial_\nu u)\,dS\\&=\int_{\partial U_\varepsilon}u\partial\tilde{v}\,dS+\int_{\partial U_\varepsilon}v\partial_\nu u\,dS\\&=\int_{\partial U_\varepsilon}u\Big(-\frac{1}{r}\pm\frac{i\omega}{c}\Big)\frac{e^{\pm i\omega r/c}}{r}\,dS+\int_{\partial U_\varepsilon}\frac{e^{\pm i\omega r/c}}{r}\partial_\nu u\,dS\end{aligned}$$

ここに $\varepsilon\to 0$ の極限で、右辺は $-4\pi u(X,Y,Z)$ へ収束する。以上より、境界条件から内部の任意の点での状態を求める式

$$4\pi u(X,Y,Z)=-\int_{\partial V}(u\partial_\nu v-v\partial_\nu u)\,dS$$

が得られる。これを、キルヒホッフの積分定理と呼ぶ。キルヒホッフの積分定理を用いる際に気をつけたいことは、球面波 v の式中に現れる複号のとり方である。これは数学の注意点ではなく、物理学上の注意点

である。すなわち、物理学的に意味のある方の符号をとりたい。原点を含まないような単連結領域 V をとり、原点を中心とする球面波 $u = e^{i\omega\|x,y,z\|/c}/\|x,y,z\|$ を代入する。

$$\begin{aligned}4\pi u = -\int_{\partial V} & \frac{e^{i\omega\|x,y,z\|/c}}{\|x,y,z\|}\frac{\langle \nu, (x-X, y-Y, z-Z)\rangle}{r}\left(-\frac{1}{r} \pm \frac{i\omega}{c}\right)\frac{e^{\pm i\omega r/c}}{r}\,dS \\ & -\frac{e^{\pm i\omega r/c}}{r}\frac{\langle \nu, (x,y,z)\rangle}{\|x,y,z\|}\left(-\frac{1}{\|x,y,z\|} + \frac{i\omega}{c}\right)\frac{e^{i\omega\|x,y,z\|/c}}{\|x,y,z\|}\,dS\end{aligned}$$

ここで

$$\cos\theta_1 = \frac{\langle \nu, (x-X, y-Y, z-Z)\rangle}{r},\ \cos\theta_2 = \frac{\langle \nu, (x,y,z)\rangle}{\|x,y,z\|}$$

とおいて、$\|x,y,z\| \gg c/\omega$ および $r \gg c/\omega$ が満足されている場合を考えると

$$4\pi u \approx -\frac{i\omega}{c}\int_{\partial V}\frac{e^{i\omega\|x,y,z\|/c}}{\|x,y,z\|}\frac{e^{\pm i\omega r/c}}{r}(\pm\cos\theta_1 - \cos\theta_2)\,dS$$

が得られる。時間発展する項 $e^{-i\omega t}$ を掛けると

$$4\pi u e^{-i\omega t} \approx -\frac{i\omega}{c}\int_{\partial V}\frac{e^{i\omega\|x,y,z\|/c}}{\|x,y,z\|}\frac{e^{\pm i\omega r/c}}{r}e^{-i\omega t}(\pm\cos\theta_1 - \cos\theta_2)\,dS$$

となる。被積分関数に含まれる

$$\frac{e^{\pm i\omega r/c}}{r}e^{-i\omega t}$$

の物理的な意味を考える。物理的に球面波は発散する向きに伝播する。したがって複号は正の符号をとることが物理的に正しい。

1.7. キルヒホッフの回折モデル. 開口 D が開いた上半空間を暗室 V として、開口部に垂直に平面波を印加する。開口部を除いた暗室の境界上で $u = 0$ とする境界条件は、キルヒホッフの条件と呼ばれ、そのときの回折のシミュレーションはキルヒホッフの回折モデルと呼ばれる。

$$4\pi u = -\int_D (u\partial_\nu v - v\partial_\nu u)\,dS$$

平面波の特性から D 上で $-\partial_\nu u = i\omega u/c$ が成立し、これを代入して

$$4\pi u = -\int_D u\left(\partial_\nu v + \frac{i\omega}{c}v\right)dS$$

v に球面波を代入して

$$4\pi u = -\int_D u\left\{\frac{\langle \nu, (x-X, y-Y, z-Z)\rangle}{r}\left(-\frac{1}{r} + \frac{i\omega}{c}\right) + \frac{i\omega}{c}\right\}\frac{e^{i\omega r/c}}{r}\,dS$$

厳密なシミュレーションを実施するには、この式の右辺を計算しなければならないが、一旦重要なものは近似解であるとしておく。

$$\frac{\langle \nu, (x-X, y-Y, z-Z)\rangle}{r} \approx 1$$

は近軸近似と呼ばれる。これを用いて

$$4\pi u \approx -\int_D u\left(-\frac{1}{r} + \frac{2i\omega}{c}\right)\frac{e^{i\omega r/c}}{r}\,dS$$

$\lambda = 2\pi c/\omega$ は平面波の波長であり $r \gg c/\omega$ が成立していると仮定すると

$$u \approx -\frac{i}{\lambda}\int_D u\frac{e^{2\pi ir/\lambda}}{r}\,dS$$

1.8. **フレネルの回折モデル.** キルヒホッフの回折モデルの開口部に焦点距離 f_0 のコンデンサレンズを取り付けたものを、フレネルの回折モデルと呼ぶ。コンデンサレンズは位相を遅らせる働きをもつ。レンズの中心 (x_0, y_0, z_0) を原点とする開口面に張られた直交座標 $(p, q) = pe_1 + qe_2$ を用いると、点 (p, q) で生じる位相の遅れは $e^{-2\pi i(\sqrt{p^2+q^2+f_0^2}-f_0)/\lambda}$ である。キルヒホッフの回折モデルの式を修正すると、

$$u \approx -\frac{i}{\lambda}\int_D u\frac{e^{2\pi i(r-\sqrt{p^2+q^2+f_0^2}+f_0)/\lambda}}{r}\,dp\wedge dq$$

r を原点 $(p, q) = (0, 0)$ の周りに近似すると

$$r \approx r_0 - pP - qQ + \frac{p^2+q^2}{2r_0},$$

$$r_0 = \|x_0 - X, y_0 - Y, z_0 - Z\|,\ P = -\frac{\langle e_1, (x_0 - X, y_0 - Y, z_0 - Z)\rangle}{r_0},\ Q = -\frac{\langle e_2, (x_0 - X, y_0 - Y, z_0 - Z)\rangle}{r_0}$$

この近似法を、フレネル近似と呼ぶ。更に、

$$\sqrt{p^2+q^2+f_0^2} \approx f_0 + \frac{p^2+q^2}{2f_0}$$

なる近似も用いると、焦点面 $r_0 = f_0$ で 2 次の項が相殺され

$$u \approx -\frac{ie^{2\pi ir_0/\lambda}}{\lambda r_0}\int_D ue^{-2\pi i(pP+qQ)/\lambda}\,dp\wedge dq$$

1.9. **瞳関数と結像の関係.** 開口部での u の複素振幅の分布は、瞳関数と呼ばれる。フレネル回折モデルでは平面波、すなわち開口上一定な瞳関数であったが、一般的には任意の分布があってもよい。更に、最後の式の右辺は u のフーリエ変換であることに気づく。

$$u \approx -\frac{ie^{2\pi ir_0/\lambda}}{\lambda r_0}\mathscr{F}u(P/\lambda, Q/\lambda)$$

瞳関数のフーリエ像は結像の複素振幅である。

1.10. **イン-コヒーレント光学系.** 2 つの波動 $u_1e^{-i\omega(t+\delta_1)}, u_2e^{-i\omega(t+\delta_2)}$ の重ね合わせは、単純に

$$u_1e^{-i\omega(t+\delta_1)} + u_2e^{-i\omega(t+\delta_2)}$$

さて、この重ね合わされた波動をセンサで検出する場合、観測される物理量は強度である。

$$\begin{aligned}&\{u_1e^{-i\omega(t+\delta_1)} + u_2e^{-i\omega(t+\delta_2)}\}\{u_1^*e^{i\omega(t+\delta_1)} + u_2^*e^{i\omega(t+\delta_2)}\}\\&= u_1u_1^* + u_2u_2^* + u_1u_2^*e^{i\omega(-\delta_1+\delta_2)} + u_1^*u_2e^{i\omega(\delta_1-\delta_2)}\end{aligned}$$

イン-コヒーレントな光学系では $e^{i\omega(\delta_1-\delta_2)}$ の時間平均は零と見なすことができる。したがって、イン-コヒーレントな光学系では、センサが検出する強度に関しても重ね合わせ則が成立する。

1.11. **光学像の畳込みモデル.** $\tilde{u}(p,q) = u(-p,-q)^*$ とおくと $\mathscr{F}u(P/\lambda, Q/\lambda)^* = \mathscr{F}\tilde{u}(P/\lambda, Q/\lambda)$ が成立する。畳込み定理を用いて

$$|u|^2 = \frac{1}{\lambda^2 r_0^2}\mathscr{F}(u * \tilde{u})(P/\lambda, Q/\lambda)$$

すなわち $u * \tilde{u}$ のフーリエ像が強度である。特に、$u\big|D = 1$ のときの $u * \tilde{u}$ のフーリエ像は PSF と呼ばれる。

強度に関する重ね合わせ則より、任意の u に対して $u * \tilde{u}$ のフーリエ像は PSF の畳込み積分で表現可能である。しばしば登場する PSF は円形開口の PSF である。$R = \sqrt{P^2 + Q^2}$, $r = \sqrt{p^2 + q^2}$ 及び D の直径を d_0 とおいて、極座標で計算をすると、

$$u \approx -\frac{ie^{2\pi i r_0/\lambda}}{\lambda r_0}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{d_0/2} r e^{2\pi i r R\cos\theta/\lambda}\, dr$$

ベッセル関数の積分表示

$$2\pi J_0(a) = \int_0^{2\pi} e^{ia\cos\theta}\, d\theta$$

を用いて

$$\begin{aligned} u &\approx -\frac{2\pi i e^{2\pi i r_0/\lambda}}{\lambda r_0}\int_0^{d_0/2} r J_0(2\pi r R/\lambda)\, dr \\ &= -\frac{2\pi i e^{2\pi i r_0/\lambda}}{\lambda r_0}\frac{\lambda^2}{4\pi^2 R^2}\int_0^{\pi d_0 R/\lambda} r J_0(r)\, dr \end{aligned}$$

更に、0 次と 1 次のベッセル関数の関係式

$$\partial(rJ_1) = rJ_0$$

を用いて

$$\begin{aligned} u &\approx -\frac{2\pi i e^{2\pi i r_0/\lambda}}{\lambda r_0}\frac{\lambda^2}{4\pi^2 R^2}\frac{\pi d_0 R}{\lambda} J_1(\pi d_0 R/\lambda) \\ &= -\frac{\pi i d_0^2 e^{2\pi i r_0/\lambda}}{2\lambda r_0}\frac{\lambda}{\pi d_0 R} J_1(\pi d_0 R/\lambda) \end{aligned}$$

この絶対値の 2 乗が、エアリーパターンと呼ばれる円形開口の PSF である。さて、$x^{-1}J_1(x)$ の原点に最も近い正の零点を j_1 とおくと

$$r_0 R = \frac{j_1 r_0 \lambda}{\pi d_0}$$

のとき複素振幅は零となる。この値は回折限界と呼ばれ、円形開口の PSF の指標としてよく用いられる。$F = r_0/d_0$ は F-値と呼ばれ、これを用いて回折限界を表すと

$$r_0 R = \frac{j_1}{\pi}\lambda F$$

特に、j_1/π を有効数字 3 桁で 1.22 と近似した結論が良く見受けられる。

2. デコンボリューション

2.1. 理想的なデコンボリューション. 光学像 $g = k * f$ から f を逆算する方法を、デコンボリューションという。この定義は実現可能性が考慮されていない。例えば $k * f_0 = 0$ なる自明ではない解 f_0 が存在する場合、デコンボリューションには f_0 の線型和分の不定性が含まれてしまい、正確には計算できない。すなわち、デコンボリューションにより f に有るものが無くなってしまったり、無いものが現れてしまったりする。

デコンボリューションの目的を明確にするためには、$k*$ のカーネル空間を調べる必要がある。$g = k * f$ をフーリエ変換すると、畳込み定理より

$$\mathscr{F}g = \mathscr{F}k\mathscr{F}f$$

したがって $\mathscr{F}k$ の零点が $k*$ のカーネル空間の元に対応していることが解る。さて、実際に我々が扱う f, g は 2 乗可積分であろう。この点に注意すると、$\mathscr{F}k$ の零点全体の測度が零ならば、厳密に g から f の逆算は可能である。

問題となるのは、$\mathscr{F}k$ の零点全体が零より大きい測度をもつ場合のデコンボリューションである。この問題点の重要性は実際に $\mathscr{F}k$ を計算してみれば解る。$u|D = 1$ のときの $u * \tilde{u}$ のフーリエ像が PSF であったから、逆に PSF のフーリエ像は $u * \tilde{u}$ となる。u は台有界であるから $u * \tilde{u}$ も台有界となる。したがって $u * \tilde{u}$ の台の中だけで f を逆算する方法をデコンボリューションと呼んでおくと矛盾が無いであろう。

$$\mathscr{F}f = \frac{\mathscr{F}g}{\mathscr{F}k}$$

とすれば台の内部で f を計算することができる。

2.2. 不連続点で生じるアーチファクト. デコンボリューションで計算できる f は PSF のフーリエ像の台の中だけである。台の外は計算不可能なため零で埋めることにする。このとき生じる、台境界の不連続性はデコンボリューション結果にアーチファクトという形で現れる。

2.3. 台境界近傍で生じるアーチファクト. PSF のフーリエ像の台の境界近傍では、$\mathscr{F}k$ は非常に小さい値を取る。光学像のモデルが想定よりずれてしまっている場合、$\mathscr{F}k$ で割る行為はズレを増幅させる効果をもつ。これもアーチファクトという形で現れる。

2.4. 実際のデコンボリューション. 理想的なデコンボリューションに加えて実際のデコンボリューションにはいくつかの問題が存在する。代表的な問題を紹介する。1 つはノイズの問題。光学像をセンサで検出する場合、ノイズ n が混入する。

$$g = k * f + n$$

理想的な場合と同じように $\mathscr{F}k$ で割ってしまうと、台境界近傍のノイズ成分が増幅されてしまいデコンボリューションに失敗する。この問題を改善するためには、ノイズの統計モデルを用いる。代表的なデコンボリューションの中にウィナーデコンボリューションと呼ばれるものがある。

別の問題は PSF が未知である問題。実際のデコンボリューションでは PSF が事前に与えられていることはほとんどない。すなわち、光学像から PSF を推定しなければならない。PSF 推定を含むデコンボリューションをブラインド-デコンボリューションと呼ぶ。一方、PSF 推定を含まないデコンボリューションはノンブラインド-デコンボリューションと呼ばれる。代表的なブラインド-デコンボリューションの中にリチャードソン=ルーシーデコンボリューションと呼ばれるものがある。

デコンボリューションの歴史は 60 年以上あり、実際のデコンボリューションの問題に対処し得るあらゆる手法が考案されている。全てを網羅的に調べることはできないが、既成の画像処理アプリケーションを見る限り、実用的なものは無いように思える。

2.5. **デコンボリューションの問題点.** デコンボリューションは PSF のフーリエ像の台の中だけでしか計算できない、不完全なものである。この問題は、遮断周波数の問題と呼ばれる。台境界近傍の計算では、アーチファクトの問題が発生する。ノイズの増加問題や PSF のブラインド問題も存在する。実際に計算機で実行することを考えると、計算量の問題も存在するであろう。

以上のように、デコンボリューションの問題は非常に多いことが解る。これらすべての問題を解決することは、ほぼ不可能であろう。実際にデコンボリューションを用いる場合は、ある程度の妥協を避けることはできない。評価の基準を明確にしておくことが重要である。

Casley Consulting Inc. Yebisu Garden Place Tower 31F, 4-20-3, Ebisu, Shibuya-ku, Tokyo Japan
Email address: jun.nishigata@casleyconsulting.co.jp