独自のノンブラインド-デコンボリューション

西形 淳

1. 独自のノンブラインド-デコンボリューション一般論

1.1. 準備. 台有界な関数 $k:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ を定義する。
 i). $k\big|[0,1]$ は $\mathscr{C}^\infty$ 級である。
 ii). $k\big|(1,\infty)=0$ が成立する。
この関数に相似変形の自由度を与えた関数を定義する。

$$K_r:\mathbb{R}^n\ni x\mapsto r^{-n}k(\|x\|/r),$$

関数空間 $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n)$ に作用する積分変換を定義する。

$$\mathscr{P}f:(r_0,\infty)\times\mathbb{R}^n\ni(r,y)\mapsto\int_{\mathbb{R}^n}K_r(y-x)f(x)\xi_x,$$

ここに $\xi_x=dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$。任意の微分作用素 D に対して、記号 $\langle D\rangle$ を

$$\langle D\rangle=\int_0^1 X^{n-1}Dk(X)\psi f(rX,y)\,dX$$

とする。

1.2. ノンブラインド-デコンボリューションの要点整理. 目的は $\mathscr{P}$ の反転公式を構築することである。そのためには $\mathscr{P}f$ を ψf へ変換すればよい。

適当な微分作用素を用いて $a_1\langle 1\rangle=\psi f+\langle b_1\rangle$ なる式を作る。更に、適当な微分作用素の列を用いて $c_i\langle 1\rangle=\langle d_i\rangle$ なる式の列を作る。これらの式の線形和を作ると

$$\left(a_1+\sum\alpha_i c_i\right)\langle 1\rangle=\psi f+\left\langle b_1+\sum\alpha_i d_i\right\rangle$$

右辺の第 2 項を零で評価すれば

$$\left(a_1+\sum\alpha_i c_i\right)\langle 1\rangle\approx\psi f$$

が得られる。ここに $\langle 1\rangle=\mathscr{P}f$ である。以上により $\mathscr{P}f$ から ψf への近似変換が構築できるが、この方法には多くの自由度があることに注意すべきである。1 つは線型和のとり方に関する自由度。1 つは零での評価方法の自由度。これらの自由度への対処の仕方によりデコンボリューションの性能は大きく変化する。

1.3. 線型和に用いる式の生成. 基本的な微分演算の公式を作っておいた方が楽である。

$$\begin{aligned}&r^2\Delta\langle D\rangle=rDk(1)\partial_r\psi f-\partial Dk(1)\psi f+\langle\{(n-1)X^{-1}\partial+\partial^2\}D\rangle,\\&(n+r\partial_r)\langle D\rangle=Dk(1)\psi f-\langle X\partial D\rangle\end{aligned}$$

生成元は $\langle 1\rangle=\langle 1\rangle$ であり、ここからグラフと紐付けながら式の生成を実施する。まず $1\in G$ をノードとする。$a\in G$ に対応する方程式 $a\langle 1\rangle=\langle b\rangle$ の導関数を考え、$bk(1)=\partial bk(1)=0$ ならば 2 つのノード $r^2\Delta a,(n+r\partial_r)a$ を G に加えて、更にノード a とリンクさせる。これを繰り返すことによりグラフ G を完成させることができる。

1.4. **グラフ端点の処理.** a_0 をグラフ G の端点とする。$b_0k(1) \neq 0$ のとき

$$a_1 = \frac{(n + r\partial_r)a_0}{b_0k(1)},\ b_1 = -\frac{X\partial b_0}{b_0k(1)}$$

それ以外のとき

$$a_1 = -\frac{r^2\Delta a_0}{\partial b_0 k(1)},\ b_1 = -\frac{\{(n-1)X^{-1}\partial + \partial^2\}b_0}{\partial b_0 k(1)}$$

とおくと $a_1\langle 1\rangle = \psi f + \langle b_1\rangle$ が得られる。更に偏微分して

$$(n + r\partial_r)a_1\langle 1\rangle = n\psi f + r\partial_r\psi f + b_1k(1)\psi f - \langle X\partial b_1\rangle$$

これらを連立させて

$$(n + r\partial_r)a_1\langle 1\rangle - \{n + b_1k(1)\}a_1\langle 1\rangle = r\partial_r\psi f - \langle X\partial b_1\rangle - \{n + b_1k(1)\}\langle b_1\rangle$$

簡単に $a_2\langle 1\rangle = r\partial_r\psi f + \langle b_2\rangle$ と書いておく。

1.5. **グラフの修正.** グラフ G の端点から得られた式 $a_1\langle 1\rangle = \psi f + \langle b_1\rangle$ 及び $a_2\langle 1\rangle = r\partial_r\psi f + \langle b_2\rangle$ を用いて、他の端点で現れる $\psi f, r\partial_r\psi f$ を消去することができる。消去の結果得られる微分作用素も G の追加していくと、修正グラフ G が得られる。

1.6. **微分作用素の評価方法.** グラフ G から適当な元を取ってきて

$$\left(a_1 + \sum \alpha_i c_i\right)\langle 1\rangle = \psi f + \left\langle b_1 + \sum \alpha_i d_i\right\rangle$$

とする。簡単に $D = b_1 + \sum \alpha_i d_i$ としておく。評価の対象は、右辺の第 2 項 $\langle D\rangle$ である。最もシンプルに評価するならば、コーシー=シュワルツの不等式を用いるのが良いだろう。

$$\int_0^1 X^{n-1}Dk\psi f\,dX \leq \left(\int_0^1 (X^{n-1}Dk)^2\,dX\right)^{1/2}\left(\int_0^1 \psi f^2\,dX\right)^{1/2}$$

ここで

$$\int_0^1 (X^{n-1}Dk)^2\,dX$$

を微分作用素のエネルギーと考えて、最小 2 乗法を用いて極値問題を解けばよい。

2. ノンブラインド-デコンボリューションの具体例

2.1. **境界条件.** $k(1) = \partial k(1) = 0, \partial^2 k(1) \neq 0$ なる境界条件をつける。この境界条件は PSF のサイドローブを無視して、第 1 次暗環内部への PSF の制限を想定している。

2.2. **実際のノンブラインド-デコンボリューションの注意点.** 画像処理を前提としているため、次元は $n = 2$ としてよい。このときの ψ の反転公式を考慮すると、$\psi f, r\partial_r\psi f$ が必要であることが解る。$\mathscr{P}f$ から $\psi f, r\partial_r\psi f$ を算出する工程で登場する動径方向の微分は、単一フレームの画像では許可されていないことに注意すべきである。また、導関数の次数に関して、ノイズの観点から上限が存在することにも注意されたい。

2.3. 動径方向への微分に対する対策. まずはグラフのノードを計算していく。便宜上 $\mu_i = \partial^i k(1)$ と書いておく。

$$\begin{aligned}
&P_0 : \langle 1\rangle = \langle 1\rangle,\\
&P_1 : r^2\Delta\langle 1\rangle = \langle (n-1)X^{-1}\partial + \partial^2\rangle,\\
&P_2 : (n + r\partial_r)\langle 1\rangle = -\langle X\partial\rangle,\\
&P_3 : (r^2\Delta)^2\langle 1\rangle = \mu_2 r\partial_r\psi f - \{(n-1)\mu_2 + \mu_3\}\psi f + \langle\{(n-1)X^{-1}\partial + \partial^2\}^2\rangle,\\
&P_4 : (r^2\Delta)(n + r\partial_r)\langle 1\rangle = \mu_2\psi f - \langle (2 + X\partial)\{(n-1)X^{-1}\partial + \partial^2\}\rangle,\\
&P_5 : (n + r\partial_r)^2\langle 1\rangle = \langle (X\partial)^2\rangle,\\
&P_6 : (r^2\Delta)(n + r\partial_r)^2\langle 1\rangle = \mu_2 r\partial_r\psi f - (3\mu_2 + \mu_3)\psi f + \langle\{(n-1)X^{-1}\partial + \partial^2\}(X\partial)^2\rangle,\\
&P_7 : (n + r\partial_r)^2\langle 1\rangle = \mu_2\psi f - \langle (X\partial)^3\rangle
\end{aligned}$$

さて、動径方向への微分が許可されていないことに対処するために

$$\begin{aligned}
&c_0P_0 + c_1P_1 + c_2P_2 + P_5 :\\
&\quad\{c_0 + c_1r^2\Delta + c_2(n + r\partial_r) + (n + r\partial_r)^2\}\langle 1\rangle = \langle c_0 + c_1\{(n-1)X^{-1}\partial + \partial^2\} - c_2X\partial + (X\partial)^2\rangle
\end{aligned}$$

の右辺を零で評価する。

$$\{c_0 + c_1r^2\Delta + c_2(n + r\partial_r) + (n + r\partial_r)^2\}\langle 1\rangle \approx 0$$

これで動径方向への微分の問題は解消された。

$$\begin{aligned}
&P_{11} = c_2P_2 + P_5 = \langle\cdot\rangle,\\
&P_{12} = c_2P_4 + P_6 = \mu_2 r\partial_r\psi f + (c_2\mu_2 - 3\mu_2 - \mu_3)\psi f + \langle\cdot\rangle,\\
&P_{13} = (c_0 - c_2^2)P_2 + c_1P_4 + P_7 = \mu_2(c_1 + 1)\psi f + \langle\cdot\rangle,\\
&P_{14} = P_3 - P_{12} = (4 - n - c_2)\mu_2\psi f + \langle\cdot\rangle,\\
&P_{15} = (c_1 + 1)\mu_2P_3 + \{(n-1)\mu_2 + \mu_3\}P_{13} = (c_1 + 1)\mu_2^2 r\partial_r\psi f + \langle\cdot\rangle,\\
&P_{16} = (c_2 - 4 + n)P_{13} + (c_1 + 1)P_{14} = \langle\cdot\rangle,\\
&P_{17} = r^2\Delta P_{16},\\
&P_{18} = P_{17} + \cdot P_{14} + \cdot P_{15} = \langle\cdot\rangle
\end{aligned}$$

以上のノードから $P_0, P_1, P_{11}, P_{14}, P_{15}, P_{16}, P_{18}$ を連立させて $\psi f, r\partial_r\psi f$ を近似すれば良い。

3. 高速化トピックス

3.1. 表現行列化. $\mathscr{P}f$ から $\psi f, r\partial_r\psi f$ の計算は、微分演算で実施される。この処理の表現行列を A_1, A_2 と書いておく。自明だが、A_1, A_2 は FIR である。一方、ψ の反転公式も線型な処理であるため表現行列化が可能である。入力を $\psi f, r\partial_r\psi f$ に分けて B_1, B_2 と書いておく。反転公式は局所的であったから、当然 B_1, B_2 も FIR である。A_1, A_2, B_1, B_2 を合成すると

$$C = (A_1 * B_1 + A_2 * B_2)$$

3.2. FFT 用いた FIR フィルタリングの実装. FIR フィルタリング $C*$ を定義通り計算すると、計算量が非常に多い。畳込み定理を用いれば $\mathscr{F}C\cdot$ というように演算子を変更可能である。

フーリエ変換 (ここでは DFT) のアルゴリズムを工夫しなければ逆に計算量は増えてしまうが、FFT アルゴリズムを用いれば計算量を小さくできる。

3.3. **タイリング.** FIR はその名の通り台有界なフィルタである。フィルタリングされる対象が大きいサイズの場合、小さいサイズに分割して各々を FIR フィルタリングする実装方法が考えられる。ただし、各タイルの境界近傍はフィルタが上手く掛からない。改善策はオーバーラップを考慮することである。

3.4. **FFT プラン作成の省略.** FIR のサイズが上から評価されていれば、タイルのサイズも下から評価される。適当なタイルサイズに固定してしまうことで、FFT プランの作成を省略することができる。

3.5. **FIR のテーブル化.** タイルサイズが固定されていれば、事前に FIR を FFT して参照テーブルとして準備しておくことができる。

3.6. **FFT 回路の有効利用.** FFT は複素関数を複素関数へ変換する処理である。通常入出力は実部と虚部に分かれている。FFT を用いた FIR フィルタリングの実装では、実部に画像、虚部に零を代入する傾向が強いように思われる。フィルタリング結果は実部のみを用いる。

ここで、フィルタリング結果の虚部を見てほしい。もしも虚部が零になっているならば、FFT 回路の使い方を改善可能である。FFT を用いた FIR フィルタリングは、実部と虚部が独立して動作する。

Casley Consulting Inc. Yebisu Garden Place Tower 31F, 4-20-3, Ebisu, Shibuya-ku, Tokyo Japan
Email address: jun.nishigata@casleyconsulting.co.jp