Национальный исследовательский университет
Высшая школа экономики

Отчет по заданию №6

«Сборка многомодульных программ. Вычисление корней уравнений и определенных интегралов.

Вариант 9 / 2 / 1

Выполнил:
студент 213 группы
Александров М. А.

Преподаватель:
Батузов К. А.

Москва2022

Содержание

1. Постановка задачи

Задача заключалась в реализации многомодульной программы на языке Си и ассемблере NASM с использованием утилиты Make, которая вычисляла бы площадь плоской фигуры, заключенной между тремя кривыми с помощью заданных численно-математических методов. А именно, метода хорд для поиска точек пересечения кривых, которые являются вершинами фигуры, и формулы прямоугольников для вычисления интегралов. Отрезки для применения метода хорд должны были быть вычислены аналитически. При этом функции, определяющие кривые, должны были быть реализованы на языке ассемблера, а вся остальная часть программы на языке Си.

Уравнения кривых:

1. $f1 = \frac{3}{(x-1)^2+1}$
2. $f2 = \sqrt{x + 0.5}$.
3. $f3 = e^{-x}$

2. Математическое обоснование

Для использования метода хорд требуется, чтобы корень на выбранном промежутке $[a; b]$ был единственный (1, 2), а также чтобы выполнялось условие сходимости (3) [1]:

1. Функция $F(x) = f(x) - g(x)$ определена и непрерывна на данном отрезке, а также имеет разные знаки на концах отрезка.

2. Ее производная $F'(x)$ не меняет знак.

3. $F''(x)$ не меняет знак на промежутке $[a; b]$

В результате анализа представленных кривых были выбраны следующие промежутки для поиска корней (сначала покажем, что на каждом из них лежит только один корень):

1. $[1.6,\ 2.5]$ для поиска точки пересечения f_1 и f_2.

    a. $F(x)$ определена и непрерывна на данном отрезке. $\big(f_1(1.6) - f_2(1.6)\big)\big(f_1(2.5) - f_2(2.5)\big) = (2.206 - 1.449)(0.923 - 1.732) = 0.106 * (-0.809) = -0.086 < 0$. Следовательно, знак $F(x)$ на концах отрезка различается.

    b. $F'(x) = 0$ при $x \approx -0.289$ и $x \approx 0.929$. $-0.289 \notin [1.2,2.5]$, $0.929 \notin [1.2,2.5]$, следовательно, производная не меняет знак на заданном промежутке. Таким образом, на этом промежутке $F(x)$ имеет только один корень.

2. $[-0.25,0]$ для поиска точки пересечения f_1иf_3.

    a. $F(x)$ определена и непрерывна на данном отрезке. $\big(f_1(-0.25) - f_3(-0.25)\big)\big(f_1(0) - f_3(0)\big) = (1.17 - 1.284)(1.5 - 1) = (-0.113) * 0.5 = -0.056 < 0$. Следовательно, знак $F(x)$ на концах отрезка различается.

    b. $F'(x) = 0$ при $x \approx 1.058$. $1.058 \notin [-0.4,\ 0]$, следовательно, производная не меняет знак на заданном промежутке. Таким образом, на этом промежутке $F(x)$ имеет только один корень.

3. $[0,1.2]$ для поиска точки пересечения f_2и f_3.

    a. $F(x)$ определена и непрерывна на данном отрезке. $\big(f_2(0) - f_3(0)\big)\big(f_2(1.2) - f_3(1.2)\big) = (0.707 - 1)(1.304 - 0.301) = (-0.293) * 1.003 = -0.293 < 0$. Следовательно, знак $F(x)$ на концах отрезка различается.

    b. $F'(x) > 0$ на всей плоскости действительных чисел, следовательно, на этом промежутке монотонна, а имеет только один корень.

Остается лишь проверить, выполняется ли требование по сходимости на заданных промежутках для каждой функции:

1. Для f_1 и f_2:$F''(x) = 3\left(\frac{8(x-1)^2}{((x-1)^2+1)^3} - \frac{2}{((x-1)^2+1)^2}\right) + \frac{1}{4(x+0.5)^{3/2}}$. Заметим, что второе слагаемое (за скобками) всегда больше 0. Преобразуем выражение в скобках, приведя его к общему знаменателю. Получим:
$$\frac{6(x-1)^2-2}{((x-1)^2+1)^3}$$
При $x \geq 1.6$ получаем:
$$6(x-1)^2 \geq 6 * 0.6^2 = 2.16$$
$$2.16 \geq 2$$
Таким образом, числитель больше нуля. Рассмотрим знаменатель:
$$(x-1)^2 + 1 > 0 \text{ всегда}$$
$$\text{Тогдаи}((x-1)^2+1)^3 > 0$$
Следовательно, выражение в скобках больше нуля на заданном промежутке. Поскольку выражение за скобками тоже больше нуля на этом промежутке, то и вся функция на нем положительна. При этом $F''(x)$ непрерывна и определена на данном промежутке, значит условие сходимости выполнено и [1.6;2.5] подходит.

2. Для f_1 и f_3:$F''(x) = \frac{6(3x^2-6x+2)}{x^2-2x+2} - e^{-x}$. Докажем, что первое слагаемое больше второго (под вторым здесь будем понимать e^{-x}, не $-e^{-x}$) на всем промежутке [-0.25;0]. Это будет означать, что функция F''(x) на данном промежутке положительна и следовательно не меняет знак. Для этого нам потребуется доказать, что оба слагаемых монотонно убывают на всем отрезке и при этом значения первого на концах отрезка больше, чем значения второго. Рассмотрим концы отрезка: $F''(-0.25) \approx 7.35 > 0$, $F''(0) = 5 > 0$. Таким образом, дробь (первое слагаемое) больше экспоненты (второго слагаемого) на концах отрезка. Теперь рассмотрим производную первого слагаемого. Она будет равна: $h'(x) = 48x - 48(x^2-2x+2)^2 = \frac{48x}{(x^2-2x+2)^2} - \frac{48}{(x^2-2x+2)^2}$. Заметим, что первое слагаемое отрицательно при $x < 0$ (так как $48x < 0, (x^2-2x+2)^2 > 0$), а второе отрицательно всегда. Таким образом, $h'(x)$ отрицательна на данном промежутке, следовательно, $h(x) = \frac{6(3x^2-6x+2)}{x^2-2x+2}$ убывает на заданном промежутке. $(e^{-x})' = -e^{-x} < 0$для всех x, поэтому e^{-x} убывает на заданном промежутке. Итак, мы доказали, что $h(x)$ и e^{-x} монотонно убывают на промежутке [-0.25;0], а на концах отрезка $h(x)$ больше. Значит $F''(x) > 0$ на всем заданном промежутке, при этом она на нем непрерывна и определена, а следовательно выбранный нами промежуток удовлетворяет условию сходимости метода хорд.

3. Для f_2 и f_3:$F''(x) = -e^{-x} + \frac{-1}{\left(4\times(0.5+x)^{\left(\frac{3}{2}\right)}\right)} < 0$. Первое слагаемое всегда меньше нуля. Второе слагаемое всегда меньше нуля, потому что

знаменатель всегда больше нуля, однако числитель — отрицательное число, следовательно функция всегда отрицательна. Таким образом, $F''(x) < 0$ при всех значениях x, следовательно, она не меняет знак на данном промежутке, при этом она на нем определена и непрерывна, значит [0, 1.2] подходит.

Для сходимости метода прямоугольников требуется, чтобы функция была определена на данном отрезке, это условие выполнено.

Для производимых вычислений были выбраны значения $\varepsilon 1 = 0.0000001$ и $\varepsilon 2 = 0.0001$. Докажем, что эти значения достаточны для достижения требуемой точности $\varepsilon = 0.001$.

Если функция $f(x) > 0$ определена и непрерывна на отрезке $[x_1 - \varepsilon 1;\ x_2 + \varepsilon 2]$, то максимальное значение интеграла будет достигнуто при интегрировании на самом этом отрезке, а минимальное — на отрезке $[x_1 + \varepsilon 1;\ x_2 - \varepsilon 2]$.

Максимальное значение будет равно:

$$\int_{x_1-\varepsilon_1}^{x_2+\varepsilon_1} f\ dx = \int_{x_1-\varepsilon_1}^{x_1} f\ dx + \int_{x_1}^{x_2} f\ dx + \int_{x_2}^{x_2+\varepsilon_1} f\ dx$$

Минимальное:

$$\int_{x_1+\varepsilon_1}^{x_2-\varepsilon_1} f\ dx = -\int_{x_1}^{x_1+\varepsilon_1} f\ dx + \int_{x_1}^{x_2} f\ dx - \int_{x_2-\varepsilon_2}^{x_2} f dx$$

Чтобы вычислить максимальную погрешность необходимо взять максимум двух значений: разности максимального и реального значения интеграла и разности реального и минимального значений. Затем прибавить к полученному значению $\varepsilon 2$, таким образом учитывая и его:

$$\varepsilon_f = max\left(\left(\int_{x_1-\varepsilon_1}^{x_1} f\ dx + \int_{x_1}^{x_2} f\ dx + \int_{x_2}^{x_2+\varepsilon_1} f\ dx\right) - \int_{x_1}^{x_2} f\, dx, \int_{x_1}^{x_2} f\, dx \right.$$
$$\left. - \left(-\int_{x_1}^{x_1+\varepsilon_1} f\ dx + \int_{x_1}^{x_2} f\ dx - \int_{x_2-\varepsilon_2}^{x_2} f dx\right)\right) + \varepsilon_2 =$$
$$= max\left(\int_{x_1-\varepsilon_1}^{x_1} f\ dx + \int_{x_2}^{x_2+\varepsilon_1} f\ dx, \int_{x_1}^{x_1+\varepsilon_1} f\ dx + \int_{x_2-\varepsilon_2}^{x_2} f\right) + \varepsilon_2$$

Приведём вычисления соответствующей погрешности для заданных кривых:

1. Для f_1:

$$max\left(\int_{x_1-\varepsilon_1}^{x_1} f_1\ dx + \int_{x_2}^{x_2+\varepsilon_1} f_1\ dx, \int_{x_1}^{x_1+\varepsilon_1} f_1\ dx + \int_{x_2-\varepsilon_2}^{x_2} f_1\right) + \varepsilon_2$$
$$\approx max(0.00000012 + 0.00000016, 0.00000012 + 0.00000016) + 0.0001$$
$$= 0.00010028$$

2. Для f_2:

$$max\left(\int_{x_1-\varepsilon_1}^{x_1} f_2\ dx + \int_{x_2}^{x_2+\varepsilon_1} f_2\ dx, \int_{x_1}^{x_1+\varepsilon_1} f_2\ dx + \int_{x_2-\varepsilon_2}^{x_2} f_2\right) + \varepsilon_2$$
$$\approx max(0.000000083 + 0.00000016, 0.000000083 + 0.00000016)$$
$$+ 0.0001 = 0.000100243$$

3. Для f_3:

$$max\left(\int_{x_1-\varepsilon_1}^{x_1} f_3\ dx + \int_{x_2}^{x_2+\varepsilon_1} f_3\ dx, \int_{x_1}^{x_1+\varepsilon_1} f_3\ dx + \int_{x_2-\varepsilon_2}^{x_2} f_3\right) + \varepsilon_2$$
$$\approx max(0.00000012 + 0.000000083, 0.00000012 + 0.000000083)$$
$$+ 0.0001 = 0.00010203$$

Общая погрешность при вычислении площади фигуры равна сумме погрешностей вычисления для каждой кривой:

$$\varepsilon = \varepsilon_{f_1} + \varepsilon_{f_2} + \varepsilon_{f_3} = 0.00010028 + 0.000100243 + 0.00010203 = 0.000302553 < 0.001$$

Таким образом, общая погрешность получается меньше требуемой точности, следовательно, значения $\varepsilon 1$ и $\varepsilon 2$ являются подходящими.

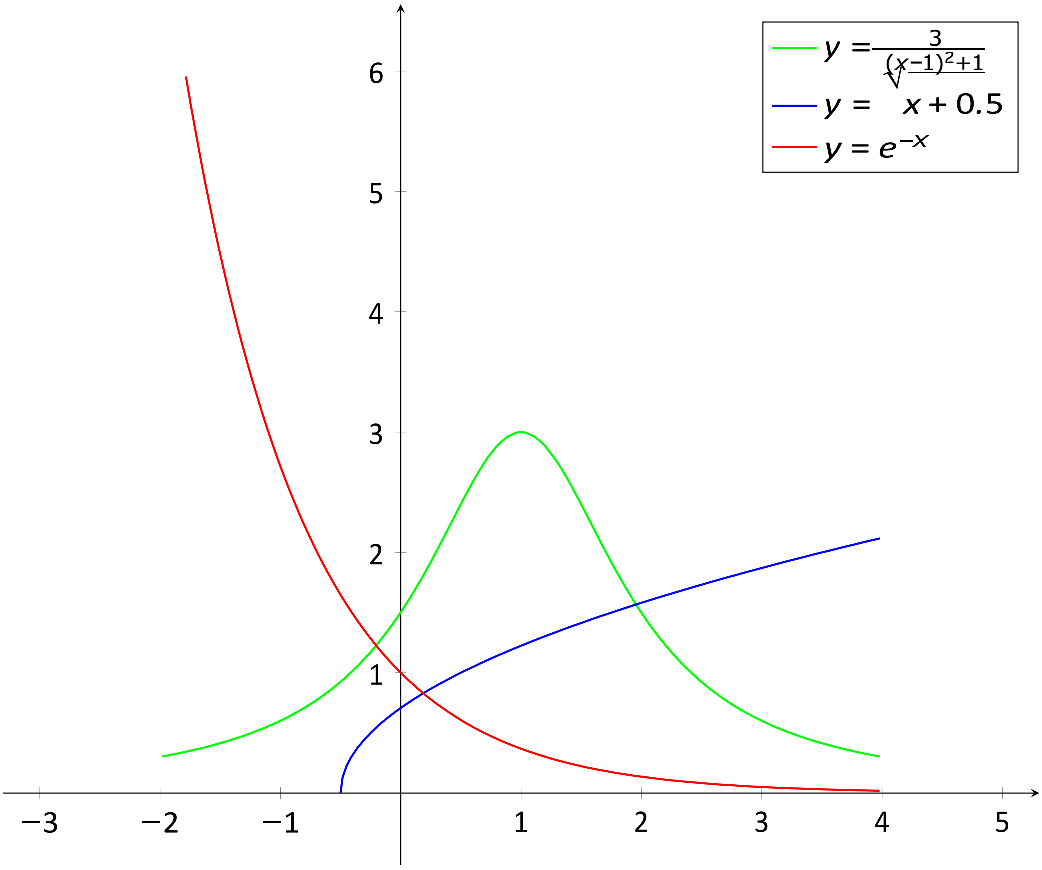

Рис. 1: Плоская фигура, ограниченная графиками заданных уравнений

3. Результаты экспериментов

В результате работы программы были вычислены следующие корни (таблица 1):

Кривые	x	y
f_1 и f_2	1.9561	1.5672
f_2 и f_3	0.1874	0.8291
f_1 и f_3	-0.2033	1.2254

Таблица 1: Координаты точек пересечения

А также следующие результаты вычисления площади (рис. 2):

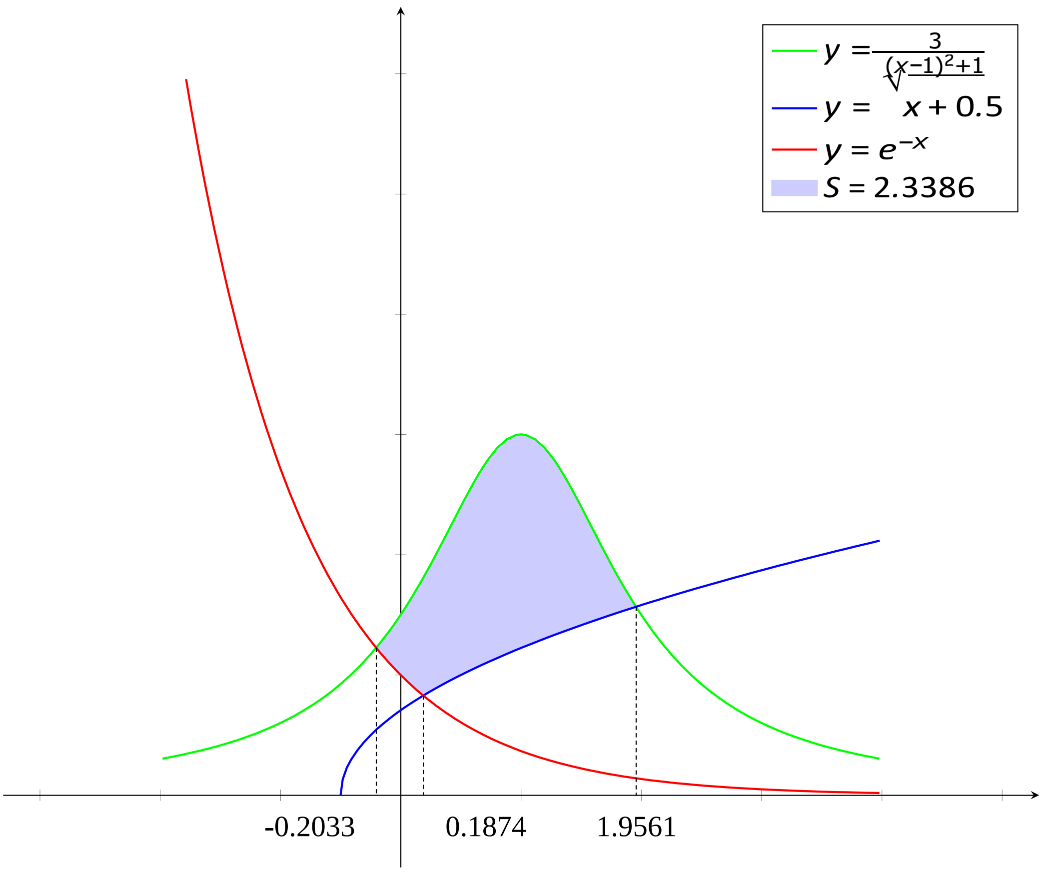

Рис. 2: Плоская фигура, ограниченная графиками заданных уравнений

4. Структура программы и спецификация функ-ций

В данном разделе необходимо привести полный список модулей и функций, описать их функциональность.

Список модулей и функций программы:

1. **funcs.asm —** модуль программы, написанный на языке ассемблера и содержащий следующие функции:

   a. **f1** (double f1(double)) — вычисляет значение функции $\frac{3}{(x-1)^2+1}$ в заданной точке.

   b. **f2** (double f2(double)) — вычисляет значение функции $\sqrt{x+0.5}$ в заданной точке.

   c. **f3** (double f3(double)) — вычисляет значение функции e^{-x} в заданной точке.

   d. **t_f1** (double t_f1(double)) — вычисляет значение тестовой функции $-x^2+5$ в заданной точке.

   e. **t_f2** (double t_f2(double)) — вычисляет значение тестовой функции $4x^2 -$ x в заданной точке.

   f. **t_f3** (double t_f2(double)) — вычисляет значение тестовой функции x^4+2 в заданной точке.

2. **integral.c**

   a. **double root (double (*f) (double), double (*g) (double), double a, double b, double eps1) —** функция, вычисляющая абсциссу точки пересечения 2 функций на отрезке [a, b] с заданной точностью eps1 (ε_1) при помощи метода хорд.

   b. **double integral (double (*f) (double), double a, double b, double eps2) —** функция, вычисляющая определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ с помощью метода прямоугольников.

   c. **static double (*f) (double) map (int fn) —** вспомогательная функция, сопоставляющая аргумент командной строки, обозначающий номер функции, с указателем на данную функцию. Например, «1» соответствует функции f_1, …, «3» — f_3, «4» — t_f1, …, «6» — t_f3.

   d. **int main (int argc, char *argv[]) —** основная функция, обрабатывает аргументы командной строки и вызывает соответствующие функции, производя все нужные вычисления и выдавая ответ.

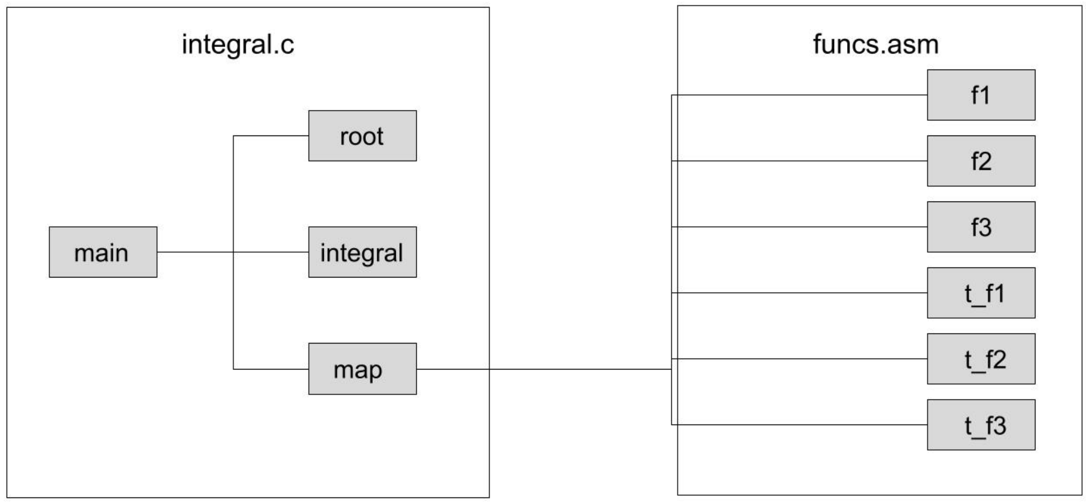

Рис. 3: Схема связи компонентов программы

5. Сборка программы (Make-файл)

Список целей Makefile’а и диаграмма зависимостей:

1. **all** — запускает полную сборку программы.
2. **integral** — собирает исполняемый файл.
3. **funcs.o** — ассемблирует файл **funcs.asm**, получая из него объектный файл.
4. **test** — запускает тестирование программы, а именно функций root и integral, описанных выше.
5. **clean** — удаляет все объектные файлы.

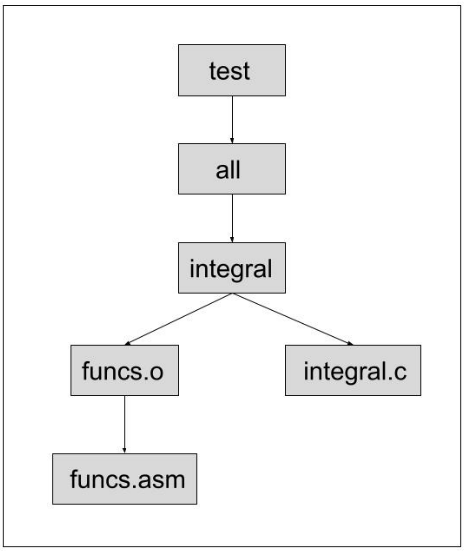

Рис. 4: Диаграмма зависимостей между модулями программы

Ниже приведен код из Makefile.

```
NASM = nasm

ASMFLAGS += -g -f elf32

CFLAGS ?= -O2 -g

CFLAGS += -std=gnu99

CFLAGS += -Wall -Werror -Wformat-security -Wignored-qualifiers -Winit-self \
-Wswitch-default -Wpointer-arith -Wtype-limits -Wempty-body \
-Wstrict-prototypes -Wold-style-declaration -Wold-style-definition \
-Wmissing-parameter-type -Wmissing-field-initializers -Wnested-externs \
-Wstack-usage=4096 -Wmissing-prototypes -Wfloat-equal -Wabsolute-value

CFLAGS += -fsanitize=undefined -fsanitize-undefined-trap-on-error

CC += -m32 -no-pie -fno-pie
```

```makefile
LDLIBS = -lm

.PHONY: all clean test

all: integral

integral: integral.c funcs.o
	$(CC) $(CFLAGS) -o $@ $^ $(LDLIBS)

funcs.o: funcs.asm
	$(NASM) $(ASMFLAGS) $< -o $@

test: all
	./integral --test-root 4:5:0.5:2:0.0000001:1.105
	./integral --test-root 4:6:0.8:1.3:0.0000001:1.141
	./integral --test-root 5:6:0.6:1.2:0.0000001:1.000000
	./integral --test-integral 4:-1.5:2:0.00001:13.708333
	./integral --test-integral 5:1:2:0.00001:7.833333
	./integral --test-integral 6:0.5:3:0.00001:53.59375

clean:
	rm -rf *.o
```

6. Отладка программы, тестирование функций

Для отладки и тестирования функций **root** и **integral** были использованы следующие функции:

1. $\text{t\_f1}(x) = -x^2 + 5$
2. $\text{t\_f2}(x) = 4x^2 - \text{x}$
3. $\text{t\_f3}(x) = x^4 + 2$

Для тестирования функции **root** были подобраны следующие значения:

1. Получив корни уравнения $t\_f1(x) = t\_f2(x)$, в соответствии с одним из них были выбраны следующие тестовые значения: 4:5:0.5:2:0.0000001:1.105

$$\text{t\_f1}(x) = \text{t\_f2}(x)$$

$$-x^2 + 5 = 4x^2 - \text{x}$$

$$5x^2 - \text{x} - 5 = 0$$

$$\text{D} = (-1)^2 - 4 * 5 * (-5) = 101$$

$$x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{1}01}{2 * 5} \approx 1.105$$

2. Получив корни уравнения $t\_f1(x) = t\_f3(x)$, в соответствии с одним из них были выбраны следующие тестовые значения: 4:6:0.8:1.3:0.0000001:1.141

$$t\_f1(x) = t\_f3(x)$$

$$-x^2 + 5 = x^4 + 2$$

$$x^4 + x^2 - 3 = 0$$

Пусть $n = x^2$, тогда:

$$n^2 + n - 3 = 0$$

Далее с помощью формулы корней квадратного уравнения и обратной подстановки находим, что один из корней приблизительно равен 1.141.

3. Аналогично предыдущим двум пунктам, получаем тестовые значения для третьей пары функций $t\_f2 = 4x^2 - x$ и $t\_f3(x) = x^4 + 2$. 5:6:0.6:1.2:0.0000001:1.000000

Для тестирования функции **integral** были получены следующие значения:

1. 4:-1.5:2:0.00001:13.708333

$$\int_{-1.5}^{2} (-x^2 + 5) = \left(-\frac{2^3}{3} + 5 \times 2\right) - \left(-\frac{(-1.5)^3}{3} + 5 \times (-1.5)\right) \approx 13.708333$$

2. 5:1:2:0.00001:7.833333

$$\int_1^2 (4x^2 - x) = \left(\frac{2^2 \times (8 \times 2 - 3)}{6}\right) - \left(\frac{1^2 \times (8 \times 1 - 3)}{6}\right) \approx 7.833333$$

3. 6:0.5:3:0.00001:53.59375

$$\int_{0.5}^3 (x^4 + 2) = \left(\frac{3^5}{5} + 2 \times 3\right) - \left(\frac{0.5^5}{5} + 2 \times 0.5\right) \approx 13.708333$$

7. Анализ допущенных ошибок

При реализации программы была допущена ошибка в выборе интервалов для поиска точек пересечения функций, которая была исправлена путем математического анализа данных кривых и изучения критерия сходимости метода хорд, вследствие чего были выбраны корректные промежутки.

Список литературы

[1] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Т. 1 — Москва: Наука, 198