Statistics

Taniguchi Taichi

October 5, 2018

Contents

Part I
仮設検定

1　統計的仮設

ある確率変数の分布に関する記述を統計的仮設という。

統計的仮設が分布を完全に指定する場合、この仮説を単純仮設 (simple hypotesis) という。例えば、$X_1, ..., X_n$ を $N(10, 25)$ からの無作為標本とするとき、これは単純仮設という。反対に、分布がわからない場合、複合仮設 (composite hypothesis) という。例えば、$X_1, ..., X_n$ を $N(\theta <= 10, 25)$ からの無作為標本とするとき、これは複合仮設である。

2　仮設検定 (test of a statistical hypothesis)

ある統計的仮設を棄却する (reject) かどうかを決めるための手順と仮説の検定という。例えば、$X_1, ..., X_n$ を $N(\theta <= 10, 25)$ からの無作為標本とする。この時、

- H:$\theta <= 10$
- γ: $X^- > 17 + \frac{10}{\sqrt{n}}$ のとき、H を棄却する。

3　棄却域

n 個の無作為標本 $X_1, ..., X_n$ に対して、次の集合を標本空間 (sample space) という。

$$X = (x_1, ..., x_n)|(x_1, .., x_n)\text{が}(X_1, .., X_n)\text{のすべての取りうる値}$$

χ を標本空間とし、$c \subset \chi$ とする。

$$(x_1, x_2, .., x_n) \in C \implies \text{仮説を棄却する}$$

と仮設を検定するとき、C をこの検定の棄却域という。

4　帰無仮説

4.1　帰無仮説の説明

帰無仮説とは、自分が「否定されるのを期待」して立てた仮設のことです。

例えば明日ピクニックに行きたいとします。明日が雨の場合ピクニックは中止するとします。このとき帰無仮説を立てるなら「明日雨が降る」と立てます。ピクニックが行きたいのであれば明日雨が降るという仮設は否定してほしいわけです。

4.2　P 値 (有意確立)）

「帰無仮説が正しい」としたとき、実験によって得られた統計量より極端な統計量が得られる確立のことです。P 値が低ければ低いほど立てた帰無仮説が正しくないといえます。P 値が高いということは、今回得られた統計量より極端な値の統計量が得られる確率は高いということです。つまり、「帰無仮説が成立する」としたとき、「今回の得られた統計量を得る確率は高い」ということが言えます。反対に、P 値があまりにも低すぎるということは、今回得られた統計量よりも極端な統計量が得られる確率が低いということになります。つまり「帰無仮説が成立する」としたとき、「今回のような結果が得られる確率は非常に低い」となるからです。P 値がどれだけ低ければ帰無仮説を却下できるかの基準になるのが上で出てきた優位水準となります。

4.2.1　P 値の計算

P 値の計算では何を、今回得られた統計量より極端な統計量として扱うかが大事になってきます。統計量の標本分布の両すそ部分を極端な統計量の値として考えることを両側検定といいます。

現在は三つの手法が確立されているようです。

- 漸近近似法
- 正確確率検定
- パーミュテーションテスト

5　対立仮設 (alternative hypothesis)

帰無仮説と矛盾する仮設を対立仮設といい、通常 H_1 で表す。帰無仮説と対立仮設はどちらか一方が必ず成り立っているとする。

6　二種類の誤り (two types of error

- 帰無仮説 H_0 が成り立つのに、H_0 を棄却してしまうことを第一種の誤り (type I error) といい、第一種の誤りを犯す確率を大州の誤りの大きさ (size of tyoe I error) という。
- 対立仮説 H_1 が成り立つのに、H_1 を棄却してしますことを第二種の誤り (type II error といい、第二種の誤りを犯す確率を第二種の誤りの大きさ (size of type II error) という。

7　検出力関数 (power function)

パラメータ θ に依存する、密度関数 $f(x|\theta)$ を持つ母集団からの無作為標本抽出を考える。検出力関数とは、$X_1, X_2, ..X_n$ が密度関数 $f(x|\theta)$ に従うという条件のもとでの帰無仮説 H_0 を棄却する確率を出力する。つまり、

$$\pi_\gamma(\theta) = P[H_0\text{を棄却}|X_1, ..X_n\ f(x|\theta)]$$

8　母数空間 (parameter space)

確率変数 X が密度関数 $f(x|\theta)$ に従うとき、母数 θ のすべての取りうる値の集合 Θ と母数空間 (parameter space) という。

9　有意水準 (size of test or significance level)

ある仮設を棄却するかしないかを決める基準となる確立です。一般的に α とあらわされます。ある仮設がこの α 以下の確立で成立するのであれば、ごくごくまれに起こることと考え、仮設を棄却します。

例えば上の例では、$\alpha = 0.5$ としたとき、もし「明日雨が降る」確立が 0.1 であったとします。このとき上で立てた帰無仮説「明日雨が降る」という仮設が成り立つ確立は有意水準 $\alpha = 0.5$ より小さいわけです。このとき「明日雨が降る」というのはまれに起こることであり、帰無仮説を棄却します。
より、一般的に定義すると、

$$\alpha = \sup_{\theta\in\Theta}[\pi_\gamma(\theta)]$$

つまり、Θ の各要素に対する棄却する確率の集合の sup ということである。

10　統計的検定の流れ

統計的検定の流れは以下のようになります。

- 帰無仮説（否定したい仮設）H_0 を決めます。
- 検定に使う統計量を選択し、有意水準を設定します。
- 実際にデータを取り、統計量の実現値を計算します。
- 帰無仮設 H_0 が正しいとしたとき、今回の統計量の実現値がまれにとる値なのか、そうでないのかを調べます。ここが P 値の計算になります。

- P 値が優位水準よりも高いとき、「帰無仮説が正しいとしたとき今回の統計量が得られても不思議ではない」と考え、帰無仮説は却下できません。
- P 値が優位水準よりも低いとき、「帰無仮説が正しいとしたとき、今回の統計量が得られるのは不自然である」と考え、帰無仮説を却下します。

帰無仮説を却下できないからと言って、帰無仮説が正しいとは限らないことには注意が必要です。

References

[1] http://www.gen-info.osaka-u.ac.jp/MEPHAS/express/express11.html

[2] $https : //detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q$1131473456

[3] https://atarimae.biz/archives/12011