一般相対性理論

Takuzone[*1]

2021 年 11 月 4 日

*1 https://twitter.com/TakuzoneMaphy

目次

まえがき

自分の備忘録. 参考文献はメインは [佐古] [1], 数学的に知りたいときは [中原] [2],[松本] [3] である.

第 1 章

多様体論

1.1 位相空間

現代数学はすべて集合論の言葉で記述される．空間も例外ではなく，集合論の枠組みでは空間と位相空間を指す．

1.1.1 位相空間の定義

定義 1.1 (位相空間)
集合 X のある部分集合族 $\mathcal{T} = \{U_i \mid i \in I\}$ が次の 3 つの条件をみたすとき，$\mathcal{T}$ を X の**位相（topology）**とよび，$(X, \mathcal{O})$ を**位相空間（topological space）**という．

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(ii) 任意の部分集合 $J \subset I$ に対して，部分集合族 $\{U_j \mid j \in J\}$ は $\bigcup_{j \in J} U_j \in \mathcal{T}$ をみたす．

(iii) 任意の有限集合 $K \subset I$ に対して，部分集合族 $\{U_k \mid k \in K\}$ は $\bigcap_{k \in k} U_k \in \mathcal{T}$ をみたす．

集合 X に位相 $\mathcal{T}$ を入れると，位相空間になる．しばしば，$(X, \mathcal{T})$ の $\mathcal{T}$ を省略して，X だけで位相空間という．位相空間 X の個々の元を**点**という．

$\mathcal{T}$ は X の**開集合系**とよばれることもあり，X の部分集合 U_i が $\mathcal{T}$ に属するとき，U_i は X の**開集合**という．

例 1

２つの位相空間の間には連続写像の概念が定義できる.

(a) 位相 $\mathcal{T}$ を X のすべての部分集合全体からなる集合族で定めると, $(X, \mathcal{T})$ は位相空間となる. このようにして X に定める位相を**離散位相**という.

(b) $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ とすると, $\mathcal{T}$ は位相となる. このような位相を**密着位相**という.

(c) 点 $x, y \in \mathbb{R}$ の距離を $d(x, y)$ と表したとき, 次式で定義される点 $a \in \mathbb{R}$ 周りの ε 近傍の集合族は $\mathbb{R}^n$ の位相を定める. このような位相を $\mathbb{R}^n$ の**自然な位相**という.

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < \varepsilon\} \tag{1.1.1}$$

1.1.2 連続写像

定義 1.2 (連続)
X, Y を位相空間とする. 写像 $f : X \mapsto Y$ が**連続**であるとは, Y の任意の開集合 U について, その逆像 $f^{-1}(U)$ が X の開集合であることをいう.

この定義は我々が直感的にもつ連続性の概念に一致する.

命題 1.3
定義 1.2 による連続の定義と ε-δ 論による連続の定義は一致する.

1.1.3 Hausdorff 空間

位相空間 X の部分集合 N が点 $x \in X$ を含むようなある開集合が少なくとも１つ存在するとき, N は x の**近傍**であるという. これは N 自身が開集合であることを必ずしも要請していない. もし N 自身が開集合であるときは, N は x の**開近傍**という.

定義 1.4 (Hausdorff 空間)
位相空間 $(X, \mathcal{T})$ が **Hausdorff 空間**であるとは, 任意の異なる点 $x, y \in X$ に対して, $U_x \cap U_y = \emptyset$ をみたすような x の近傍 U_x と y の近傍 U_y が存在することをいう.

1.1.4　閉集合

$(X, \mathcal{T})$ を位相空間とする．X の部分集合 A が**閉集合**であるとは，A の補集合 $X - A$ が開集合であることをいう．すなわち $X - A \in \mathcal{T}$ である．X の補集合 $\emptyset$ は開集合であることから，X は開集合でもあり閉集合でもある．$\emptyset$ も同様に開集合でもあり閉集合でもある．

定義 1.5 (触点と閉包)
$(X, \mathcal{T})$ を位相空間とする．部分集合 $A \in X$ に対して，点 $p \in X$ が A の**触点**であるとは，p の任意の開近傍 U_p が A と交わることをいう．A の触点全体の集合を A の**閉包**とよび，$\overline{A}$ とかく．

触点はどんな近くでも A の点が存在することを意味する．$\overline{A}$ は A を含むような最小の閉集合である．

また，A の最大の部分開集合を**内部**とよび，A° と表す．$\overline{A}$ における A° の補集合を A の**境界**という．閉包はいつでも境界を含み，内部は境界と交わることはない．

1.1.5　コンパクト性

位相空間 X の部分集合族 $\{A_i \mid i \in I\}$ が X の**被覆**であるとは，

$$X = \bigcup_{i \in i} U_i \tag{1.1.2}$$

をみたすことをいう．すべての A_i が X の開集合であるとき，この被覆を**開被覆**という．

定義 1.6 (コンパクト)
位相空間 X が**コンパクト**であるとは，X の任意の開被覆 $\{U_i \mid i \in I\}$ に対しても，I のある有限部分集合 J が存在して，$\{U_j \mid j \in J\}$ もまた X の開被覆であることをいう．

コンパクトな位相空間を**コンパクト空間**という．X の各点が有限個の開集合 $\{U_i\}$ によって被覆されるとき，X は**パラコンパクト**であるという．

1.1.6　同相写像

我々まだ空間についての等しいや異なるなどを定義してなく, 空間を分類することができない. トポロジー研究においてある空間を連続的に変形してある空間になるならば, その２つの空間は同じ空間として扱う. より数学的には次の同相写像によって議論される.

定義 1.7 (同相写像)
X, Y を位相空間とする. 写像 $f : X \mapsto Y$ が次の条件をみたすとき, f を**同相写像（homeomorphism）**とよぶ. X と Y の間に同相写像が存在するとき, X と Y は**位相同相（homeomorphic）**あるいは単に**同相である**といい, $X \cong Y$ とかく.

(i) $f : X \mapsto Y$ は全単射である.
(ii) $f : X \mapsto Y$ も逆写像 $f^{-1}Y \mapsto X$ も連続写像である.

連続写像 $f : X \mapsto Y, g : Y \mapsto X$ が存在して, $f \circ g = \mathrm{id}_Y, g \circ f = \mathrm{id}_X$ であるときも X と Y は同相である.
同相は同値関係であり, 同値類に分けることができる.

1.2　多様体

1.2.1　多様体の定義

定義 1.8 (m 次元多様体)
位相空間 M が以下の条件をみたすとき, M を m **次元多様体（ topological manfold）**という.

(i) M は Hausdorff 空間である.
(ii) **チャート（chart）**とよばれる X の開集合 U_i と U_i から $\mathbb{R}^m$ のある開集合 U' への同相写像 $\varphi_i : U \mapsto U'$ の組 (U_i, φ_i) と, **アトラス（atlas）**よばれるチャート全体の集合 $\{(U_i, \varphi_i)\}$ が存在して, 開集合族 $\{U_i\}$ は X を被覆する.

U_i を**座標近傍**といい, φ_j を**座標関数**という. 任意の点 $p \in U$ に対して, $\varphi(p)$ は $\mathbb{R}^m$ の点であるから, m 個の実数 x_i を用いて,

$$\varphi(p) = (x^1(p), x^2(p), \dots, x^m(p)) \tag{1.2.1}$$

と表せる．この $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ を (U, φ) に関する p の**局所座標**という．

例 2

(a) $\mathbb{R}^m$ は最も簡単な多様体である．実際に座標関数として恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}$ をとると，$(\mathbb{R}^m, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m})$ はチャートかつアトラスになる．

多様体 M のチャート $(U,\varphi),(V,\phi)$ に対して，2 つの座標近傍 U と V が交わる場合を考える．共通部分 $U \cap V$ に属する点 p は φ によって $\varphi(p) = (x^1, x^2, \ldots, x^m)$ という局所座標で表せ，ϕ によっても $\phi(p) = (y^1, y^2, \ldots, y^m)$ で表せる．すなわち 2 種類の局所座標で表すことができる．φ は同相写像であるから，逆写像 φ^{-1} が存在して，$p = \varphi^{-1}(x^1, x^2, \ldots, x^m)$ をみたす．これから合成写像 $\phi \circ \varphi$ を定義でき，

$$\begin{array}{cccc} \phi \circ \varphi^{-1}: & \varphi(U \cap V) & \longmapsto & \phi(U \cap V) \\ & \Cup & & \Cup \\ & (x^1, x^2, \ldots, x^m) & \longmapsto & (y^1, y^2, \ldots, y^m) \end{array} \tag{1.2.2}$$

は 2 つの局所座標の関係を示し，$\phi \circ \varphi^{-1}$ は**座標変換**を行っている．

座標変換を考えることで，微分多様体を考えることができる．

定義 1.9 (可微分多様体)
$\{U_i, \varphi_i\}$ を多様体 M のアトラスとする．$U_i \cap U_j \neq \emptyset$ をみたす任意の i, j に対して，座標変換

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \mapsto \varphi_j(U_i \cap U_j) \tag{1.2.3}$$

は C^r 級であるとき，M は m 次元 **C^r 級可微分多様体（differential manifold）** であるという．

C^r 級可微分多様体は簡単に C^r 級多様体とも呼ばれる．また，M が C^∞ 級であるとき微分多様体という．

1.2.2　微分同相

f を多様体 M から多様体 N への写像とする．$p \in U, f(p) \in V$ となるように M 上のチャート (U, φ) と N 上のチャート (V, ϕ) を選ぶ．このとき，合成写像 $\phi \circ f \circ \varphi^{-1}$ は実ベクトル関数となり，微積分が定義される．この $\phi \circ f \circ \varphi^{-1}$ が C^s 級であるとき，f は **C^s 級写像**という．f は C^s 級写像であることはチャートやアトラスの選び方に依らない．

定義 1.10 (微分同相)
C^r 級多様体 M, N の間の写像 $f : M \mapsto N$ が同相写像であり, f とその逆写像 f^{-1} がともに C^s 級であるとき, f は **C^s 級微分同相写像（C^s diffeomorphism）** という．また, M と N の間に C^s 級微分同相写像が存在するとき, M と N は **C^s 級微分同相（C^s diffeomorphic）** であるといい, $M \equiv N$ と表す.

同相写像による分類は, ある空間から別の空間へ連続的に変形できるかによるものであった．微分同相の場合は, 滑らかに変形できるかによる分類である．２つの多様体が微分同相である場合は同じ多様体とみなす.

1.3 接ベクトル

多様体 M における開曲線は開区間 $(a, b) \subset \mathbb{R}$ から M への写像 C のことである.

$$\begin{array}{ccc} (a,b) & \longmapsto & M \\ \cup & & \cup \\ t & \longmapsto & C(t) \end{array} \tag{1.3.1}$$

t を時間としてみたとき, $C(t)$ はある物体の道のりとして考えられる．速度ベクトルすなわち t についての微分を求めたいが, 多様体上の微分は定義されていない．そこで, 一度ある関数 $f : M \mapsto \mathbb{R}$ との合成写像 $f(c(t))$ の微分を考える．曲線を局所座標 $\varphi_i \circ C(t) = (x^1(t), x^2(t), \ldots, x^m(t))$ を用いると,

$$\frac{\mathrm{d}f(c(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x^\mu(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f \circ \varphi_i^{-1}}{\partial x^\mu} := X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} f \circ \varphi_i^{-1} \tag{1.3.2}$$

となる．f は微分を考えるために, 便宜上導入したものであるから, $X := X^\mu\, \partial/\partial x^\mu$ に注目してみる．ここで, 偏微分作用素の組 $\{\partial/\partial x^\mu\}$ はベクトル空間を形成し, $\partial/\partial x^\mu$ は基底, X^μ はその成分とみなせる．$\{\partial/\partial x^\mu\}$ が張るベクトル空間は, X は一見局所座標の取り方に依存するように感じるが, 別の局所座標 $\psi \circ C(t) = (y^1(t), y^2(t), \ldots, y^m(t))$ に変えてみると, X を任意のとして,

$$X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = X^\mu \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial y^\nu} = Y^\nu \frac{\partial}{\partial y^\nu} \tag{1.3.3}$$

となるため, ベクトル空間は局所座標に依らないことが確認できる．この偏微分作用素が張るベクトル空間を接ベクトル空間という.

定義 1.11 (接ベクトル空間)
m 次元微分多様体 M 上の点 p の局所座標を $\varphi(p) = (x^1, x^2, \ldots, x^m)$ とする．p における**接ベクトル空間（tangent vector space）**とは, m 個の偏微分作用素

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p \tag{1.3.4}$$

が張るベクトル空間のことをいい, $T_p(M)$ と表す．また, $T_p(M)$ の元を p における**接ベクトル（tangent vector）**とよぶ.

第 2 章

微分形式

2.1　余接ベクトル空間

接ベクトル空間 $T_p(M)$ はベクトル空間であるから, 双対空間が存在する.

定義 2.1 (余接ベクトル空間)
多様体 M の点 p における接ベクトル空間 $T_p(M)$ の双対空間を, 点 p における**余接ベクトル空間（cotangent vector space）**とよび, $T_p^*(M)$ で表し, その元を**余接ベクトル（cotangent vector）**という. $T_p(M)$ の基底 $(\partial/\partial x^\mu)_p$ に対応する双対基底を $(\mathrm{d}x^\mu)_p : T_p(M) \mapsto \mathbb{R}$ と表す.

$$\mathrm{d}x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \delta^\mu{}_\nu \tag{2.1.1}$$

任意の $\omega \in T_p^*(M)$ は双対基底 $\{\mathrm{d}x^\mu\}$ を用いて.

$$\omega = \omega_\mu \,\mathrm{d}x^\mu \tag{2.1.2}$$

と展開できる. $X = X^\mu \,\partial/\partial x\mu$ に作用させると,

$$\omega X = \omega_\mu X^\nu \,\mathrm{d}x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \omega_\mu X^\nu \delta^\mu{}_\nu = \omega_\mu X^\mu \tag{2.1.3}$$

となる.

ここで, ω を 2 つの基底で,

$$\omega = \omega_\mu \,\mathrm{d}x^\mu = \widetilde{\omega}_\mu \,\mathrm{d}y^\mu$$

と表す．全微分の変数変換

$$\mathrm{d}x^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}\,\mathrm{d}y^\nu$$

を代入すると，成分は

$$\widetilde{\omega}_\mu = \omega_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu} \tag{2.1.4}$$

と変換できる．このとき，

$$\widetilde{\omega}_\mu \widetilde{X}^\mu = \omega_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu} X^\rho \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\rho} = \omega_\nu X^\rho \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\rho} = \omega_\nu X^\rho \delta^\nu{}_\rho = \omega_\nu X^\nu \tag{2.1.5}$$

より，局所座標に依らない．

2.2　微分形式

2 変数関数の積分は変数変換をするために，Jacobi 行列をかけなければならない．

定義 2.2 (微分形式)
M を m 次元多様体，$T_p^*(M)$ を点 $p \in M$ における余接ベクトル空間とする．$\mathrm{d}x^\mu \in T_p^*(M)$ に対して，r 次**微分形式（differential form）** $\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \mathrm{d}x^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_r}$ を次のように定義する．

$$\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \mathrm{d}x^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_r} := \sum_{P \in S_r} \mathrm{sgn}(P)\, \mathrm{d}x^{\mu_{P(1)}} \otimes \mathrm{d}x^{\mu_{P(2)}} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{\mu_{P(r)}} \tag{2.2.1}$$

ただし，$S(r)$ を r 次対照群とする．

r 次微分形式は次の性質をもつ．

命題 2.3 (微分形式の性質)

(i) $\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_r} = 0$.

(ii) $\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_r} = \mathrm{sgn}(P)\, \mathrm{d}x^{\mu_{P(1)}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_{P(r)}}$.

(iii) $\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_r}$ は各 $\mathrm{d}x^{\mu_i}$ に対して線形である．

点 $p \in M$ における r 次微分形式全体からなるベクトル空間を $\Omega_p^r(M)$ と記述する．通常，$\Omega_p^r(M)$ の任意の元 ω は

$$\omega = \frac{1}{r!}\omega_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_r}\, \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \mathrm{d}x^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_r} \tag{2.2.2}$$

と表す.

$(1, 2, \ldots, m)$ から $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r)$ を選ぶから, $\Omega_p^r(M)$ の次元は,

$$\binom{m}{r} = \frac{m!}{(m-r)!r!} \tag{2.2.3}$$

である. 便宜上のため, $\Omega_p^0(M) = \mathbb{R}$ とする. $r > m$ であるとき, すべての元について, 同じ添え字が現れるので, $\Omega_p^r(M)$ の元は恒等的にゼロである. また, $\binom{m}{r} = \binom{m}{m-r}$ から, $\dim \Omega_p^r(M) = \dim \Omega_p^{m-r}(M)$ がわかり, $\Omega_p^r(M)$ と $\Omega_p^{m-r}(M)$ は同型である.

微分形式を表すために使われた記号 $\wedge$ を, q 次微分形式と r 次微分形式間の演算子として, 外積 $\wedge$ をを次のように定義する.

定義 2.4 (外積（ウェッジ積）)

多様体 M の点 p における q 次微分形式 $\Omega_p^q(M)$ と r 次微分形式 $\Omega_p^r(M)$ に対して, **外積（exterior product）**または**ウェッジ積（wedge product）**

$$\begin{array}{cccc} \wedge: & \Omega_p^q(M) \times \Omega_p^r(M) & \longmapsto & \Omega_p^{q+r}(M) \\ & \Cup & & \Cup \\ & (\omega, \xi) & \longmapsto & \omega \wedge \xi \end{array} \tag{2.2.4}$$

を $\omega = \dfrac{1}{q!}\omega_{\mu_1 \ldots \mu_q}\, \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_q}$, $\xi = \dfrac{1}{r!}\xi_{\nu_1 \ldots \nu_r}\, \mathrm{d}x^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\nu_r}$ として,

$$\omega \wedge \xi := \frac{1}{q!r!}\omega_{\mu_1 \ldots \mu_q}\xi_{\mu_{q+1} \ldots \mu_{q+r}}\, \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_{q+r}} \tag{2.2.5}$$

と定義する.

2.2.1 外微分

定義 2.5 (外積)

外積（exterior derivative） $\mathrm{d}_r : \Omega^r(M) \mapsto \Omega^{r+1}(M)$ を r 次微分形式 $\omega = \dfrac{1}{r!}\omega_{\mu_1 \ldots \mu_r}\, \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_r}$ への作用として,

$$\mathrm{d}_r\omega := \frac{1}{r!}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\omega_{\mu_1 \ldots \mu_r}\right) \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_r} \tag{2.2.6}$$

として定義する.

普通は外微分の添字 r を省略する.

例 3

(a) $\mathrm{d}\omega_0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \dfrac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z.$

(b) $\mathrm{d}\omega_1 = \left(\dfrac{\partial\omega_y}{\partial x} - \dfrac{\partial\omega_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + \left(\dfrac{\partial\omega_z}{\partial y} - \dfrac{\partial\omega_y}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \left(\dfrac{\partial\omega_x}{\partial z} - \dfrac{\partial\omega_z}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x.$

(c) $\mathrm{d}\omega_2 = \left(\dfrac{\partial\omega_{yz}}{\partial x} + \dfrac{\partial\omega_{zx}}{\partial y} + \dfrac{\partial\omega_{xy}}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z.$

(d) $\mathrm{d}\omega_3 = 0.$

ベクトル解析の意味での d の ω_0 への作用は grad, ω_1 への作用は rot, ω_2 への作用は div と同一視できる.

また, 外微分は次の性質をもつ.

命題 2.6 (外微分の性質)

(i) $\xi\in\Omega^q(M), \omega\in\Omega^r(M)$ とする. このとき,

$$\mathrm{d}(\xi\wedge\omega) = \mathrm{d}\xi\wedge\omega + (-1)^q\xi\wedge\mathrm{d}\omega\,. \tag{2.2.7}$$

(ii) 任意の $\omega\in\Omega^r_p(M)$ に対して,

$$\mathrm{d}_{r+1}\mathrm{d}_r\omega = 0. \tag{2.2.8}$$

証明 1

(i) $\omega = \dfrac{1}{q!}\omega_{\mu_1\dots\mu_q}\,\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_q}$, $\xi = \dfrac{1}{r!}\xi_{\nu_1\dots\nu_r}\,\mathrm{d}x^{\nu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\nu_r}$ とする.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(\xi\wedge\omega) &= \mathrm{d}\left(\frac{1}{q!r!}\omega_{\mu_1\dots\mu_q}\xi_{\nu_1\dots\nu_r}\,\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_q}\wedge\mathrm{d}x^{\nu_1}\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\nu_r}\right)\\
&= \frac{1}{q!r!}\partial_\rho(\omega_{\mu_1\dots\mu_q}\xi_{\nu_1\dots\nu_r})\\
&\qquad\qquad \mathrm{d}x^{\nu}\wedge\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_q}\wedge\mathrm{d}x^{\nu_1}\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\nu_r}\\
&= \frac{1}{q!r!}\{(\partial_\rho\omega_{\mu_1\dots\mu_q})\xi_{\nu_1\dots\nu_r}+\omega_{\mu_1\dots\mu_q}\partial_\rho\xi_{\nu_1\dots\nu_r}\}\\
&\qquad\qquad \mathrm{d}x^{\rho}\wedge\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_q}\wedge\mathrm{d}x^{\nu_1}\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\nu_r}\\
&= \left(\frac{1}{q!}\partial_\rho\omega_{\mu_1\dots\mu_q}\,\mathrm{d}x^{\rho}\wedge\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_q}\right)\\
&\qquad\wedge\left(\frac{1}{r!}\xi_{\nu_1\dots\nu_r}\,\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_q}\right)\\
&\qquad\qquad +(-1)^k\left(\frac{1}{q!}\omega_{\nu_1\dots\nu_q}\,\mathrm{d}x^{\nu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\nu_r}\right)\\
&\qquad\qquad\qquad \wedge\left(\frac{1}{r!}\partial_\rho\xi_{\nu_1\dots\nu_r}\,\mathrm{d}x^{\rho}\wedge\mathrm{d}x^{\nu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\nu_r}\right)\\
&= \mathrm{d}\xi\wedge\omega+(-1)^q\xi\wedge\mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

(ii) 略

□

3

参考文献

[1]佐古彰史, ゲージ理論・一般相対性理論のための 微分幾何入門 (森北出版株式会社, 東京都, Sept. 2021).

[2]中原幹夫, 理論物理学のための幾何学とトポロジー i (日本評論社, 東京都, Nov. 2018).

[3]松本幸夫, 多様体の基礎 (東京大学出版会, 東京都, 1988).