第 1 章

微分形式

1.1　余接ベクトル空間

接ベクトル空間 $T_p(M)$ はベクトル空間であるから, 双対空間が存在する.

定義 1.1 (余接ベクトル空間)
多様体 M の点 p における接ベクトル空間 $T_p(M)$ の双対空間を, 点 p における**余接ベクトル空間（cotangent vector space）**とよび, $T_p^*(M)$ で表し, その元を**余接ベクトル（cotangent vector）**という. $T_p(M)$ の基底 $(\partial/\partial x^\mu)_p$ に対応する双対基底を $(\mathrm{d}x^\mu)_p : T_p(M) \mapsto \mathbb{R}$ と表す.

$$\mathrm{d}x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \delta^\mu{}_\nu \tag{1.1.1}$$

任意の $\omega \in T_p^*(M)$ は双対基底 $\{\mathrm{d}x^\mu\}$ を用いて.

$$\omega = \omega_\mu \, \mathrm{d}x^\mu \tag{1.1.2}$$

と展開できる. $X = X^\mu \, \partial/\partial x_\mu$ に作用させると,

$$\omega X = \omega_\mu X^\nu \, \mathrm{d}x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \omega_\mu X^\nu \delta^\mu{}_\nu = \omega_\mu X^\mu \tag{1.1.3}$$

となる.

ここで, ω を 2 つの基底で,

$$\omega = \omega_\mu \, \mathrm{d}x^\mu = \widetilde{\omega}_\mu \, \mathrm{d}y^\mu$$

と表す．全微分の変数変換

$$\mathrm{d}x^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}\,\mathrm{d}y^\nu$$

を代入すると，成分は

$$\widetilde{\omega}_\mu = \omega_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu} \tag{1.1.4}$$

と変換できる．このとき，

$$\widetilde{\omega}_\mu \widetilde{X}^\mu = \omega_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu} X^\rho \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\rho} = \omega_\nu X^\rho \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\rho} = \omega_\nu X^\rho \delta^\nu{}_\rho = \omega_\nu X^\nu \tag{1.1.5}$$

より，局所座標に依らない．

1.2　微分形式

2 変数関数の積分は変数変換をするために，Jacobi 行列をかけなければならない．

定義 1.2 (微分形式)
M を m 次元多様体，$T_p^*(M)$ を点 $p \in M$ における余接ベクトル空間とする．$\mathrm{d}x^\mu \in T_p^*(M)$ に対して，r 次**微分形式（differential form）** $\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \mathrm{d}x^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_r}$ を次のように定義する．

$$\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \mathrm{d}x^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_r} := \sum_{P \in S_r} \mathrm{sgn}(P)\,\mathrm{d}x^{\mu_{P(1)}} \otimes \mathrm{d}x^{\mu_{P(2)}} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{\mu_{P(r)}} \tag{1.2.1}$$

ただし，$S(r)$ を r 次対照群とする．

r 次微分形式は次の性質をもつ．

命題 1.3 (微分形式の性質)

(i) $\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_r} = 0$.

(ii) $\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_r} = \mathrm{sgn}(P)\,\mathrm{d}x^{\mu_{P(1)}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_{P(r)}}$.

(iii) $\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_r}$ は各 $\mathrm{d}x^{\mu_i}$ に対して線形である．

点 $p \in M$ における r 次微分形式全体からなるベクトル空間を $\Omega_p^r(M)$ と記述する．通常，$\Omega_p^r(M)$ の任意の元 ω は

$$\omega = \frac{1}{r!}\omega_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_r}\,\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \mathrm{d}x^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_r} \tag{1.2.2}$$

と表す．

$(1,2,\ldots,m)$ から $(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_r)$ を選ぶから，$\Omega^r_p(M)$ の次元は，

$$\binom{m}{r} = \frac{m!}{(m-r)!r!} \tag{1.2.3}$$

である．便宜上のため，$\Omega^0_p(M) = \mathbb{R}$ とする．$r > m$ であるとき，すべての元について，同じ添え字が現れるので，$\Omega^r_p(M)$ の元は恒等的にゼロである．また，$\binom{m}{r} = \binom{m}{m-r}$ から，$\dim\Omega^r_p(M) = \dim\Omega^{m-r}_p(M)$ がわかり，$\Omega^r_p(M)$ と $\Omega^{m-r}_p(M)$ は同型である．

微分形式を表すために使われた記号 $\wedge$ を，q 次微分形式と r 次微分形式間の演算子として，外積 $\wedge$ をを次のように定義する．

定義 1.4 (外積（ウェッジ積）)
多様体 M の点 p における q 次微分形式 $\Omega^q_p(M)$ と r 次微分形式 $\Omega^r_p(M)$ に対して，**外積（exterior product）**または**ウェッジ積（wedge product）**

$$\begin{array}{cccc} \wedge: & \Omega^q_p(M)\times\Omega^r_p(M) & \longmapsto & \Omega^{q+r}_p(M) \\ & \Cup & & \Cup \\ & (\omega,\xi) & \longmapsto & \omega\wedge\xi \end{array} \tag{1.2.4}$$

を $\omega = \dfrac{1}{q!}\omega_{\mu_1\ldots\mu_q}\,\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_q}$，$\xi = \dfrac{1}{r!}\xi_{\nu_1\ldots\nu_r}\,\mathrm{d}x^{\nu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\nu_r}$ として，

$$\omega\wedge\xi := \frac{1}{q!r!}\omega_{\mu_1\ldots\mu_q}\xi_{\mu_{q+1}\ldots\mu_{q+r}}\,\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_{q+r}} \tag{1.2.5}$$

と定義する．

1.2.1　外微分

定義 1.5 (外積)
外積（exterior derivative）$\mathrm{d}_r : \Omega^r(M) \mapsto \Omega^{r+1}(M)$ を r 次微分形式 $\omega = \dfrac{1}{r!}\omega_{\mu_1\ldots\mu_r}\,\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_r}$ への作用として，

$$\mathrm{d}_r\omega := \frac{1}{r!}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\omega_{\mu_1\ldots\mu_r}\right)\mathrm{d}x^\nu\wedge\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_r} \tag{1.2.6}$$

として定義する．

普通は外微分の添字 r を省略する.

例 1

(a) $\mathrm{d}\omega_0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \dfrac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z.$

(b) $\mathrm{d}\omega_1 = \left(\dfrac{\partial \omega_y}{\partial x} - \dfrac{\partial \omega_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + \left(\dfrac{\partial \omega_z}{\partial y} - \dfrac{\partial \omega_y}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \left(\dfrac{\partial \omega_x}{\partial z} - \dfrac{\partial \omega_z}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x.$

(c) $\mathrm{d}\omega_2 = \left(\dfrac{\partial \omega_{yz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \omega_{zx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \omega_{xy}}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z.$

(d) $\mathrm{d}\omega_3 = 0.$

ベクトル解析の意味での d の ω_0 への作用は grad, ω_1 への作用は rot, ω_2 への作用は div と同一視できる.

また, 外微分は次の性質をもつ.

命題 1.6 (外微分の性質)

(i) $\xi \in \Omega^q(M), \omega \in \Omega^r(M)$ とする. このとき,

$$\mathrm{d}(\xi\wedge\omega) = \mathrm{d}\xi\wedge\omega + (-1)^q \xi\wedge\mathrm{d}\omega\,. \tag{1.2.7}$$

(ii) 任意の $\omega \in \Omega^r_p(M)$ に対して,

$$\mathrm{d}_{r+1}\mathrm{d}_r\omega = 0. \tag{1.2.8}$$

証明 1

(i) $\omega = \dfrac{1}{q!}\omega_{\mu_1 \dots \mu_q}\,\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_q}\,,\ \xi = \dfrac{1}{r!}\xi_{\nu_1 \dots \nu_r}\,\mathrm{d}x^{\nu_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{\nu_r}$ とする.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(\xi \wedge \omega) &= \mathrm{d}\left(\frac{1}{q!r!}\omega_{\mu_1 \dots \mu_q}\xi_{\nu_1 \dots \nu_r}\,\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_q} \wedge \mathrm{d}x^{\nu_1} \dots \wedge \mathrm{d}x^{\nu_r}\right) \\
&= \frac{1}{q!r!}\partial_\rho(\omega_{\mu_1 \dots \mu_q}\xi_{\nu_1 \dots \nu_r}) \\
&\qquad\qquad \mathrm{d}x^{\nu} \wedge \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_q} \wedge \mathrm{d}x^{\nu_1} \dots \wedge \mathrm{d}x^{\nu_r} \\
&= \frac{1}{q!r!}\{(\partial_\rho \omega_{\mu_1 \dots \mu_q})\xi_{\nu_1 \dots \nu_r} + \omega_{\mu_1 \dots \mu_q}\partial_\rho \xi_{\nu_1 \dots \nu_r}\} \\
&\qquad\qquad \mathrm{d}x^{\rho} \wedge \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_q} \wedge \mathrm{d}x^{\nu_1} \dots \wedge \mathrm{d}x^{\nu_r} \\
&= \left(\frac{1}{q!}\partial_\rho \omega_{\mu_1 \dots \mu_q}\,\mathrm{d}x^{\rho} \wedge \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_q}\right) \\
&\qquad \wedge \left(\frac{1}{r!}\xi_{\nu_1 \dots \nu_r}\,\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_q}\right) \\
&\qquad\qquad + (-1)^k\left(\frac{1}{q!}\omega_{\nu_1 \dots \nu_q}\,\mathrm{d}x^{\nu_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{\nu_r}\right) \\
&\qquad\qquad\qquad \wedge \left(\frac{1}{r!}\partial_\rho \xi_{\nu_1 \dots \nu_r}\,\mathrm{d}x^{\rho} \wedge \mathrm{d}x^{\nu_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{\nu_r}\right) \\
&= \mathrm{d}\xi \wedge \omega + (-1)^q \xi \wedge \mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

(ii) 略

□

1.2.2 内部積

前項で定義した外微分は微分形式の次数を 1 つ上げる作用であったが, 逆に 1 つ下げる作用を考えられる.

定義 1.7 (内部積)

ベクトル場 $X = X^\mu \partial_\mu$ に対する**内部積（interior product）** i_X は, $\Omega^r(M)$ から $\Omega^{r-1}(M)$ への写像であり, r 次微分形式 $\omega = \frac{1}{r!}\omega_{\mu_1\dots\mu_r}\,\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_r}$ に対して,

$$i_X\omega := \frac{1}{(r-1)!}X^{\mu_1}\omega_{\mu_1\dots\mu_r}\,\mathrm{d}x^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_r} \tag{1.2.9}$$

と定義する.

1.3 微分形式の積分

1.3.1 諸定義

多様体 M 上の微分形式の積分は M が向き付け可能であるときに定義される．アトラス $\{(U_i, \varphi_i)\}$ で被覆される多様体とする．$U_i \cap U_j = \emptyset$ を満たす任意の U_i, U_j に対して, Jacobian $J = \det \partial x^\mu / \partial x^\nu$ が正となる U_i 上の局所座標 $\{x^\mu\}$ と U_i 上の局所座標 $\{x^\nu\}$ が存在するとき, M は**向き付け可能（orientable）**であるという.

定義 1.8 (微分形式の積分)

$\{U_i\}$ を m 次元多様体 M の開被覆としたとき, m 次微分形式 $\omega \in \Omega^m(M)$ の積分を次で定義する.

$$\int_M \omega := \sum_i \int_{U_i} \rho_i \omega \tag{1.3.1}$$

ただし, 局所座標 $\varphi_i = (x^1, \dots, x^m)$ を用いて,

$$\int_{U_i} \rho_i \omega = \int_{\varphi(U_i)} \rho(\varphi_i^{-1}(x))\omega_{1\dots m}\,\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^m \tag{1.3.2}$$

である.

1.3.2 Stokes の定理

次に外微分と積分を繋ぐ Stokes の定理について述べる.

定義 1.9 (Stokes の定理)

向き付け可能な m 次元多様体 M に対して, その部分多様体を N とする．このとき, $m-1$ 次微分形式 $\omega \in \Omega^{m-1}(M)$ は

$$\int_N \mathrm{d}\omega = \int_{\partial N} \omega \tag{1.3.3}$$

をみたす．特に, $\partial N = \emptyset$ であるとき,

$$\int_N \mathrm{d}\omega = 0 \tag{1.3.4}$$

である．

証明 2

次のような正方形領域 U_α に対して, φ を局所座標系として N を $\{\varphi_\alpha^{-1}(D_\alpha)\}$ によって被覆する．

$$D_\alpha = \{(x^1,\dots,x^m) \in \mathbb{R}^m \mid a_\alpha^i < x^i < b_\alpha^i, a_\alpha^i, b_\alpha^i \in \mathbb{R}\}$$

ρ_α を D_α に付随する 1 の分割とすると,

$$\int_N \omega = \sum_\alpha \int_{\varphi_\alpha^{-1}(D_\alpha)} \mathrm{d}(\rho_\alpha \omega)$$

を得る．ここで, $\omega = f_i(x^1,\dots,x^m)\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^m$（記号 $\widehat{\mathrm{d}x^i}$ は $\mathrm{d}x^i$ を除くことを意味する）と表すと, $\mathrm{d}\omega = (-1)^{i-1}\partial_i f_i \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^m$ となる．$\operatorname{supp}\omega \subset D_\alpha$ としても一般性を失われないから,

(i) $\varphi_\alpha^{-1}(D_\alpha) \cap \partial M = \emptyset$ であるとき,

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi_\alpha^{-1}(D_\alpha)} \mathrm{d}\rho_\alpha\omega &= (-1)^{i-1} \int_{a_\alpha^1}^{b_\alpha^1} \cdots \int_{a_\alpha^m}^{b_\alpha^m} \frac{\partial \rho_\alpha f_i}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^m \\
&= (-1)^{i-1} \int_{a_\alpha^1}^{b_\alpha^1} \cdots \widehat{\int_{a_\alpha^i}^{b_\alpha^i}} \cdots \int_{a_\alpha^m}^{b_\alpha^m} [\rho_\alpha f_i]_{x^i=a_\alpha^i}^{x^i=b_\alpha^i}\,\mathrm{d}x^1 \cdots \widehat{\mathrm{d}x^i} \cdots \mathrm{d}x^m \\
&= 0
\end{aligned}$$

(ii) $\varphi_\alpha^{-1}(D_\alpha) \cap \partial M \neq \emptyset$ であるとき, $H^m = \{(x^1,\dots,x^m) \mid x^m \geq 0\}$ を用いて, ∂N の開被覆は $\{\varphi_\alpha^{-1}(D_\alpha \cap H^m)\}$ とできる．$i \neq m$ である項は (i) と同様に

0 となるから,

$$
\begin{aligned}
\int_{\varphi_\alpha^{-1}(D_\alpha)} \mathrm{d}\rho_\alpha\omega &= (-1)^{m-1}\int_{a_\alpha^1}^{b_\alpha^1}\cdots\int_{a_\alpha^m}^{b_\alpha^m}\frac{\partial\rho_\alpha f_i}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^m \\
&= (-1)^{m-1}\int_{a_\alpha^1}^{b_\alpha^1}\cdots\int_{a_\alpha^{m-1}}^{b_\alpha^{m-1}}\left[\rho_\alpha f_i\right]_{x^i=0}^{x^i=b_\alpha^i}\,\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^{m-1} \\
&= (-1)^{m}\int_{a_\alpha^1}^{b_\alpha^1}\cdots\int_{a_\alpha^{m-1}}^{b_\alpha^{m-1}}\rho_\alpha f_i(x^1,\ldots,x^{m-1},0)\,\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^{m-1} \\
&= \int_{\varphi_\alpha^{-1}(D_\alpha\cap H^m)}\mathrm{d}(\rho_\alpha f_i)\,|_{x^m=0}
\end{aligned}
$$

となり, 与式が示される.

□

1.4 押し出しと引き戻し

1.4.1 押し出し

2 つの多様体 M,N 間の滑らかな写像 $f:M\mapsto N$ が存在するとき, それに対応して接ベクトル間の写像が自然に誘導される.

$$
\begin{array}{cccc}
f_*: & T_p(M) & \longmapsto & T_{f(p)}(N) \\
 & \Uparrow & & \Uparrow \\
 & X_p & \longmapsto & f_*X_p
\end{array}
\tag{1.4.1}
$$

N 上の関数 $g(q)$ に対して, $f(p)$ との合成写像 $g\circ f=g(f(p))$ は M 上の関数となる. そこで, X_p を $g\circ f$ によって f_*X_p を次のように定義する.

$$
(f_*X_p)[g]=X_p[g\circ f] \tag{1.4.2}
$$

この f_* を f の押し出しという.

定義 1.10 (押し出し)
M, N を多様体，$X_p \in T_p(M)$ を点 $p \in M$ における接ベクトルとする．滑らかな写像 $f : M \mapsto N$ と N 上の関数 $g : N \mapsto \mathbb{R}^m$ に対して，f の**押し出し** $f_* : T_p(M) \mapsto T_p(N)$ を次のように定義する．

$$(f_* X_p)[g] \coloneqq X_p[g \circ f] \tag{1.4.3}$$

M, N の局所座標系 φ, ϕ による p の座標を $\varphi(p) = (x^1, \ldots, x^m)$，$f(p)$ の座標を $\phi(f(p)) = (f^1(x^1, \ldots, x^m), \ldots, f^m(x^1, \ldots, x^m)) = (y^1, \ldots, y^m)$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} X_p[g \circ f(p)] &= X_p^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} g \circ f \bigg|_p \\ &= X_p^\mu \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial g}{\partial y^\nu} \bigg|_p \\ &= Y_p^\nu \frac{\partial g}{\partial y^\nu} \bigg|_{f(p)} \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

となるから，f_* の具体的な形が求まる．

$$f_* X_p = X_p^\mu \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu} \bigg|_{f(p)} \tag{1.4.5}$$

1.4.2 引き戻し

接ベクトル間の写像 f_* があるように，余接ベクトル間の写像 f^* を考えることもできる．余接ベクトルは元々接ベクトルの双対写像であるから，余接ベクトル $\omega \in T^*_{f(p)}(N)$ を $f_* X_p \in T_{f(p)}(N)$ に作用させると，

$$\omega(f_* X_p) = \omega_\mu \, \mathrm{d}y^\mu \, X^\nu \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial y^\rho} = \omega_\mu X^\nu \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\nu} \delta^\mu{}_\rho = \omega_\mu X^\nu \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\nu}$$

を得る．ここで，押し出し f_* によって X_p を M 上の接ベクトルから N 上の接ベクトルに移してから，N 上の余接ベクトル ω を作用させた．そこで，$f^*\omega$ を

$$f^*\omega \coloneqq \omega_\mu \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\nu} \, \mathrm{d}x^\nu \tag{1.4.6}$$

とすると，X_p の代わりに ω を M 上の余接ベクトルに写してから X_p に作用して，同じ値を得ることも可能である．

$$f^*\omega X_p = \omega_\mu \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\nu} \, \mathrm{d}x^\nu = \omega_\mu \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\nu} \, \mathrm{d}x^\nu \, X^\rho \frac{\partial}{\partial x^\rho} = \omega_\mu \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\nu} X^\rho \delta^\nu{}_\rho = \omega_\mu X^\nu \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\nu}$$

このようにして f の引き戻しを定義する.

定義 1.11

2 つの多様体 M, N 間の滑らかな写像 $f : M \mapsto N$ を考える. 点 $p \in M$ における接ベクトル X_p と $f(p)$ における余接ベクトル ω に対して, f **引き戻し**を押し出し f_* を用いて,

$$(f^*\omega)X_p \coloneqq \omega(f_* X_p) \tag{1.4.7}$$

と定義する.