

Experimental Physik II Kapitel 16

author

email

May 21, 2016

Contents

16 Statische magnetische Felder	2
16.1 Kräfte auf bewegte Ladungen	4
16.1.1 Lorentzkraft \vec{F}_L	4
16.1.2 Bewegungsgleichung:	5
16.1.3 Zyklotron:	6
16.1.4 Kräfte auf stromdurchflossene Leiter	10
16.1.5 Stromdurchflossene Leiterschleife	13
16.2 Magnetfelder von stromdurchgeflossenen Leitern	15
16.2.1 Bestimmung der Abstandsabhängigkeit	15
16.2.2 Definition Ampere	16
16.2.3 Ampere'sches Gesetz	17
16.2.4 Das Ampere'sches Gesetz in differentieller Form	17
16.2.5 Das Gesetz von Biot-Savart	18

16 Statische magnetische Felder

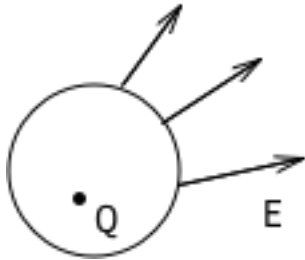
Experimente:

- gleichnamige Pole stoßen sich ab
- ungleichnamige Pole ziehen sich an
- Kraftwirkung $\propto \frac{1}{r^2}$ (1750; Coulomb)
- ähnliche Abstandsabhängigkeit für elektrische und für magnetische Kräfte
- zunächst kein Zusammenhang zwischen beiden Kräften erkennbar
- Experiment: Magnetische Pole treten nur paarweise auf.
(\Rightarrow keine "magnetische Ladung")

Feldlinien sichtbarmachen durch Eisenfeilspitzen:

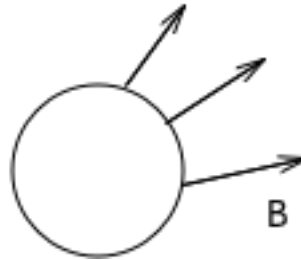
Magnetische Feldlinien sind stets geschlossen; es gibt keine isolierbaren Quellen oder Senken des magnetischen Feldes.

Erinnerung: Satz von Gauß:



\vec{E} : elektrische Feldstärke:

Gesamtfluss: $\phi_{el} = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$



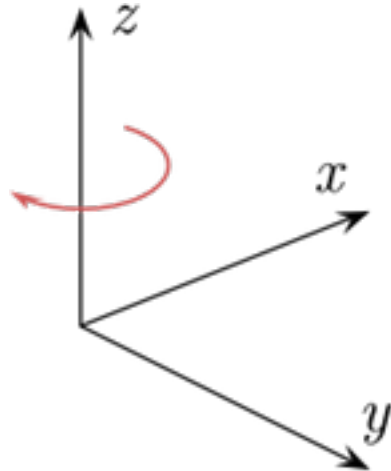
Magnetische Felder:

Gesamtfluss:
$$\phi_{mag} = \oint_A \underbrace{\vec{B} \cdot d\vec{A}}_{\text{magnetischer Fluss}} = 0 : \text{magnetische Flussdichte}$$

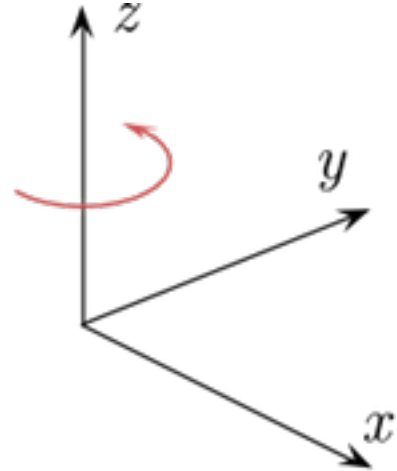
16.1 Kräfte auf bewegte Ladungen

16.1.1 Lorentzkraft \vec{F}_L

$$\vec{F}_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$
$$(\vec{F}_L \perp \vec{v}, \vec{F}_L \perp \vec{B})$$



Linkshändiges System



Rechtshändiges System

UVW-Regel: Ursache \rightarrow Vermittler \rightarrow Wirkung
Vorsicht!: Elektrische Ladung ist negativ!

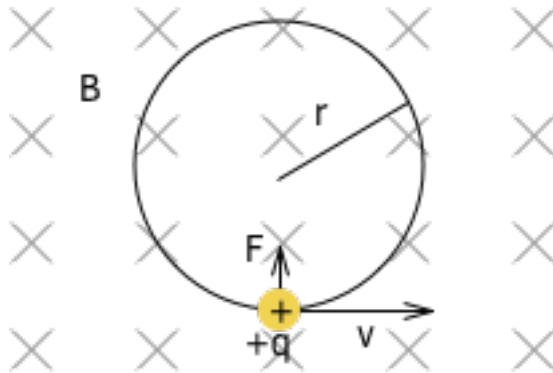
$$[|\vec{B}|] = \frac{N}{As \cdot \frac{m}{s}} = \frac{Vs}{m^2} = 1T(Tesla)$$

Kreisbahn: $\vec{F}_L \perp \vec{v}$

$\Rightarrow \vec{F}_L$ beeinflusst die Richtung von \vec{v} , aber nicht den Betrag!

$\Rightarrow \vec{F}_L$ leistet keine Arbeit

Konventionen:



$\otimes \vec{B}$ zeigt in die Papierebene hinein

$\odot \vec{B}$ zeigt aus der Papierebene heraus

16.1.2 Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}} = \vec{F}_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{\vec{p}}{m} = \frac{q}{m} \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

$$d\vec{v} \perp \vec{v}; d\vec{v} \perp \vec{B}$$

\implies Kreisbahn: \vec{F}_L ist Zentripetalkraft

$$\implies q \cdot v \cdot B = m \cdot \frac{v^2}{r}; v = \omega \cdot r$$

$$\omega = \frac{q}{m} \cdot B$$

$$v = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{q}{m} \cdot B$$

ω Zyklotronfrequenz (1930, Lawrence)

\implies unabhängig von Impuls und Energie; nur von $\frac{q}{m}$ und \vec{B} bestimmt!

Radius:

$$r = \frac{m \cdot v}{q \cdot B} = \frac{p}{q \cdot B} = \frac{\sqrt{2mqV}}{q \cdot B}$$

$$E_{kin} = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}m \cdot v^2 = q \cdot V$$

Experiment:

$$r_1 : V_1 = 200V \implies 2S\,KT$$

$$r; V_1 = 300V \implies 2,5S\,KT$$

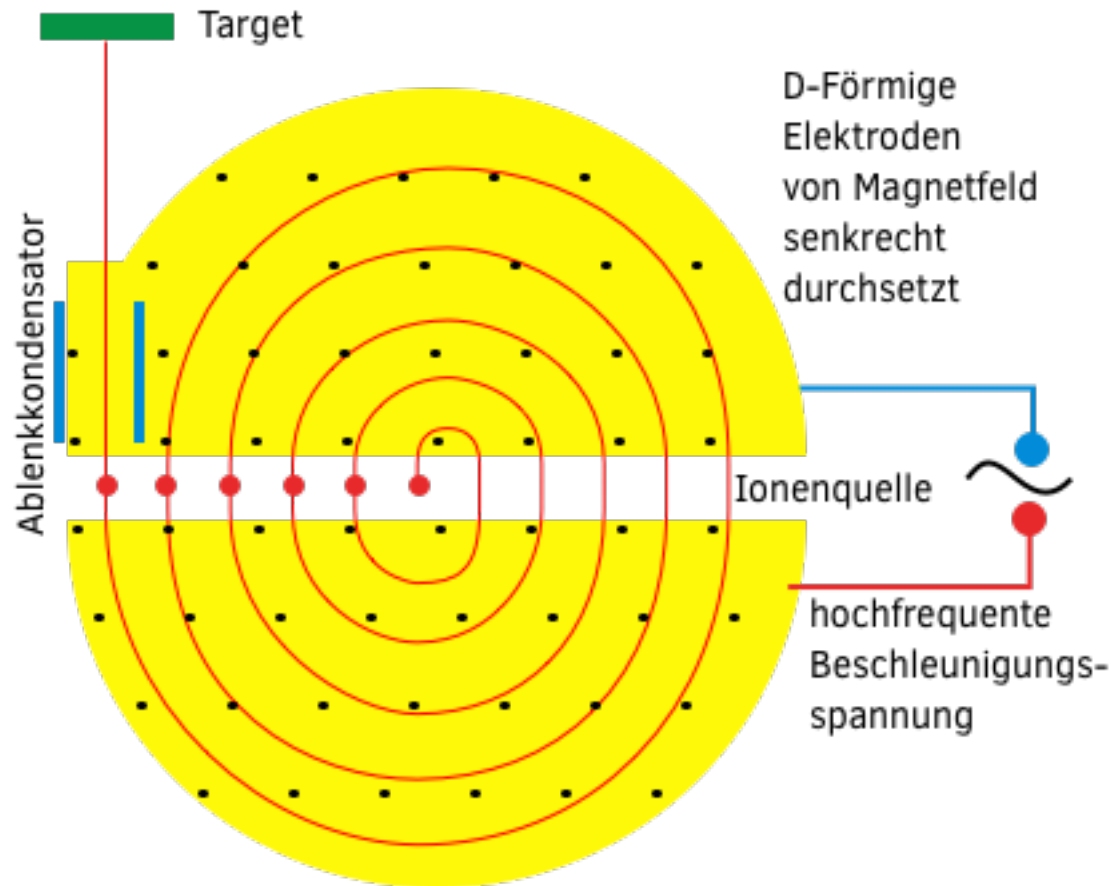
$$\frac{r_1}{r_2} \stackrel{!}{=} \sqrt{\frac{V_1}{V_2}}$$

$$\frac{4}{5} \stackrel{!}{=} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{16}{25} \stackrel{!}{=} \frac{2}{3} \checkmark \text{im Rahmen der Messungenauigkeit!}$$

16.1.3 Zyklonen:

Ziel: H- oder D-Kerne auf hohe Geschwindigkeit zubeschleunigen.



Beispiele:

(i) Protonenbeschleunigung: $r = 0,5m$; $B = 1,5T$

Zyklonenfrequenz: $\nu \frac{e \cdot B}{2\pi m_0} = 23MHz$

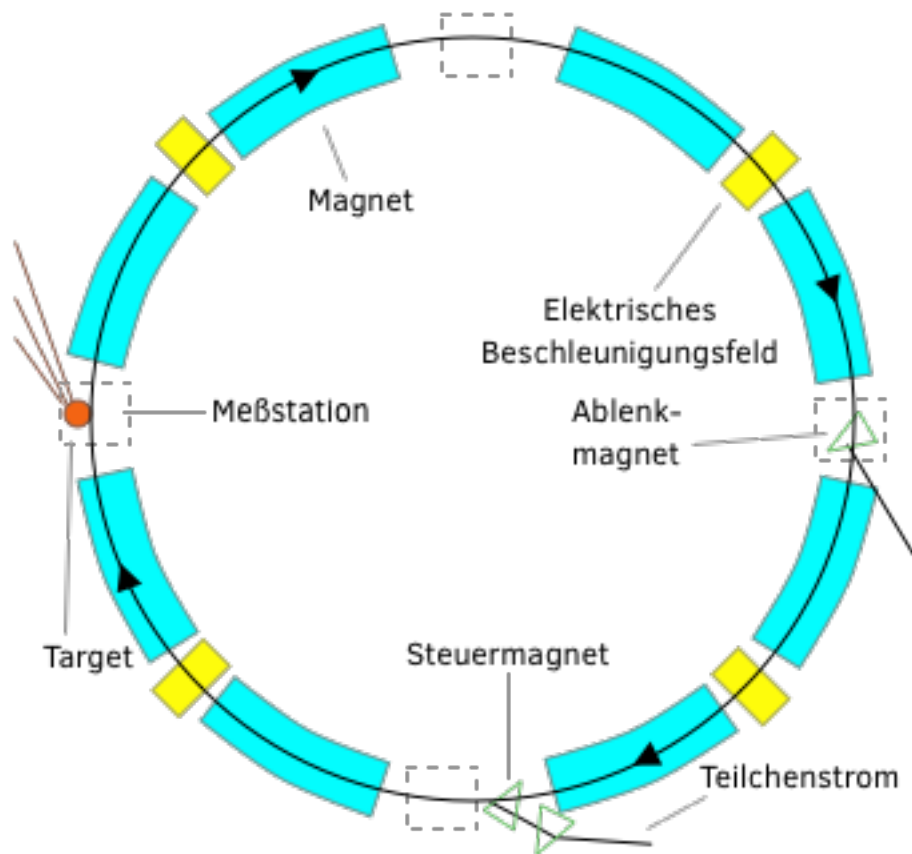
$$E_{kin} = \frac{1}{2} \frac{q^2 B^2}{m_0} \cdot v^2 = 4,3 \cdot 10^{-1} J$$

Angabe in Elektronenvolt

$$[eV] : 1eV = 1,602 \cdot 10^{-19} As \cdot 1V \quad (1)$$

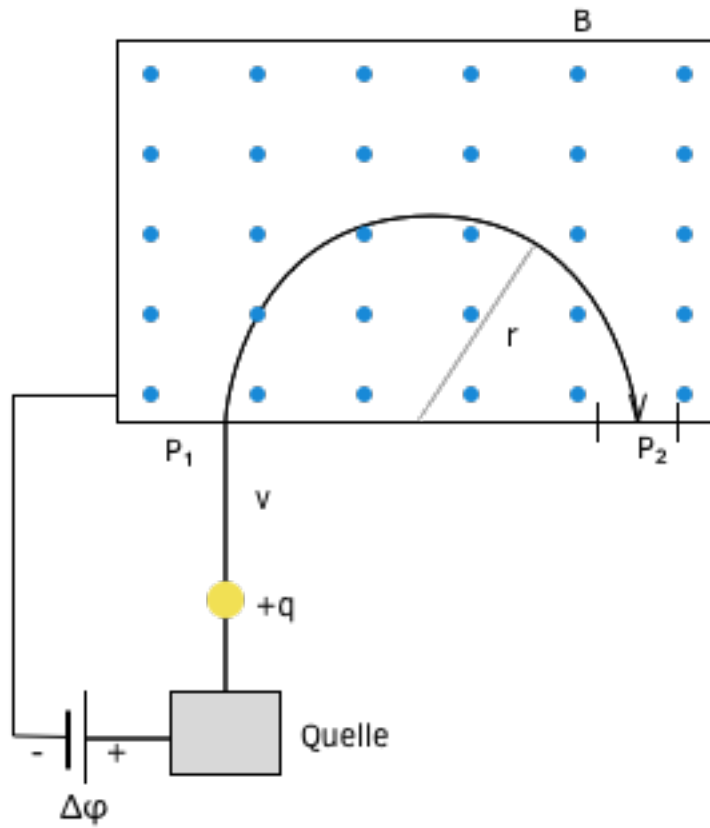
$$= 1,602 \cdot 10^{-19} J \quad (2)$$

$$\Rightarrow \underline{26,9 MeV}$$



(ii) Massenspektrometer: Trennung von Isotopenmassen und Messung natürlicher Isotopenverhältnis:

Beschleunigung (auf höhere E_{kin}) ist nur im elektrischen Feld möglich!
 (\Rightarrow Design von Beschleunigung!)



(Ashton 1919; $\frac{\Delta m}{m} = 10^{-4}$)

Beispiel: Mg-Isotop:

^{24}Mg : 78,7 %

^{25}Mg : 10,1 %

^{26}Mg : 11,2 %

Massenverhältnis: 24:25:26

$\frac{q}{m}$ von Ionen bei bekannter Ladung: U

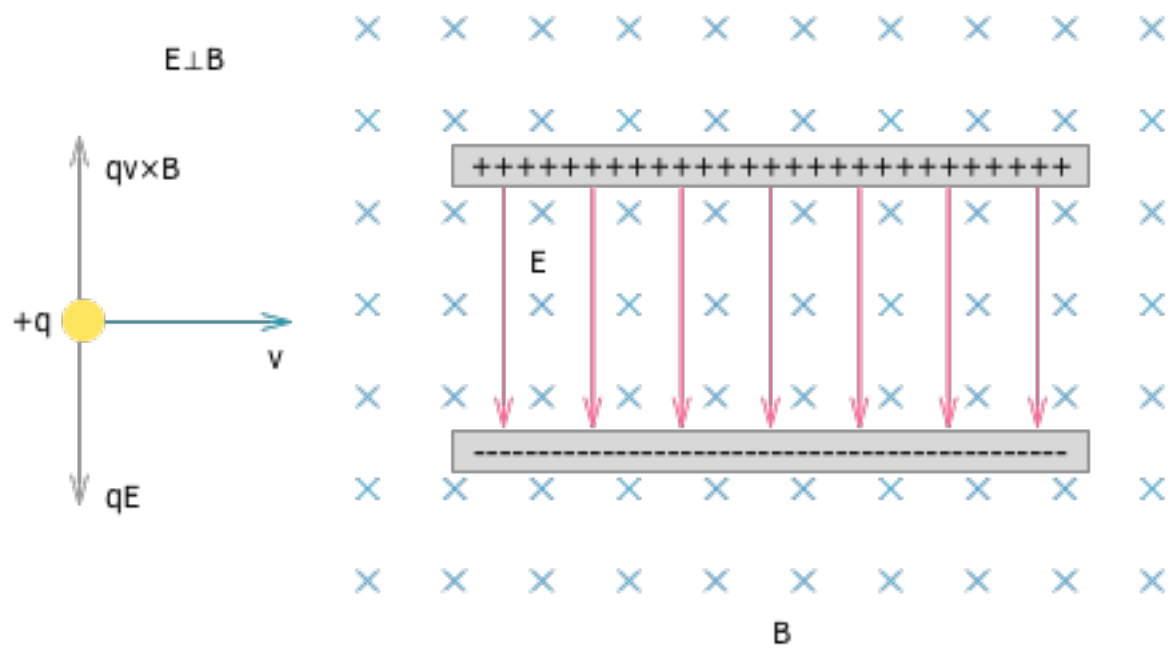
- Beschleunigung: $q \cdot \Delta\varphi \implies E_{kin} = q \cdot U = \frac{1}{2}mv^2$

- Kreisbahn: $r = \frac{m \cdot v}{q \cdot B}$

$$\Rightarrow q \cdot U = \frac{1}{2} v^2 \cdot B^2 \cdot q^2 \cdot \frac{1}{m}$$

$$\boxed{\frac{m}{q} = \frac{B^2 \cdot v^2}{2U}}$$

(iii) Geschwindigkeits...: Gekreuzte elektrische und magnetische Felder
(Wien-Filter)



Kompensation der Felder ("Kräftegleichgewicht") für:

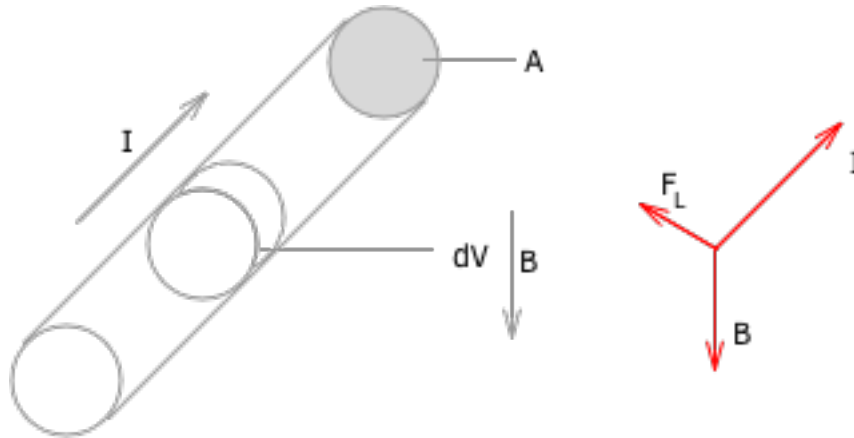
$$q \cdot E = q \cdot v \cdot B$$

$$v = \frac{E}{B}$$

Ionen mit $v = \frac{E}{B}$ passieren die Anordnung ohne Ablenkung! (→ Lochblende)

Anwendungsbeispiel: SIMS

16.1.4 Kräfte auf stromdurchflossene Leiter



Kraft auf eine Ladung:

$$\vec{F}_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Kraft auf N Ladungen in dV :

$$d\vec{F} = \underbrace{dV \cdot n}_N \cdot \vec{v} \times \vec{B} \quad (3)$$

$$dV \cdot \vec{j} \times \vec{B} \quad (4)$$

$$\vec{F}_L = \int_V (\vec{j} \times \vec{B}) dV \quad (5)$$

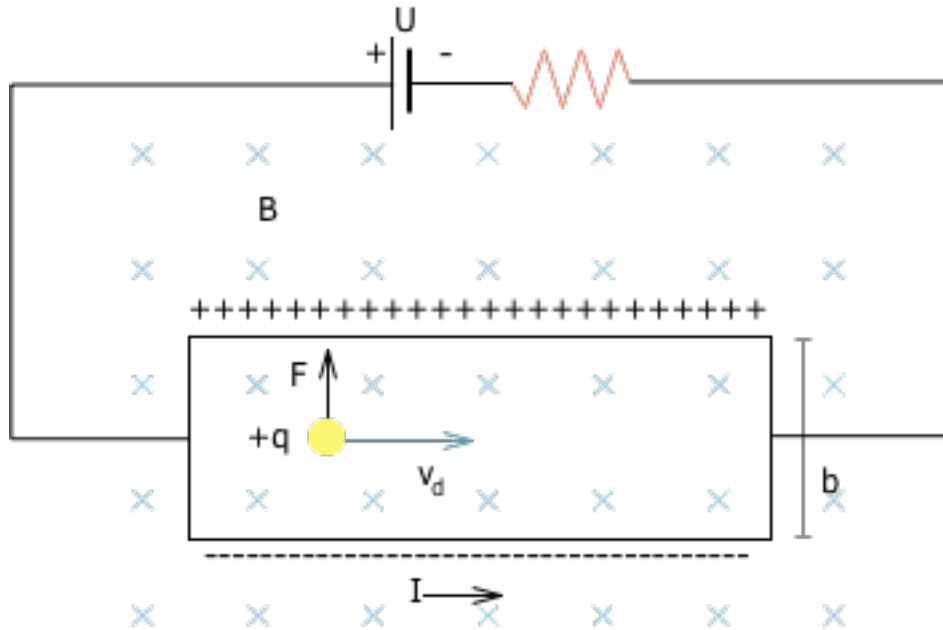
Geradliniger Leiter: Länge L

$$\vec{F}_L = \int_0^L (\vec{j} \times \vec{B}) \underbrace{A \cdot dl}_{=dV} = \int_0^L (\vec{I} \times \vec{B}) dl = \underline{(L \cdot (\vec{I} \times \vec{B}))}$$

Leitersch...

Problem: Ladungsträgertyp nicht identifizierbar!

\Rightarrow Edwin Hall (1879): Hall-Effekt - Typ und Konzentration der Ladungsträger messbar!



Annahme: positive Ladungsträger; Bewegung mit $|\vec{v}| = \vec{v}_D$

Gleichgewicht bei: $q \cdot \vec{v}_0 \times \vec{B} + q \cdot \vec{E}_H = 0$

$$\vec{E}_H = -\vec{v}_0 \times \vec{B}$$

Zugehörige Potentialdifferenz: U_H (Hall-Spannung): \Rightarrow Polarität erlaubt Bestimmung des Ladungsträger-Typs

\Rightarrow Dadurch konnte gezeigt werden, dass Ladungstransport in Metallen durch Elektronen erfolgt!

$$|\vec{E}_H| = \frac{U_H}{b} = D \cdot B = \frac{n \cdot q \cdot v_D}{n \cdot q} \cdot B = \frac{j \cdot B}{n \cdot B}$$

Streifen der Dicke d : $j = \frac{I}{b \cdot d}$

$$U_H = \frac{I \cdot B}{n \cdot q \cdot d} = K_H \cdot \frac{I \cdot B}{d}$$

K_H : Hallkonstante (Materialspezifisch):

$$K_H = \frac{1}{n \cdot q} = \frac{\mu}{\nu}$$

\Rightarrow Bei Kenntnis von ν ist μ zu bestimmen!

Cu-Streifen:

$$I = 4A; B = 0,28T; d = 2,0\mu m; U_H = 50\mu V$$

$$n_e = \frac{I \cdot B}{U_H \cdot q \cdot d} = \frac{4 \cdot 0,28A \frac{Vs}{m^2}}{50 \cdot 10^{-4}V \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}As \cdot 2 \cdot 10^{-6}m}$$
$$= \frac{1}{1,6} 10^{29} m^{-3}$$
$$= \dots$$

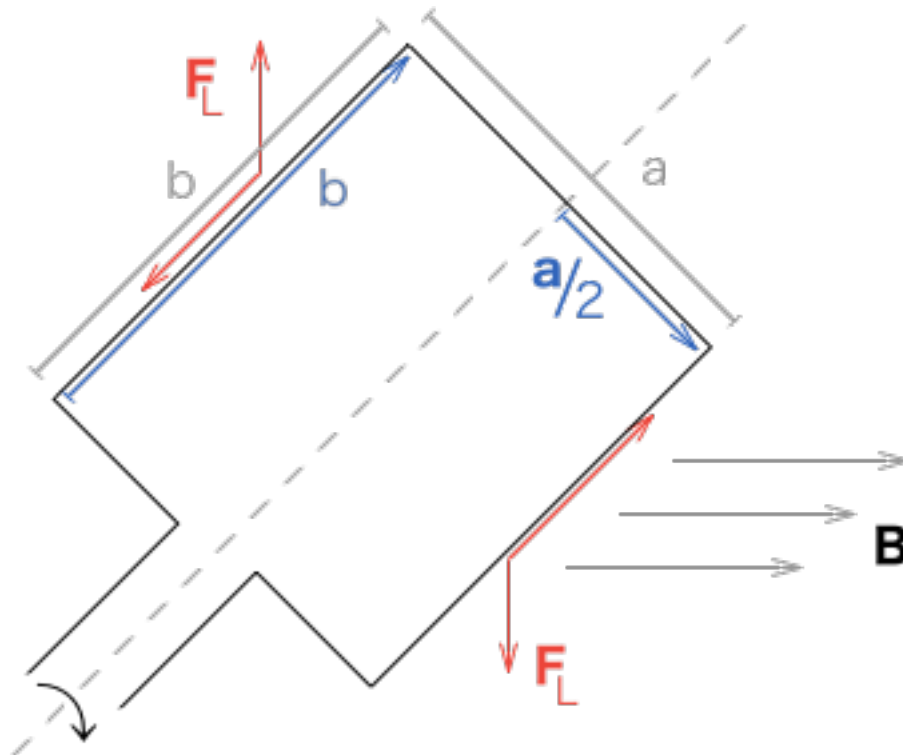
$$\text{Dichte der Cu-Atome: } n_{Cu} = 8,4 \cdot 10^{22} cm^{-3}$$

... im Mittel $1 \frac{e^-}{\text{Atom}}$!

Weitere Anwendungen: Hall-Sonde zur MEssung von B!

\Rightarrow Quanten-Hall-Effekt!

16.1.5 Stromdurchflossene Leiterschleife



Kräfte auf Teilstücke:

- Entlang der Seite "a": $\vec{I} \parallel \vec{B} \rightarrow \vec{I} \times \vec{B} = 0$

- Entlang der Seite "b": \Rightarrow Kräftepaar \Rightarrow Drehmoment!

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{\vec{d}}{2} \times \vec{F} + \left(\frac{-\vec{d}}{2}\right) \times (-\vec{F}) = \vec{d} \times \vec{F}$$

$$|\vec{F}| = |\vec{b}| \cdot (\vec{I} \times \vec{B}); \quad |\vec{M}|_{\max} = a \cdot b \cdot I \cdot B$$

$$\text{Allgemein: } \vec{M} = I \cdot (\vec{A} \times \vec{B}); \quad \vec{A} = (\vec{d} \times \vec{b})$$

Definition: Magnetisches Moment einer Leiterschleife:

$$\boxed{\vec{\mu}_{\text{mag}} = I \cdot \vec{A}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{M} = \vec{\mu}_{\text{mag}} \times \vec{B}}$$

\Rightarrow Messung von I im Dreh...mometer!

16.2 Magnetfelder von stromdurchflossenen Leitern

Oersted (1820): Magnetische Wirkung eines geschlossenen Stromkreises

⇒ wenn $I \neq 0$: Drehmoment auf Kompassnadel, $\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$

⇒ \vec{B} in Ebene \perp Leiter

⇒ Richtung (Vorzeichen, VZ) ist abhängig von Stromrichtung (Rechtsschraubregel) BILD

16.2.1 Bestimmung der Abstandsabhängigkeit

$$|\vec{B}| \sim \frac{I}{r}$$

⇒ Beachte: "Quelle" des Magnetfeldes ist 1D ⇒ Abstandsabhängigkeit quantitativ:

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 \text{ magnetische Konstante}$$

BILD

⇒ Bewegte Ladungen erzeugen ein Magnetfeld in Richtung: $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \times \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

Bisher:

- \vec{B} -Feld übt Kraft auf bewegte Ladung aus
- Bewegte Ladung (Strom) erzeugt Magnetfeld

⇒ Wechselwirkung zwischen Strömen muss existieren!

BILD

I_1 erzeugt \vec{B} -Feld am Ort des Leiters L_2

$$|\vec{B}_1| = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1}{r}$$

⇒ Kraft auf L_2

$$\vec{F}_{21} = L \cdot \vec{I}_2 \times \vec{B}_1$$

$$\begin{aligned} |\vec{F}_{21}| &= \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{r} \cdot L \\ &= 2 \times 10^{-7} \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{r} \cdot L \end{aligned}$$

\vec{F}_{21} : anziehend bei parallelen Strömen!

16.2.2 Definition Ampere

Elektrische Stromstärke: Ampere [A] Das Ampere ist die Stärke eines konstanten elektrischen Stromes, der, durch zwei parallele, gradlinige, unendlich lange und im Vakuum im Abstand von einem Meter voneinander angeordnete Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigem Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern je einem Meter Leiterlänge die Kraft 2×10^{-7} N hervorrufen würde.

Ströme parallel:

BILD $I_1 \uparrow \downarrow I_2$

BILD

Elektrostatik: Gaußscher Satz: Zusammenhang zwischen Quellen-Verteilung und Feldstärke!

\Rightarrow Normalkomponente des \vec{E} -Feldes wichtig

Hier: Ströme als "Quelle" des magnetischen Feldes

"Umhüllung" der Ströme ohne die Quelle zu "schneiden" nur mit geschlossenem Umlauf möglich (Quellen nicht punktförmig!)

Beachte also: $\oint \vec{B} d\vec{s}$ BILD Integrieren über dl (0... 2π) statt über die Länge der Kurve

$$\begin{aligned}\vec{B} \cdot d\vec{s} &= B \cdot r \cdot dl \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r} \cdot dl = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot I \cdot dl\end{aligned}$$

$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \oint dl = \mu_0 \cdot I}$$

Da \vec{B} nur Tangentialkomponente besitzt ist die Orientierung des Integrationswegs bezüglich des Leiters (Verkipfung) unbedeutend; alle Komponenten parallel zum Leiter verschwinden!

Richtung des Integrationswegs muss Rechtsschraube mit Strom bilden!

Erweiterung auf mehrere Leiter im Raum bei vorzeichenrichtiger Summe der

Einzelströme: BILD

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{s} = \mu_0 \cdot I_{ges}$$

$$= \mu_0 \cdot \sum_{i=1}^N I_i$$

16.2.3 Ampere'sches Gesetz

Für kontinuierliche Medien: $I = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$

$$\Rightarrow \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

A: von C umrundene Fläche

Beispiel 1: Stromdurchflossener Leiter: BILD

- $|\vec{B}|$ hängt nur von Abstand r ab
- tangentielle Orientierung

$$\mu_0 \cdot I = \oint \vec{B} d\vec{s} = B \cdot 2\pi r$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{B(r) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r}}}$$

Beispiel 2: Magnetfeld einer langen Spule: BILD

16.2.4 Das Ampere'sches Gesetz in differentieller Form

Integralsatz von Stokes: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{v} = \int_A (\nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{A}) = \int_A \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{A}$

$$\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{v} = \int_A (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{A} = \mu_0 \cdot \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

$$\boxed{\Rightarrow \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j}}$$

Ampere'sches Gesetz in differentieller Form

16.2.5 Das Gesetz von Biot-Savart

Suche Formulierung zur Berechnung des Beitrags $d\vec{B}$ eines Leiterstückers von beliebig geformtem Leiter am Punkt P : BILD

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|^3}$$

($\frac{1}{r^2}$ - Abstandsabhängigkeit)

genaue Herleitung komplex (\rightarrow Theoretische Physik)

$$\text{Gesamter Leiter: } B(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \int_{\text{Leiter}} \frac{d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|^3} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \int_{\text{Leiter}} \frac{d\vec{s} \times \hat{e}_{\vec{r}-\vec{s}}}{|\vec{r} - \vec{s}|^2}$$

Zur Berechnung des Magnetfeldes beliebiger Stromverteilungen (Viele Leiter: Addition der einzelnen Beträge)

Beispiel: Magnetfeld eines elektrischen Ringstroms (entlang Symmetrieachse)
BILD

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{s} \times \hat{e}_r}{r^2}; & d\vec{s} \perp \hat{e}_r \\ &= \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{ds}{r^2} \end{aligned}$$

Beachte: Beiträge in Ebene $\perp z$ Kompensieren sich entlang der Symmetrieachse!

$$\begin{aligned} dB_z &= dB \cdot \sin\beta = dB \cdot \frac{R}{r} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{R}{r} \cdot \frac{1}{r^2} ds \\ B_z &= \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \oint \frac{R}{r^3} ds = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{R}{r^3} \oint ds &= \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{R}{r^3} \cdot 2\pi R \\ & &= \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot R^2 \pi \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \\ & &= \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \underbrace{IR^2 \pi}_{\mu_{mg}} \cdot \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \\ & \Rightarrow B_z = \underline{\underline{\frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \mu_{mg} \cdot r^{-3}}} \end{aligned}$$

Analogie: Elektrischer Dipol: $E_r(\vec{r}) \sim \frac{\rho}{r^3}$

Helmholtz-Spulenpaar: Mit einer Anordnung aus zwei kreisförmigen Spilen

im Abstand von dem halben Durchmesser kann ein sehr homogenes Magnetfeld erzeugt werden. (Abweichung $< 1\%$ für $z < 0.3 \cdot R$)

$$B_z(0, 0, z) = \frac{\mu_0}{2} I \left(\frac{R^2}{(R^2 + (z + \frac{R}{2})^2)^{3/2}} + \frac{R^2}{(R^2 + (z - \frac{R}{2})^2)^{3/2}} \right)$$

Entwicklung in eine Potenzreihe liefert näherungsweise $B_z(0, 0, z) = \frac{\mu_0 I}{(5R^2/4)^{3/2}} \left(1 - \frac{144z^4}{125R^4} \right)$