

Kapitel 14 - Statische elektrische Felder

Johannes Bilk
me@talachem.de

May 9, 2016

Contents

14 Statische Elektrische Felder	3
14.1 Elektrische Ladungen	3
14.1.1 Reibungselektrizität	3
14.1.2 Ladung ist eine skalare Größe	4
14.1.3 Quarks	5
14.1.4 Entdeckung und Bestimmung der Elementarladung	6
14.2 Kräfte zwischen Ladungen und das Coulomb-Gesetz	6
14.3 Potenzielle Energie einer Ladungsverteilung	8
14.4 Erzeugung el. Felder durch Ladungen	9
14.4.1 Feld einer Punktladung:	9
14.4.2 Feld einer Verteilung von Punktladungen	10
14.4.3 Leiter im el. Feld und Influenz	12
14.5 Kontinuierliche Ladungsverteilung	13
14.6 Elektrischer Fluss und Satz von Gauß	15
14.6.1 Definition: Fluss ϕ eines Vektorfeldes \vec{E} durch eine Fläche A :	16
14.6.2 Gauß'scher Satz	16
14.6.3 Beispiele	17
14.7 Das elektrische Potenzial	23
14.7.1 Elektrisches Feld und Potenzial	25
14.7.2 Poisson- und Laplace Gleichung:	27
14.8 Elektrisches Feld in der Umgebung von Leitern	27
14.8.1 Anwendungen:	29
14.8.2 Elektrisches Feld zwischen geladenen Leitern	30
14.8.3 Berechnung der Kapazität:	31
14.8.4 Feldstärke im Inneren eines Plattenkondensator:	32

14.8.5	Realisierung von Kondensatoren:	33
14.8.6	Energie eines aufgeladenen Kondensators	33
14.8.7	Entladen eines Kondensators	34
14.8.8	Kraft zwischen Zwei Kondensatorplatten	34
14.8.9	Kraft zwischen Kondensatorplatten	35
14.9	Isolatoren (Dielektrikum) im elektrischen Feld	35

14 Statische Elektrische Felder

14.1 Elektrische Ladungen

→ Ab dem 17. Jahrhundert: Ursache für "elektrische Phänomene"; "neuartiger Stoff", elektrische Ladung



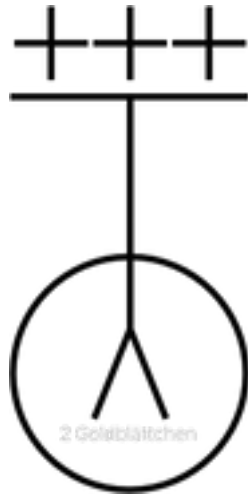
14.1.1 Reibungselektrizität

- Zwei Arten von "elektrischen Zuständen" sind erzeugbar:
 - Gleichartige Zustände \implies Abstoßung
 - Ungleichartige Zustände \implies Anziehung
- Charles Du Fay (1730): positiv/negativ elektrische Ladung
- Benjamin Franklin (1750): Über-/Unterschuss an "elektrischen Fluiden"
- Lichtenberg (1778): Zuordnung der Polarität

Hargummi stab: reiben mit Pelz, Wolle: - Glas, Plexiglas: reiben mit Seide: +
--

Reibezeug: entgegengesetzte Polarität \implies Ladungstrennung, nicht etwa Ladungserzeugung.

Grundsätzliches Messprinzip: Elektroskop:



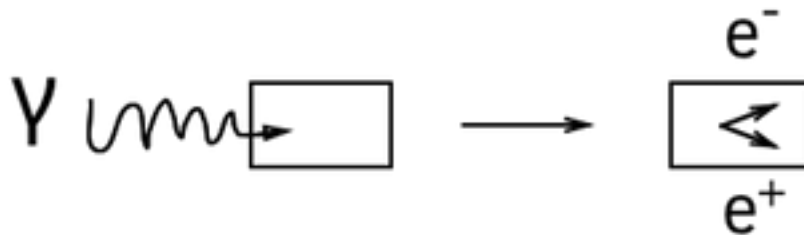
→ Elektrometer → quantitative Messung

- "Löffeln"; d.h. portionsweise Übertragung von Ladungen ist möglich
- Elektropendel: \implies periodisches Umladen eines "Kugelpendel"

14.1.2 Ladung ist eine skalare Größe

Einheit 1C = 1 Coulomb, SI

- Zu jedem geladenen Elementarteilchen gibt es ein Elementarteilchen mit entgegengesetzter Ladung (\rightarrow Ladungssymmetrie)
- Die Gesamtladung eines abgeschlossenen Systems bleibt erhalten (\rightarrow Ladungserhaltung)
- Beispiel: Produktion eines e^+e^- -Paares; $E_\gamma \geq 1,02 \text{ MeV}$



Nachweis: Blasenkammer im Magnetfeld:

Umkehrung: "Zerstrahlung" von Positronen; $E = m \cdot c^2$

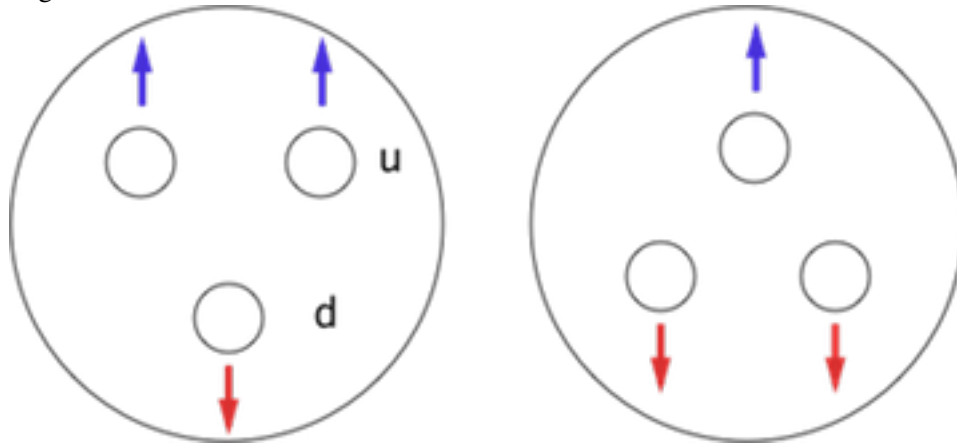
- Ladungsträger haben stets eine Masse
- Ladung kann nicht (im Gegensatz zur Masse) in Energie umgewandelt werden, bleibt auch bei Zerfallsprozessen erhalten.
- Quantisierung der Ladung: Alle in der Natur vorkommenden Ladungen sind ganzzahlige Vielfache der Elementarladung: $e_0 := 1,602 \cdot 10^{-19} \text{C}$; $1 \text{C} = 1 \text{AS}$

Beispiele von Ladungen

- Neutral: γ, ν, n
- einfach geladen: e^-, e^+, p, \bar{p}
- zweifach geladen: $\text{He}_2(2^+, Z : 2)$

14.1.3 Quarks

Seit 60er Jahre Nukleonen bestehen aus Quarks, diese haben "drittelzahlige Ladungen"



Up-Quarks: $u : +\frac{2}{3}e_0$
Down-Quarks: $d : -\frac{1}{3}e_0$
Proton: $2u + d : 1 \cdot e_0$
Neutron: $u + 2d : 0 \cdot e_0$

Quarks treten immer in 2er- oder 3er- Kombinationen auf.

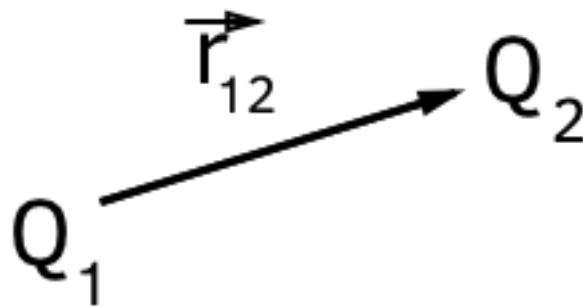
14.1.4 Entdeckung und Bestimmung der Elementarladung

Robert Andrews Millikan(1868-1953): Öltröpfchenversuch (→ Anfängerpraktikum)

14.2 Kräfte zwischen Ladungen und das Coulomb-Gesetz

Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806)

1785: Messung der Kraft zwischen zwei Ladungen als Funktion des Abstands mit Hilfe einer Torsionswaage



$$\vec{F}_{12} = f \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|} = f \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \cdot \hat{r}_{12}$$

F ist definiert durch die Definition der Ladungseinheit:

Internationales Messsystem (SI): $f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{(As)^2}{Nm^2}$$

ist Dielektrizitätskonstante des Vakuums oder elektrische Feldkonstante

$Q_1 \cdot Q_2 > 0$: Abstoßung

$Q_1 \cdot Q_2 < 0$: Anziehung

Coulomb-Kraft

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \cdot \hat{r}_{12}$$

1 Coulomb ist diejenige elektrische Ladung, die eine gleich große Ladung im Abstand von 1m mit der Kraft von $8,9874 \cdot 10^9 N$ abstößt

Analogie Gravitation: $\vec{F} = -\gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \hat{r}$

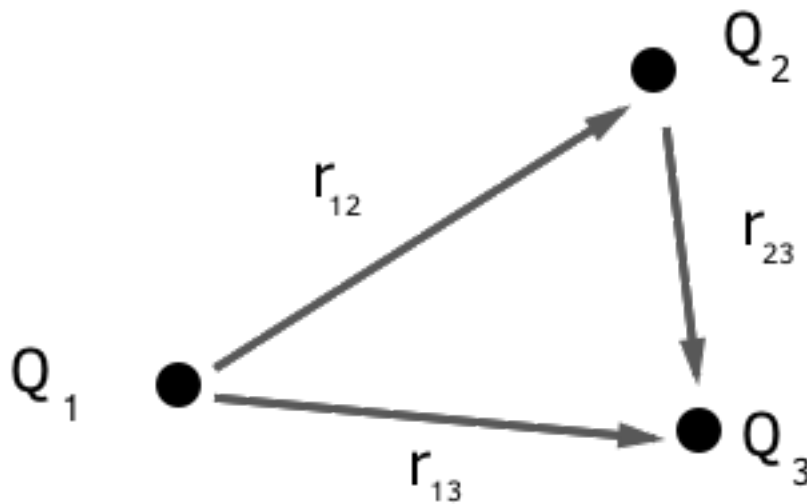
Vergleiche Gravitation und Coulombkraft zwischen Elektron und Proton:

$$|\vec{F}_C| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q_p| \cdot |q_e|}{r^2} = 2,3 \cdot 10^{-28} \frac{N}{r[m]^2}$$

$$|\vec{F}_G| = \gamma \cdot m_e \cdot m_p = 9,71 \cdot 10^{-68} \frac{N}{r[m]^2}$$

$$\implies \frac{|F_G|}{|F_C|} = 4,2 \cdot 10^{-40}$$

Wechselwirkung zwischen mehreren Ladungen



Die einzelnen Kräfte überlagern sich ungestört, (ungestörte Superposition)!

Kraft auf

$$Q_3 : \vec{F}_3 = \left[\frac{Q_1 \cdot Q_3}{r_{13}^2} \cdot \hat{r}_{13} + \frac{Q_2 \cdot Q_3}{r_{23}^2} \cdot \hat{r}_{23} \right]$$

14.3 Potenzielle Energie einer Ladungsverteilung

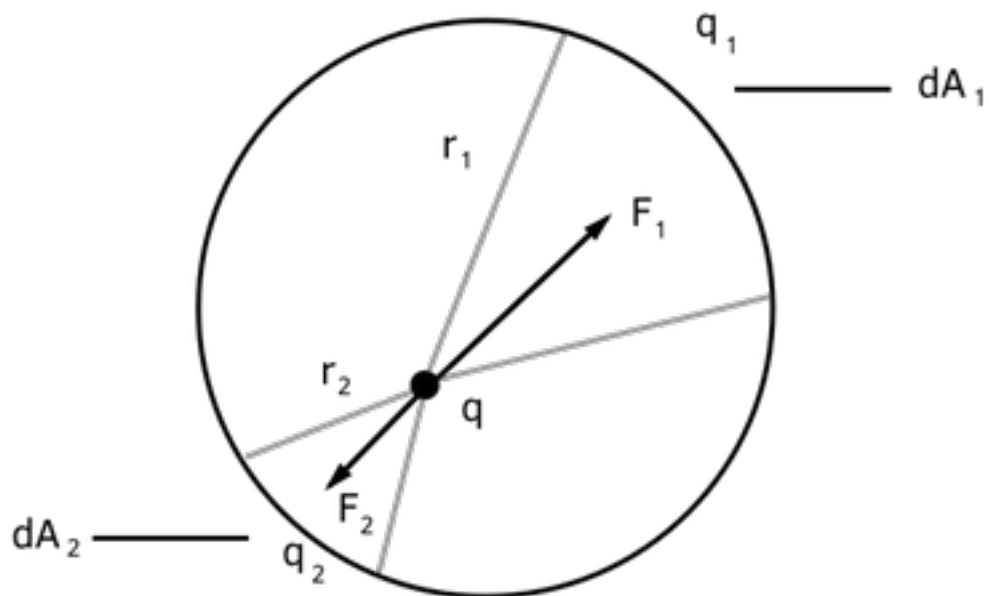
$$\begin{aligned}
 W_{12} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{\infty}^r \frac{Q_1 \cdot Q_2}{V^2} dV \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q_1 \cdot Q_2}{V} \right]_{\infty}^r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{V_{12}} \\
 W_{1,2,3} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1 \cdot Q_3}{r_{13}} + \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_2 \cdot Q_3}{r_{23}} \right)
 \end{aligned}$$

Anzahl an Summanden = Anzahl an Paaren

$$W = \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{Q_i \cdot Q_j}{r_{ij}} \right] \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

⇒ Aufsummieren auch unendlicher Ensembles möglich, wenn die Reihe konvergiert.

Betrachte Kraft auf Probeladung in homogen geladener Kugel



Für beliebige Räumlichelemente (und damit auch Flächenelemente) gilt:

$$q_1 \propto dA_1 \propto r_1^2$$

$$q_1 \propto dA_1 \propto r_1^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Geometrie} \implies \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

$$\text{Annahme: Kraft} \propto \frac{1}{r^n}$$

$$|\vec{F}_1| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot q_1}{r_1^n}$$

$$|\vec{F}_2| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot q_2}{r_2^n}$$

Geometrie einsetzen:

$$\frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{F}_2|} = \frac{q_1}{r_1^n} \cdot \frac{r_2^n}{q_2} \stackrel{!}{=} 1 \implies n = 2$$

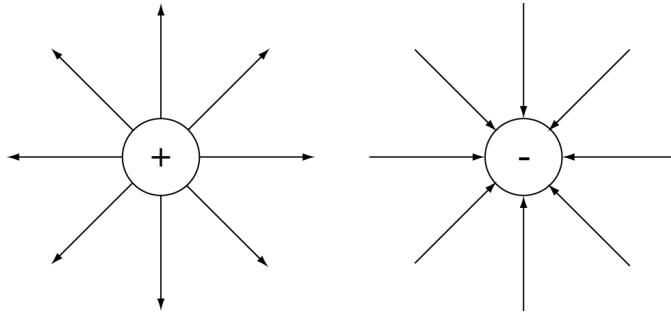
Gesamtkraft verschwindet nur wenn $|\vec{F}| \propto \frac{1}{r^2}$

14.4 Erzeugung el. Felder durch Ladungen

14.4.1 Feld einer Punktladung:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \cdot \hat{r}_{12} \\ &= q_1 \cdot \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{|\vec{r}_{12}|^2}}_{\text{Feld von } q_2} \cdot \hat{r}_{12} \\ &= q_1 \vec{E}(\vec{r}) \end{aligned}$$

- Felder einer Punktladung sind Zentralfelder mit Kugelsymmetrie
- Konvention: Feldlinien führen von positiver zu negativer Ladung



⇒ Punktladungsfelder sind inhomogen!

14.4.2 Feld einer Verteilung von Punktladungen

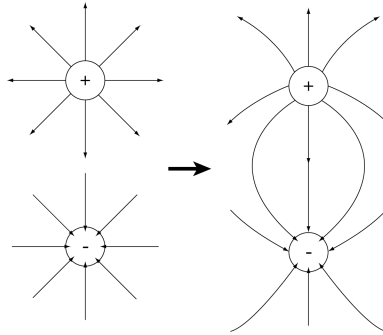
N Ladungen bei \vec{r}_i

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

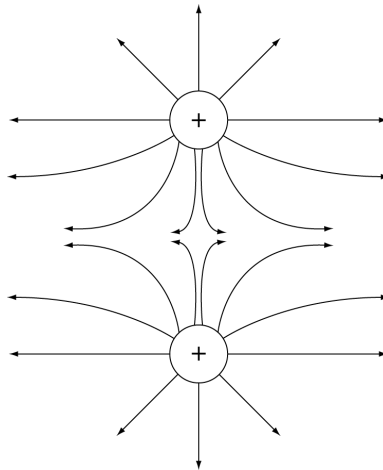
Ungestörte Superposition:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

2 Ladungen, q ; $-q$: Feld eines Dipols

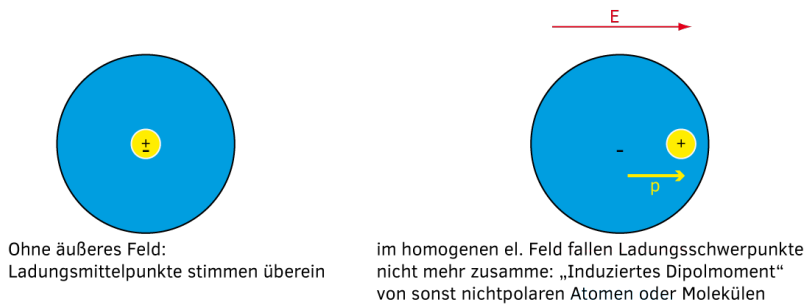


2 Ladungen: q ; q

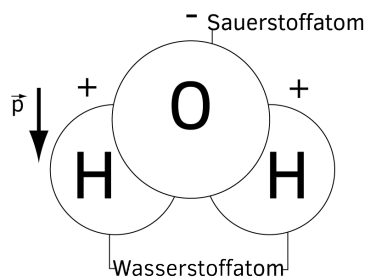


Beispiele für "natürliche Dipole":

1. Neutrales Atom im homogenen \vec{E} -Feld



2. Polare Moleküle mit permanentem Dipolmoment

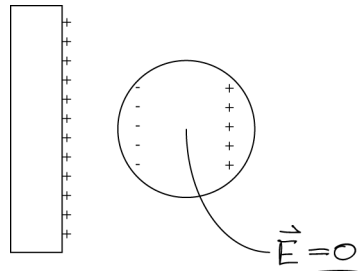


14.4.3 Leiter im el. Feld und Influenz

Leiter: Ladungen sind frei beweglich

Isolator: Ladungen sind ortsfest

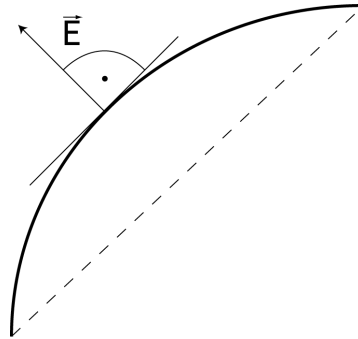
1. $\vec{E} = 0$ im Inneren des Leiters



falls $\vec{E} \neq 0$: $\vec{F} = q\vec{E}$ verschiebt Ladung bis $\vec{E} = 0$!

2. Es folgt, sich bei einem Leiter die (Netto-)Ladungen immer an der Oberfläche befinden \Rightarrow Flächenladungsdichte $\sigma = \frac{dQ}{dA}$

3. \vec{E} immer \perp auf Leiteroberfläche

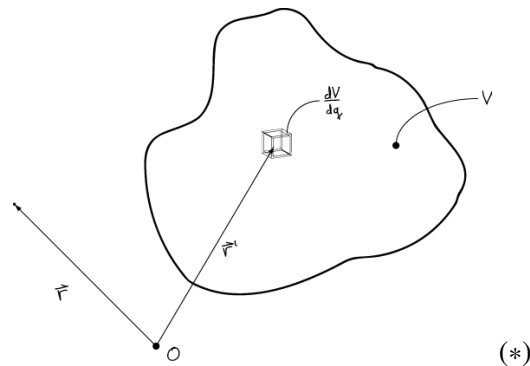


(falls $\vec{E}_{||} \neq 0$: Verschiebung der Ladung bis $\vec{E}_{||} = 0$!)

Influenz: Räumliche Ladungstrennung in el. Leitern durch äußeres \vec{E} -Feld (Kontaktlos!), so dass das Innere des Leiters feldfrei ist!

14.5 Kontinuierliche Ladungsverteilung

Betrachte Ladungsverteilung über endliches Volumen $V = \int_V dV$



Ladungsdichte: $\rho(\vec{r}) = \frac{dq(\vec{r})}{dV}$

Gesamtladung: $Q = \int_V dq = \int_V \rho(\vec{r}) dV$

Flächenladungsdichte: $\sigma = \frac{dq}{dA}$

Integral über geschlossene Oberfläche: $A = \oint_A dA$

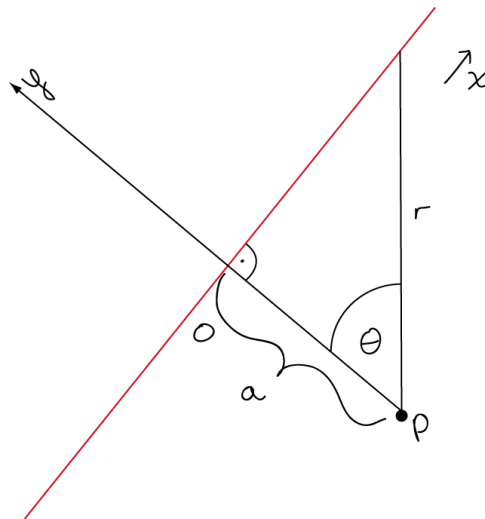
1-dim Ladungsdichte: $\lambda = \frac{dq}{dl}$

Länge $l = \int_l dl'$

für (*) :

$$\begin{aligned} d\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \\ \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV \left\{ \frac{dq}{dV} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV \left\{ \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') \right\} \end{aligned}$$

Beispiel: unendlich langer geladener Draht



$$\frac{dq}{dx} = \lambda \text{ (lin. Ladungsdichte)}$$

$$\text{Symmetrie: } E_x = E_z = 0$$

$$E_y = E \cdot \cos(\theta)$$

$$dE_y = |d\vec{E}| \cdot \cos(\theta)$$

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2 \cdot \frac{\lambda \cdot dx}{r^2(\theta)} \cdot \cos(\theta) \quad ; \cos(\theta) = \frac{a}{r}$$

$$= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \cdot dx \cdot \underline{\cos^2 \theta} \cdot \cos \theta$$

$$\tan \theta = \frac{x}{a} \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = \frac{a}{\cos^2 \theta} \quad \Rightarrow dx = \frac{a}{\underline{\cos^2 \theta}} d\theta$$

$$\Rightarrow dE_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \cdot \frac{\cos \theta}{a} \cdot d\theta$$

$$E_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{a} \cdot \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \underline{\underline{\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{a}}}$$

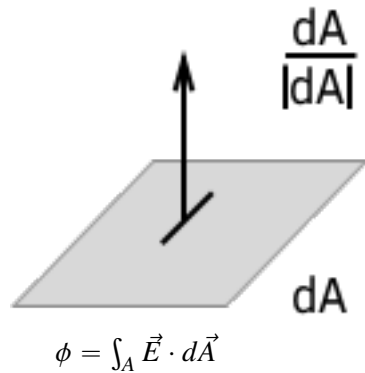
14.6 Elektrischer Fluss und Satz von Gauß



Zusammenhang zwischen "Elektrischem Fluss" (Feldliniendurchsatz) durch eine Oberfläche und der eingeschlossenen Ladung.

\Rightarrow Allgemeinere Formulierung des Coulomb-Gesetzes

14.6.1 Definition: Fluss ϕ eines Vektorfeldes \vec{E} durch eine Fläche A :



$d\vec{A}$: Richtung \perp Fläche (nach Außen)
Richtung der Flächennormale

Betrag dA : Größe der Fläche

Spezialfälle \vec{E} – homogen $\vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot dA \cdot \cos \alpha$

• $\alpha = 0$: $\vec{E} \parallel d\vec{A}$: $\vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot dA$

• $\alpha = 90$: $\vec{E} \perp d\vec{A}$: $\vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$

14.6.2 Gauß'scher Satz

$$\phi = \oint_{\substack{A \\ \text{geschlossen}}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{eingeschlossen}}}{\epsilon_0}$$

Der elektrische Fluss durch einer beliebigen geschlossenen Oberfläche hängt weder von der Form der Oberfläche, noch von der Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r})$ ab, sondern nur von der eingeschlossenen Gesamtladung Q .

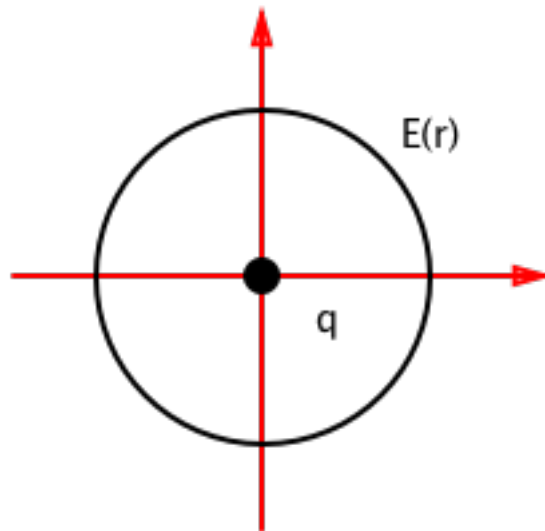
Mathematisch gilt:

$$\begin{aligned}\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \int_V \operatorname{div} \cdot \vec{E} \cdot dV \\ &= \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \cdot dV \\ \Rightarrow \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \varrho(\vec{r}) dV \\ &= \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\varrho(\vec{r})}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

Die Ladungsverteilung im Raum ist die lokale Quelle ($\varrho(\vec{r}) > 0$) bzw. Senke ($\varrho(\vec{r}) < 0$) des elektrischen Feldes.

14.6.3 Beispiele

(i) Feld einer Punktladung

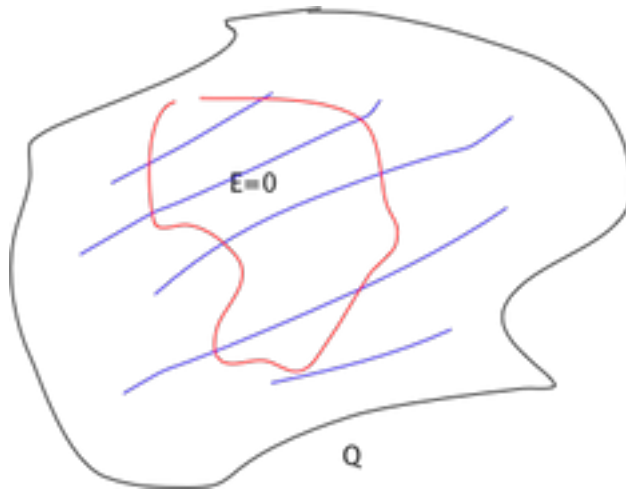


- Geeignete Wahl von A: Kugeloberfläche
- Symmetrie: $\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \cdot \hat{e}_r$
- $\Rightarrow \vec{E} \parallel d\vec{A}$

$$\begin{aligned}
\phi &= \oint_A \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \oint_A E(r) \cdot \hat{e}_r \cdot d\vec{A} \\
&= \oint_A E(r) \cdot dA \\
&= E(r) \cdot \oint_A dA \\
&= E(r) \cdot 4\pi r^2
\end{aligned}$$

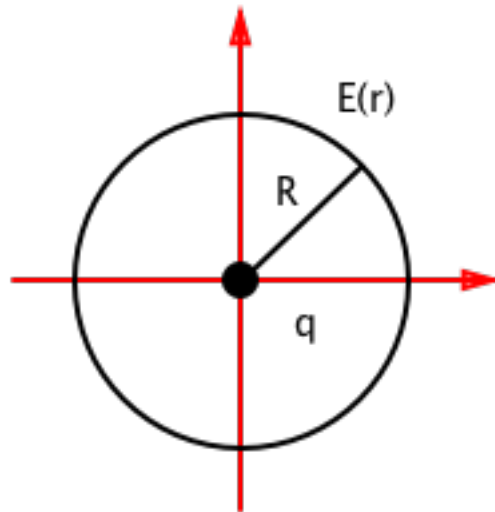
Gauß: $\phi \stackrel{!}{=} \frac{Q}{\epsilon_0} = E(r) \cdot 4\pi r^2 \implies E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$

(ii) Ladung auf beliebig geformten Leitern

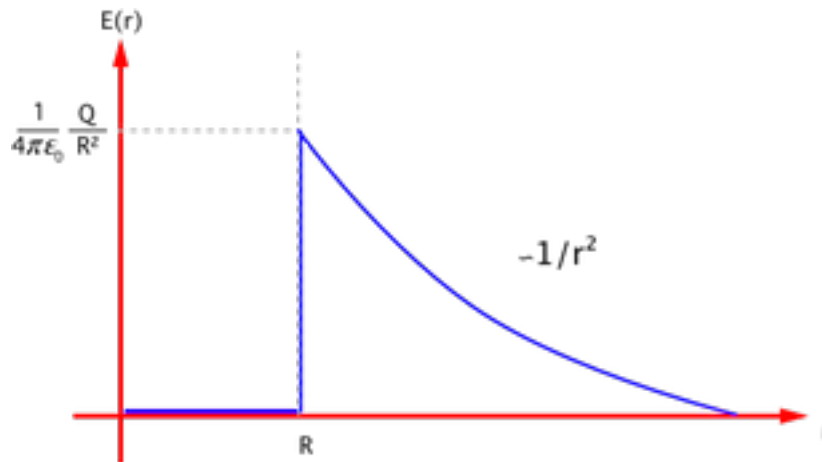


$$\phi = \oint_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} = 0$$

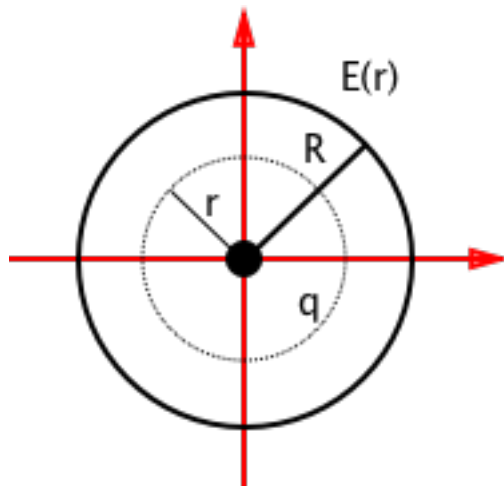
(iii) Feld einer leitenden Kugel mit Ladung Q: (Ladung auf der Oberfläche)



$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= E(\vec{r}) \cdot \hat{e}_r \\ r < R : E &= 0 \\ r > R : \oint_A E(r) dA &= E(r) \cdot 4\pi r^2 \\ \phi &= \frac{Q}{\epsilon_0} \\ \implies E(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}\end{aligned}$$



(iv) Feld einer homogen geladenen Kugel



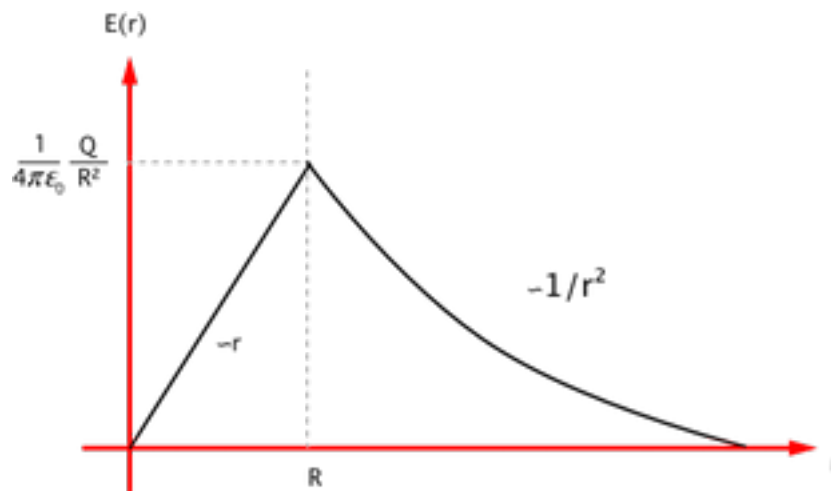
$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \text{ für } r < R \quad \rho = 0 \text{ für } r > R$$

$$\underline{r < R:}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$Q_{in} = Q \cdot \frac{r^3}{R^3}$$

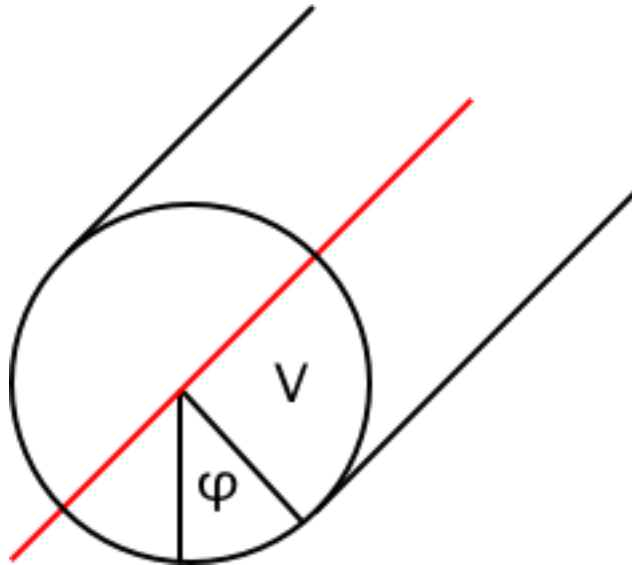
$$\Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^3} \cdot r$$



\Rightarrow Von Außen ist nicht feststellbar, ob die geladene Kugel massiv oder hohl

ist (Leiter oder homogen geladener Isolator)!

(v) Unendlich langer homogen geladener Draht



Zylinderkoordinaten:

$$\lambda = \frac{dq}{dL} = \left(\frac{Q}{R}\right) \leftarrow \text{als endliche lange } l$$

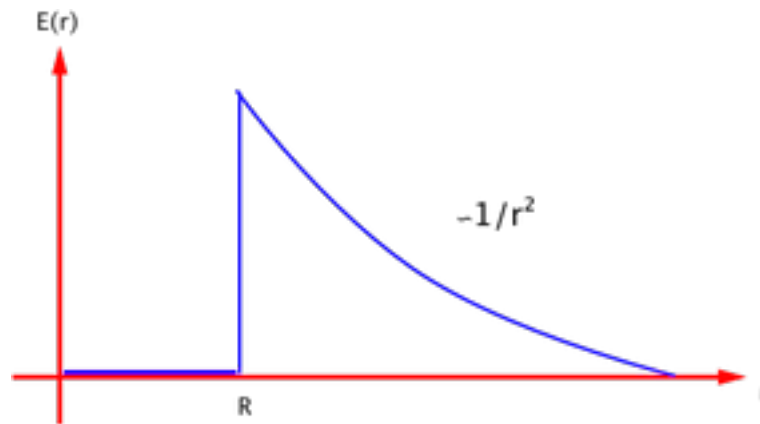
$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(r) = E(r) \cdot \hat{e}_r$$

$$\phi = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_A E(r) dA = E(r) \oint_A da = E(r) \cdot 2\pi r l$$

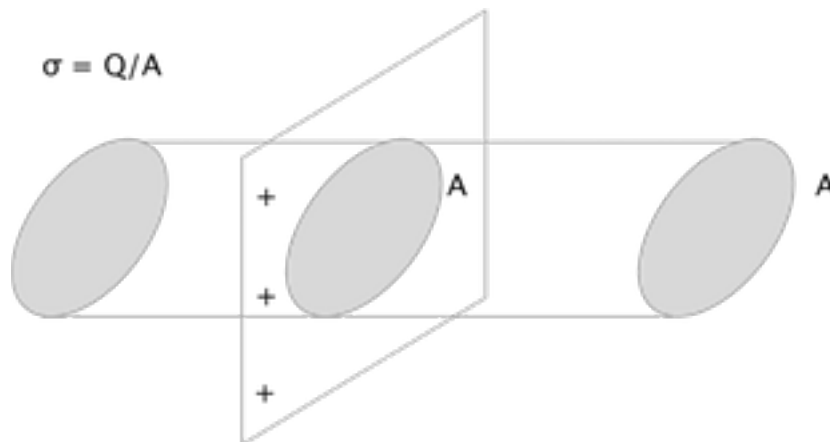
$$\phi = \frac{Q_{ges}}{\epsilon_0} \implies E(r) = \frac{Q_{ges}}{2\pi\epsilon_0 \cdot r l}$$

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

(vi) Unendlich langer, homogen geladener leitender Zylinder



(vii) Feld einer homogen geladener unendliche leitenden Ebene



$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

$$\phi = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{A, \text{stirn}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{A, \text{mantel}} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

\vec{E} -Ebene

\Rightarrow Beitrag über Mantelfläche verschwindet ($d\vec{A} \perp \vec{E}$)

$$\phi = \oint_A \vec{E} d\vec{A} = 2 \cdot E \cdot A_{\text{stirn}} \stackrel{G.S.}{=} \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

14.7 Das elektrische Potenzial

Coulombkraft: Zentralkraft, konservativ

$\implies \exists$ potentielle Energie (siehe 14.3)

für Ladungen q_0 im \vec{E} -Feld gilt:

$$E_{pot}(\vec{r}) = -q_0 \cdot \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Für das elektrische Potenzial $\varphi(\vec{r})$ gilt:

$$\varphi = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{q_0} E_{pot}(\vec{r})$$

→ Beachte: Arbeit ist unabhängig vom Weg!

Verschiebe q_0 von \vec{r}_1 nach \vec{r}_2 ; die benötigte Arbeit ist:

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = q_0 \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\ &= \underline{q_0 \cdot (\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2))} \end{aligned}$$

$\varphi(\vec{r})$ nur bis auf Integrationskonste bestimmt!

Die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten:

$$U = \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) = \frac{W_{12}}{q_0} \text{ heißt elektrische Spannung!}$$

$q_0 \cdot U$ ist die Arbeit, die man braucht um q_0 von \vec{r}_1 nach \vec{r}_2 zu bringen!

$$[U] = 1 \text{ Volt} = 1 \text{ V} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}}$$

Beachte: $\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) = - \oint \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0!!$

Typische Spannungen:

Batterie: 1,5V
 Stadtnetz: 220V
 Überlandleitung: 250kV
 Blitz: 10-15MV

[
 [
 [
 [

Beispiele: (i) Punktladung:

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) &= - \int \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'; \vec{E} = E \cdot \hat{e}_r \\ &= - \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{\infty}^r \frac{d\vec{r}}{r^2}\end{aligned}$$

$$\underline{\varphi(\vec{r}) = \varphi(r) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \cdot r}}$$

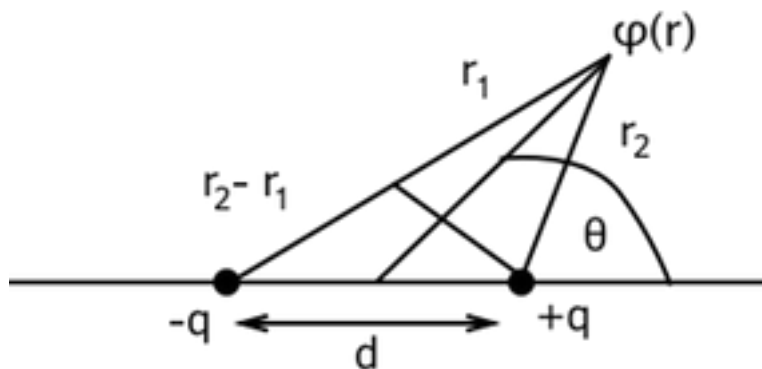
Äquipotenzialflächen: $r = \text{const.}$

(in 3D: Kugelflächen

in 2D: Kreise)

(ii) Mehrere Punktladungen

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$



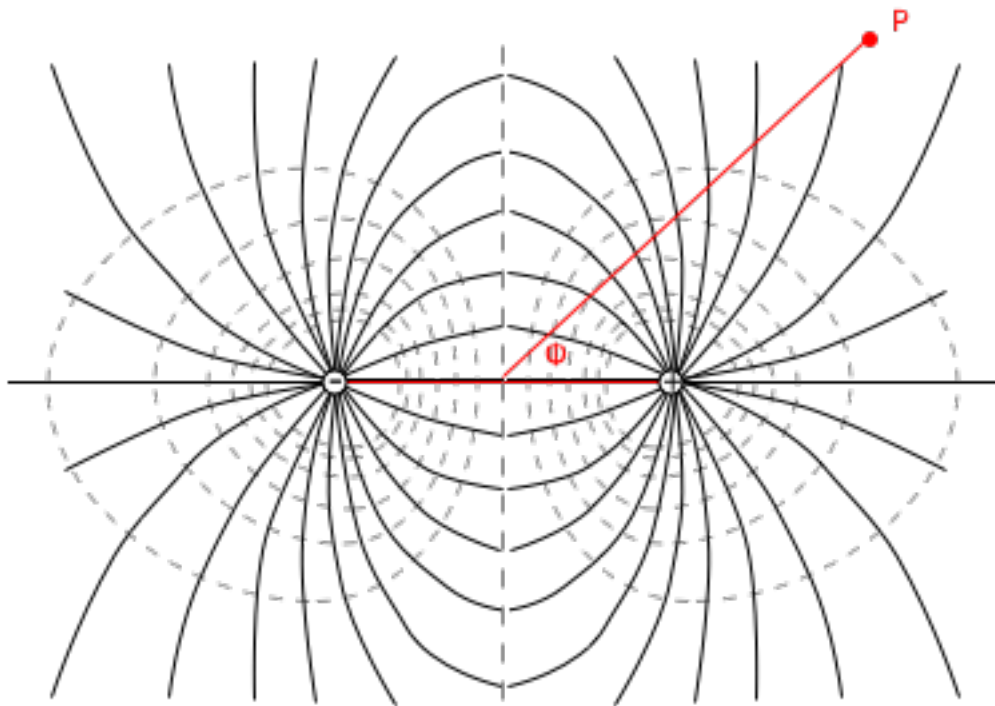
$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 \cdot r_2}$$

$$\text{für } \underbrace{d \ll r}_{\text{Fernfeld}} : r_1 \cdot r_2 = r^2$$

$$r_2 - r_1 = d \cdot \cos \theta$$

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(r) = \frac{q \cdot d \cdot \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} = \frac{\varphi \cdot \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$$

Potenzialverteilung:



(iii) Kontinuierliche Ladungsverteilung:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{\tilde{V}} \frac{dQ}{|\vec{r} - \tilde{\vec{r}}|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{\tilde{V}} d\tilde{V} \left\{ \frac{\varphi(\tilde{\vec{r}})}{|\vec{r} - \tilde{\vec{r}}|} \right\}$$

14.7.1 Elektrisches Feld und Potenzial

$\varphi(\vec{r})$: Skalare Größe, manchmal einfacher zu berechnen als $\vec{E}(\vec{r})$

$\implies \vec{E}(\vec{r})$ aus $\varphi(\vec{r})$ bestimmen?

$$\varphi = \varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z); \vec{E} = \vec{E}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

$$d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{d\varphi}_{\text{vollständiges Differential}} = -\vec{E}d\vec{r} = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz)(*)$$

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot dz(**)$$

$$(*), (**): \left. \begin{array}{l} E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{array} \right\} \implies \underline{\vec{E} = -\text{grad}\varphi}$$

\vec{E} zeigt in Richtung des betragsmäßig größten Anstiegs von φ , allerdings in abnehmende Richtung.

Äquipotenziallinie: $d\varphi = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$
 längst einer solchen Linie ist: $d\varphi = 0 \implies -\vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$
 $\implies \underline{\vec{E} \perp d\vec{r}}$

Beispiel: Punktladung

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

Kugelkoordinaten, Kugelsymmetrie: $\vec{E} = -\nabla \cdot \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \hat{e}_r$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \implies \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \hat{e}_r$$

14.7.2 Poisson- und Laplace Gleichung:

Gauß'scher Satz: $\operatorname{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

Potenzial: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$

Einsetzen: $\operatorname{divgrad}\varphi = \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}}_{\Delta} \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$

$$\Delta\varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot \varphi$$

Spezialfall: $\varphi = 0 \implies \text{Laplace-Gleich} = \underline{\Delta\varphi = 0}$

14.8 Elektrisches Feld in der Umgebung von Leitern

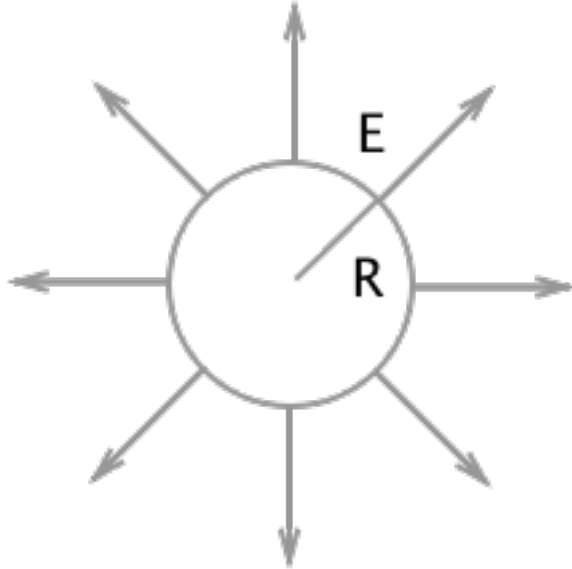
Gauß'scher Satz: $\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 \implies \rho = 0$

(Leiter im Inneren Feldfrei!)

Potenzial: $\varphi(r) = -\int \vec{E} d\vec{r} = \text{const.}$

\implies Leiteroberfläche ist Äquipotenzialfläche

Beispiel: Elektrisches Feld an Kugeloberfläche:

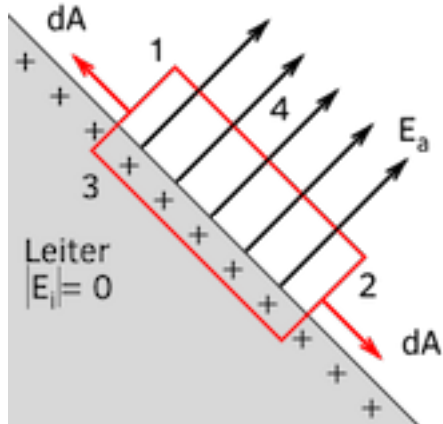


E_{\perp}

für jede Leiteroberfläche berechenbar:

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Beispiel:



Fläche:

$$1,2: \perp d\vec{A} \implies "0"$$

$$3: \vec{E} = 0 \implies 0$$

$$4: E \cdot A = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\implies |\vec{E}| = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \sigma$$

\implies Die Größe von E_{\perp} an der Oberfläche ist $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$!

Weiter mit der Kugel: $E_a = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{4\pi \cdot R^2}$

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot R} \implies E_a = \frac{\varphi}{R}$$

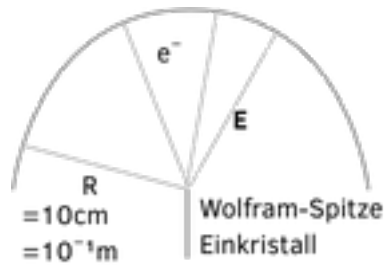
Bei gegebenen Potenzial ist Feldstärke an der Oberfläche umgekehrt proportional zum Kreis...radius!

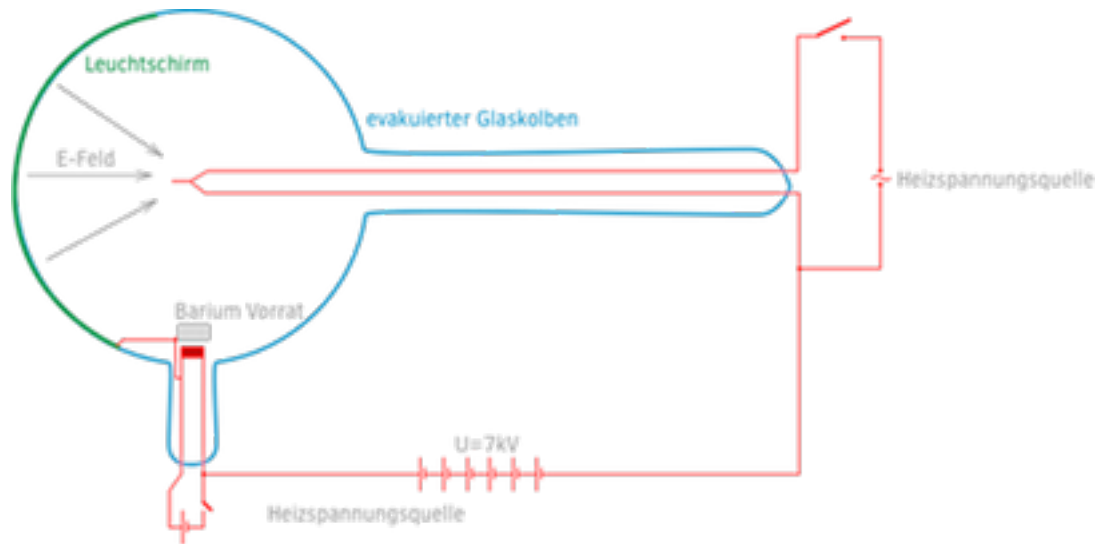
$$\text{Lokal: } |\vec{E}| = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\varphi}{R}$$

R Klein \implies φ groß, σ groß

14.8.1 Anwendungen:

Feldemissions-Elektronenmikroskop:





$|\vec{E}| = \frac{\varphi}{R} = \frac{10kV}{10^{-7}m} = 10^11 \frac{V}{m}$ an der Wolfram-Spitze
Bewegung der Elektronen Entlang der Feldlinien

- vergrößertes Bild der Wolfram-Spitze
- Vergrößerung: $\frac{R_{schirm}}{R_{spitze}} \approx 10^6$
- so erstmals Atome sichtbar gemacht
- Objekte $< 10^{-9}m \implies < 1nm!$

14.8.2 Elektrisches Feld zwischen geladenen Leitern

Anwendung: 2 isolierte, entgegengesetzt geladene Leiter, (\implies Kondensator)



Coulomb: $|\vec{E}| \propto |Q|$

Spannung: $U_{21} = \varphi_2 - \varphi_1 = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} \propto Q$ ist unabhängig vom Weg!

$$\Rightarrow Q \propto U$$

Proportionalitätskonstante?

$$Q = C \cdot U$$

C: Kapazität

Einheit $[C] = \frac{1C}{1V} = 1F$ (Farad)

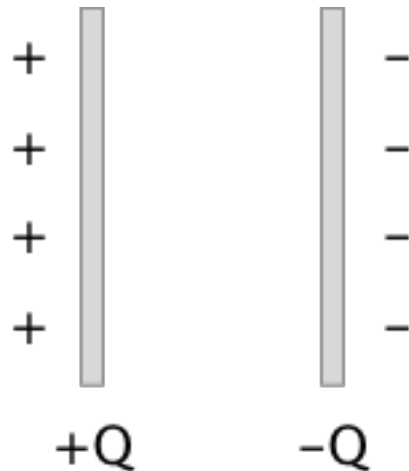
$$\text{typisch : } 10^{-6} F = 1\mu F$$

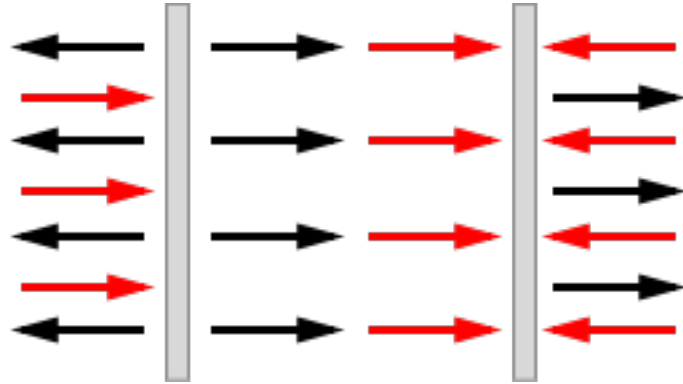
$$10^{-9} F = 1nF$$

$$10^{-12} F = 1pF$$

14.8.3 Berechnung der Kapazität:

Erinnerung: homogen geladene Platte: $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$



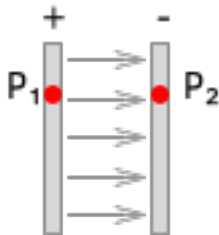


Im Außenraum: Kompensation

Im Innenraum: Addition

Im Innenraum: $|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

14.8.4 Feldstärke im Inneres eines Plattenkondensator:



Seicherung von Ladungen auf voneinander isolierten leitenden Platten, Aufladung über Spannungsquelle oder Batterie.

Spannungspotenzialdifferenz: $U_{21} = p_2 - p_1 = \int \vec{F} d\vec{r} = E \cdot d$

$$U = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot d = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot A} \cdot d$$

mit $Q = C \cdot U$ folgt $C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$

$$|\vec{E}| = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot A} \text{ ist unabhängig von } d$$

$$C = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d} \text{ ist eine rein geometrische Größe}$$

$$d \uparrow \implies C \downarrow \implies U \uparrow$$

$$d \downarrow \implies C \uparrow \implies U \downarrow$$

14.8.5 Realisierung von Kondensatoren:

Großes C: A groß, d klein

Beidseitiges Bedampfte dünne Kunststofffläche, dann aufrollen, \implies Kunststoff-folienkondensator.

$$\begin{aligned} \text{Größenordnung: } \left. \begin{array}{l} d = 1mm \\ A = 1cm^2 \end{array} \right\} C &= \epsilon_0 \frac{A}{d} (1) \\ &= 8,8 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2} \frac{10^{-4}m^2}{10^{-3}m} \\ &= 0,9 \cdot 10^{-12} F \\ &\approx \underline{1pF} \times \text{Anzahl der Lagen} \end{aligned}$$

14.8.6 Energie eines aufgeladenen Kondensators

Kondensator C sie mit Ladung q aufgeladen: $U = \frac{q}{C}$

Die Arbeit, die zum Aufbringen einer weiteren Ladung benötigt wird, hängt vom aktuellen Ladungszustand ab:

$$\begin{aligned} dW &= dq \cdot U(q) \\ &= dq \cdot \frac{q \cdot d}{A \cdot \epsilon_0} \end{aligned}$$

$$W = \int_0^Q dW = \frac{d}{A\epsilon_0} \int_0^Q q/c \cdot dq = \frac{1}{2} \frac{1}{C} Q^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2}}$$

$$\text{Energiedichte: } \underbrace{\frac{W}{V}}_{A \cdot d} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} \frac{1}{Ad} E^2 d^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2}}$$

(Dieses Ergebnis gilt auch für andere Feldverteilungen, nicht nur im Plattenkondensator)

→ Feldenergie $\propto E^2$ (später wichtig!)

⇒ wichtige Anwendung: Schnelle Entladung eines langsam aufgeladenen Kondensators ⇒ Kurzzeitig hohe Leistung!

Beispiele : Defibrillator, Blitzlicht...

14.8.7 Entladen eines Kondensators

$$C = 8 \cdot 20 \mu F; U = 500 V$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot C U^2 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 10^{-5} F \cdot 25 \cdot 10^4 V^2$$

$$= \underline{20 J}$$

Entladung in 1ms → 20kW

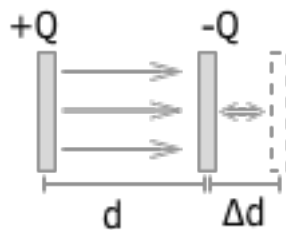
Defibrillator: 100 – 800kW

Fusionsanlage: Kondensatorbatterie ermöglichen $W \approx 10^6 J$

Entladung in 3ns

$$\Rightarrow P = 3 \cdot 10^{14} W$$

14.8.8 Kraft zwischen Zwei Kondensatorplatten



Anziehungskraft zwischen entgegengesetzt geladenen Kondensatorplatten

⇒ Arbeit gegen Kraft F, um Abstand um Δd zu erhöhen.

Volumenänderung:

$$\Delta V = A \cdot \Delta d$$

$$\Delta W = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 |\vec{E}|^2 \cdot A \cdot \Delta d$$

$$\Delta W = F \cdot \Delta d \implies \underline{F} = \frac{\epsilon_0}{2} \cdot |\vec{E}|^2 \cdot A = \underline{\frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{V}{d}\right)^2 \cdot A \propto V^2}$$

14.8.9 Kraft zwischen Kondensatorplatten

$$U = 2000V; d = 10mm; = 30cm \implies A = 0,071m^2$$

$$F = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{V}{d}\right)^2 \cdot A = 0,1197N$$

Die äquivalente Masse wird von der Waage angezeigt:

$$M = \frac{F}{g} = 12,29g \text{ (gemessen : } m = 1,33g)$$

Verdopplung von U auf 4000V \implies 4-Fache Masse. (gemessen: $m \approx 5,22g$)

14.9 Isolatoren (Dielektrikum) im elektrischen Feld