Kapitel 14 - Statische elektrische Felder

Johannes Bilk
me@talachem.de

May 8, 2016

Contents

14 Statische Elektrische Felder

14.1 Elektrische Ladungen

→ Ab dem 17. Jahrhundert: Ursache für "elektrische Phänomene"; "neuartiger Stoff", elektrische Ladung

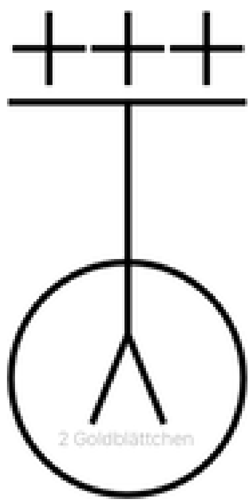
14.1.1 Reibungselektrizizät

- Zwei Arten von "elektrischen Zuständen" sind erzeugbar:
  - Gleichartige Zustände $\Longrightarrow$ Abstoßung
  - Ungleichartige Zustände $\Longrightarrow$ Anziehung
- Carles Du Fay (1730): positiv/negativ elektrische Ladung
- Benjamin Franklin (1750): Über-/Unterschuss an "elektrischen Fluiden"
- Lichtenberg (1778): Zuordnung der Polariät

Hargummi stab: reiben mit Pelz, Wolle: -   Glas, Plexiglas: reiben mit Seide: +

Reibezeug: entgegengesetzte Polarität $\Longrightarrow$ Ladungstrennung, nicht etwa Ladungserzeugung.

Grundsätzliches Messprinzip: Elektroskop:



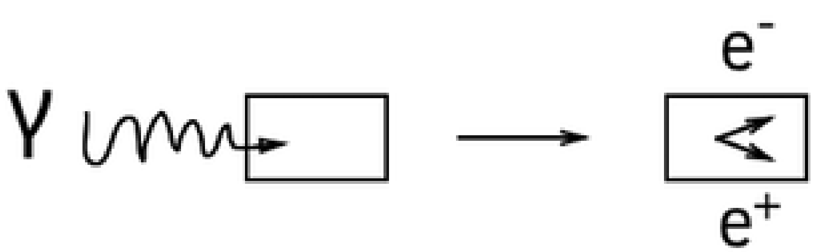
→ Elektrometer → quantitative Messung

- "Löffeln"; d.h. portionsweise Übertragung von Ladungen ist mglich
- Elektropendel: $\implies$ periodisches Umladen eines "Kugelpendel"

14.1.2 Ladung ist eine skalare Größe

Einheit 1C = 1 Coulomb, SI

- Zu jedem geladenen Elementarteilchen gibt es ein Elementarteilchen mit entgegengesetzter Ladung (→ Ladungssymmetrie)
- Die Gesamtladung eines abgeschlossenen Systems bleibt erhalten (→ Ladungserhaltung)
- Beispiel: Produktion eines e^+e^--Paares; $E_\gamma \geqslant 1{,}02$ MeV



Nachweis: Blasenkammer im Magnetfeld:
Umkehrung: "Zerstrahlung" von Positronen; $E = m \cdot c^2$

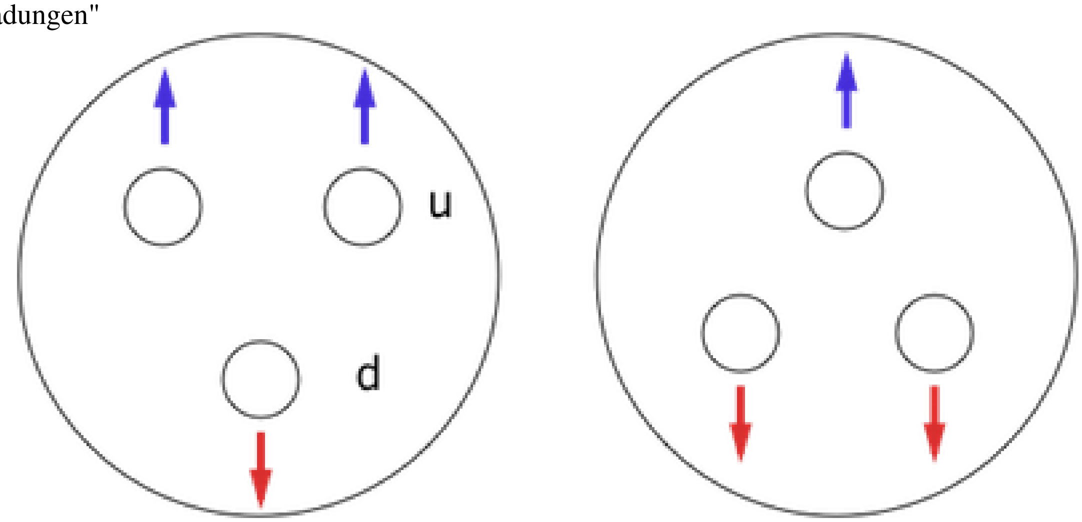
- Ladungträger haben stets eine Masse
- Ladung kann nicht (im Gegensatz zur Masse) in Energie umgewandelt werden, bleibt auch bei Zerfallsprozessen erhalten.
- Quantisierung der Ladung: Alle in der Natur vorkommenden Ladungen sind ganzzahlige Vielfache der Elementarladung: $e_0 := 1,602 \cdot 10^{-19}C; 1C = 1AS$

Beispiele von Ladungen

- Neutral: γ, ν, n
- einfach geladen: $e^-, e^+, p, \bar{p}$
- zweifach geladen:: $He_2(2^+, Z : 2)$

14.1.3 Quarks

Seit 60er Jahre Nukleonen bestehen aus Quarks, diese haben "drittelzahlige Ladungen"



Up-Quarks:$u : +\frac{2}{3}e_0$
Down-Quarks:$d : -\frac{1}{3}e_0$
Proton:$2u + d : 1 \cdot e_0$
Neutron:$u + 2d : 0 \cdot e_0$

Quarks treten immer in 2er- oder 3er- Kombinationen auf.

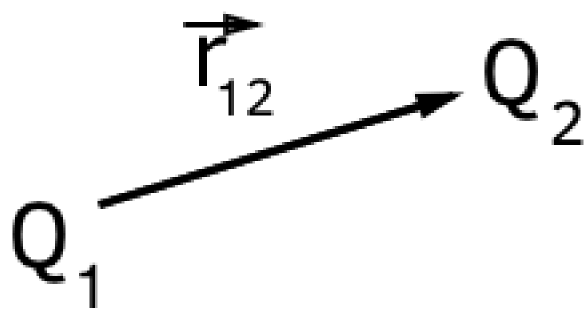
14.1.4 Entdeckung und Bestimmung der Elementarladung

Robert Andrews Millikan(1868-1953): Öltrpfchenversuch ($\rightarrow$ Anfängerpraktikum)

14.2 Kräfte zwischen Ladungen und das Coulomb-Gesetz

Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806)

1785: Messung der Kraft zwischen zwei Ladungen als Funktion des Abstands mit Hilfe einer Torsionswaage



$$\boxed{\vec{F_{12}} = f \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r_{12}}}{|\vec{r_{12}}|} = f \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \cdot \hat{r}_{12}}$$

F ist definiert durch die Definition der Ladungseinheit:
Internationales Messsystem (SI): $f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$
$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{(As)^2}{Nm^2}$
ist Dielektrizitätskonste des Vakuums oder elektrische Feldkonstante
$Q_1 \cdot Q_2 > 0$: Abstoßung
$Q_1 \cdot Q_2 < 0$: Anziehung

14.3 Potenzielle Energie einer Ladungsverteilung

$$\begin{aligned} W_{12} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\int_\infty^r \frac{Q_1\cdot Q_2}{V^2}\mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\big[\frac{Q_1\cdot Q_2}{V}\big]_\infty^{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{Q_1\cdot Q_2}{V_{12}} \\ W_{1,2,3} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\big(\frac{Q_1\cdot Q_3}{r_{13}}+\frac{Q_1\cdot Q_2}{r_{12}}+\frac{Q_2\cdot Q_3}{r_{23}}\big) \end{aligned}$$

Anzahl an Summanden = Anzahl an Paaren

$$\boxed{W = \left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{ji=1}^{N}\frac{Q_i\cdot Q_j}{r_{ij}}\right]\cdot\frac{1}{4\pi\epsilon_0}}$$

$\implies$ Aufsummieren auch unendlicher Ensembles möglich, wenn die Reihe konvergiert.

Betrachte Kraf auf Probeladung in homogen geladener Kugel

Für beliebe Räumlichelemente (und damit auch Flächenelemente) gilt:
$q_1 \propto \mathrm{d}A_1 \propto r_1^2$
$q_1 \propto \mathrm{d}A_1 \propto r_1^2$
Geometrie $\implies \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$
Annahme: Kraft $\propto \frac{1}{r^n}$
$|\vec{F}_1| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{q\cdot q_1}{r_1^n}$
$|\vec{F}_2| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{q\cdot q_2}{r_2^n}$

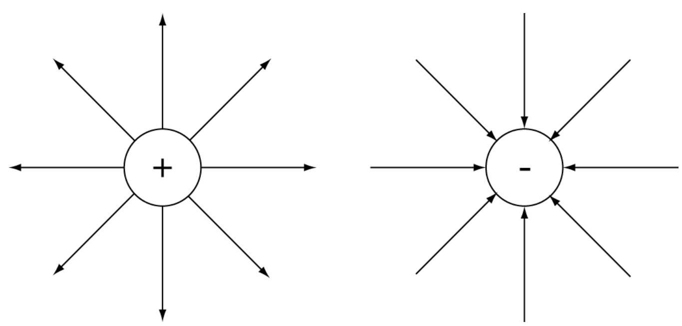
Geometrie einsetzen:
$\frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{F}_2|} = \frac{q_1}{r_1^n}\cdot\frac{r_2^n}{q_2} \stackrel{!}{=} 1 \implies n = 2$
Gesamtkraft verschwindet nur wenn $\| \propto \frac{1}{r^2}$

14.4 Erzeugung el. Felder durch Ladungen

14.4.1 Feld einer Punktladung:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \cdot \hat{r_{12}} \\ &= q_1 \cdot \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \cdot \hat{r_{12}}}_{\text{Feld von } q_2} \\ &= q_1 \vec{E}(\vec{r})\end{aligned}$$

- Felder einer Punktladung sind Zentralfelder mit Kugelsymmetrie
- Konvention: Feldlinien führen von positiver zu negativer Ladung



$\Rightarrow$ Punktladungsfelder sind inhomogen!

14.4.2 Feld einer Verteilung von Punktladungen

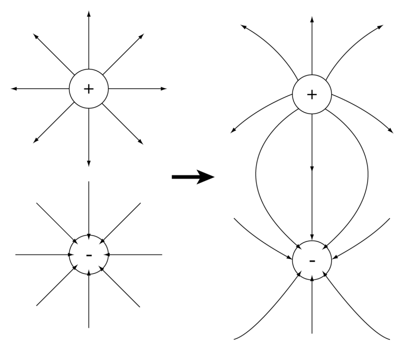
N Ladungen bei $\vec{r_i}$

$$\vec{E_i}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r_i}|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r_i}}{|\vec{r} - \vec{r_i}|}$$

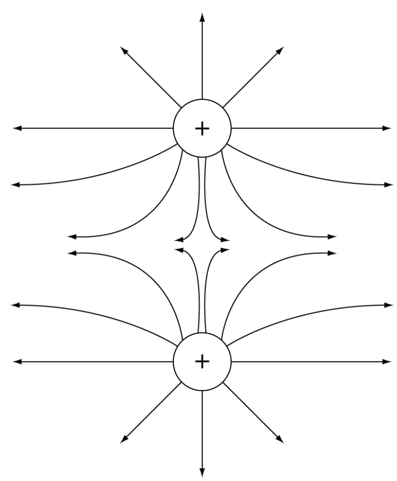
Ungestörte Superposition:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r_i}|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r_i}}{|\vec{r} - \vec{r_i}|}$$

2 Ladungen, q ; -q : Feld eines Dipols

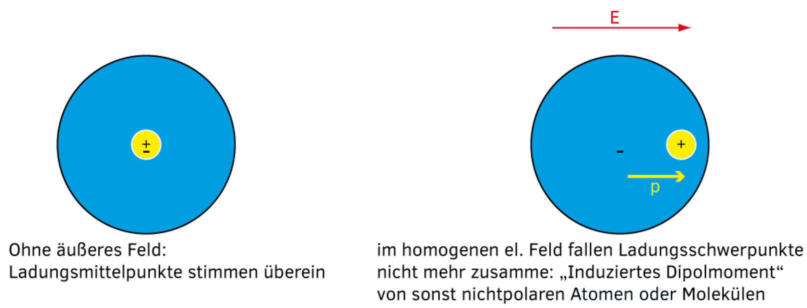


2 Ladungen: q ; q

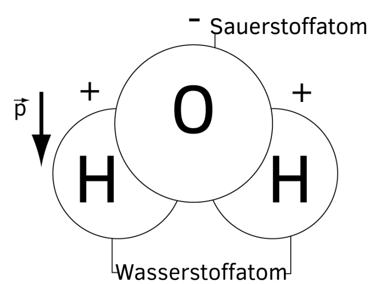


Beispiele für "natürliche Dipole":

1. Neutrales Atom im homogenen $\vec{E}$-Feld



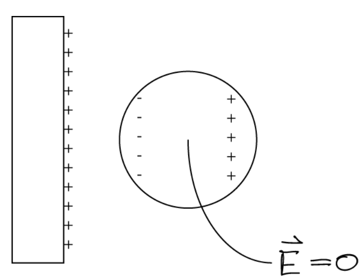
2. Polare Molekühle mit permanentem Dipolmoment



14.4.3 Leiter im el. Feld und Influenz

Leiter: Ladungen sind frei beweglich
Isolator: Ladungen sind ortsfest

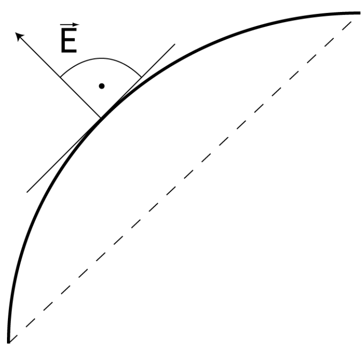
1. $\vec{E} = 0$ im Inneren des Leiters



falls $\vec{E} \neq 0$: $\vec{F} = q\vec{E}$ verschiebt Ladung bis $\vec{E} = 0$!

2. Es folgt, sich bei einem Leiter die (Netto-)Ladungen immer an der Oberfläche befinden $\Rightarrow$ Flächenladungsdichte $\boxed{\sigma = \frac{dQ}{dA}}$

3. $\vec{E}$ immer $\perp$ auf Leiteroberfläche

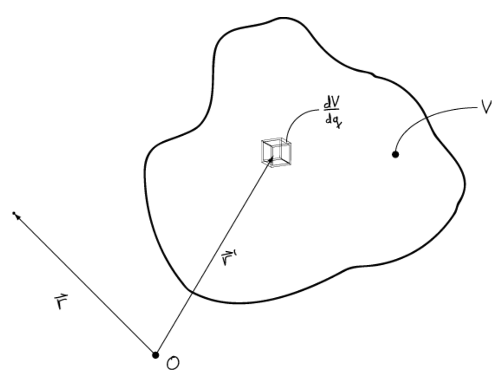


(falls $\vec{E}_{\parallel} \neq 0$: Verschiebung der Ladung bis $\vec{E}_{\parallel} = 0$!)

Influenz: Räumliche Ladungstrennung in el. Leitern durch äußeres $\vec{E}$-Feld (Kontaktlos!), so dass das Innere des Leiters Feldfrei ist!

14.5 Kontinuierliche Ladungsverteilung

Betrachte Ladungsverteilung über endliches Volumen $V = \int_V dV$



(∗)

Ladungsdichte: $\rho(\vec{r}) = \frac{dq(\vec{r})}{dV}$
Gesamtladung: $Q = \int_V dq = \int_V \rho(\vec{r}) dV$

Flächenladungsdichte: $\sigma = \frac{dq}{dA}$

Integral über geschlossene Oberfläche: $A = \oint\limits_A dA$

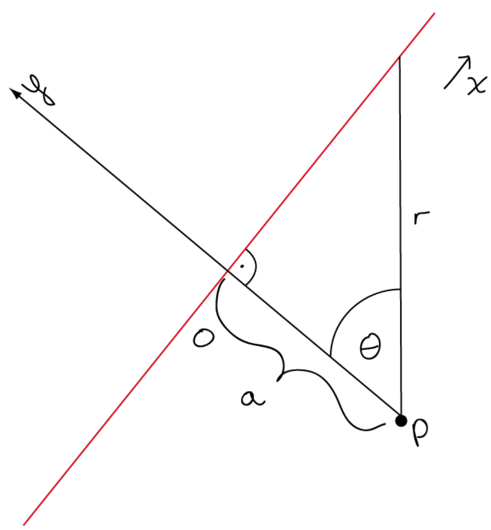
1-dim Ladungsdichte: $\lambda = \frac{dq}{dl}$

Länge $l = \int_l dl'$

für (∗) :

$$
\begin{aligned}
d\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \cdot (\vec{r}-\vec{r}') \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \\
\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV \left\{ \frac{dq}{dV} \cdot \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right\} \\
&= \underline{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV \left\{ \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \cdot (\vec{r}-\vec{r}') \right\}}
\end{aligned}
$$

Beispiel: unendlich langer geladener Draht



$$
\begin{aligned}
\frac{dq}{dx} &= \lambda \text{ (lin. Ladungsdichte)} \\
\text{Symmetrie: } E_x &= E_z = 0 \\
E_y &= E \cdot \cos(\theta) \\
dE_y &= |d\vec{E}| \cdot \cos(\theta) \\
dE_y &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2 \cdot \frac{\lambda \cdot dx}{r^2(\theta)} \cdot \cos(\theta) \qquad ; \cos(\theta) = \frac{a}{r} \\
&= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \cdot dx \cdot \underline{\cos^2\theta} \cdot \cos\theta
\end{aligned}
$$

$$
\tan\theta = \frac{x}{a} \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = \frac{a}{\cos^2\theta} \qquad \Rightarrow dx = \underline{\frac{a}{\cos^2\theta} d\theta}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow dE_y &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \cdot \frac{\cos\theta}{a} \cdot d\theta \\
E_y &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{a} \cdot \int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta = \underline{\underline{\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{a}}}
\end{aligned}
$$

14.6 Elektrischer Fluss und Satz von Gauß