Kapitel 14 - Statische elektrische Felder

Johannes Bilk
me@talachem.de

May 11, 2016

Contents

14 Statische Elektrische Felder

14.1 Elektrische Ladungen

→ Ab dem 17. Jahrhundert: Ursache für "elektrische Phänomene"; "neuartiger Stoff", elektrische Ladung

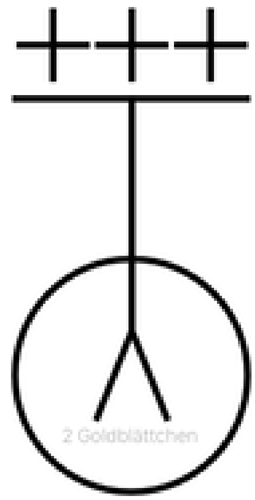
14.1.1 Reibungselektrizizät

- Zwei Arten von "elektrischen Zuständen" sind erzeugbar:
  - Gleichartige Zustände $\Longrightarrow$ Abstoßung
  - Ungleichartige Zustände $\Longrightarrow$ Anziehung
- Carles Du Fay (1730): positiv/negativ elektrische Ladung
- Benjamin Franklin (1750): Über-/Unterschuss an "elektrischen Fluiden"
- Lichtenberg (1778): Zuordnung der Polariät

Hargummi stab: reiben mit Pelz, Wolle: -   Glas, Plexiglas: reiben mit Seide: +

Reibezeug: entgegengesetzte Polarität $\Longrightarrow$ Ladungstrennung, nicht etwa Ladungserzeugung.

Grundsätzliches Messprinzip: Elektroskop:



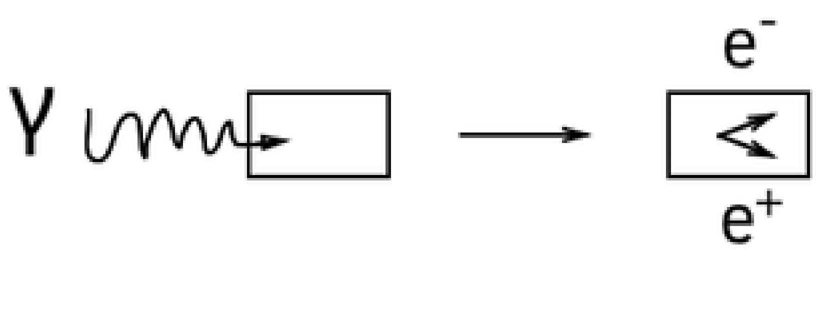
→ Elektrometer → quantitative Messung

- "Löffeln"; d.h. portionsweise Übertragung von Ladungen ist mglich
- Elektropendel: $\implies$ periodisches Umladen eines "Kugelpendel"

14.1.2 Ladung ist eine skalare Größe

Einheit 1C = 1 Coulomb, SI

- Zu jedem geladenen Elementarteilchen gibt es ein Elementarteilchen mit entgegengesetzter Ladung (→ Ladungssymmetrie)
- Die Gesamtladung eines abgeschlossenen Systems bleibt erhalten (→ Ladungserhaltung)
- Beispiel: Produktion eines e^+e^--Paares; $E_\gamma \geqslant$ 1,02 MeV



Nachweis: Blasenkammer im Magnetfeld:
Umkehrung: "Zerstrahlung" von Positronen; $E = m \cdot c^2$

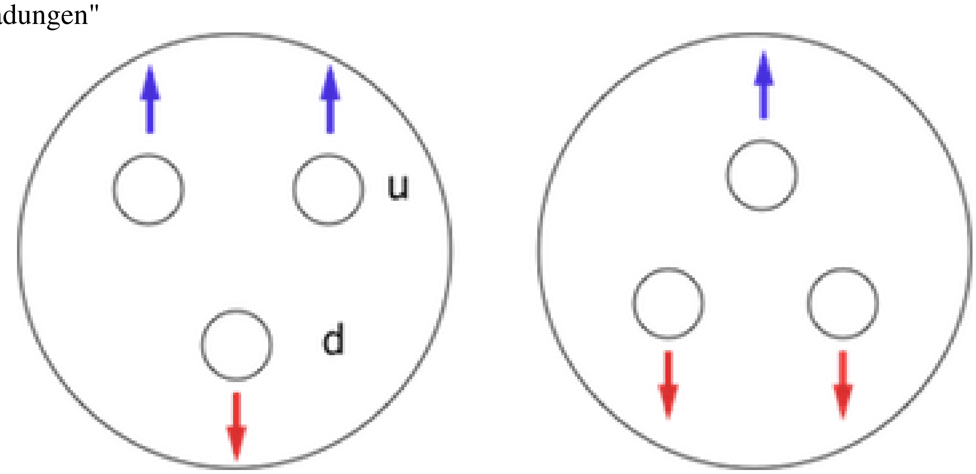
- Ladungträger haben stets eine Masse
- Ladung kann (im Gegensatz zur Masse) nicht in Energie umgewandelt werden.
  Sie bleibt auch bei Zerfallsprozessen erhalten.
- Quantisierung der Ladung:
  Alle in der Natur vorkommenden Ladungen sind ganzzahlige Vielfache der Elementarladung: $e_0 := 1,602 \cdot 10^{-19} C; 1C = 1AS$

Beispiele von Ladungen

- Neutral: Photon: γ, Neutrinoν, Neutron n
- einfach geladen: Elektron e^-, Positron e^+, Proton p, Antiproton $\bar{p}$
- zweifach geladen:: $He_2(2^+, Z : 2)$

14.1.3 Quarks

Seit 60er Jahre Nukleonen bestehen aus Quarks, diese haben "drittelzahlige Ladungen"



Up-Quarks:$u : +\frac{2}{3}e_0$
Down-Quarks:$d : -\frac{1}{3}e_0$
Proton:$2u + d : 1 \cdot e_0$
Neutron:$u + 2d : 0 \cdot e_0$

Quarks treten immer in 2er- oder 3er- Kombinationen auf.

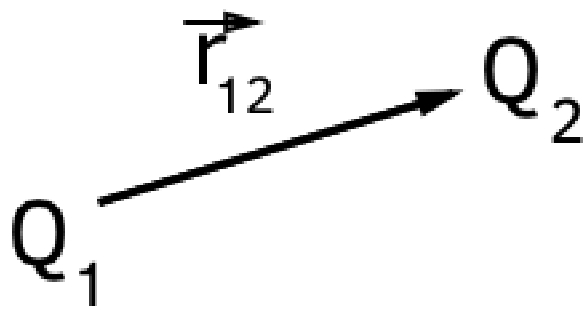
14.1.4 Entdeckung und Bestimmung der Elementarladung

Robert Andrews Millikan(1868-1953): Öltrpfchenversuch (→ Anfängerpraktikum)

14.2 Kräfte zwischen Ladungen und das Coulomb-Gesetz

Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806)

1785: Messung der Kraft zwischen zwei Ladungen als Funktion des Abstands mit Hilfe einer Torsionswaage



$$\boxed{\vec{F_{12}} = f \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r_{12}}}{|\vec{r_{12}}|} = f \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \cdot \hat{r}_{12}}$$

F ist definiert durch die Definition der Ladungseinheit:
Internationales Messsystem (SI): $f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$
$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{(As)^2}{Nm^2}$
ist Dielektrizitätskonste des Vakuums oder elektrische Feldkonstante
$Q_1 \cdot Q_2 > 0$: Abstoßung
$Q_1 \cdot Q_2 < 0$: Anziehung

Coulomb-Kraft

$$\boxed{\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \cdot \hat{r}_{12}}$$

1 Coulomb ist diejenige elektrische Ladung, die eine gleich große Ladung im Abstand von 1m mit der Kraft von $8,9874 \cdot 10^9 N$ abstößt

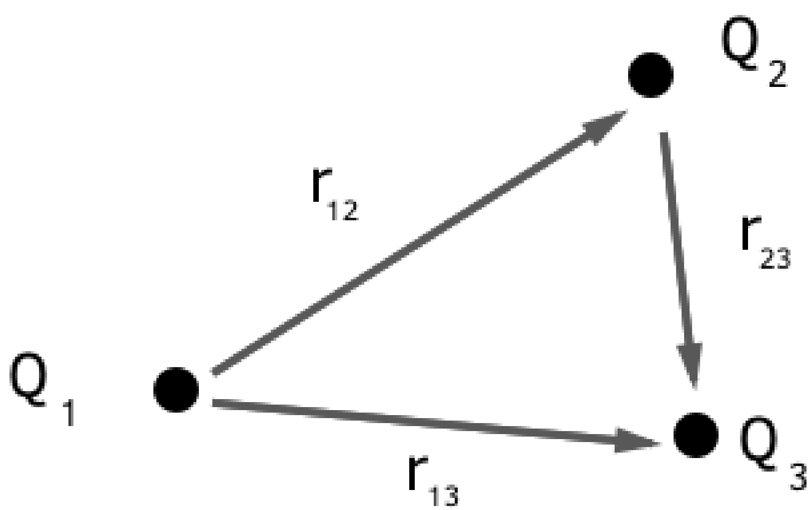
Analogie Gravitation: $\vec{F} = -\gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \hat{r}$

Vergleiche Gravitation und Coulombkraft zwischen Elektron und Proton:

$$|\vec{F}_C| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q_p| \cdot |q_e|}{r^2} = 2,3 \cdot 10^{-28} \frac{N}{r[m]^2}$$
$$|\vec{F}_G| = \gamma \cdot m_e \cdot m_p = 9,71 \cdot 10^{-68} \frac{N}{r[m]^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{|F_G|}{|F_C|} = 4,2 \cdot 10^{-40}$$

Wechselwirkung zwischen mehreren Ladungen



Die einzelnen Kräfte überlagern sich ungestört, (ungestörte Superposition)!

Kraft auf

$$Q_3 : \vec{F}_3 = \left[\frac{Q_1 \cdot Q_3}{r_{13}^2} \cdot \hat{r}_{13} + \frac{Q_2 \cdot Q_3}{r_{23}^2} \cdot \hat{r}_{23} \right]$$

14.3 Potenzielle Energie einer Ladungsverteilung

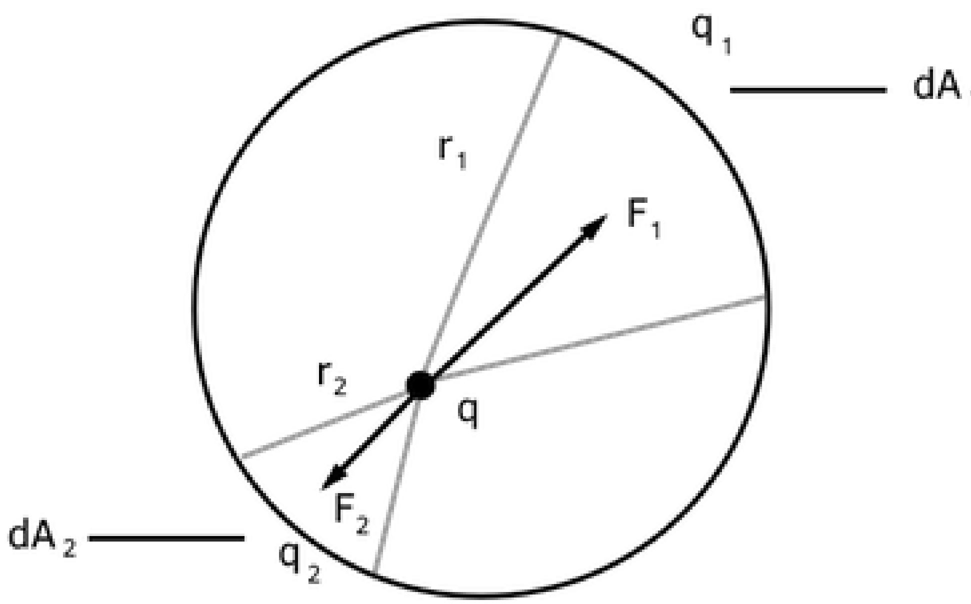
$$
\begin{aligned}
W_{12} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{\infty}^{r_{12}} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{\rho^2} \mathrm{d}\rho \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \Big[\frac{Q_1 \cdot Q_2}{\rho} \Big]_{\infty}^{r_{12}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}} \\
W_{1,2,3} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \Big(\frac{Q_1 \cdot Q_3}{r_{13}} + \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_2 \cdot Q_3}{r_{23}} \Big)
\end{aligned}
$$

Anzahl an Summanden = Anzahl an Paaren.
Da aber jedes Paar doppelt gezählt wird, muss noch mit $\frac{1}{2}$ multiplitziert werden

$$\boxed{W = \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{ji=1}^{N} \frac{Q_i \cdot Q_j}{r_{ij}} \right] \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0}}$$

$\Longrightarrow$ Aufsummieren auch unendlicher Ensembles möglich, wenn die Reihe konvergiert.

Betrachte Kraft auf Probeladung in homogen geladener Kugel



Für beliebe Räumlichelemente (und damit auch Flächenelemente) gilt:
$q_1 \propto \mathrm{d}A_1 \propto r_1^2$
$q_1 \propto \mathrm{d}A_1 \propto r_1^2$
Geometrie $\Longrightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$
Annahme: Kraft $\propto \frac{1}{r^n}$

$$|\vec{F}_1| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot q_1}{r_1^n}$$
$$|\vec{F}_2| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot q_2}{r_2^n}$$

$$\frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{F}_2|} = \frac{q_1}{r_1^n} \cdot \frac{r_2^n}{q_2} \stackrel{!}{=} 1 \Longrightarrow \frac{q_1}{q2} = \frac{r_1^n}{r_2^n}$$

Nun kann das mit dem Geometrieausdruck gleichgesetzt werden:

$$\frac{r_1^n}{r_2^n} = \frac{q_1}{q2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \Rightarrow n = 2$$

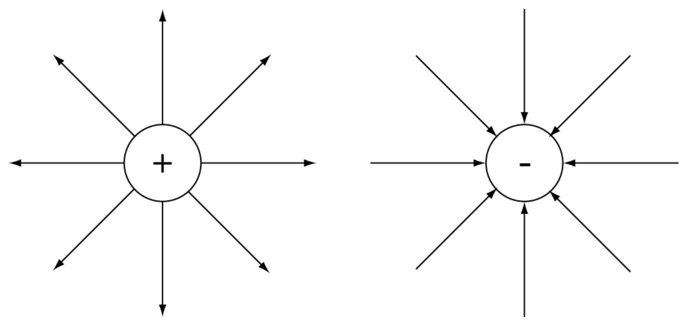
Gesamtkraft verschwindet nur wenn $|\vec{F}| \propto \frac{1}{r^2}$

14.4 Erzeugung el. Felder durch Ladungen

14.4.1 Feld einer Punktladung

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \cdot \hat{r_{12}} \\ &= q_1 \cdot \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \cdot \hat{r_{12}}}_{\text{Feld von } q_2} \\ &= q_1 \vec{E}(\vec{r})\end{aligned}$$

- Felder einer Punktladung sind Zentralfelder mit Kugelsymmetrie
- Konvention: Feldlinien führen von positiver zu negativer Ladung



$\Rightarrow$ Punktladungsfelder sind inhomogen!

14.4.2 Feld einer Verteilung von Punktladungen

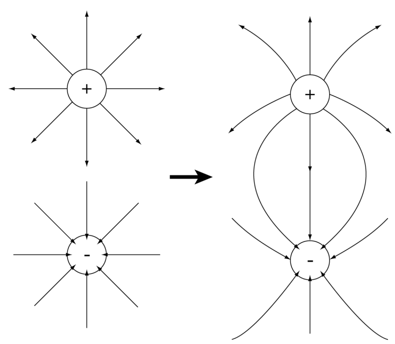
N Ladungen bei $\vec{r}_i$

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

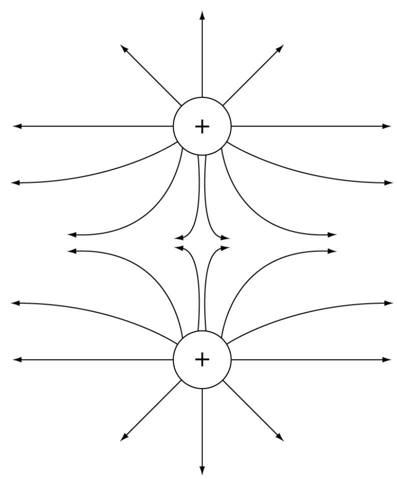
Ungestörte Superposition:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

2 Ladungen, q ; -q : Feld eines Dipols

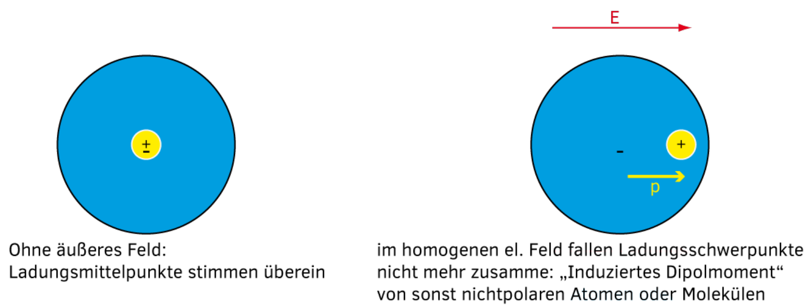


2 Ladungen: q ; q

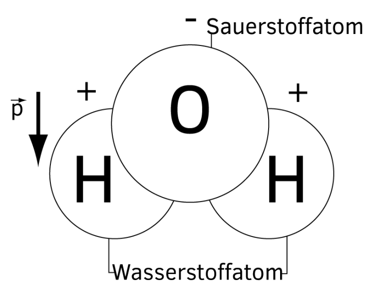


Beispiele für "natürliche Dipole":

1. Neutrales Atom im homogenen $\vec{E}$-Feld



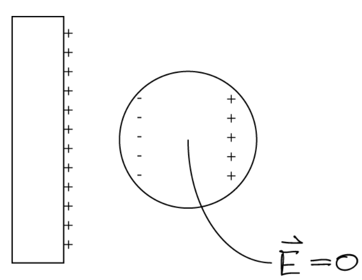
2. Polare Molekühle mit permanentem Dipolmoment



14.4.3 Leiter im el. Feld und Influenz

Leiter: Ladungen sind frei beweglich
Isolator: Ladungen sind ortsfest

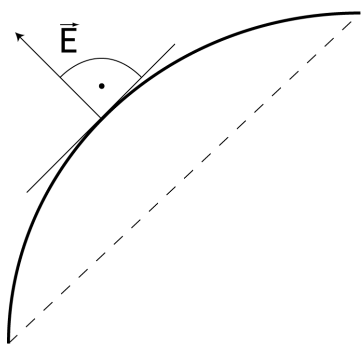
1. $\vec{E} = 0$ im Inneren des Leiters



Denn falls $\vec{E} \neq 0$: $\vec{F} = q\vec{E}$ verschiebt Ladung bis $\vec{E} = 0$!

2. Es folgt, sich bei einem Leiter die (Netto-)Ladungen <u>immer</u> an der Oberfläche befinden $\Rightarrow$ Flächenladungsdichte $\boxed{\sigma = \frac{dQ}{dA}}$

3. $\vec{E}$ immer $\perp$ auf Leiteroberfläche

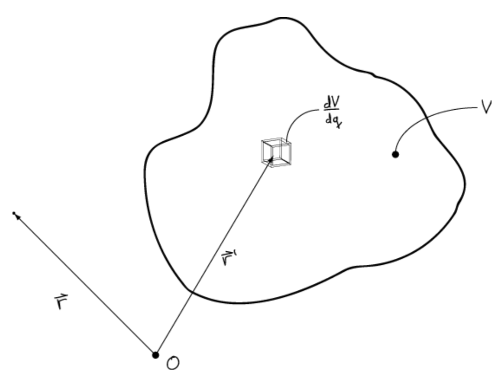


(Denn falls $\vec{E}_{\shortparallel} \neq 0$: Verschiebung der Ladung bis $\vec{E}_{\shortparallel} = 0$!)

<u>Influenz</u>: Räumliche Ladungstrennung in el. Leitern durch äußeres $\vec{E}$-Feld (Kontaktlos!), so dass das Innere des Leiters Feldfrei ist!

14.5 Kontinuierliche Ladungsverteilung

Betrachte Ladungsverteilung über endliches Volumen $V = \int_V dV$



(∗)

Ladungsdichte: $\rho(\vec{r}) = \frac{dq(\vec{r})}{dV}$
Gesamtladung: $Q = \int_V dq = \int_V \rho(\vec{r}) dV$

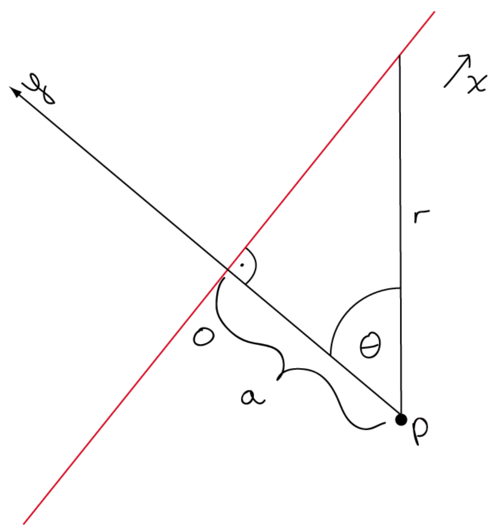
Flächenladungsdichte: $\sigma = \frac{dq}{dA}$

Integral über geschlossene Oberfläche: $A = \oint_A dA$

1-dim Ladungsdichte: $\lambda = \frac{dq}{dl}$
Länge $l = \int_l dl'$
für $(*)$:

$$\begin{aligned}
d\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \cdot (\vec{r}-\vec{r}') \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \\
\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV \left\{ \frac{dq}{dV} \cdot \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right\} \\
&= \underline{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV \left\{ \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \cdot (\vec{r}-\vec{r}') \right\}}
\end{aligned}$$

Beispiel: unendlich langer geladener Draht



Ziel: Berechnung des $\vec{E}$-Feldes im Punkt P.
Betrachte einen kleinen Abschnitt des Drahtes der Länge dx. Dieser hat dann die Ladung dq mit:

$$dq = \lambda dx$$

wobei $\lambda = \frac{dq}{dx}$ die lineare Ladungsdichte ist.
Die Symmetrie des Problems implitziert außerdem: $E_x = E_z = 0$.

Für die y-Komponente beachte, dass:

$$\frac{dE_y}{|d\vec{E}|} = \frac{a}{r} = \cos\theta \;\Rightarrow\; dE_y = |d\vec{E}|\cos\theta$$

Nun kann aber das Drahtstück mit der infinitesimalen Länge dx als Punktladung angesehen werden. Das heißt:

$$|d\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2(\theta)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda dx}{r^2(\theta)}$$

Nun muss $r(\theta)$ ermittelt werden. Dafür benutzen wir nochmal:

$$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{r(\theta)} \Rightarrow r(\theta) = \frac{a}{\cos\theta}$$

Damit wird dE_y dann:

$$dE_y = |d\vec{E}|\cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda dx}{r^2(\theta)}\frac{a}{r(\theta)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{a\lambda dx}{r^3(\theta)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{a\lambda dx}{a^3}cos^3\theta$$

Um jetzt aufzuintegrieren muss zuletzt noch die Abhängigkeit von x und θ berücksichtigt werden:

$$\tan\theta = \frac{x}{a} \;\Rightarrow\; \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{dx}{a} \;\Rightarrow\; dx = \frac{ad\theta}{\cos^2\theta}$$

Das in den Ausdruck für dE_y liefert dann:

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{a\lambda dx}{a^3}cos^3\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{a^2\lambda d\theta}{a^3\cos^2}cos^3\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda d\theta}{a}\cos\theta = \frac{\lambda}{4a\pi\epsilon_0}cos\theta d\theta$$

Nun muss über den ganzen Stab integriert werden, sprich von $x = -\infty$ bis $x = \infty$. Nun ist ja $\theta = \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$ und $a > 0$. Also:

$$x = \pm\infty \;\Rightarrow \theta = \arctan(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$$

Damit gilt nun:

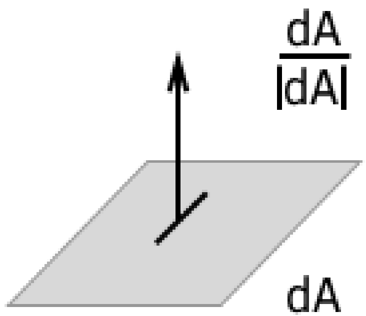
$$E_y = \int_{\text{Draht}} dE_y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\lambda}{4a\pi\epsilon_0}cos\theta d\theta = \frac{2\lambda}{4a\pi\epsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{2a\pi\epsilon_0}\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{a}$$

14.6 Elektrischer Fluss und Satz von Gauß

Zusammenhang zwischen "Elektrischem Fluss" (Feldliniendurchsatz) durch eine Oberfläche und der eingeschlossenen Ladung.

$\Longrightarrow$ Allgemeinere Formulierung des Coulomb-Gesetzes

14.6.1 Definition: Fluss ϕ eines Vektorfeldes $\vec{E}$ durch einen Fläche A:



$\phi = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$

$d\vec{A}$:Richtung $\perp$ Fläche (nach Außen)
Richtung der Flächennormale

Betrag dA: Größe der Fläche

Spezialfälle $\vec{E} - homogen\ \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot dA \cdot \cos\alpha$

- $\alpha = 0 : \vec{E} \parallel d\vec{A} : \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot dA$
- $\alpha = 90 : \vec{E} \perp d\vec{A} : \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$

14.6.2 Gauß'scher Satz

$$\boxed{\phi = \oint\limits_{\substack{A \\ geschlossen}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{eingeschlossen}}{\epsilon_0}}$$

Der elektrische Fluss durch einer belieben geschlossenen Oberfläche hängt weder von der Form der Oberfläche, noch von der Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r})$ ab, sondern nur von der eingeschlossenen Gesamtladung Q.

Mathematisch gilt:

$$\oint\limits_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_V div \cdot \vec{E} \cdot dV = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \cdot dV$$

Nach Gauß aber auch:

$$\oint\limits_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V dQ = \int_V \varrho(\vec{r}) dV$$

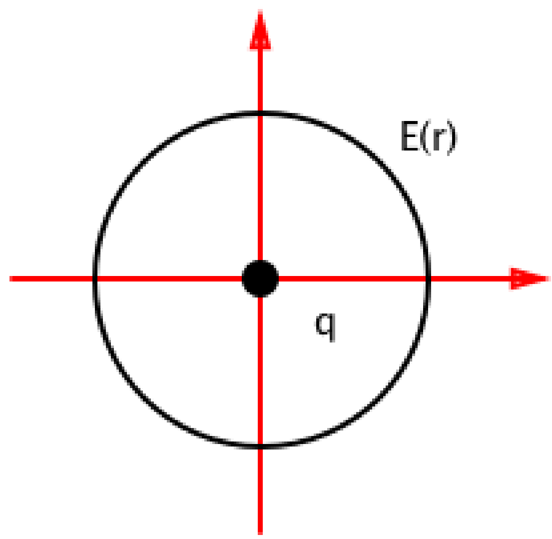
Zusammen also:

$$\int_V \vec{\nabla}\vec{E} dV = \oint\limits_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_V \frac{\varrho(\vec{r})}{\epsilon_0} dV \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\varrho(\vec{r})}{\epsilon_0}}$$

Die Ladungsverteilung im Raum ist die lokale Quelle ($\varrho(\vec{r}) > 0$) bzw. Senke ($\varrho(\vec{r}) < 0$) des elektrischen Feldes.

14.6.3 Beispiele

(i) Feld einer Punktladung



- Geeignete Wahl von A: Kugeloberfläche
- Symmetrie: $\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \cdot \hat{e}_r$
- $\implies \vec{E} \parallel d\vec{A}$

Der elektrische Fluss ist:

$$\phi = \oint_A \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \oint_A E(r)\hat{e}_r \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \oint_A E(r)\mathrm{dA}$$

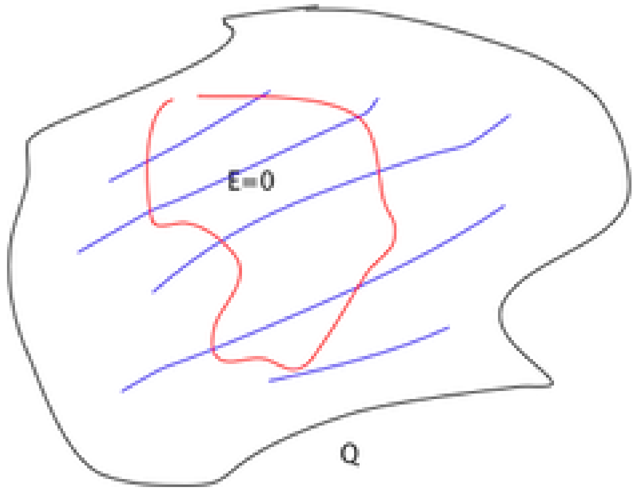
Nun ist aber E nur von r abhängig und im Integral sit $r = const$. Damit also:

$$\phi = E(r) \oint_A \mathrm{dA} = 4\pi r^2 E(r)$$

Der Satz von Gauß liefert nun:

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \phi \stackrel{!}{=} \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}}$$

(ii) Ladung auf beliebig geformten Leitern



$\phi = \oint_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} = 0$

(iii) Feld einer leitenden Kugel mit Ladung Q: (Ladung auf der Oberfläche)

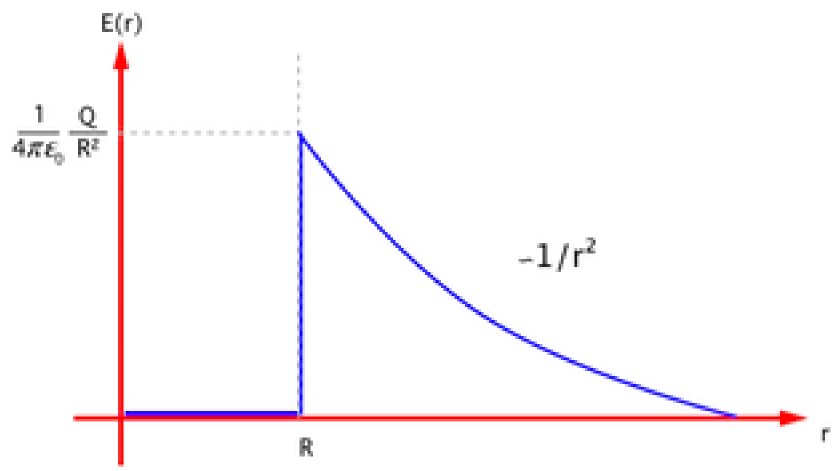
Aus der Symmetrie des Problems ist ersichtlich: $\vec{E}(\vec{r}) = E(\vec{r}) \cdot \hat{e}_r$

Im Inneren, also für $r < R$, gilt nach der vorherigen Überlegung: $E = 0$
Außerhalb, also $r > R$, wird als Gaußfläche wieder eine Kugel mit Radius r gewählt. Dan gilt nach Gauß:

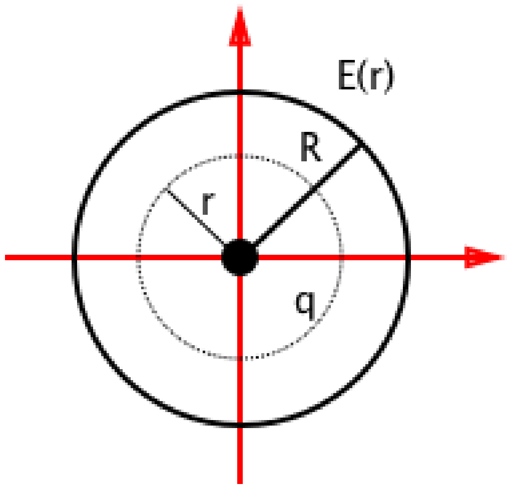
$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \phi = \oint_A E(r)dA = E(r)4\pi r^2 \;\Rightarrow\; E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

Zusammen kann $E(r)$ also abschnittsweise angegeben werden:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & ,r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} & ,r > R \end{cases}$$



(iv) Feld einer homogen geladenen Kugel



Für die Ladungsdichte ϱ als Funktion vom Abstand r vom Kugelmittelpunkt heißt das:

$$\varrho = \begin{cases} 0 & , r > R \\ \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} & , r < R \end{cases}$$

Als Gaußoberfläche wird wieder eine Kugel genommen. Auch wird wieder eine Fallunterscheidung gemacht:
Innerhlab der Kugel und außerhalb der Kugel

Zunächst wird analog zu vorher der Elektrische Fluss ausgrechnet und der Satz von Gauß benutzt:

$$\phi = \oint_A \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \;\Rightarrow\; E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{in}}{r^2}$$

Um auf Q_{in} zu schließen müssen wir nur die Ladungsdichte über das Volumen des Gaußvolumens integrieren:

1. $r > R$.

$$Q_{in} = \int_{V_{Gau}} \varrho(\tilde{r}) dV = \int_{0 \leqslant \tilde{r} \leqslant R} \varrho(\tilde{r}) dV + \int_{R \leqslant \tilde{r} \leqslant r} \varrho(\tilde{r}) dV$$

Aber im zweiten Integral ist $\varrho = 0$ und somit fällt dieses Integral raus.

$$\Rightarrow Q_{in} = \int_{0 \leqslant \tilde{r} \leqslant R} \varrho(\tilde{r}) dV = \int_{0 \leqslant \tilde{r} \leqslant R} \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} dV = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int_{0 \leqslant r \leqslant R} dV = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi R^3 = Q$$

Das ist auch vollkommen klar, denn die gesamte Ladung ist ja in der Kugel verteilt und die Gaußkugel enthält diese.

2. Falls $r < R$:
   Da hier nur innerhalb der Kugel integriert wird, ist ρ konstant und es reicht ein Integral:

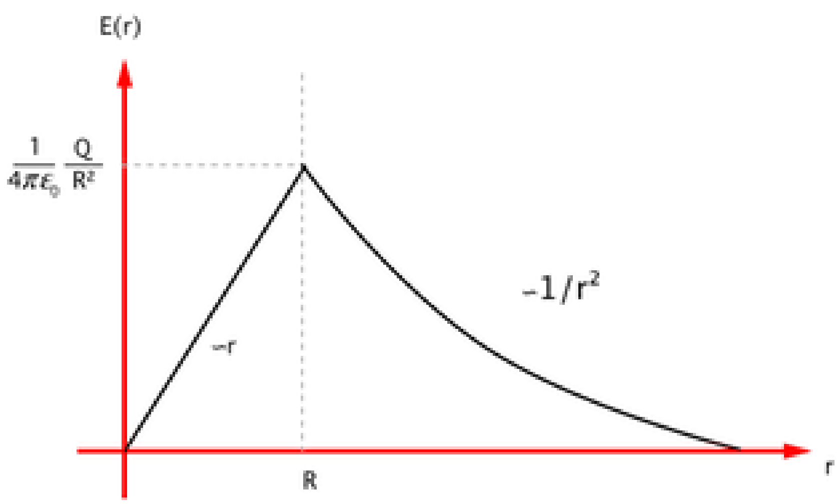
$$Q_{in} = \int_{V_{Gau}} \varrho(\tilde{r}) dV = \int_{V_{Gau}} \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} dV = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int_{V_{Gau}} dV = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi r^3 = Q\frac{r^3}{R^3}$$

Nun kann dies in den Satz von Gauß eingesetzt werden:

$$E(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} & , r > R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2} Q\frac{r^3}{R^3} & , r < R \end{cases}$$

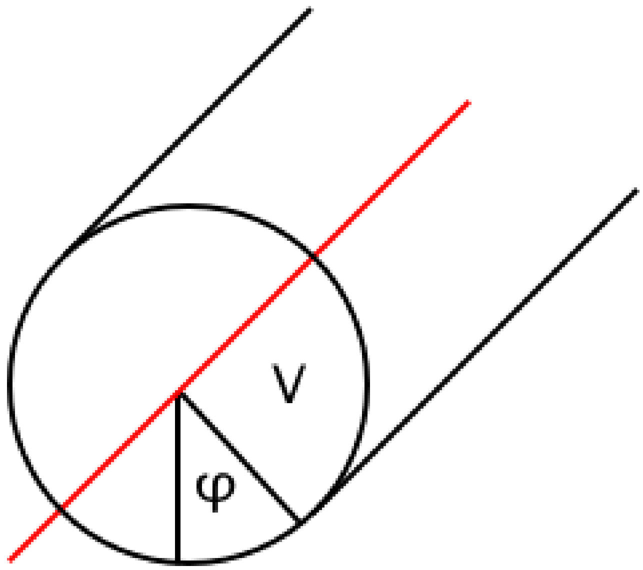
Oder zusammengefasst:

$$\boxed{E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{Q}{r^2} & , r > R \\ \frac{Q}{R^3} r & , r < R \end{cases}}$$



Es gilt also, dass man Von Außen nicht feststellen kann, ob die geladene Kugel massiv oder hohl ist (Leiter oder homogen geladener Isolator)!

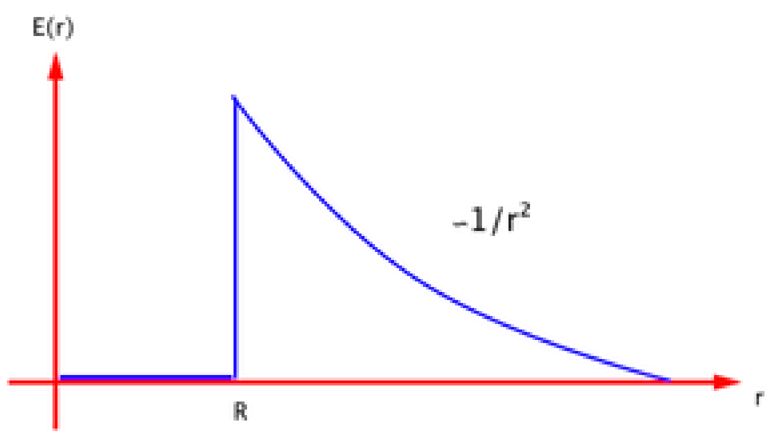
(v) Unendlich lnager homogen geladener Draht



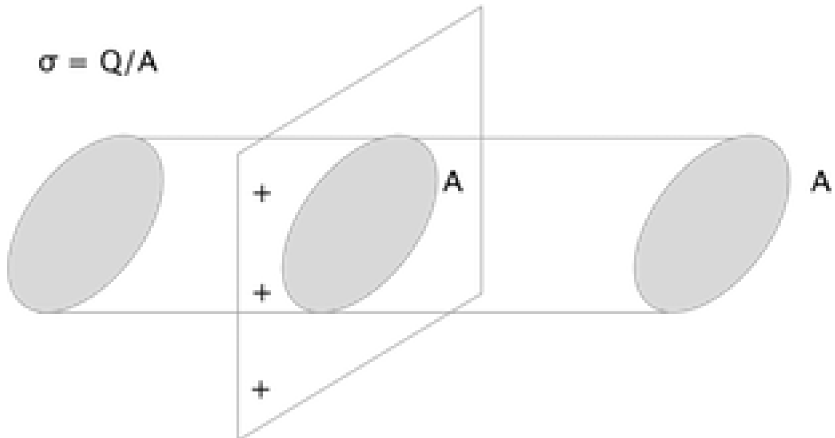
Zylinderkoordinaten:

$\lambda = \frac{dq}{dL} = (\frac{Q}{R}) \leftarrow$ als endliche lange l
$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(r) = E(r) \cdot \hat{e}_r$
$\phi = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_A E(r) dA = E(r) \oint_A da = E(r) \cdot 2\pi rl$
$\phi = \frac{Q_{ges}}{\epsilon_0} \implies E(r) = \frac{Q_{ges}}{2\pi\epsilon_0 \cdot rl}$
$E(r) = \underline{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}}$

(vi) Unendlich langer, homogen geladener leitender Zylinder



(vii) Feld einer homogen geladener unendliche leitenden Ebene



$\sigma = \frac{Q}{A}$
$\phi = \oint\limits_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{A,stirn} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{A,mantel} \vec{E} \cdot d\vec{A}$
$\vec{E}$-Ebene
$\implies$ Beitrag Über Mantelfläche verschwindet ($d\vec{A} \perp \vec{E}$)
$\phi = \oint_A \vec{E}d\vec{A} = 2 \cdot E \cdot A_{stirn} \overset{G.S.}{=} \frac{Q}{\epsilon_0}$
$\implies E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

14.7 Das elektrische Potenzial

Coulombkraft: Zentralkraft, konservativ
$\implies \exists$ potentielle Energie (siehe 14.3)
für Ladungen q_0 im $\vec{E}$-Feld gilt:

$$\boxed{E_{pot}(\vec{r}) = \int_\infty^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} = -q_0 \cdot \int_\infty^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Das elektrische Potenzial $\varphi(\vec{r})$ ist definiert als potentielle Energie pro Ladung:

$$\boxed{\varphi = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{q_0} E_{pot} \cdot (\vec{r})}$$

→ Beachte: Arbeit ist unabhängig vom Weg!
Verschiebe q_0 von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$; die benötigte Arbeit ist:

$$\begin{aligned} W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = q_0 \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\ \underline{= q_0 \cdot (\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2))} \end{aligned}$$

$\varrho(\vec{r})$ nur bis auf Integrationskonste bestimmt!
Die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten:

$U = \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) = \frac{W_{12}}{q_0}$ heißt elektrische Spannung!

$q_0 \cdot U$ ist die Arbeit, die man braucht um q_0 von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ zu bringen!

$[U] = 1Volt = 1V = 1\frac{N}{C}$

Beachte: $\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) = -\oint \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0!!$

Typische Spannungen:

$$\begin{aligned} Batterie &: 1,5V \\ Stadtnetz &: 220V \\ berlandleitung &: 250kV \\ Blitz &: 10 - 15MV \end{aligned}$$

Beispiele: (i) Punktladung:

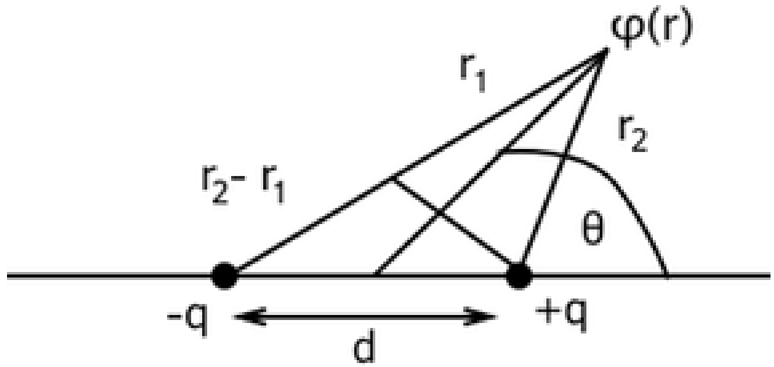
$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= -\int \vec{E}(\vec{r'}) \cdot d\vec{r'}; \vec{E} = E \cdot \hat{e}_r \\ &= -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{\infty}^{r} \frac{d\vec{r}}{r^2} \end{aligned}$$

$\underline{\varphi(\vec{r}) = \varphi(r) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \cdot r}}$

Äquipotenzialflächen: r=const.
(in 3D: Kugelflächen
in 2D: Kreise)

(ii) Mehrere Punktladungen

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \tilde{\vec{r}}_i|}$$



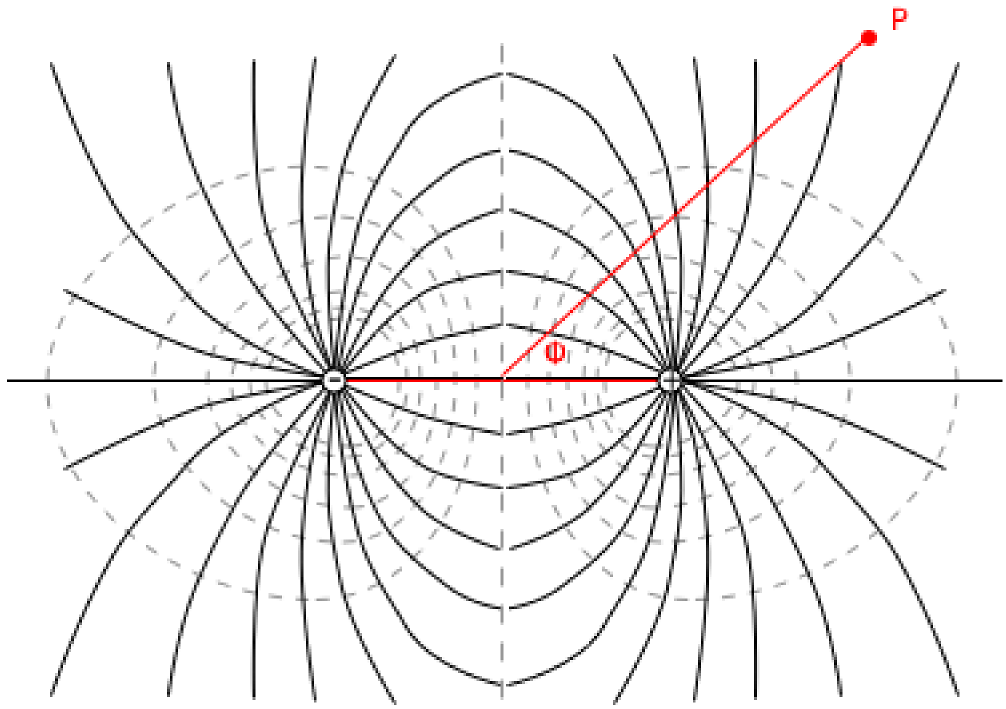
$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot (\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} - \frac{r_2 - r_1}{r_1 \cdot r_2}$

$$\text{für } \underbrace{d \ll r}_{\text{Fernfeld}} : r_1 \cdot r_2 = r^2$$

$$r_2 - r_1 = d \cdot \cos\theta$$

$\varphi(\vec{r}) = \varphi(r) = \frac{q \cdot d \cdot \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} = \frac{\varphi \cdot \cos\theta}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$

Potenzialverteilung:



(iii) Kontinuierliche Ladungsverteilung:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{\tilde{V}} \frac{dQ}{|\vec{r} - \tilde{\vec{r}}|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{\tilde{V}} d\tilde{V} \left\{ \frac{\varphi(\vec{r})}{|\vec{r} - \tilde{\vec{r}}|} \right\}$$

14.7.1 Elektrisches Feld und Potenzial

$\varphi(\vec{r})$: Skalare Größe, manchmal einfache zu berechen als $\vec{E}(\vec{r})$

$\Longrightarrow$ $\vec{E}(\vec{r})$ aus $\varphi(\vec{r})$ bestimmen?

$$\varphi = \varphi(\vec{r}) = \varphi(x,y,z); \vec{E} = \vec{E}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

$$d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{d\varphi}_{\text{vollständiges Differential}} = -\vec{E}d\vec{r} = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz)\ (*)$$

$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cdot dz$ (**)

(*),(**): $\left\{ E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right\} \implies \underline{\vec{E} = -grad\varphi}$

$\vec{E}$ zeigt in Richtung des betragsmäßig größten Anstiegs von φ, allerdiings in abnehmende Richtung.

Äquipontenziallinie: $d\varphi = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$
längst einer solchen Linie ist: $d\varphi = 0 \implies -\vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$
$\implies \underline{\vec{E} \perp d\vec{r}}$

Beispiel: Punktladung

$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$

Kugelkoordinaten, Kugelsymmetrie: $\vec{E} = -\nabla \cdot \varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} \cdot \hat{e}_r$

$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \implies \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \hat{e}_r$

14.7.2 Poisson- und Laplace Gleichung

Gauß'scher Satz: $div\vec{E} = \vec{\nabla} = \frac{\varrho}{\epsilon_0}$
Potenzial: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$

Einsetzen: $\boxed{divgrad\varphi = \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}}_{\Delta} \cdot \varphi = -\frac{\varrho}{\epsilon_0}}$

$\Delta\varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \cdot \varphi$

Spezialfall: $\varphi = 0 \implies$ Laplace-Gleich $= \underline{\Delta\varphi = 0}$

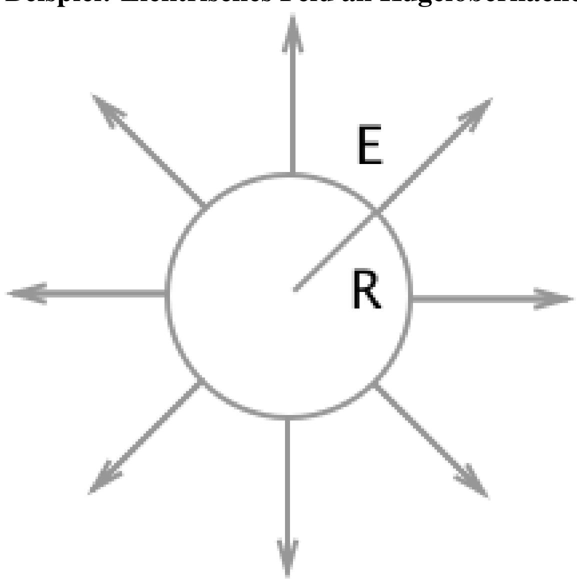
14.8 Elektrisches Feld in der Umgebung von Leitern

Gauß'scher Satz: $\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 \implies \varrho = 0$
(Leiter im Inneren Feldfrei!)

Potenzial: $\varphi(r) = -\int \vec{E} d\vec{r} = \text{const.}$

$\implies$ <u>Leiteroberfläche ist Äquipotenzialfläche</u>

Beispiel: Elektrisches Feld an Kugeloberfläche:

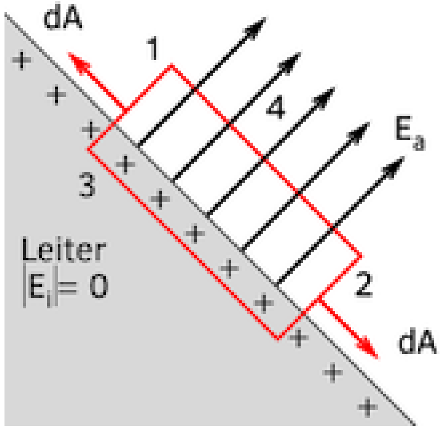


$E_\perp$

für jede Leiteroberfläche berechenbar:

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Beispiel:



Fläche:
1,2: $\vec{E} \perp d\vec{A} \implies$ "0"
3: $\vec{E} = 0 \implies 0$
4: $E \cdot A = \frac{Q}{\epsilon_0}$

$\implies |\vec{E}| = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \sigma$
$\implies$ Die Größe von $E_\perp$ an der Oberfläche ist $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$!

Weiter mit der Kugel: $E_a = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{4\pi \cdot R^2}$

$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot R} \implies E_a = \frac{\varphi}{R}$

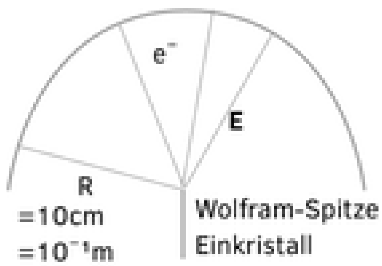
Bei gegebenen Potenzial ist Feldstärke an der Oberfläche umgekehrt proportional zum Kreis…radius!

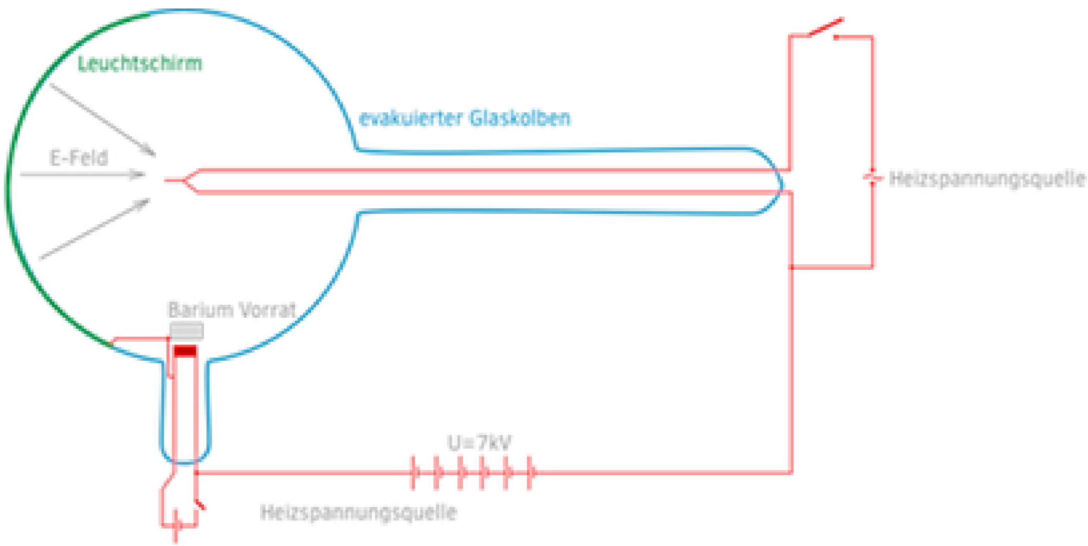
Lokal: $|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\varphi}{R}$

R Klein $\implies$ φ groß, σ groß

14.8.1 Anwendungen:

Feldemmissions-Elektronenmikroskop:



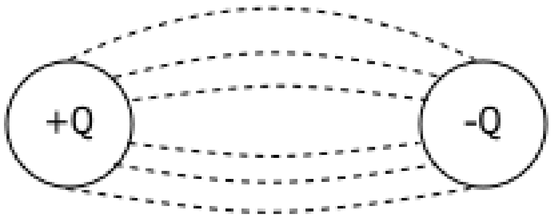


$|\vec{E}| = \frac{\varphi}{R} = \frac{10kV}{10^{-7}m} = 10^{1}1\frac{V}{m}$ an der Wolfram-Spitze
Bewegung der Elektronen Entlang der Feldlinien

- vergrößertes Bild der Wolfram-Spitze
- Vergrößerung: $\frac{R_{Schirm}}{R_{Spitze}} \approx \underline{10^6}$
- so erstmals Atome sichtbar gemacht
- Objekte $< 10^{-9}m \implies < 1mm$!

14.8.2 Elektrisches Feld zwischen geladenen Leitern

Anwendung: 2 isolierte, entgegengesetzt geladene Leiter, ($\Longrightarrow$ Kondensator)



Coulomb: $|\vec{E}| \propto |Q|$

Spannung: $U_{21} = \varphi_2 - \varphi_1 = -\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} \propto Q$ ist unabhängig vom Weg!

$\Longrightarrow Q \propto U$

Proportionalitätskonstante?

$\boxed{Q = C \cdot U}$

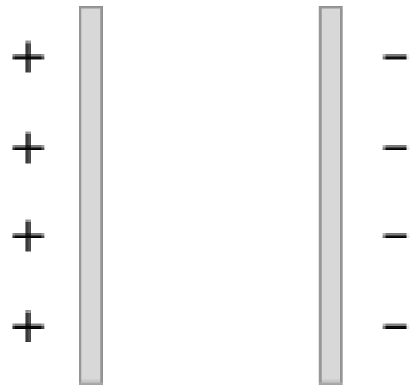
C:Kapazität

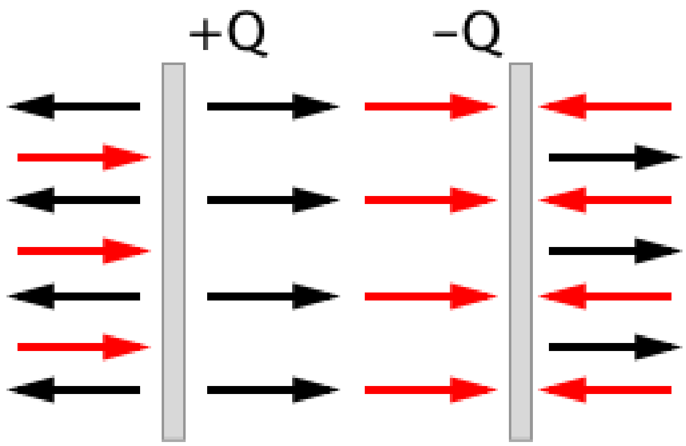
Einheit $[C] = \frac{1C}{1V} = 1F$ (Farad)

$$\begin{aligned} typisch: 10^{-6}F &= 1\mu F \\ 10^{-9}F &= 1nF \\ 10^{-12}F &= 1pF \end{aligned}$$

14.8.3 Berechnung der Kapazität

Erinnerung: homogen geladene Platte: $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

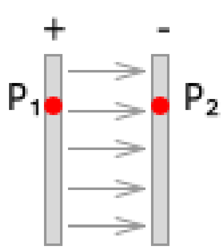




Im Außenraum: Kompensation
Im Innenraum: Addition

Im Innenraum: $|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

14.8.4 Feldstärke im Inneres eines Plattenkondensator:



Seicherung von Ladungen auf voneinander isolierten leitenden Platten, Aufladung über Spannungsquelle oder Batterie.

Spannungspotenzialdifferenz: $U_{21} = p_2 - p_1 = \int \vec{F} d\vec{r} = E \cdot d$
$U = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot d = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot A} \cdot d$
mit $Q = C \cdot U$ folgt $\underline{C = \frac{\epsilon_0 A}{d}}$

$\boxed{|\vec{E}| = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot A}}$ ist unabhängig von d

$\boxed{C = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d}}$ ist eine rein geometrische Größe

$d \uparrow \implies C \downarrow \implies U \uparrow$

$d \downarrow \implies C \uparrow \implies U \downarrow$

14.8.5 Realisierung von Kondensatoren:

Großes C: A groß, d klein
Beidseitiges Bedampfte dünne Kunststofffläche, dann aufrollen, $\implies$ Kunststofffolienkondensator.

Größenordnung:

$$\left.\begin{aligned} d &= 1mm \\ A &= 1cm^2 \end{aligned}\right\} C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &= 8,8 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2} \frac{10^{-4} m^2}{10^{-3} m} \\ &= 0,9 \cdot 10^{-12} F \\ &\approx \underline{1pF} \times \text{ Anzahl der Lagen} \end{aligned}$$

14.8.6 Energie eines aufgeladenen Kondensators

Kondensator C sie mit Ladung q aufgeladen: $U = \frac{q}{c}$
Die Arbeit, die zum Aufbringen einer weiteren Ladung benötigt wird, hängt vom

aktuellen Ladungszustand ab:

$$\begin{aligned} dW &= dq \cdot U(q) \\ &= dq \cdot \frac{q \cdot d}{A \cdot \epsilon_0} \end{aligned}$$

$W = \int_0^Q dW = \frac{d}{A\epsilon_0} \int_0^Q q/cdotd \cdot q = \frac{1}{2}\frac{1}{C}Q^2 = \underline{\frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2}$

Energiedichte: $\underbrace{\frac{W}{V}}_{A \cdot d} = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 A}{d}\frac{1}{Ad}E^2 d^2 = \underline{\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2}$

(Dieses Ergebnis gilt auch für andere Feldverteilungen, nicht nur im Plattenkondensator)
→ Feldenergie $\propto E^2$ (später wichtig!)

$\Longrightarrow$ wichtige Anwendung: Schnelle Entladung eines langsam aufgeladenen Kondensators $\Longrightarrow$ Kurzzeitig hohe Leistung!

Beispiele : Defibrilator, Blitzlicht. . .

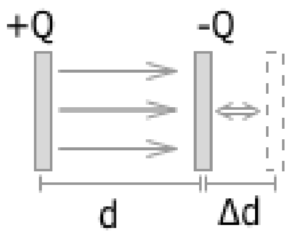
14.8.7 Entladen eines Kondensators

$C = 8 \cdot 20\mu F; U = 500V$
$W = \frac{1}{2} \cdot CU^2 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 10^{-5}F \cdot 25 \cdot 10^4 V^2$
$= \underline{20J}$
Entladung in <u>1ms</u> → <u>20kW</u>

Defibrilator: $100 - 800kW$

Fusionsanlage: Kondensatorbatteri ermöglichen W 10^6J
Entladung in 3ns
$\Longrightarrow P = 3 \cdot 10^{14}W$

14.8.8 Kraft zwischen Zwei Kondensatorplatten



Anziehungskraft zwischen entgegengesetzt geladenen Kondensatorplatten
$\Longrightarrow$ Arbeit gegen Kraft F, um Abstand um Δd zu erhöhen.

Volumenänderung:

$$\Delta V = A \cdot \Delta d$$
$$\Delta W = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 |\vec{E}|^2 \cdot A \cdot \Delta d$$
$$\Delta W = F \cdot \Delta d \implies \underline{F} = \frac{\epsilon_0}{2} \cdot |\vec{E}|^2 \cdot A = \underline{\frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{V}{d}\right)^2 \cdot A \propto V^2}$$

14.8.9 Kraft zwischen Kondensatorplatten

$U = 2000V; d = 10mm; = 30cm \implies A = 0,071m^2$

$F = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{V}{d}\right)^2 \cdot A = \ldots = 0,0197N$

Die äquivalente Masse wird von der Waage angezeigt:

$M = \frac{F}{g} = 1m29g(\text{ gemessen} : m = 1,33g)$

Verdopplung von U auf $4000V \implies 4-$Fache Masse.

(gemessen: $m \approx 5,22g$)

14.9 Isolatoren (Dielektrikum) im elektrischen Feld

- Isolator $\hat{=}$ Nichtleiter
- Ladungen nicht frei beweglich, sondern nur lokal gegeneinander verschiebbar (polarisierbar)

Experiment: Dielektrikum im Kondensator

$Q = C_0 \cdot U_0,$ $U_0 = 250V$
$Q' = Q = C_{diel} \cdot U_{diel},$ $U_{diel} = 65V$

$\implies \frac{U_0}{U_{diel}} = \frac{C_{diel}}{C_0} := \epsilon = \frac{|\vec{E_0}|}{|\vec{E}_{diel}|}$

Definition: Relative Dielektrizitätskontante $\epsilon := \frac{C_{diel}}{C_0} > 1$

[Im Skript steht "Tabelle"]

14.9.1 Mikroskopische Deutung und elektrische Suszeptibilität

Reduzierung des elektrischen Feldes bei Einführung eins Dielektrikums. Grund: Dielektrium wird polarisiert!

Gesamtfeld zwischen den Platten:
$\vec{E} = \vec{E_0} + \vec{E}_{pol} \leftarrow$ entgegengesetzte Orientierung

Verschiebungspolarisation: $Q_p : Polarisationsladung$
F=K$\cdot x \implies E = \frac{F}{q} = \frac{K}{q} \cdot x \implies x = \frac{q}{K} \cdot E$

Dipolmoment: $\vec{p} = q \cdot \vec{x} = \frac{q^2}{K} \cdot \vec{E} = \alpha \cdot \vec{E}$ (Polarisierbarkeit)

Markroskopisch: Polarisation: $\vec{P} = \underbrace{\frac{N}{V}}_{Teilchendichte} \vec{p} = n \cdot \alpha \cdot \vec{E}$(mikroskopisch)

[
[

$\chi_e : elektrischeSuszeptibilitt :\underline{\chi_e = \epsilon - 1}$

Orientierungspolarisation

- triff auf, wenn Dielektrikum schon aus Dipolen bestehen (permaente Dipole)
- Orientierungspolarisation ist temperaturabhängig (Ausrichtung nimmt bei hohentemperaturen ab)

Dielektrische Verschiebungsdichte

$$:=\epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$$

[
[

$[D] = 1\frac{C}{m^2}$

$\oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q_{frei}+Q_p}{\epsilon_0} = \frac{Q_{frei}}{\epsilon\epsilon_0}$
$\implies \oint \epsilon\epsilon_0 \vec{E} d\vec{A} = Q_{frei}$
$= \int_V div \underbrace{(\epsilon\epsilon_0 \vec{E})}_{\vec{D}} dV = \int \varrho_{frei} dV$
$\implies div\vec{D} = \varrho_{frei}$

vergleiche: $div\vec{E} = \frac{\varrho_{ges}}{\epsilon_0}$

14.9.2 Nachtrag: Schaltungen mit Kapazitäten

Verschaltung mehrer Kapazitäten C$_i$.
$WiegroistdanndieGesamtkapazitt$?

Beispiele: a) Parallelschaltung: Gleiche Spannung an beiden Kapazitäten.

$$\begin{aligned} Q_{ges} = Q_1 + Q_2 &= C_1U + C_2U \\ &= (C_1 + C_2)U \\ &= C_{ges}U \end{aligned}$$

$$\boxed{C = \sum_{i=1}^{n} C_i}$$

b) Reihenschaltung

Anschauung: Nur die äußeren Platten werden durch Verbindung unt Spannungsquelle aufgeladen, die anderen Platten erhalten ihre Ladung durch Influenz $\implies$ alle Ladungen sind … gleich groß.
$\implies Q_1 = Q_2 = Q$

Spannungen verteilen sich auf die Kapazitäten gemäß:
$U_{=}\frac{Q}{C_i}, U_1 + U_2 = U$

$U = \frac{Q}{C_{ges}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q \cdot (\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2})$

$$\implies \boxed{\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}, \qquad \boxed{C_{ges} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}}$$