

# Kapitel 14 - Statische elektrische Felder

Johannes Bilk  
me@talachem.de

May 8, 2016

## Contents

<b>14 Statische Elektrische Felder</b>	<b>2</b>
14.1 Elektrische Ladungen	2
14.1.1 Reibungselektrizität	2
14.1.2 Ladung ist eine skalare Größe	2
14.1.3 Quarks	4
14.1.4 Entdeckung und Bestimmung der Elementarladung	4
14.2 Kräfte zwischen Ladungen und das Coulomb-Gesetz	4
14.3 Potenzielle Energie einer Ladungsverteilung	4
14.4 Erzeugung el. Felder durch Ladungen	5
14.4.1 Feld einer Punktladung:	5
14.4.2 Feld einer Verteilung von Punktladungen	5
14.4.3 Leiter im el. Feld und Influenz	7
14.5 Kontinuierliche Ladungsverteilung	8

## 14 Statische Elektrische Felder

### 14.1 Elektrische Ladungen

→ Ab dem 17. Jahrhundert: Ursache für "elektrische Phänomene"; "neuartiger Stoff", elektrische Ladung

#### 14.1.1 Reibungselektrizität

- Zwei Arten von "elektrischen Zuständen" sind erzeugbar:
  - Gleichartige Zustände  $\implies$  Abstoßung
  - Ungleichartige Zustände  $\implies$  Anziehung
- Charles Du Fay (1730): positiv/negativ elektrische Ladung
- Benjamin Franklin (1750): Über-/Unterschuss an "elektrischen Fluiden"
- Lichtenberg (1778): Zuordnung der Polarität

Hargummi stab: reiben mit Pelz, Wolle: -  
Glas, Plexiglas: reiben mit Seide: +

Reibezeug: entgegengesetzte Polarität  $\implies$  Ladungstrennung, nicht etwa Ladungserzeugung.

Grundsätzliches Messprinzip: Elektroskop:

- Elektrometer → quantitative Messung
- "Löffeln"; d.h. portionsweise Übertragung von Ladungen ist möglich
- Elektropendel:  $\implies$  periodisches Umladen eines "Kugelpendel"

#### 14.1.2 Ladung ist eine skalare Größe

Einheit 1C = 1 Coulomb, SI

- Zu jedem geladenen Elementarteilchen gibt es ein Elementarteilchen mit entgegengesetzter Ladung (→ Ladungssymmetrie)
- Die Gesamtladung eines abgeschlossenen Systems bleibt erhalten (→ Ladungserhaltung)
- Beispiel: Produktion eines  $e^+e^-$ -Paares;  $E_\gamma \geq 1,02 \text{ MeV}$

Nachweis: Blasenkammer im Magnetfeld:

Umkehrung: "Zerstrahlung" von Positronen;  $E = m \cdot c^2$

- Ladungsträger haben stets eine Masse
- Ladung kann nicht (im Gegensatz zur Masse) in Energie umgewandelt werden, bleibt auch bei Zerfallsprozessen erhalten.
- Quantisierung der Ladung: Alle in der Natur vorkommenden Ladungen sind ganzzahlige Vielfache der Elementarladung:  $e_0 := 1,602 \cdot 10^{-19} \text{C}$ ;  $1 \text{C} = 1 \text{AS}$

### Beispiele von Ladungen

- Neutral:  $\gamma, \nu, n$
- einfach geladen:  $e^-, e^+, p, \bar{p}$
- zweifach geladen:  $He_2(2^+, Z : 2)$

### 14.1.3 Quarks

**Seit 60er Jahre** Nukleonen bestehen aus Quarks, diese haben "drittelzahlige Ladungen"

Up-Quarks:  $u : +\frac{2}{3}e_0$

Down-Quarks:  $d : -\frac{1}{3}e_0$

Proton:  $2u + d : 1 \cdot e_0$

Neutron:  $u + 2d : 0 \cdot e_0$

Quarks treten immer in 2er- oder 3er- Kombinationen auf.

### 14.1.4 Entdeckung und Bestimmung der Elementarladung

Robert Andrews Millikan(1868-1953): Öltröpfchenversuch (→ Anfängerpraktikum)

## 14.2 Kräfte zwischen Ladungen und das Coulomb-Gesetz

Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806)

1785: Messung der Kraft zwischen zwei Ladungen als Funktion des Abstands mit Hilfe einer Torsionswaage

$$\vec{F}_{12} = f \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|} = f \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \cdot \hat{r}_{12}$$

F ist definiert durch die Definition der Ladungseinheit:

Internationales Messsystem (SI):  $f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{(As)^2}{Nm^2}$$

ist Dielektrizitätskonstante des Vakuums oder elektrische Feldkonstante

$Q_1 \cdot Q_2 > 0$  : Abstossung

$Q_1 \cdot Q_2 < 0$  : Anziehung

## 14.3 Potenzielle Energie einer Ladungsverteilung

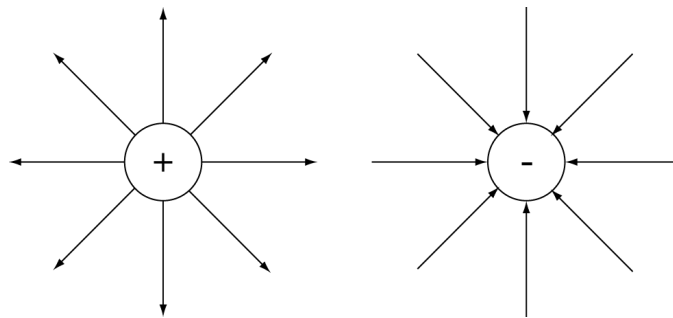
...

## 14.4 Erzeugung el. Felder durch Ladungen

### 14.4.1 Feld einer Punktladung:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \cdot r_{12} \hat{r}_{12} \\ &= q_1 \cdot \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{|\vec{r}_{12}|^2}}_{\text{Feld von } q_2} \cdot r_{12} \hat{r}_{12} \\ &= q_1 \vec{E}(\vec{r})\end{aligned}$$

- Felder einer Punktladung sind Zentralfelder mit Kugelsymmetrie
- Konvention: Feldlinien führen von positiver zu negativer Ladung



⇒ Punktladungsfelder sind inhomogen!

### 14.4.2 Feld einer Verteilung von Punktladungen

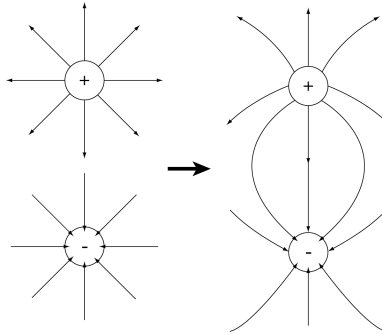
N Ladungen bei  $\vec{r}_i$

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

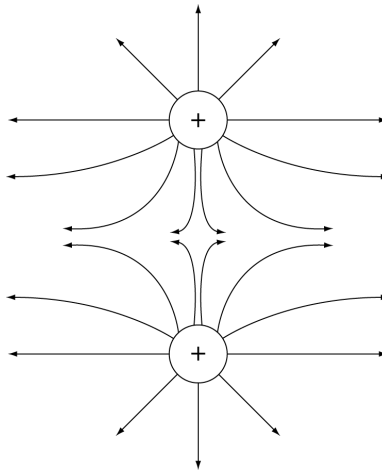
Ungestörte Superposition:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

2 Ladungen,  $q$  ;  $-q$  : Feld eines Dipols

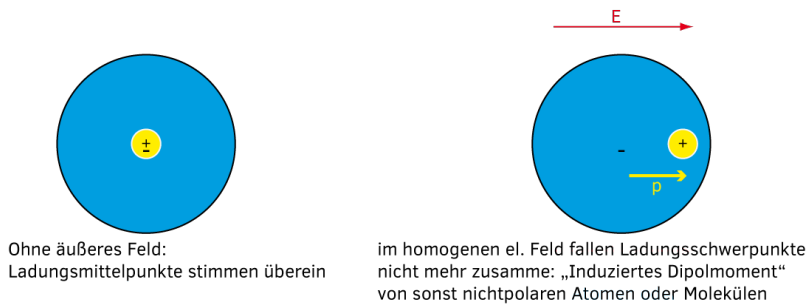


2 Ladungen:  $q$  ;  $q$

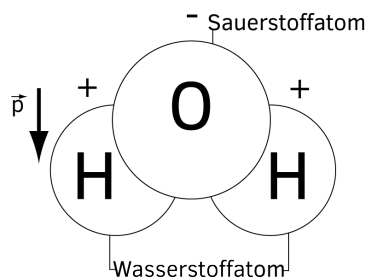


Beispiele für "natürliche Dipole":

### 1. Neutrales Atom im homogenen $\vec{E}$ -Feld



### 2. Polare Moleküle mit permanentem Dipolmoment

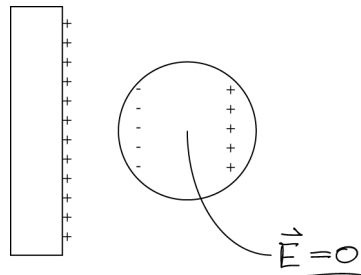


## 14.4.3 Leiter im el. Feld und Influenz

Leiter: Ladungen sind frei beweglich

Isolator: Ladungen sind ortsfest

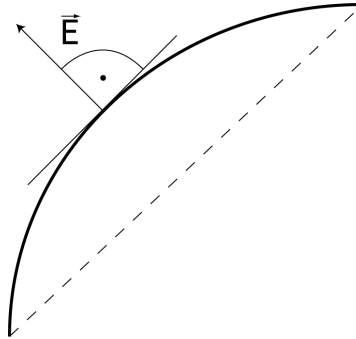
### 1. $\vec{E} = 0$ im Inneren des Leiters



falls  $\vec{E} \neq 0$ :  $\vec{F} = q\vec{E}$  verschiebt Ladung bis  $\vec{E} = 0$  !

2. Es folgt, sich bei einem Leiter die (Netto-)Ladungen immer an der Oberfläche befinden  $\Rightarrow$  Flächenladungsdichte  $\sigma = \frac{dQ}{dA}$

3.  $\vec{E}$  immer  $\perp$  auf Leiteroberfläche

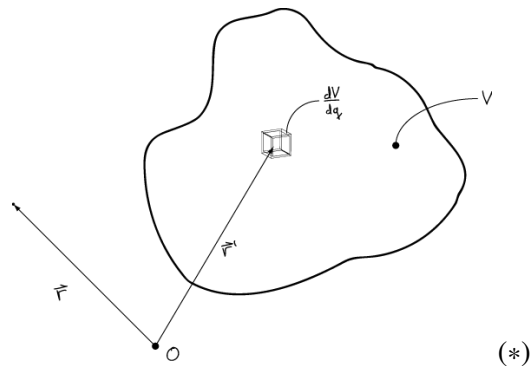


(falls  $\vec{E}_{||} \neq 0$ : Verschiebung der Ladung bis  $\vec{E}_{||} = 0$  !)

**Influenz:** Räumliche Ladungstrennung in el. Leitern durch äußeres  $\vec{E}$ -Feld (Kontaktlos!), so dass das Innere des Leiters feldfrei ist!

## 14.5 Kontinuierliche Ladungsverteilung

Betrachte Ladungsverteilung über endliches Volumen  $V = \int_V dV$



Ladungsdichte:  $\rho(\vec{r}) = \frac{dq(\vec{r})}{dV}$

Gesamtladung:  $Q = \int_V dq = \int_V \rho(\vec{r}) dV$



Flächenladungsdichte:  $\sigma = \frac{dq}{dA}$

Integral über geschlossene Oberfläche:  $A = \oint_A dA$

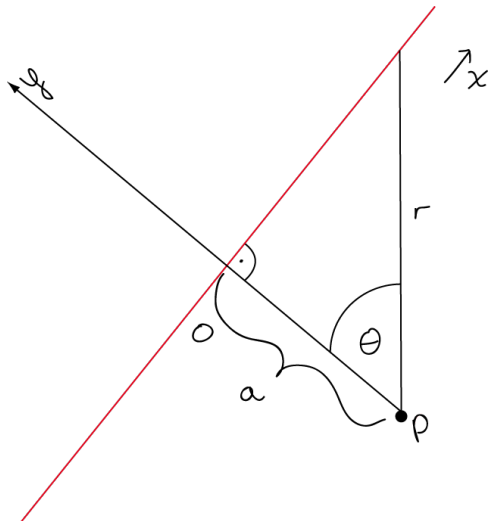
1-dim Ladungsdichte:  $\lambda = \frac{dq}{dl}$

Länge  $l = \int_l dl'$

für (\*) :

$$\begin{aligned} d\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \\ \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV \left\{ \frac{dq}{dV} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV \left\{ \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') \right\} \end{aligned}$$

**Beispiel:** unendlich langer geladener Draht



$$\frac{dq}{dx} = \lambda \text{ (lin. Ladungsdichte)}$$

$$\text{Symmetrie: } E_x = E_z = 0$$

$$E_y = E \cdot \cos(\theta)$$

$$dE_y = |d\vec{E}| \cdot \cos(\theta)$$

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2 \cdot \frac{\lambda \cdot dx}{r^2(\theta)} \cdot \cos(\theta) \quad ; \cos(\theta) = \frac{a}{r}$$

$$= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \cdot dx \cdot \underline{\cos^2 \theta} \cdot \cos \theta$$

$$\tan \theta = \frac{x}{a} \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = \frac{a}{\cos^2 \theta} \quad \Rightarrow dx = \frac{a}{\underline{\cos^2 \theta}} d\theta$$

$$\Rightarrow dE_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \cdot \frac{\cos \theta}{a} \cdot d\theta$$

$$E_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{a} \cdot \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \underline{\underline{\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{a}}}$$