Experimental Physik II Kapitel 16

author
email

May 23, 2016

Contents

16 Statische magnetische Felder

Experimente:

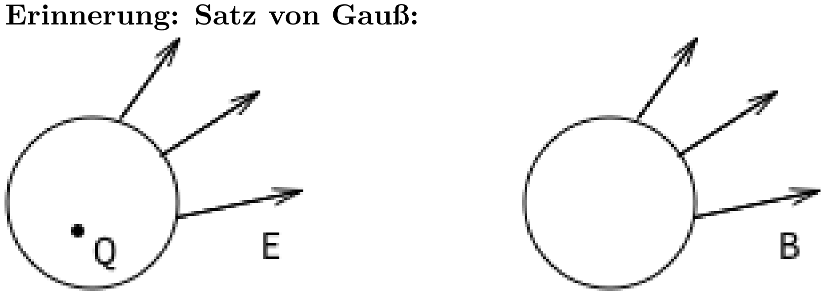
- gleichnamige Pole stoßen sich ab
- ungleichnamige Pole ziehen sich an

- Kraftwirkung $\propto \frac{1}{r^2}$ (1750; Coulomb)
- ähnliche Abstandsabhängigkeit für elektrische und für magnetische Kräfte
- zunächst kein Zusammenhang zwischen beiden Kräften erkennbar
- Experiment: Magnetische Pole treten nur paarweise auf.
  ($\Longrightarrow$ keine "magnetische Ladung")

Feldlinien sichtbarmachen durch Eisenfeilspitzen:

Magnetische Feldlinien sind stets geschlossen; es gibt keine isolierbaren Quellen oder Senken des

Erinnerung: Satz von Gauß:



$\vec{E}$: elektrische Feldstärke:
Gesamtfluss: $\phi_{el} = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$

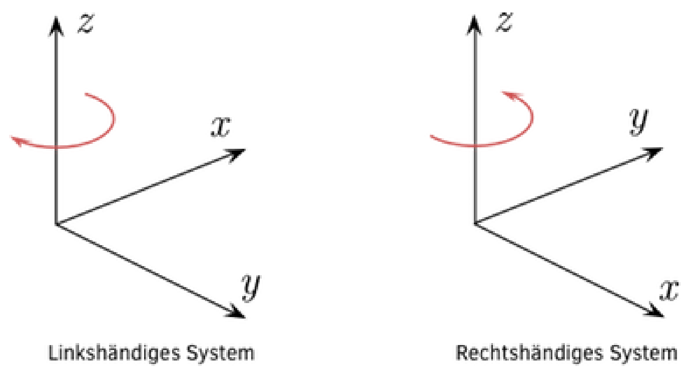
Magnetische Felder:

Gesamtfluss: $\boxed{\phi_{mag} = \oint_A \underbrace{\vec{B} \cdot d\vec{A}}_{\text{magnetischer Fluss}} = 0}$ $\vec{B}$: magnetische Flussdichte

16.1 Kräfte auf bewegte Ladungen

16.1.1 Lorentzkraft $\vec{F}_L$

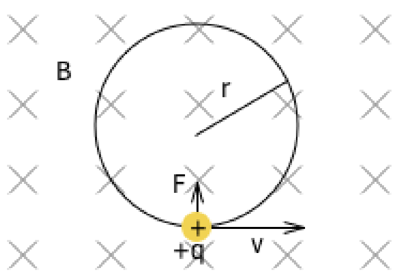
$\vec{F}_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$
$(\vec{F}_L \perp \vec{v}; \vec{F} \perp \vec{B})$



UVW-Regel: Ursache → Vermittler → Wirkung
Vorsicht!: Elektrische Ladung ist negativ!

$[|\vec{B}|] = \frac{N}{As \cdot \frac{m}{s}} = \frac{Vs}{m^2} = 1T(Tesla)$
Kreisbahn: $\vec{F}_L \perp \vec{v}$
$\implies$ $\vec{F}_L$ beeinfluss die Richtung von $\vec{v}$, aber nicht den Betrag!
$\implies$ $\vec{F}_L$ leistet keine Arbeit

Konventionen:



$\otimes\vec{B}$ zeigt in die Papierebene hinein

$\odot\vec{B}$ zeigt aus der Papierebene heraus

16.1.2 Bewegungsgleichung:

$m\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}} = \vec{F}_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$

$\frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{\dot{\vec{p}}}{m} = \frac{q}{m} \cdot \vec{v} \times \vec{B}$

$d\vec{v} \perp \vec{v}; d\vec{v} \perp \vec{B}$

$\implies$ Kreisbahn: $\vec{F}_L$ ist Zentripetalkraft

$\implies q \cdot v \cdot B = m \cdot \frac{v^2}{r}; v = \omega \cdot r$

$$\boxed{\omega = \frac{q}{m} \cdot B}$$

$$\boxed{\nu = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{q}{m} \cdot B}$$

ω Zyklotronfrequenz (1930, Lawrence)

$\implies$ unabhängig von Impuls und Energie; nur von $\frac{q}{m}$ und $\vec{B}$ bestimmt!

Radius:

$r = \frac{m \cdot v}{q \cdot B} = \frac{p}{q \cdot B} = \frac{\sqrt{2mqV}}{q \cdot B}$

$E_{kin} = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}m \cdot v^2 = q \cdot V$

Experiment:

$r_1 : V_1 = 200V \implies 2SKT$

$r_: V_1 = 300V \implies 2,5SKT$

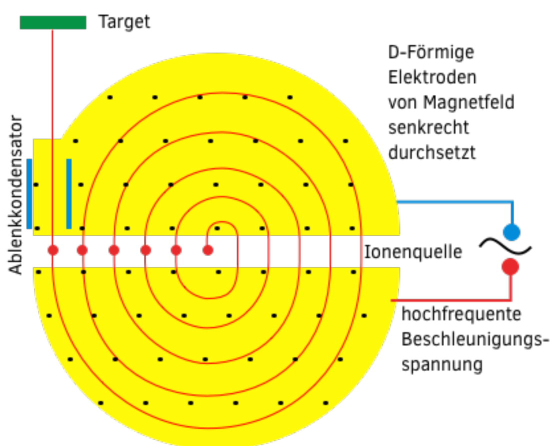
$\frac{r_1}{r_2} \overset{!}{=} \sqrt{\frac{V_1}{V_2}}$

$\frac{4}{5} \stackrel{!}{=} \sqrt{\frac{2}{3}}$

$\frac{16}{25} \stackrel{!}{=} \frac{2}{3}$ ✓im Rahmen der Messungenaugikeit!

16.1.3 Zyklonen:

Ziel: H- oder D-Kerne auf hohe Geschwindigkeit zubeschleunigen.



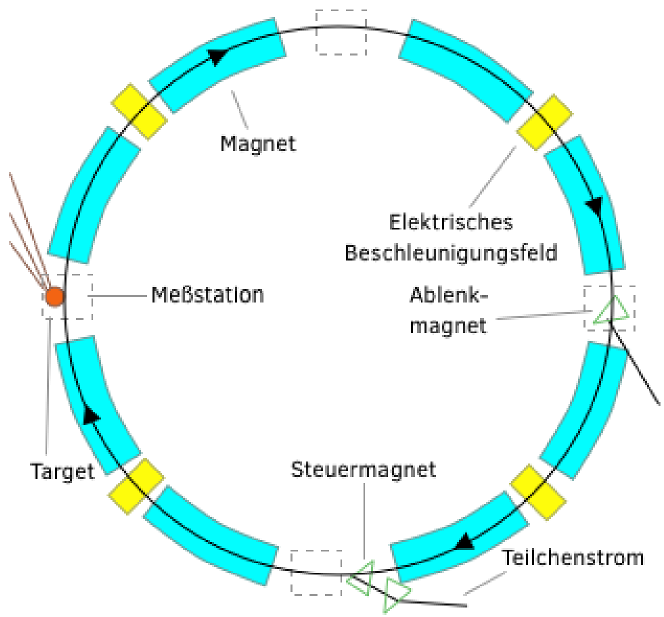
Beispiele:
(i) Protonenbeschleunigung: $r = 0,5m; B = 1,5T$
Zyklonenfrequenz: $\nu \frac{e \cdot B}{2\pi m_0} = 23MHz$

$E_{kin} = \frac{1}{2} \frac{q^2 B^2}{m_0} \cdot v^2 = 4,3 \cdot 10^{-1} J$

Angabe in Elektronenvolt

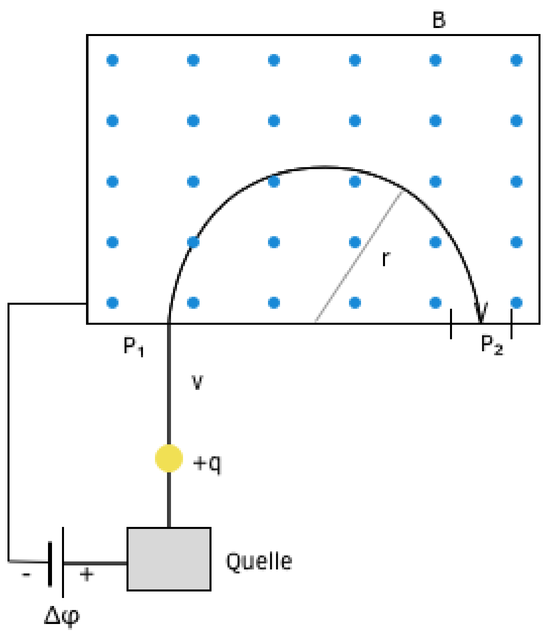
$$[eV] : 1eV = 1,602 \cdot 10^{-19} As \cdot 1V \tag{1}$$
$$= 1,602 \cdot 10^{-19} J \tag{2}$$

$\Longrightarrow \underline{26,9MeV}$



(ii) Massenspektrometer: Trennung von Isotopenmasser und Messung natürlicher Isotopenverhältnis:

Beschleunigung (auf höhere E_{kin}) ist nur im elektrischen Feld möglich! ($\Longrightarrow$ Design von Beschleunigung!)



(Ashton 1919; $\frac{\Delta m}{m} = 10^{-4}$)

Beispiel: Mg-Isotop:
$^{24}Mg : 78,7\ \%$
$^{25}Mg : 10,1\ \%$
$^{26}Mg : 11,2\ \%$
Massenverhältnis: 24:25:26

$\frac{q}{m}$ von Ionen bei bekannter Ladung: U

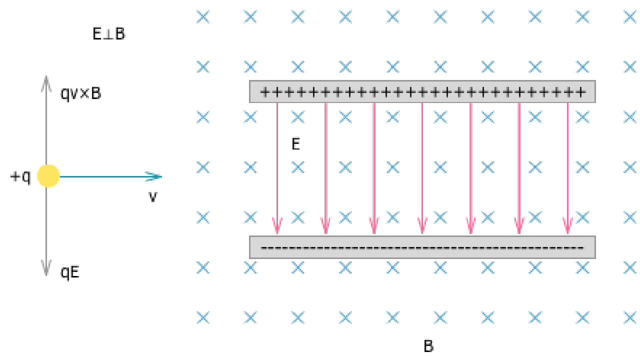
- Beschleunigung:$q \cdot \Delta\varphi \implies E_{kin} = q \cdot U = \frac{1}{2}mv^2$

- Kreisbahn:$r = \frac{m \cdot v}{q \cdot B}$

$\implies q \cdot U = \frac{1}{2}v^2 \cdot B^2 \cdot q^2 \cdot \frac{1}{m}$

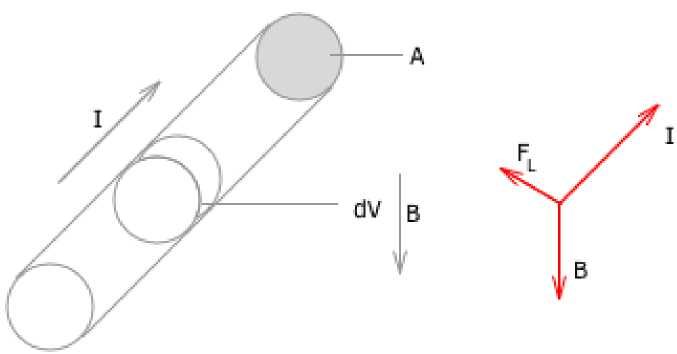
$$\boxed{\frac{m}{q} = \frac{B^2 \cdot v^2}{2U}}$$

(iii) Geschwindigkeitsfilter: Gekreuzte elektrische und magnetische Felder (Wien-Filter)



Kompensation der Felder ("Kräftegleichgewicht") für:
$q \cdot E = q \cdot v \cdot B$
$\underline{v = \frac{E}{B}}$
Ionen mit $v = \frac{E}{B}$ passieren die Anordnung ohne Ablenkung! ($\rightarrow$ Lochblende)
Anwendungsbeispiel: SIMS

16.1.4 Kräfte auf stromdurchflossene Leiter



Kraft auf eine Ladung:
$\vec{F}_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$

Kraft auf N Ladungen in dV:

$$d\vec{F} = \underbrace{dV \cdot n}_{N} \cdot \vec{v} \times \vec{B} \tag{3}$$

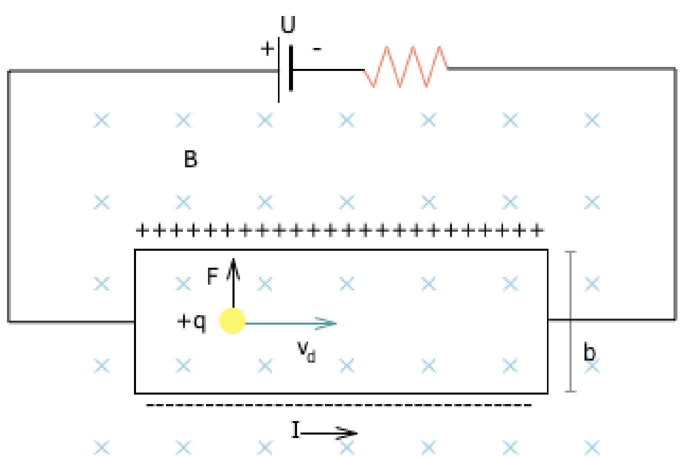
$$dV \cdot \vec{j} \times \vec{B} \tag{4}$$

$$\vec{F}_L = \int_V (\vec{j} \times \vec{B}) dV \tag{5}$$

Geradliniger Leiter: Länge L

$\vec{F}_L = \int_0^L (\vec{j} \times \vec{B} \underbrace{A \cdot dl}_{=dV} = \int_0^L (\vec{I} \times \vec{B}) dl = \underline{(L \cdot (\vec{I} \times \vec{B})}$

Leiterschaukel
Problem: Ladungsträgertyp nicht identifizierbar!
$\implies$ Edmin Hall (1879): Hall-Effekt - Typ und Konzentration der Ladungsträger messbar!



Annahme: positive Ladungsträger; Bewegung mit $\underline{|\vec{v}| = \vec{v}_D}$
Gleichgewicht bei: $q \cdot \vec{v}_0 \times \vec{B} + q \cdot \vec{E}_H = 0$
$\vec{E}_H = -\vec{v}_0 \times \vec{B}$

Zugehörige Potentialdifferenz: U_H(Hall-Spannung): $\implies$ Polarität erlaubt Bestimmung des Ladungsträger-Types

$\Longrightarrow$ Dadurch konnte gezeigt werden, dass Ladungstransport in Metallen durch Elektronen erfolgt!

$|\vec{E}_H| = \frac{U_H}{b} = D \cdot B = \frac{n \cdot q \cdot v_D}{n \cdot q} \cdot B = \frac{j \cdot B}{n \cdot B}$

Streifen der Dicke d: $j = \frac{I}{b \cdot d}$

$U_H = \frac{I \cdot B}{n \cdot q \cdot d} = K_H \cdot \frac{I \cdot B}{d}$

K_H:Hallkonstante (Materialspezifisch):

$$\boxed{K_H = \frac{1}{n \cdot q} = \frac{\mu}{\nu}}$$

$\Longrightarrow$ Bei Kenntnis von ν ist μ zu bestimmen!

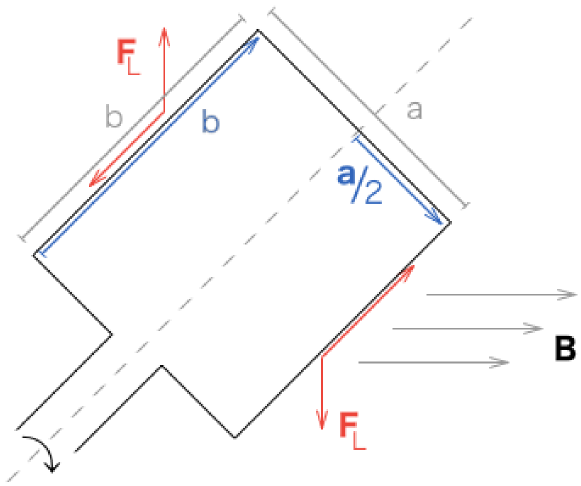
Cu-Streifen:

$I = 4A; B = 0,28T; d = 2,0\mu m; U_H = 50\mu V$

$n_e = \frac{I \cdot B}{U_H \cdot q \cdot d} = \frac{4 \cdot 0{,}28 A \frac{Vs}{m^2}}{50 \cdot 10^{-4} V \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} As \cdot 2 \cdot 10^{-6} m}$
$= \frac{1}{1{,}6} 10^{29} m^{-3}$
$= \underline{...}$

Dichte der Cu-Atome: $n_{Cu} = 8,4 \cdot 10^{22} cm^{-3}$
... im Mittel $1 \frac{e^-}{\text{Atom}}$!
Weitere Anwendungen: Hall-Sonde zur MEssung von B!
$\Longrightarrow$ Quanten-Hall-Effekt!

16.1.5 Stromdurchflossene Leiterschleife



Kräfte auf Teilstücke:

- Entlang der Seite "a": $\vec{I} \parallel \vec{B} \rightarrow \vec{I} \times \vec{B} = 0$

- Entlang der Seite "b": $\implies$ Kräftepaar $\implies$ Drehmoment!

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{\vec{a}}{2} \times \vec{F} + (\frac{-\vec{a}}{2}) \times (-\vec{F}) = \vec{a} \times \vec{F}$

$|\vec{F}| = |\vec{b}| \cdot (\vec{I} \times \vec{B})$; $\qquad |\vec{M}|_{max} = a \cdot b \cdot I \cdot B$

Allgemein: $\vec{M} = I \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$; $\qquad \vec{A} = (\vec{a} \times \vec{b})$

<u>Definition:</u> Magnetisches Moment einer Leiterschleife:

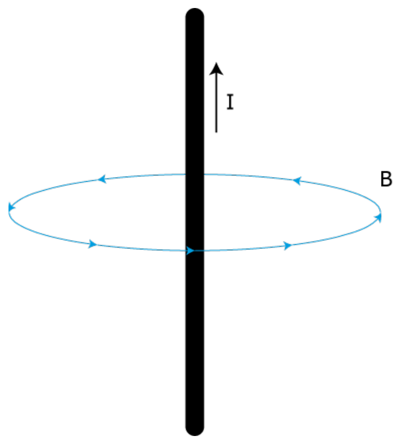
$\boxed{\vec{\mu}_{mag} = I \cdot \vec{A}}$

$\implies \boxed{\vec{M} = \vec{\mu}_{mag} \times \vec{B}}$

$\implies$ <u>Messung von I im Drehspurgalvanometer!</u>

16.2 Magnetfelder von stromdurchgeflossenen Leitern

Oersted (1820): Magnetische Wirkung eines geschlossenen Stromkreises
$\Rightarrow$ wenn $I \neq 0$: Drehmoment auf Kompassnadel, $\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$
$\Rightarrow$ $\vec{B}$ in Ebene $\perp$ Leiter
$\Rightarrow$ Richtung (Vorzeichen, VZ) ist abhängig von Stromrichtung (Rechtsschraubregel)



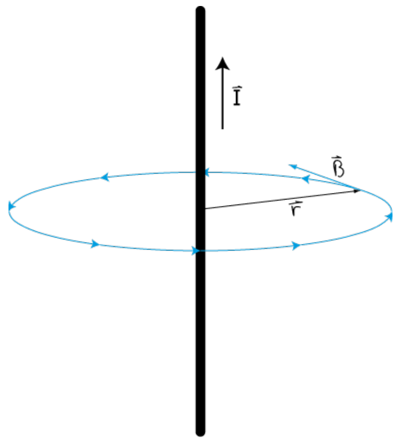
16.2.1 Bestimmung der Abstandsabhängigkeit

$$|\vec{B}| \sim \frac{I}{r}$$

$\Rightarrow$ Beachte: "Quelle" des Magnetfeldes ist 1D $\Rightarrow$ Abstandsabhängigkeit quantitativ:

$$\boxed{|\vec{B}| = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r}}$$

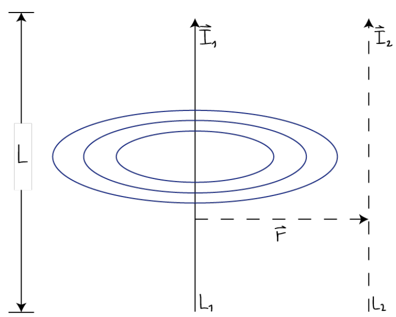
$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2} \text{magnetische Konstante}$$



$\Rightarrow$ Bewegte Ladungen erzeugen ein Magnetfeld in Richtung: $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \times \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$
Bisher:

- $\vec{B}$-Feld übt Kraft auf bewegte Ladung aus
- Bewegte Ladung (Strom) erzeugt Magnetfeld

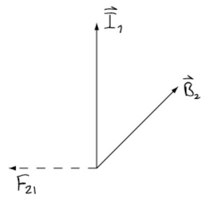
$\Rightarrow$ Wechselwirkung zwischen Strömen muss existieren!



I_1 erzeugt $\vec{B}$-Feld am Ort des Leiters L_2

$$|\vec{B}_1| = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1}{r}$$

$\Rightarrow$ Kraft auf L_2



$$\vec{F}_{21} = L \cdot \vec{I}_2 \times \vec{B}_1$$

$$|\vec{F}_{21}| = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{r} \cdot L$$

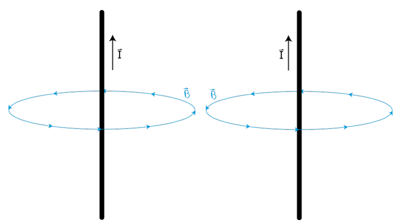
$$= \underline{\underline{2 \times 10^{-7} \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{r} \cdot L}}$$

$\vec{F}_{21}$: anziehend bei parallelen Strömen!

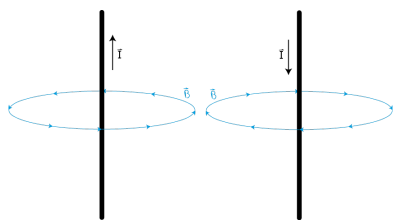
16.2.2 Definition Ampere

Elektrische Stromstärke: Ampere [A] Das Ampere ist die Stärke eines konstanten elektrischen Stromes, der, durch zwei parallele, gradlinige, unendlich lange und im Vakuum im Abstand von einem Meter voneinander angeordnete Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigem Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern je einem Meter Leiterlänge die Kraft 2×10^{-7} N hervorrufen würde.

Ströme parallel:



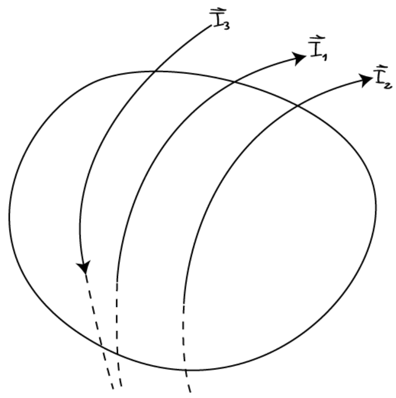
$I_1 \uparrow\downarrow I_2$



Elektrostatik: Gaußscher Satz: Zusammenhang zwischen Quellen-Verteilung und Feldstärke!

⇒ Normalkomponente des $\vec{E}$-Feldes wichtig

Hier: Ströme als "Quelle" des magnetischen Feldes
"Umhüllung" der Ströme ohne die Quelle zu "schneiden" nur mit geschlossenem Umlauf möglich (Quellen nicht punktförmig!)
Beachte also: $\oint \vec{B} d\vec{s}$

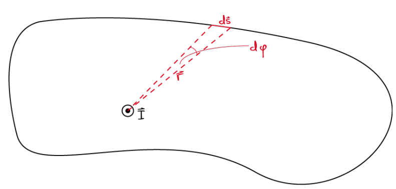


Integrieren über dl ($0...2\pi$) statt über die Länge der Kurve

$$
\begin{aligned}
\vec{B} \cdot d\vec{s} &= B \cdot r \cdot dl \\
&= \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r} \cdot dl = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot I \cdot dl
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \oint dl = \mu_0 \cdot I}$$

Da $\vec{B}$ nur Tangentialkomponente besitzt ist die Orientierung des Integrationswegs bezüglich des Leiters (Verkippung) unbedeutend; alle Komponenten parallel zum Leiter verschwinden!
Richtung des Integrationswegs muss Rechtsschraube mit Strom bilden!
Erweiterung auf mehrere Leiter im Raum bei vorzeichenrichtiger Summe der Einzelströme:



$$\boxed{\begin{aligned}\oint \vec{B}\cdot\vec{s} &= \mu_0\cdot I_{ges}\\ &= \mu_0\cdot\sum_{i=1}^{N} I_i\end{aligned}}$$

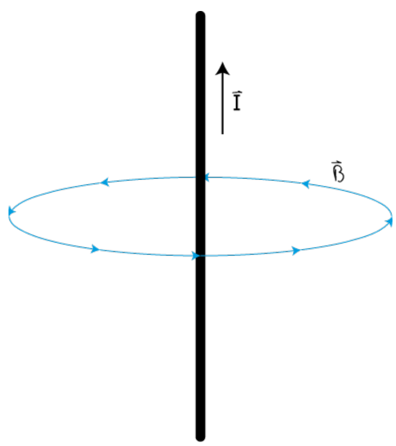
16.2.3 Ampere'sches Gesetz

Für kontinuierliche Medien: $I = \int_A \vec{j}\cdot d\vec{A}$

$$\Rightarrow \underline{\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_A \vec{j}\cdot d\vec{A}}$$

A: von C umradnete Fläche

Beispiel 1: Stromdurchflossener Leiter:

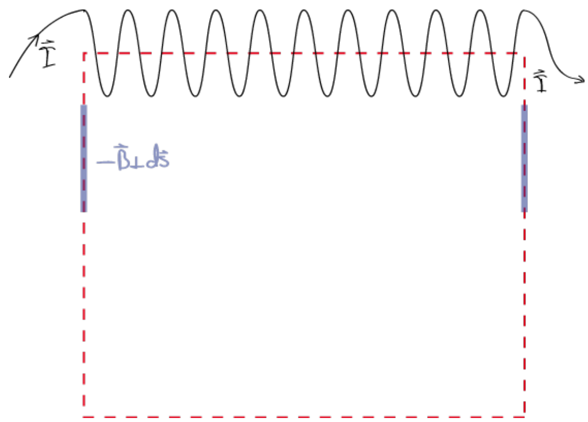


- $|\vec{B}|$ hängt nur von Abstand r ab
- tangentiale Orientierung

$\mu_0\cdot I = \oint \vec{B}d\vec{s} = B\cdot 2\pi r$

$\Rightarrow \underline{\underline{B(r) = \frac{\mu_0\cdot I}{2\pi r}}}$

Beispiel 2: Magnetfeld einer langen Spule:



16.2.4 Das Ampere'sches Gesetz in differentieller Form

Integralsatz von Stokes: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{v} = \int_A (\nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{A}) = \int_A rot\vec{B} \cdot d\vec{A}$

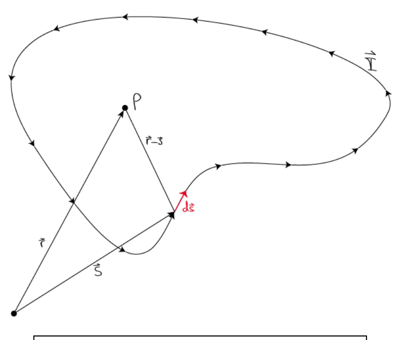
$\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{v} = \int_A (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{A} = \mu_0 \cdot \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$

$$\boxed{\Rightarrow \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j}}$$

Ampere'sches Gesetz in differentieller Form

16.2.5 Das Gesetz von Biot-Savart

Suche Formulierung zur Berechnung des Beitrags $d\vec{B}$ eines Leiterstückers von beliebig geformtem Leiter am Punkt P :

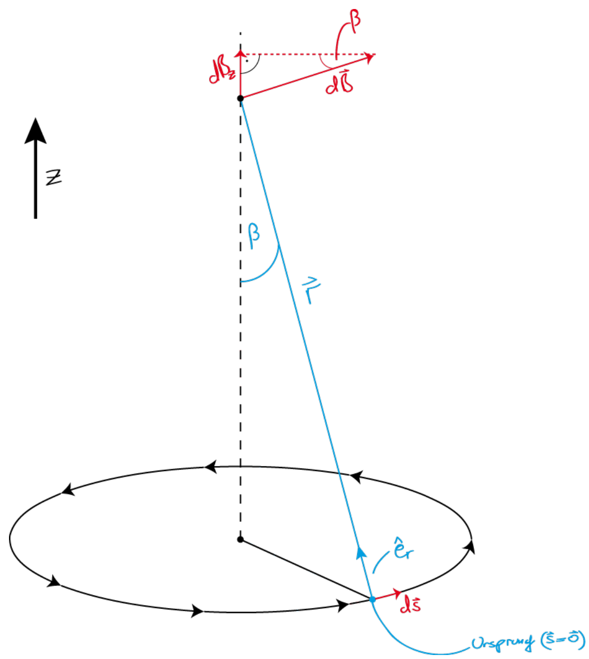


$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|^3}}$$

($\frac{1}{r^2}$ - Abstandsabhängigkeit)
genaue Herleitung komplex (→Theoretische Physik)

Gesamter Leiter: $B(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi}\int_{Leiter} \frac{d\vec{s}\times(\vec{r}-\vec{s})}{|\vec{r}-\vec{s}|^3} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi}\int_{Leiter} \frac{d\vec{s}\times\hat{e}_{\vec{r}-\vec{s}}}{|\vec{r}-\vec{s}|^2}$
Zur Berechnung des Magnetfeldes beliebiger Stromverteilungen
(Vile Leiter: Addition der einzelnen Beträge)

Beispiel: Magnetfeld eines elektrischen Ringstroms (entlang Symmetrieachse)



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{s} \times \hat{e}_r}{r^2}; \qquad d\vec{s} \perp \hat{e}_r$$
$$= \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{ds}{r^2}$$

Beachte: Beiträge in Ebene $\perp z$ Kompensieren sich entlang der Symmetrieachse!

$$dB_z = dB \cdot \sin\beta = dB \cdot \frac{R}{r} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{R}{r} \cdot \frac{1}{r^2} ds$$

$$B_z = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \oint_{Umfang} \underbrace{\frac{R}{r^3}}_{\text{konstant entlang Umfang}} ds = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{R}{r^3} \oint ds \qquad = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{R}{r^3} \cdot 2\pi R$$

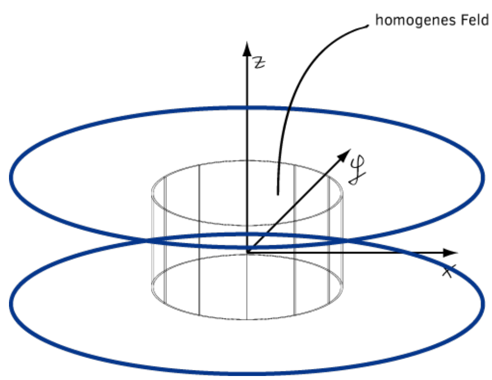
$$= \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot R^2 \pi \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \underbrace{\boxed{IR^2\pi}}_{\mu_{mg}} \cdot \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow B_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \mu_{mg} \cdot r^{-3}$$

Analogie: Elektrischer Dipol: $E_r(\vec{r}) \sim \frac{\rho}{r^3}$

Helmholtz-Spulenpaar: Mit einer Anordnung aus zwei kreisförmigen Spulen im Abstand von dem halben Durchmesser kann ein sehr homogenes Magnetfeld erzeugt werden. (Abweichung $< 1\%$ für $z < 0.3 \cdot R$)



$$B_z(0,0,z) = \frac{\mu_0}{2} I \left(\frac{R^2}{(R^2 + (z + \frac{R}{2})^2)^{3/2}} + \frac{R^2}{(R^2 + (z + \frac{R}{2})^2)^{3/2}} \right)$$

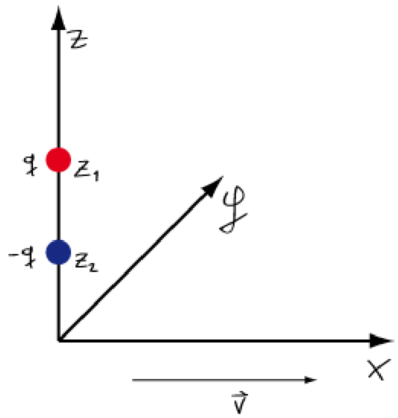
Entwicklung in eine Potenzreihe liefert näherungsweise $B_z(0,0,z) = \frac{\mu_0 I}{(5R^2/4)^{3/2}} \left(1 - \frac{144 z^4}{125 R^4}\right)$

16.2.6 Zusammenhang zwischen elektrischen und magnetischen Feld

Gedankenexperiment:

2 Ladungen: $+q$, $-q$; Masse m , Geschwindigkeit $\vec{v}$

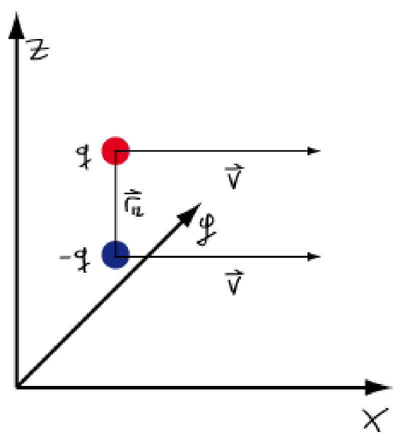
Bewegtes Koordinatensystem ($\vec{v}$) ; Ladungen ruhen



Coulombkraft:

$$m\ddot{z}_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{(z_1 - z_2)^2}$$
$$m\ddot{z}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{(z_2 - z_1)^2}$$

Ruhendes Koordinatensystem:



zusätzlich: $\vec{B}$-Feld

$$\vec{B}(z_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{r}_{12} \times \vec{v}}{|\vec{r}_{12}|^3} \quad \text{aus Biot-Savart}$$

$$B_y(z_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} qv \frac{1}{(z_1 - z_2)^2}$$

Zusätzliche Lorentzkraft auf obere Ladung:

$$\vec{F}_l = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

$$|\vec{F}_l| = q \cdot v \cdot B_y = q^2 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot v^2 \cdot \frac{1}{(z_1 - z_2)^2}$$

Gesamtkraft: $F = F_L + F_C$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{(z_1-z_2)^2} + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q^2 v^2}{(z_1-z_2)^2} \\ & -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{(z_1-z_2)^2} \qquad \underbrace{(1-\epsilon_0\mu_0 v^2)}_{\text{kleinere Beschleunigung im ruhendem System!}} \end{aligned}$$

$$\epsilon_0 \cdot \mu_0 = c^{-2}\ ; \quad \underbrace{c \approx 2.998 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}}_{\text{Lichtgeschwindigkeit im Vakuum}} \quad = (\epsilon_0\mu_0)^{-1/2}$$

$\Rightarrow$ Beschleunigung ist um $\underbrace{(1 - \frac{v^2}{c^2})}_{\text{aus \underline{Relativistischer Mechanik!}}}$ kleiner!

$\Rightarrow$ In relativistischer Beschreibung laufen die beiden Experimente in beiden Bezugssystemen gleich ab!

$\Rightarrow$ Transformation der physikalischen Größen beinhalten Umwandlung von elektrische in magnetische Kraft!