

# Kapitel 14 - Statische elektrische Felder

Johannes Bilk  
me@talachem.de

May 10, 2016

## Contents

<b>14 Statische Elektrische Felder</b>	<b>3</b>
14.1 Elektrische Ladungen	3
14.1.1 Reibungselektrizität	3
14.1.2 Ladung ist eine skalare Größe	4
14.1.3 Quarks	5
14.1.4 Entdeckung und Bestimmung der Elementarladung	6
14.2 Kräfte zwischen Ladungen und das Coulomb-Gesetz	6
14.3 Potenzielle Energie einer Ladungsverteilung	8
14.4 Erzeugung el. Felder durch Ladungen	9
14.4.1 Feld einer Punktladung	9
14.4.2 Feld einer Verteilung von Punktladungen	10
14.4.3 Leiter im el. Feld und Influenz	12
14.5 Kontinuierliche Ladungsverteilung	13
14.6 Elektrischer Fluss und Satz von Gauß	16
14.6.1 Def.: Fluss $\phi$ eines Vektorfeldes $\vec{E}$ durch eine Fläche $A$	16
14.6.2 Gauß'scher Satz	17
14.6.3 Beispiele	17
14.7 Das elektrische Potenzial	24
14.7.1 Elektrisches Feld und Potenzial	26
14.7.2 Poisson- und Laplace Gleichung	27
14.8 Elektrisches Feld in der Umgebung von Leitern	28
14.8.1 Anwendungen:	30
14.8.2 Elektrisches Feld zwischen geladenen Leitern	31
14.8.3 Berechnung der Kapazität	31
14.8.4 Feldstärke im Inneren eines Plattenkondensators:	33
14.8.5 Realisierung von Kondensatoren:	33

14.8.6	Energie eines aufgeladenen Kondensators . . . . .	34
14.8.7	Entladen eines Kondensators . . . . .	34
14.8.8	Kraft zwischen Zwei Kondensatorplatten . . . . .	35
14.8.9	Kraft zwischen Kondensatorplatten . . . . .	35
14.9	Isolatoren (Dielektrikum) im elektrischen Feld . . . . .	36

## 14 Statische Elektrische Felder

### 14.1 Elektrische Ladungen

→ Ab dem 17. Jahrhundert: Ursache für "elektrische Phänomene"; "neuartiger Stoff", elektrische Ladung



#### 14.1.1 Reibungselektrizität

- Zwei Arten von "elektrischen Zuständen" sind erzeugbar:
  - Gleichartige Zustände  $\implies$  Abstoßung
  - Ungleichartige Zustände  $\implies$  Anziehung
- Charles Du Fay (1730): positiv/negativ elektrische Ladung
- Benjamin Franklin (1750): Über-/Unterschuss an "elektrischen Fluiden"
- Lichtenberg (1778): Zuordnung der Polarität

Hargummi stab: reiben mit Pelz, Wolle: - Glas, Plexiglas: reiben mit Seide: +
--

Reibezeug: entgegengesetzte Polarität  $\implies$  Ladungstrennung, nicht etwa Ladungserzeugung.



**Grundsätzliches Messprinzip: Elektroskop:**

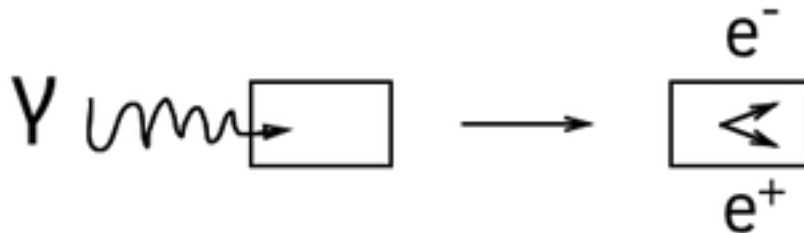
→ Elektrometer → quantitative Messung

- "Löffeln"; d.h. portionsweise Übertragung von Ladungen ist möglich
- Elektropendel:  $\implies$  periodisches Umladen eines "Kugelpendel"

**14.1.2 Ladung ist eine skalare Größe**

Einheit 1C = 1 Coulomb, SI

- Zu jedem geladenen Elementarteilchen gibt es ein Elementarteilchen mit entgegengesetzter Ladung ( $\rightarrow$  Ladungssymmetrie)
- Die Gesamtladung eines abgeschlossenen Systems bleibt erhalten ( $\rightarrow$  Ladungserhaltung)
- Beispiel: Produktion eines  $e^+e^-$ -Paares;  $E_\gamma \geq 1,02 \text{ MeV}$



Nachweis: Blasenkammer im Magnetfeld:

Umkehrung: "Zerstrahlung" von Positronen;  $E = m \cdot c^2$

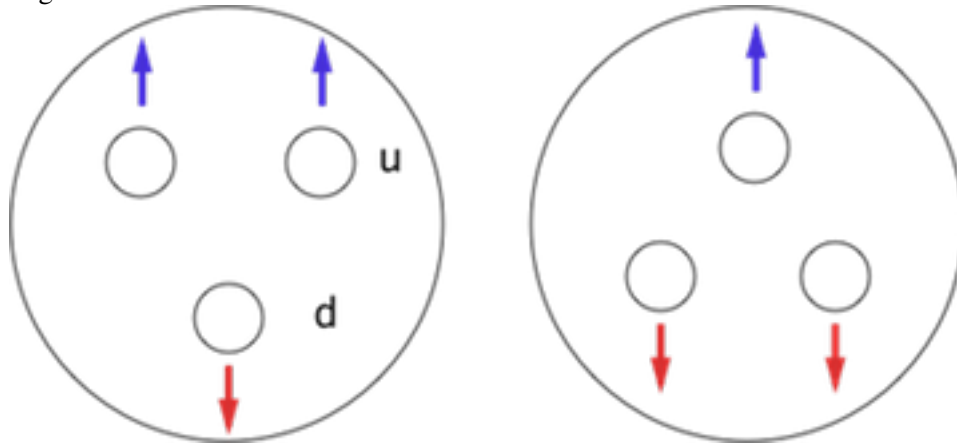
- Ladungsträger haben stets eine Masse
- Ladung kann (im Gegensatz zur Masse) nicht in Energie umgewandelt werden.  
Sie bleibt auch bei Zerfallsprozessen erhalten.
- Quantisierung der Ladung:  
Alle in der Natur vorkommenden Ladungen sind ganzzahlige Vielfache der Elementarladung:  $e_0 := 1,602 \cdot 10^{-19} \text{C}$ ;  $1\text{C} = 1\text{AS}$

### Beispiele von Ladungen

- Neutral: Photon:  $\gamma$ , Neutrino, Neutron  $n$
- einfach geladen: Elektron  $e^-$ , Positron  $e^+$ , Proton  $p$ , Antiproton  $\bar{p}$
- zweifach geladen:  $\text{He}_2(2^+, Z : 2)$

### 14.1.3 Quarks

Seit 60er Jahre Nukleonen bestehen aus Quarks, diese haben "drittelzahlige Ladungen"



Up-Quarks:  $u : +\frac{2}{3}e_0$   
Down-Quarks:  $d : -\frac{1}{3}e_0$   
Proton:  $2u + d : 1 \cdot e_0$   
Neutron:  $u + 2d : 0 \cdot e_0$

Quarks treten immer in 2er- oder 3er- Kombinationen auf.

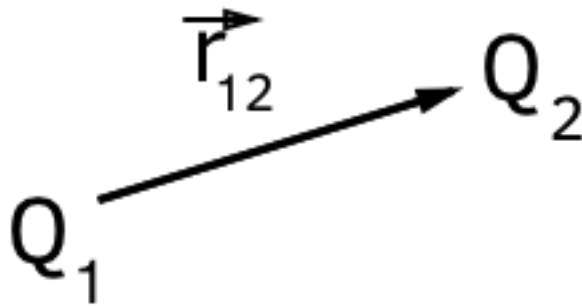
#### 14.1.4 Entdeckung und Bestimmung der Elementarladung

Robert Andrews Millikan(1868-1953): Öltröpfchenversuch (→ Anfängerpraktikum)

### 14.2 Kräfte zwischen Ladungen und das Coulomb-Gesetz

Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806)

1785: Messung der Kraft zwischen zwei Ladungen als Funktion des Abstands mit Hilfe einer Torsionswaage



$$\vec{F}_{12} = f \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|} = f \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \cdot \hat{r}_{12}$$

F ist definiert durch die Definition der Ladungseinheit:

Internationales Messsystem (SI):  $f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{(As)^2}{Nm^2}$$

ist Dielektrizitätskonste des Vakuums oder elektrische Feldkonstante

$Q_1 \cdot Q_2 > 0$  : Abstoßung

$Q_1 \cdot Q_2 < 0$  : Anziehung

#### Coulomb-Kraft

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \cdot \hat{r}_{12}$$

1 Coulomb ist diejenige elektrische Ladung, die eine gleich große Ladung im Abstand von 1m mit der Kraft von  $8,9874 \cdot 10^9 N$  abstößt

**Analogie Gravitation:**  $\vec{F} = -\gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \hat{r}$

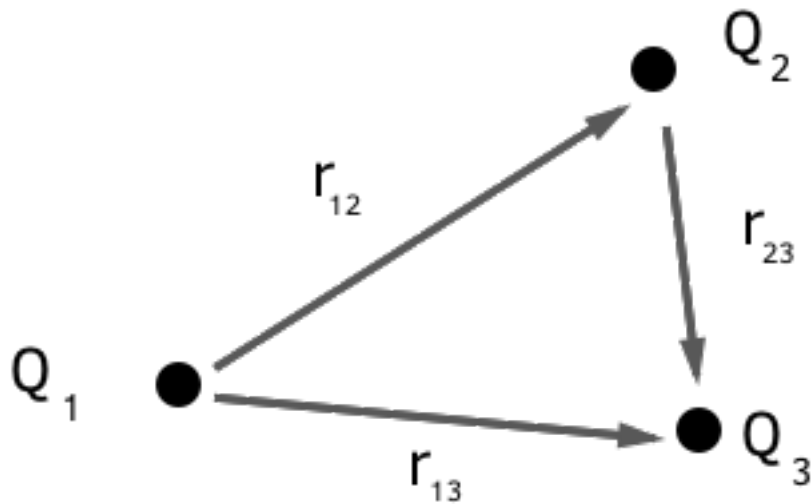
Vergleiche Gravitation und Coulombkraft zwischen Elektron und Proton:

$$|\vec{F}_C| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q_p| \cdot |q_e|}{r^2} = 2,3 \cdot 10^{-28} \frac{N}{r[m]^2}$$

$$|\vec{F}_G| = \gamma \cdot m_e \cdot m_p = 9,71 \cdot 10^{-68} \frac{N}{r[m]^2}$$

$$\implies \frac{|F_G|}{|F_C|} = 4,2 \cdot 10^{-40}$$

**Wechselwirkung zwischen mehreren Ladungen**



Die einzelnen Kräfte überlagern sich ungestört, (ungestörte Superposition)!

Kraft auf

$$Q_3 : \vec{F}_3 = \left[ \frac{Q_1 \cdot Q_3}{r_{13}^2} \cdot \hat{r}_{13} + \frac{Q_2 \cdot Q_3}{r_{23}^2} \cdot \hat{r}_{23} \right]$$

### 14.3 Potenzielle Energie einer Ladungsverteilung

$$\begin{aligned}
 W_{12} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{\infty}^{r_{12}} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{\rho^2} d\rho \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q_1 \cdot Q_2}{\rho} \right]_{\infty}^{r_{12}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}} \\
 W_{1,2,3} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1 \cdot Q_3}{r_{13}} + \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_2 \cdot Q_3}{r_{23}} \right)
 \end{aligned}$$

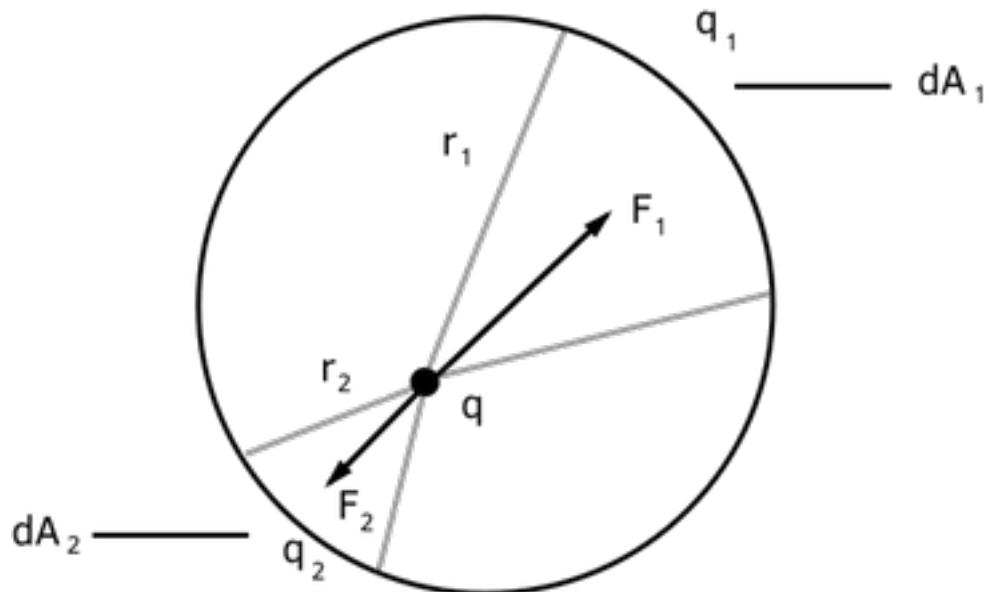
Anzahl an Summanden = Anzahl an Paaren.

Da aber jedes Paar doppelt gezählt wird, muss noch mit  $\frac{1}{2}$  multipliziert werden

$$W = \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{Q_i \cdot Q_j}{r_{ij}} \right] \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

⇒ Aufsummieren auch unendlicher Ensembles möglich, wenn die Reihe konvergiert.

**Betrachte Kraft auf Probeladung in homogen geladener Kugel**





Für beliebige Räumlichelemente (und damit auch Flächenelemente) gilt:

$$q_1 \propto dA_1 \propto r_1^2$$

$$q_1 \propto dA_1 \propto r_1^2$$

$$\text{Geometrie} \implies \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

$$\text{Annahme: Kraft} \propto \frac{1}{r^n}$$

$$|\vec{F}_1| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot q_1}{r_1^n}$$

$$|\vec{F}_2| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot q_2}{r_2^n}$$

$$\frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{F}_2|} = \frac{q_1}{r_1^n} \cdot \frac{r_2^n}{q_2} \stackrel{!}{=} 1 \implies \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1^n}{r_2^n}$$

Nun kann das mit dem Geometrieausdruck gleichgesetzt werden:

$$\frac{r_1^n}{r_2^n} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \implies n = 2$$

Gesamtkraft verschwindet nur wenn  $|\vec{F}| \propto \frac{1}{r^2}$

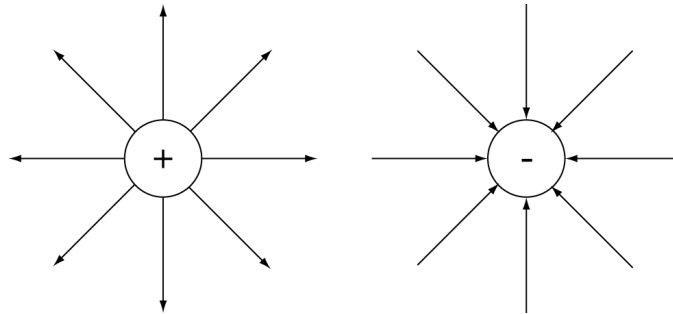
## 14.4 Erzeugung el. Felder durch Ladungen

### 14.4.1 Feld einer Punktladung

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \cdot \hat{r}_{12} \\ &= q_1 \cdot \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{|\vec{r}_{12}|^2}}_{\text{Feld von } q_2} \cdot \hat{r}_{12} \\ &= q_1 \vec{E}(\vec{r}) \end{aligned}$$

- Felder einer Punktladung sind Zentralfelder mit Kugelsymmetrie

- Konvention: Feldlinien führen von positiver zu negativer Ladung



⇒ Punktladungsfelder sind inhomogen!

#### 14.4.2 Feld einer Verteilung von Punktladungen

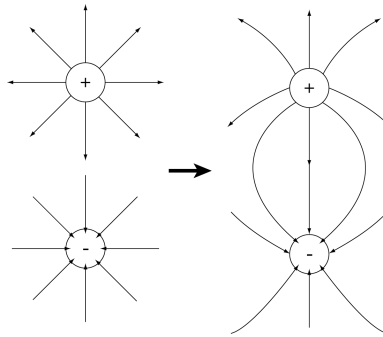
N Ladungen bei  $\vec{r}_i$

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

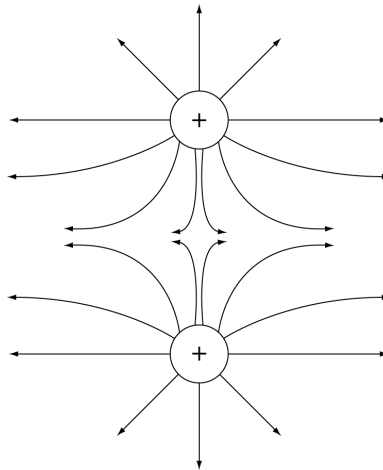
Ungestörte Superposition:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

2 Ladungen,  $q$  ;  $-q$  : Feld eines Dipols

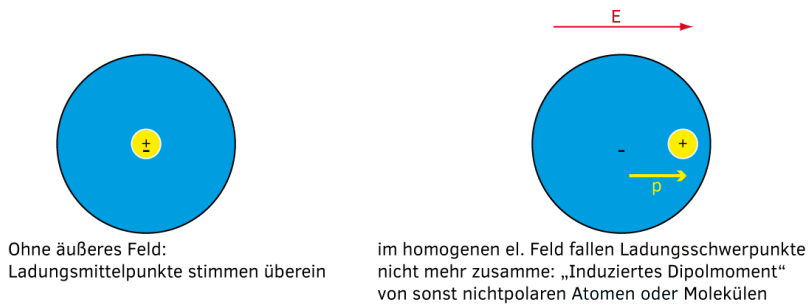


2 Ladungen:  $q$  ;  $q$

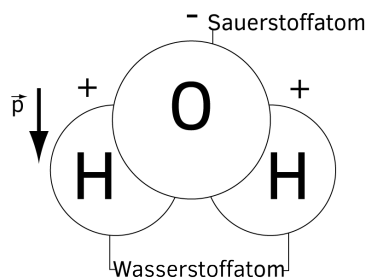


Beispiele für "natürliche Dipole":

### 1. Neutrales Atom im homogenen $\vec{E}$ -Feld



### 2. Polare Moleküle mit permanentem Dipolmoment

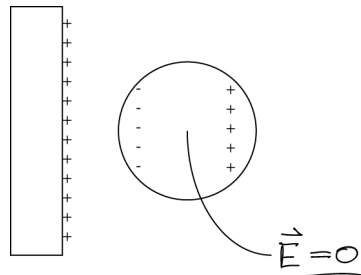


## 14.4.3 Leiter im el. Feld und Influenz

Leiter: Ladungen sind frei beweglich

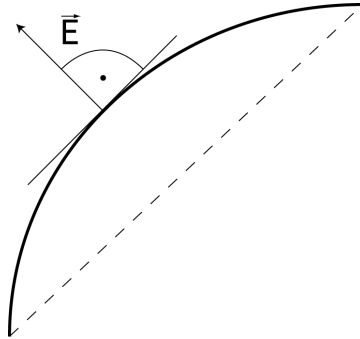
Isolator: Ladungen sind ortsfest

### 1. $\vec{E} = 0$ im Inneren des Leiters



Denn falls  $\vec{E} \neq 0$ :  $\vec{F} = q\vec{E}$  verschiebt Ladung bis  $\vec{E} = 0$  !

- $$\sigma = \frac{dQ}{dA}$$

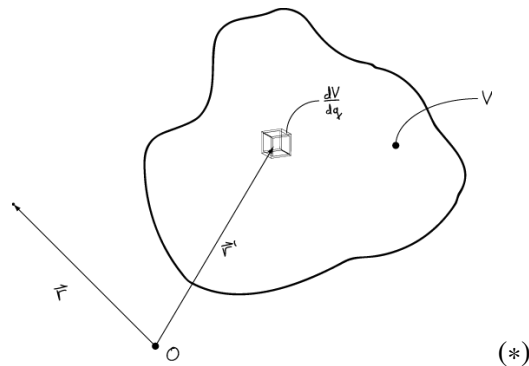


(Denn falls  $\vec{E}_{||} \neq 0$ : Verschiebung der Ladung bis  $\vec{E}_{||} = 0$  !)

**Influenz:** Räumliche Ladungstrennung in el. Leitern durch äußeres  $\vec{E}$ -Feld (Kontaktlos!), so dass das Innere des Leiters feldfrei ist!

## 14.5 Kontinuierliche Ladungsverteilung

Betrachte Ladungsverteilung über endliches Volumen  $V = \int_V dV$



Ladungsdichte:  $\rho(\vec{r}) = \frac{dq(\vec{r})}{dV}$

Gesamtladung:  $Q = \int_V dq = \int_V \rho(\vec{r}) dV$

Flächenladungsdichte:  $\sigma = \frac{dq}{dA}$

Integral über geschlossene Oberfläche:  $A = \oint_A dA$

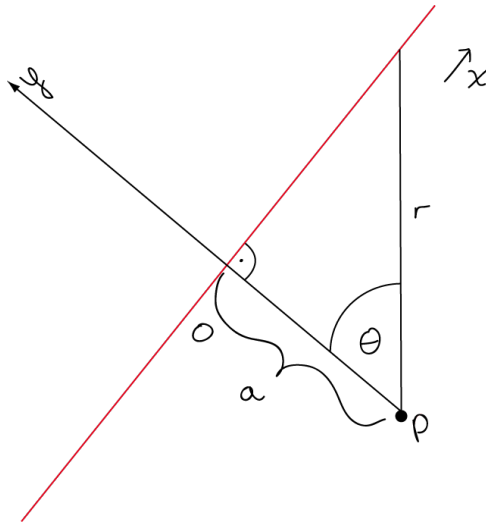
1-dim Ladungsdichte:  $\lambda = \frac{dq}{dl}$

Länge  $l = \int_l dl'$

für (\*) :

$$\begin{aligned} d\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \\ \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV \left\{ \frac{dq}{dV} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV \left\{ \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') \right\} \end{aligned}$$

**Beispiel:** unendlich langer geladener Draht



Ziel: Berechnung des  $\vec{E}$ -Feldes im Punkt P.

Betrachte einen kleinen Abschnitt des Drahtes der Länge  $dx$ . Dieser hat dann die Ladung  $dq$  mit:

$$dq = \lambda dx$$

wobei  $\lambda = \frac{dq}{dx}$  die lineare Ladungsdichte ist.

Die Symmetrie des Problems impliziert außerdem:  $E_x = E_z = 0$ .

Für die y-Komponente beachte, dass:

$$\frac{dE_y}{|d\vec{E}|} = \frac{a}{r} = \cos \theta \Rightarrow dE_y = |d\vec{E}| \cos \theta$$

Nun kann aber das Drahtstück mit der infinitesimalen Länge  $dx$  als Punktladung angesehen werden. Das heißt:

$$|d\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2(\theta)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r^2(\theta)}$$

Nun muss  $r(\theta)$  ermittelt werden. Dafür benutzen wir nochmal:

$$\cos \theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{r(\theta)} \Rightarrow r(\theta) = \frac{a}{\cos \theta}$$

Damit wird  $dE_y$  dann:

$$dE_y = |d\vec{E}| \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r^2(\theta)} \frac{a}{r(\theta)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \lambda dx}{r^3(\theta)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \lambda dx}{a^3} \cos^3 \theta$$

Um jetzt aufzuintegrieren muss zuletzt noch die Abhängigkeit von  $x$  und  $\theta$  berücksichtigt werden:

$$\tan \theta = \frac{x}{a} \Rightarrow \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{dx}{a} \Rightarrow dx = \frac{a d\theta}{\cos^2 \theta}$$

Das in den Ausdruck für  $dE_y$  liefert dann:

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \lambda dx}{a^3} \cos^3 \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{a^2 \lambda d\theta}{a^3 \cos^2} \cos^3 \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\theta}{a} \cos \theta = \frac{\lambda}{4a\pi\epsilon_0} \cos \theta d\theta$$

Nun muss über den ganzen Stab integriert werden, sprich von  $x = -\infty$  bis  $x = \infty$ .

Nun ist ja  $\theta = \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$  und  $a > 0$ . Also:

$$x = \pm \infty \Rightarrow \theta = \arctan(\pm \infty) = \pm \frac{\pi}{2}$$

Damit gilt nun:

$$E_y = \int_{\text{Draht}} dE_y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda}{4a\pi\epsilon_0} \cos \theta d\theta = \frac{2\lambda}{4a\pi\epsilon_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda}{2a\pi\epsilon_0} \sin \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{a}$$

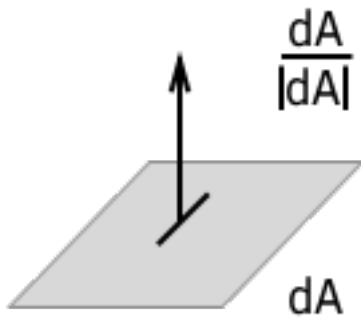
## 14.6 Elektrischer Fluss und Satz von Gauß



Zusammenhang zwischen "Elektrischem Fluss" (Feldliniendurchsatz) durch eine Oberfläche und der eingeschlossenen Ladung.

⇒ Allgemeinere Formulierung des Coulomb-Gesetzes

### 14.6.1 Definition: Fluss $\phi$ eines Vektorfeldes $\vec{E}$ durch eine Fläche $A$ :



$$\phi = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$d\vec{A}$ : Richtung  $\perp$  Fläche (nach Außen)  
Richtung der Flächennormale

Betrag  $dA$ : Größe der Fläche

**Spezialfälle**  $\vec{E}$  – homogen  $\vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot dA \cdot \cos \alpha$

- $\alpha = 0$  :  $\vec{E} \parallel d\vec{A}$  :  $\vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot dA$

- $\alpha = 90$  :  $\vec{E} \perp d\vec{A}$  :  $\vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$



### 14.6.2 Gauß'scher Satz

$$\phi = \oint_{\substack{A \\ \text{geschlossen}}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{eingeschlossen}}}{\epsilon_0}$$

Der elektrische Fluss durch einer beliebigen geschlossenen Oberfläche hängt weder von der Form der Oberfläche, noch von der Ladungsverteilung  $\varrho(\vec{r})$  ab, sondern nur von der eingeschlossenen Gesamtladung  $Q$ .

**Mathematisch gilt:**

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_V \text{div} \cdot \vec{E} \cdot dV = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \cdot dV$$

Nach Gauß aber auch:

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V dQ = \int_V \varrho(\vec{r}) dV$$

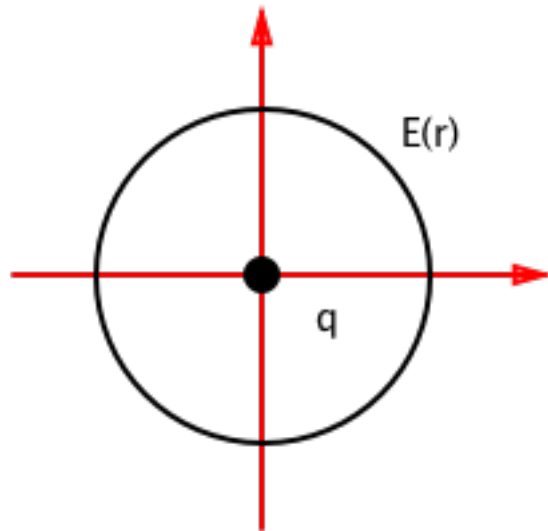
Zusammen also:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_V \frac{\varrho(\vec{r})}{\epsilon_0} dV \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\varrho(\vec{r})}{\epsilon_0}}$$

Die Ladungsverteilung im Raum ist die lokale Quelle ( $\varrho(\vec{r}) > 0$ ) bzw. Senke ( $\varrho(\vec{r}) < 0$ ) des elektrischen Feldes.

### 14.6.3 Beispiele

(i) Feld einer Punktladung

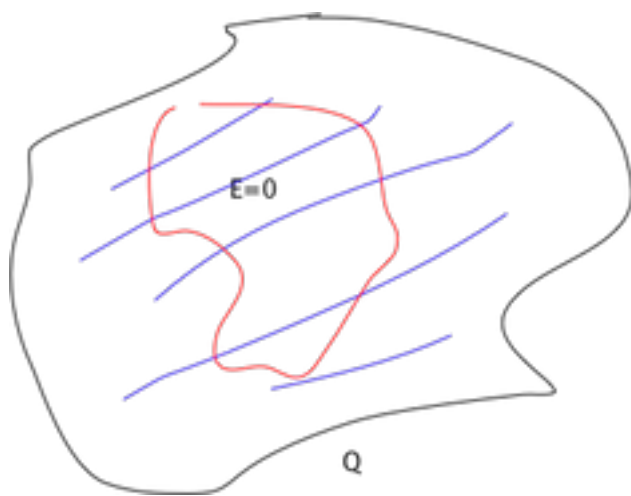


- Geeignete Wahl von A: Kugeloberfläche
- Symmetrie:  $\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \cdot \hat{e}_r$
- $\implies \vec{E} \parallel d\vec{A}$

$$\begin{aligned}
 \phi &= \oint_A \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \oint_A E(r) \cdot \hat{e}_r \cdot d\vec{A} \\
 &= \oint_A E(r) \cdot dA \\
 &= E(r) \cdot \oint_A dA \\
 &= E(r) \cdot 4\pi r^2
 \end{aligned}$$

Gauß:  $\phi \stackrel{!}{=} \frac{Q}{\epsilon_0} = E(r) \cdot 4\pi r^2 \implies \underline{E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}}$

(ii) Ladung auf beliebig geformten Leitern



$$\phi = \oint_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} = 0$$

(iii) Feld einer leitenden Kugel mit Ladung  $Q$ : (Ladung auf der Oberfläche)

Aus der Symmetrie des Problems ist ersichtlich:  $\vec{E}(\vec{r}) = E(\vec{r}) \cdot \hat{e}_r$

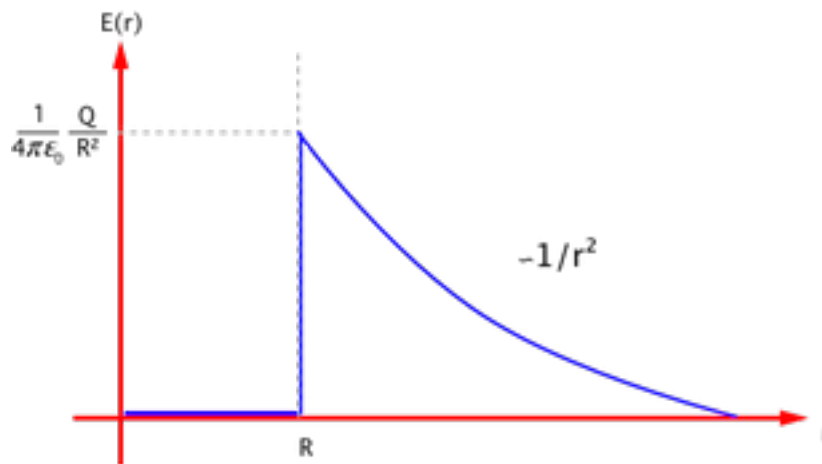
Im Inneren, also für  $r < R$ , gilt nach der vorherigen Überlegung:  $E = 0$

Außerhalb, also  $r > R$ , wird als Gaußfläche wieder eine Kugel mit Radius  $r$  gewählt. Dann gilt nach Gauß:

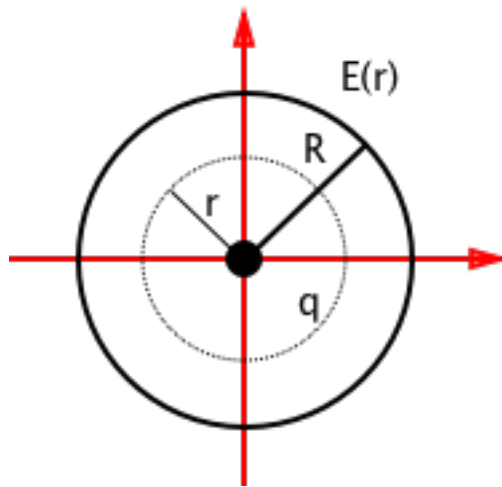
$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \oint_A E(r) dA = E(r) 4\pi r^2 \Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Zusammen kann  $E(r)$  also abschnittsweise angegeben werden:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & , r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} & , r > R \end{cases}$$



(iv) Feld einer homogen geladenen Kugel



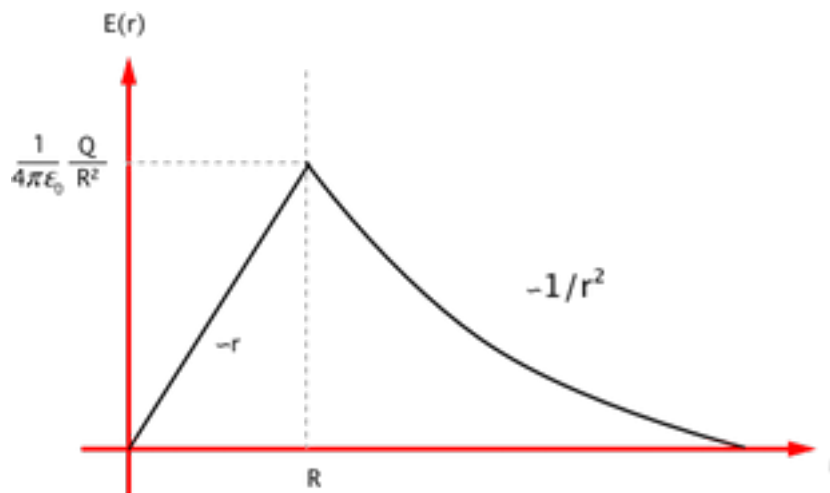
$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \text{ für } r < R \quad \rho = 0 \text{ für } r > R$$

$$r < R:$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$Q_{in} = Q \cdot \frac{r^3}{R^3}$$

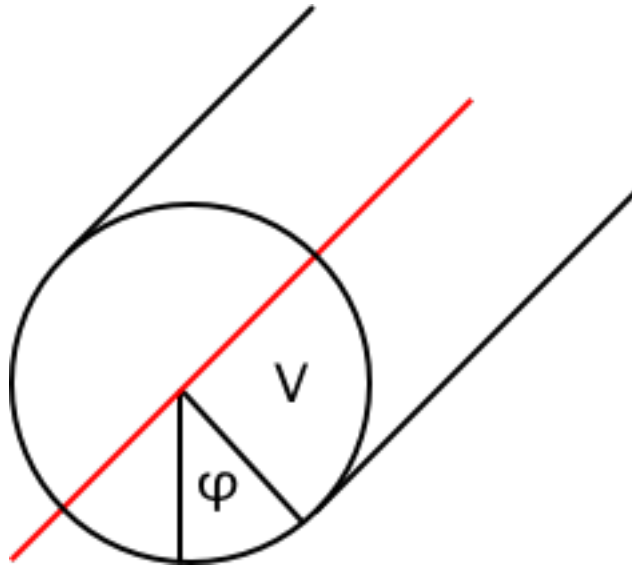
$$\Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^3} \cdot r$$



$\Rightarrow$  Von Außen ist nicht feststellbar, ob die geladene Kugel massiv oder hohl

ist (Leiter oder homogen geladener Isolator)!

(v) Unendlich langer homogen geladener Draht



Zylinderkoordinaten:

$$\lambda = \frac{dq}{dL} = \left(\frac{Q}{R}\right) \leftarrow \text{als endliche lange } l$$

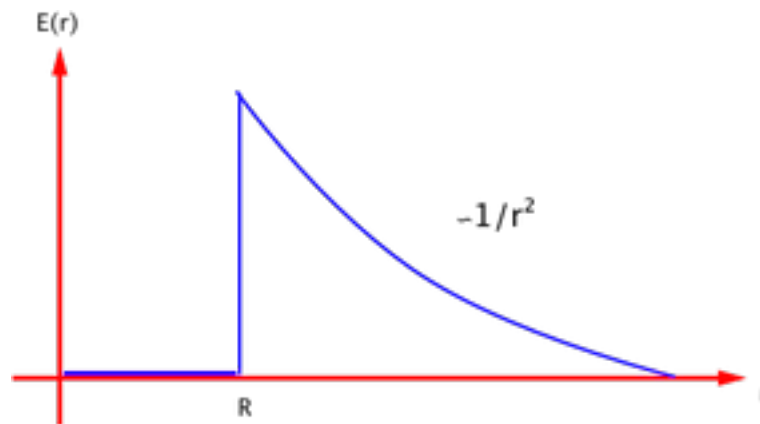
$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(r) = E(r) \cdot \hat{e}_r$$

$$\phi = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_A E(r) dA = E(r) \oint_A da = E(r) \cdot 2\pi r l$$

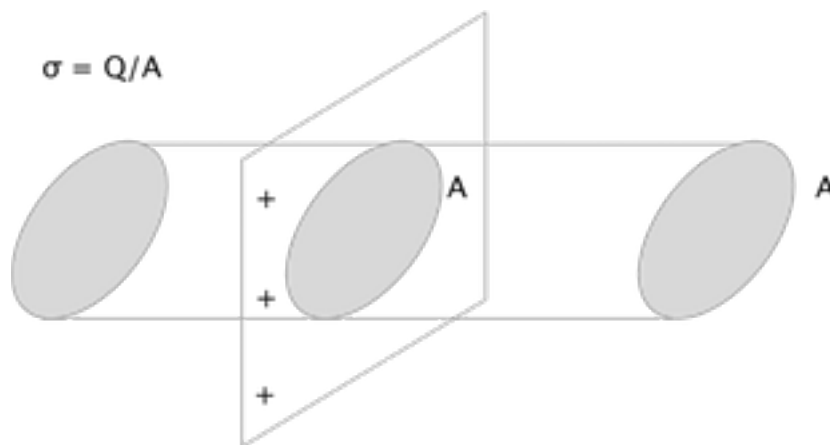
$$\phi = \frac{Q_{ges}}{\epsilon_0} \implies E(r) = \frac{Q_{ges}}{2\pi\epsilon_0 \cdot r l}$$

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

(vi) Unendlich langer, homogen geladener leitender Zylinder



(vii) Feld einer homogen geladener unendliche leitenden Ebene



$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

$$\phi = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{A, \text{stirn}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{A, \text{mantel}} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$\vec{E}$ -Ebene

$\Rightarrow$  Beitrag über Mantelfläche verschwindet ( $d\vec{A} \perp \vec{E}$ )

$$\phi = \oint_A \vec{E} d\vec{A} = 2 \cdot E \cdot A_{\text{stirn}} \stackrel{G.S.}{=} \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

## 14.7 Das elektrische Potenzial

Coulombkraft: Zentralkraft, konservativ

$\implies \exists$  potentielle Energie (siehe 14.3)

für Ladungen  $q_0$  im  $\vec{E}$ -Feld gilt:

$$E_{pot}(\vec{r}) = -q_0 \cdot \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Für das elektrische Potenzial  $\varphi(\vec{r})$  gilt:

$$\varphi = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{q_0} E_{pot}(\vec{r})$$

→ Beachte: Arbeit ist unabhängig vom Weg!

Verschiebe  $q_0$  von  $\vec{r}_1$  nach  $\vec{r}_2$ ; die benötigte Arbeit ist:

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = q_0 \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\ &= \underline{q_0 \cdot (\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2))} \end{aligned}$$

$\varphi(\vec{r})$  nur bis auf Integrationskonste bestimmt!

Die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten:

$$U = \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) = \frac{W_{12}}{q_0} \text{ heißt elektrische Spannung!}$$

$q_0 \cdot U$  ist die Arbeit, die man braucht um  $q_0$  von  $\vec{r}_1$  nach  $\vec{r}_2$  zu bringen!

$$[U] = 1 \text{ Volt} = 1 \text{ V} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}}$$

$$\textbf{Beachte: } \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) = -\oint \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0!!$$



Typische Spannungen:

*Batterie : 1,5V*

*Stadtnetz : 220V*

*berlandleitung : 250kV*

*Blitz : 10 – 15MV*

**Beispiele:** (i) Punktladung:

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) &= - \int \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'; \vec{E} = E \cdot \hat{e}_r \\ &= - \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{\infty}^r \frac{d\vec{r}}{r^2}\end{aligned}$$

$$\underline{\varphi(\vec{r}) = \varphi(r) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \cdot r}}$$

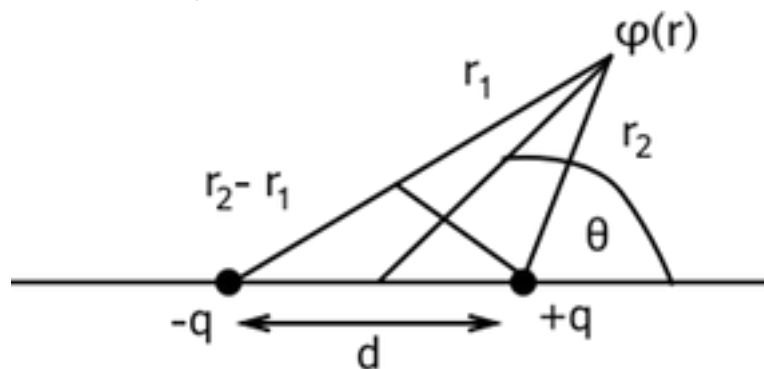
**Äquipotenzialflächen:**  $r = \text{const.}$

(in 3D: Kugelflächen

in 2D: Kreise)

(ii) Mehrere Punktladungen

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$



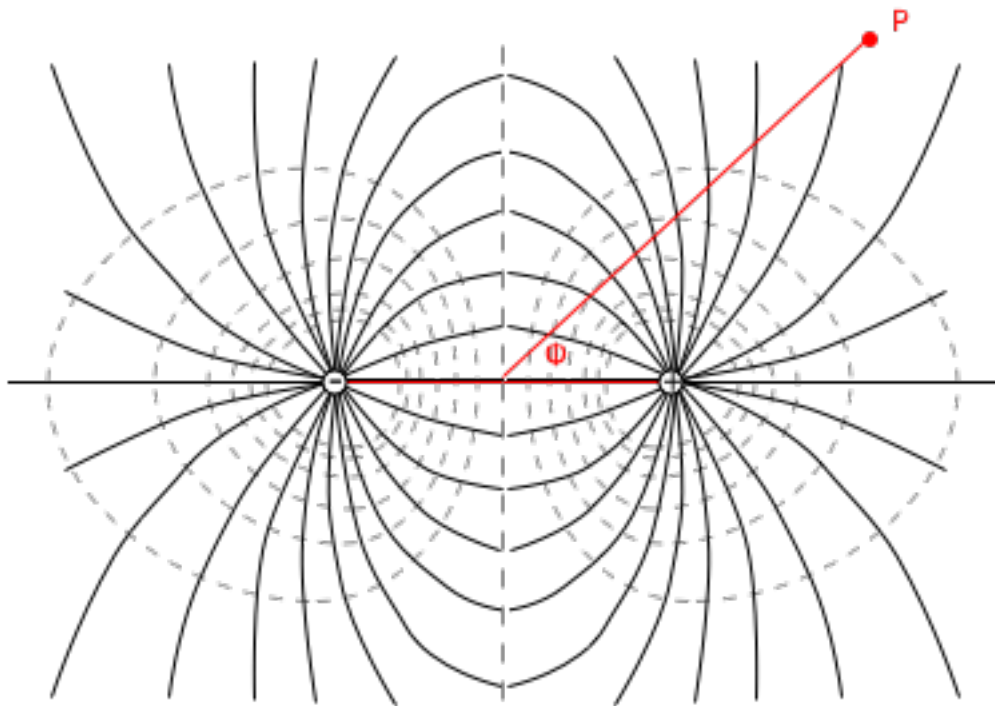
$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} - \frac{r_2 - r_1}{r_1 \cdot r_2}$$

$$\text{für } \underbrace{d \ll r}_{\text{Fernfeld}} : r_1 \cdot r_2 = r^2$$

$$r_2 - r_1 = d \cdot \cos \theta$$

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(r) = \frac{q \cdot d \cdot \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} = \frac{\varphi \cdot \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$$

**Potenzialverteilung:**



(iii) Kontinuierliche Ladungsverteilung:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{\tilde{V}} \frac{dQ}{|\vec{r} - \tilde{\vec{r}}|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{\tilde{V}} d\tilde{V} \left\{ \frac{\varphi(\tilde{\vec{r}})}{|\vec{r} - \tilde{\vec{r}}|} \right\}$$

#### 14.7.1 Elektrisches Feld und Potenzial

$\varphi(\vec{r})$  : Skalare Größe, manchmal einfacher zu berechnen als  $\vec{E}(\vec{r})$

$\implies \vec{E}(\vec{r})$  aus  $\varphi(\vec{r})$  bestimmen?

$$\varphi = \varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z); \vec{E} = \vec{E}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

$$d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{d\varphi}_{\text{vollständiges Differential}} = -\vec{E}d\vec{r} = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz) \quad (*)$$

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot dz \quad (**)$$

$$(*), (**): \left\{ E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\} \implies \underline{\vec{E} = -\text{grad}\varphi}$$

$\vec{E}$  zeigt in Richtung des betragsmäßig größten Anstiegs von  $\varphi$ , allerdings in abnehmende Richtung.

$$\text{Äquipotenziallinie: } d\varphi = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\text{längst einer solchen Linie ist: } d\varphi = 0 \implies -\vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\implies \underline{\vec{E} \perp d\vec{r}}$$

**Beispiel:** Punktladung

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\text{Kugelkoordinaten, Kugelsymmetrie: } \vec{E} = -\nabla \cdot \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \hat{e}_r$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \implies \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \hat{e}_r$$

### 14.7.2 Poisson- und Laplace Gleichung

$$\text{Gauß'scher Satz: } \text{div}\vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{Potenzial: } \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$

Einsetzen:  $\boxed{\operatorname{divgrad}\varphi = \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}}_{\Delta} \cdot \varphi = -\frac{\varrho}{\epsilon_0}}$

$$\Delta\varphi = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot \varphi$$

**Spezialfall:**  $\varphi = 0 \implies \text{Laplace-Gleich} = \underline{\Delta\varphi = 0}$

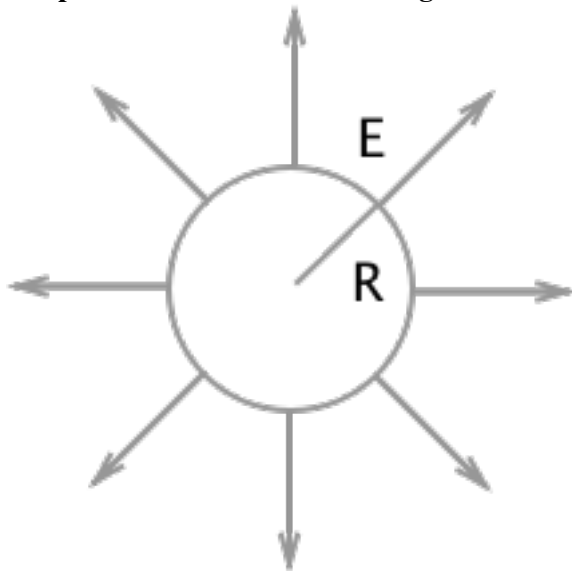
## 14.8 Elektrisches Feld in der Umgebung von Leitern

Gauß'scher Satz:  $\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 \implies \varrho = 0$   
(Leiter im Inneren Feldfrei!)

Potenzial:  $\varphi(r) = -\int \vec{E} d\vec{r} = \text{const.}$

$\implies$  Leiteroberfläche ist Äquipotenzialfläche

**Beispiel: Elektrisches Feld an Kugeloberfläche:**

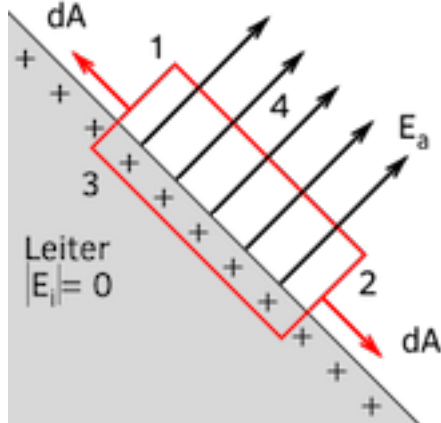


$E_{\perp}$

für jede Leiteroberfläche berechenbar:

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

**Beispiel:**



**Fläche:**

$$1,2: \vec{E} \perp d\vec{A} \implies "0"$$

$$3: \vec{E} = 0 \implies 0$$

$$4: \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\implies |\vec{E}| = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \sigma$$

$\implies$  Die Größe von  $E_{\perp}$  an der Oberfläche ist  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ !

**Weiter mit der Kugel:**  $E_a = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{4\pi \cdot R^2}$

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot R} \implies E_a = \frac{\varphi}{R}$$

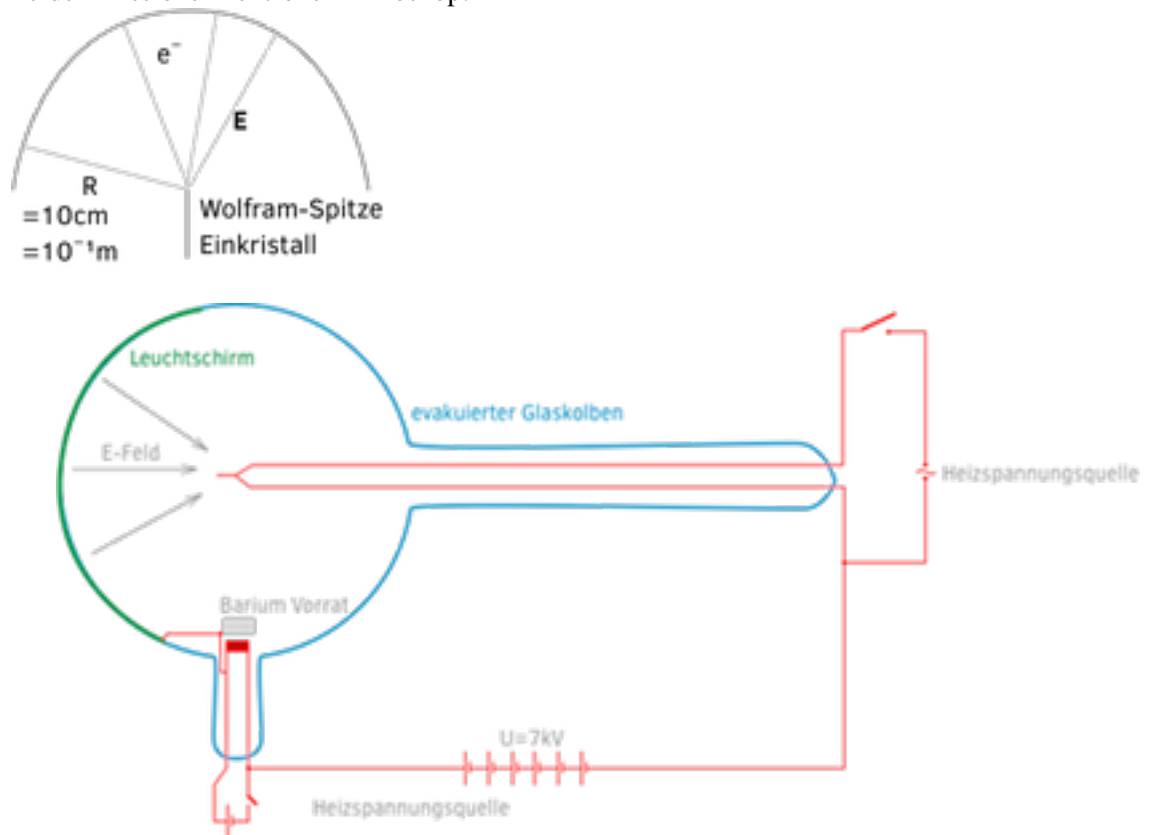
Bei gegebenen Potenzial ist Feldstärke an der Oberfläche umgekehrt proportional zum Kreisradius!

Lokal:  $|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\varphi}{R}$

R Klein  $\implies \varphi$  groß,  $\sigma$  groß

### 14.8.1 Anwendungen:

Feldemissions-Elektronenmikroskop:



$|\vec{E}| = \frac{\varphi}{R} = \frac{10kV}{10^{-7}m} = 10^{11} \frac{V}{m}$  an der Wolfram-Spitze  
Bewegung der Elektronen Entlang der Feldlinien

- vergrößertes Bild der Wolfram-Spitze
- Vergrößerung:  $\frac{R_{Schirm}}{R_{Spitze}} \approx \underline{10^6}$

- so erstmals Atome sichtbar gemacht
- Objekte  $< 10^{-9}m \implies < 1mm!$

### 14.8.2 Elektrisches Feld zwischen geladenen Leitern

**Anwendung:** 2 isolierte, entgegengesetzt geladene Leiter, ( $\implies$  Kondensator)



Coulomb:  $|\vec{E}| \propto |Q|$

Spannung:  $U_{21} = \varphi_2 - \varphi_1 = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} \propto Q$  ist unabhängig vom Weg!

$$\implies Q \propto U$$

Proportionalitätskonstante?

$$\boxed{Q = C \cdot U}$$

C: Kapazität

Einheit  $[C] = \frac{1C}{1V} = 1F$  (Farad)

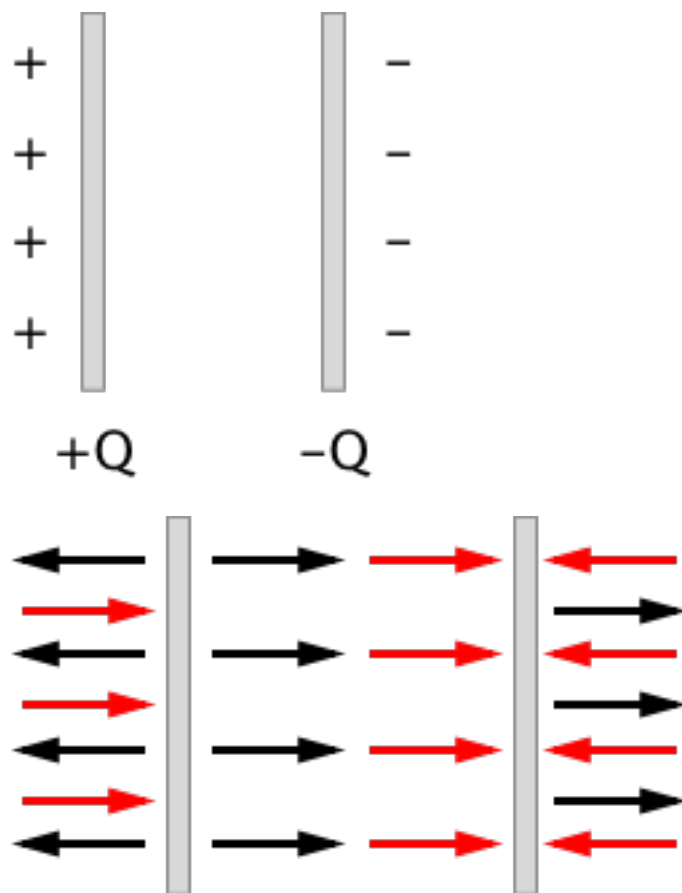
$$typisch : 10^{-6}F = 1\mu F$$

$$10^{-9}F = 1nF$$

$$10^{-12}F = 1pF$$

### 14.8.3 Berechnung der Kapazität

Erinnerung: homogen geladene Platte:  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$



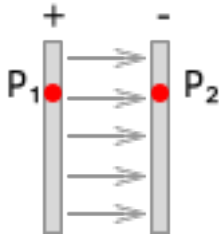
Im Außenraum: Kompensation

Im Innenraum: Addition

Im Innenraum:  $|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$



#### 14.8.4 Feldstärke im Inneres eines Plattenkondensator:



Seicherung von Ladungen auf voneinander isolierten leitenden Platten, Aufladung über Spannungsquelle oder Batterie.

Spannungspotenzialdifferenz:  $U_{21} = p_2 - p_1 = \int \vec{F} d\vec{r} = E \cdot d$   
 $U = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot d = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot A} \cdot d$   
 mit  $Q = C \cdot U$  folgt  $C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$

$$|\vec{E}| = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot A} \text{ ist unabhängig von } d$$

$$C = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d} \text{ ist eine rein geometrische Größe}$$

$$d \uparrow \implies C \downarrow \implies U \uparrow$$

$$d \downarrow \implies C \uparrow \implies U \downarrow$$

#### 14.8.5 Realisierung von Kondensatoren:

Großes C: A groß, d klein

Beidseitiges Bedampfte dünne Kunststofffläche, dann aufrollen,  $\implies$  Kunststoff-folienkondensator.

Größenordnung:

$$\left. \begin{array}{l} d = 1mm \\ A = 1cm^2 \end{array} \right\} C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
&= 8,8 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2} \frac{10^{-4}m^2}{10^{-3}m} \\
&= 0,9 \cdot 10^{-12} F \\
&\approx \underline{1pF} \times \text{Anzahl der Lagen}
\end{aligned}$$

#### 14.8.6 Energie eines aufgeladenen Kondensators

Kondensator C sie mit Ladung q aufgeladen:  $U = \frac{q}{C}$

Die Arbeit, die zum Aufbringen einer weiteren Ladung benötigt wird, hängt vom aktuellen Ladungszustand ab:

$$\begin{aligned}
dW &= dq \cdot U(q) \\
&= dq \cdot \frac{q \cdot d}{A \cdot \epsilon_0}
\end{aligned}$$

$$W = \int_0^Q dW = \frac{d}{A\epsilon_0} \int_0^Q q \cdot dq = \frac{1}{2} \frac{1}{C} Q^2 = \underline{\frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2}$$

$$\text{Energiedichte: } \underbrace{\frac{W}{V}}_{A \cdot d} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} \frac{1}{Ad} E^2 d^2 = \underline{\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2}$$

(Dieses Ergebnis gilt auch für andere Feldverteilungen, nicht nur im Plattenkondensator)

→ Feldenergie  $\propto E^2$  (später wichtig!)

⇒ wichtige Anwendung: Schnelle Entladung eines langsam aufgeladenen Kondensators ⇒ Kurzzeitig hohe Leistung!

**Beispiele** : Defibrillator, Blitzlicht

#### 14.8.7 Entladen eines Kondensators

$$C = 8 \cdot 20\mu F; U = 500V$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot C U^2 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 10^{-5} F \cdot 25 \cdot 10^4 V^2$$

$$= \underline{20J}$$

Entladung in 1ms  $\rightarrow$  20kW

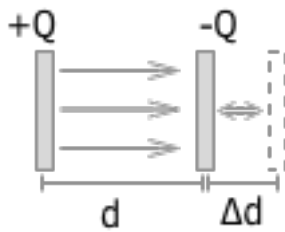
Defibrillator: 100 – 800kW

**Fusionsanlage:** Kondensatorbatterie ermöglichen  $W = 10^6 J$

Entladung in 3ns

$$\Rightarrow P = 3 \cdot 10^{14} W$$

#### 14.8.8 Kraft zwischen Zwei Kondensatorplatten



Anziehungskraft zwischen entgegengesetzt geladenen Kondensatorplatten

$\Rightarrow$  Arbeit gegen Kraft  $F$ , um Abstand um  $\Delta d$  zu erhöhen.

Volumenänderung:

$$\Delta V = A \cdot \Delta d$$

$$\Delta W = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 |\vec{E}|^2 \cdot A \cdot \Delta d$$

$$\Delta W = F \cdot \Delta d \Rightarrow \underline{F = \frac{\epsilon_0}{2} \cdot |\vec{E}|^2 \cdot A = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{V}{d} \right)^2 \cdot A \propto V^2}$$

#### 14.8.9 Kraft zwischen Kondensatorplatten

$$U = 2000V; d = 10mm; A = 30cm \Rightarrow A = 0,071m^2$$

$$F = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{V}{d} \right)^2 \cdot A = 0,0197N$$

Die äquivalente Masse wird von der Waage angezeigt:

$$M = \frac{F}{g} = 1,29 \text{ g (gemessen : } m = 1,33 \text{ g)}$$

Verdopplung von  $U$  auf  $4000 \text{ V} \implies 4\text{-fache Masse.}$

(gemessen:  $m \approx 5,22 \text{ g}$ )

## **14.9 Isolatoren (Dielektrikum) im elektrischen Feld**