

# Kapitel 14 - Statische elektrische Felder

Johannes Bilk  
me@talachem.de

May 8, 2016

## Contents

<b>14 Statische Elektrische Felder</b>	<b>2</b>
14.1 Elektrische Ladungen	2
14.1.1 Reibungselektrizität	2
14.1.2 Ladung ist eine skalare Größe	3
14.1.3 Quarks	4
14.1.4 Entdeckung und Bestimmung der Elementarladung	5
14.2 Kräfte zwischen Ladungen und das Coulomb-Gesetz	5
14.3 Potenzielle Energie einer Ladungsverteilung	7
14.4 Erzeugung el. Felder durch Ladungen	8
14.4.1 Feld einer Punktladung:	8
14.4.2 Feld einer Verteilung von Punktladungen	8
14.4.3 Leiter im el. Feld und Influenz	10
14.5 Kontinuierliche Ladungsverteilung	11
14.6 Elektrischer Fluss und Satz von Gauß	13

## 14 Statische Elektrische Felder

### 14.1 Elektrische Ladungen

→ Ab dem 17. Jahrhundert: Ursache für "elektrische Phänomene"; "neuartiger Stoff", elektrische Ladung



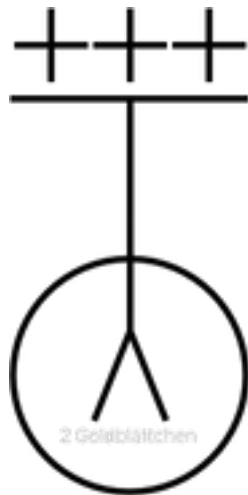
#### 14.1.1 Reibungselektrizität

- Zwei Arten von "elektrischen Zuständen" sind erzeugbar:
  - Gleichartige Zustände  $\implies$  Abstoßung
  - Ungleichartige Zustände  $\implies$  Anziehung
- Charles Du Fay (1730): positiv/negativ elektrische Ladung
- Benjamin Franklin (1750): Über-/Unterschuss an "elektrischen Fluiden"
- Lichtenberg (1778): Zuordnung der Polarität

Hargummi stab: reiben mit Pelz, Wolle: - Glas, Plexiglas: reiben mit Seide: +
--

Reibezeug: entgegengesetzte Polarität  $\implies$  Ladungstrennung, nicht etwa Ladungserzeugung.

**Grundsätzliches Messprinzip: Elektroskop:**



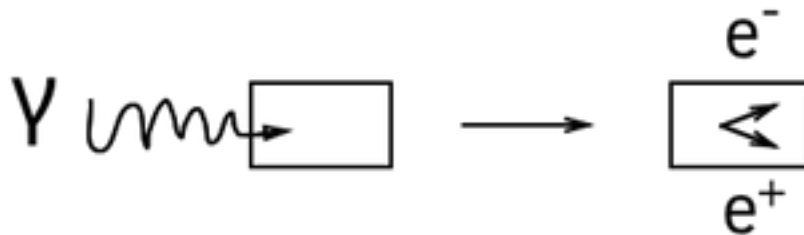
→ Elektrometer → quantitative Messung

- "Löffeln"; d.h. portionsweise Übertragung von Ladungen ist möglich
- Elektropendel:  $\implies$  periodisches Umladen eines "Kugelpendel"

#### 14.1.2 Ladung ist eine skalare Größe

Einheit 1C = 1 Coulomb, SI

- Zu jedem geladenen Elementarteilchen gibt es ein Elementarteilchen mit entgegengesetzter Ladung ( $\rightarrow$  Ladungssymmetrie)
- Die Gesamtladung eines abgeschlossenen Systems bleibt erhalten ( $\rightarrow$  Ladungserhaltung)
- Beispiel: Produktion eines  $e^+e^-$ -Paares;  $E_\gamma \geq 1,02 \text{ MeV}$



Nachweis: Blasenkammer im Magnetfeld:

Umkehrung: "Zerstrahlung" von Positronen;  $E = m \cdot c^2$

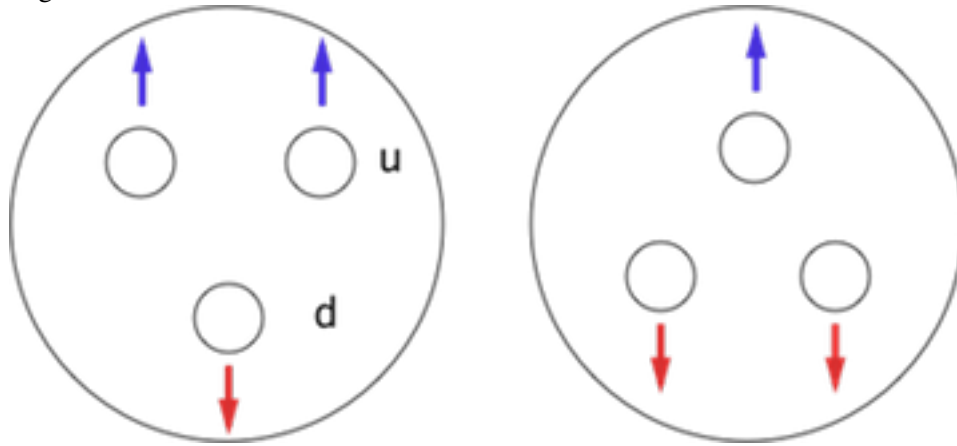
- Ladungsträger haben stets eine Masse
- Ladung kann nicht (im Gegensatz zur Masse) in Energie umgewandelt werden, bleibt auch bei Zerfallsprozessen erhalten.
- Quantisierung der Ladung: Alle in der Natur vorkommenden Ladungen sind ganzzahlige Vielfache der Elementarladung:  $e_0 := 1,602 \cdot 10^{-19} \text{C}$ ;  $1\text{C} = 1\text{AS}$

### Beispiele von Ladungen

- Neutral:  $\gamma, \nu, n$
- einfach geladen:  $e^-, e^+, p, \bar{p}$
- zweifach geladen:  $\text{He}_2(2^+, Z : 2)$

### 14.1.3 Quarks

Seit 60er Jahre Nukleonen bestehen aus Quarks, diese haben "drittelzahlige Ladungen"



Up-Quarks:  $u : +\frac{2}{3}e_0$   
Down-Quarks:  $d : -\frac{1}{3}e_0$   
Proton:  $2u + d : 1 \cdot e_0$   
Neutron:  $u + 2d : 0 \cdot e_0$

Quarks treten immer in 2er- oder 3er- Kombinationen auf.

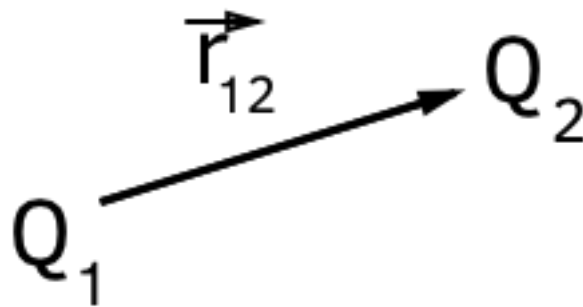
#### 14.1.4 Entdeckung und Bestimmung der Elementarladung

Robert Andrews Millikan(1868-1953): Öltröpfchenversuch (→ Anfängerpraktikum)

#### 14.2 Kräfte zwischen Ladungen und das Coulomb-Gesetz

Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806)

1785: Messung der Kraft zwischen zwei Ladungen als Funktion des Abstands mit Hilfe einer Torsionswaage



$$\vec{F}_{12} = f \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|} = f \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \cdot \hat{r}_{12}$$

F ist definiert durch die Definition der Ladungseinheit:

Internationales Messsystem (SI):  $f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{(As)^2}{Nm^2}$$

ist Dielektrizitätskonstante des Vakuums oder elektrische Feldkonstante

$Q_1 \cdot Q_2 > 0$  : Abstoßung

$Q_1 \cdot Q_2 < 0$  : Anziehung

#### Coulomb-Kraft

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \cdot \hat{r}_{12}$$

1 Coulomb ist diejenige elektrische Ladung, die eine gleich große Ladung im Abstand von 1m mit der Kraft von  $8,9874 \cdot 10^9 N$  abstößt

**Analogie Gravitation** :  $\vec{F} = -\gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \hat{r}$

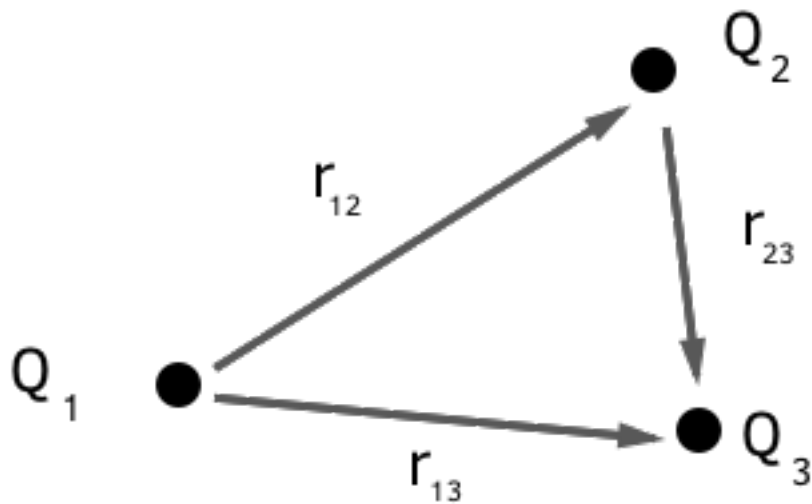
Vergleiche Gravitation und Coulombkraft zwischen Elektron und Proton:

$$|\vec{F}_C| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q_p| \cdot |q_e|}{r^2} = 2,3 \cdot 10^{-28} \frac{N}{r[m]^2}$$

$$|\vec{F}_G| = \gamma \cdot m_e \cdot m_p = 9,71 \cdot 10^{-68} \frac{N}{r[m]^2}$$

$$\implies \frac{|F_G|}{|F_C|} = 4,2 \cdot 10^{-40}$$

**Wechselwirkung zwischen mehreren Ladungen**



Die einzelnen Kräfte überlagern sich ungestört, (ungestörte Superposition)!

Kraft auf

$$Q_3 : \vec{F}_3 = \left[ \frac{Q_1 \cdot Q_3}{r_{13}^2} \cdot \hat{r}_{13} + \frac{Q_2 \cdot Q_3}{r_{23}^2} \cdot \hat{r}_{23} \right]$$

### 14.3 Potenzielle Energie einer Ladungsverteilung

$$\begin{aligned}
 W_{12} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{\infty}^r \frac{Q_1 \cdot Q_2}{V^2} dV \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q_1 \cdot Q_2}{V} \right]_{\infty}^r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{V_{12}} \\
 W_{1,2,3} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1 \cdot Q_3}{r_{13}} + \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_2 \cdot Q_3}{r_{23}} \right)
 \end{aligned}$$

Anzahl an Summanden = Anzahl an Paaren

$$W = \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{Q_i \cdot Q_j}{r_{ij}} \right] \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$\implies$  Aufsummieren auch unendlicher Ensembles möglich, wenn die Reihe konvergiert.

#### Betrachte Kraft auf Probeladung in homogen geladener Kugel

Für beliebige Räumlichelemente (und damit auch Flächenelemente) gilt:

$$q_1 \propto dA_1 \propto r_1^2$$

$$q_1 \propto dA_1 \propto r_1^2$$

$$\text{Geometrie} \implies \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

$$\text{Annahme: Kraft} \propto \frac{1}{r^n}$$

$$|\vec{F}_1| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot q_1}{r_1^n}$$

$$|\vec{F}_2| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot q_2}{r_2^n}$$

Geometrie einsetzen:

$$\frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{F}_2|} = \frac{q_1}{r_1^n} \cdot \frac{r_2^n}{q_2} \stackrel{!}{=} 1 \implies n = 2$$

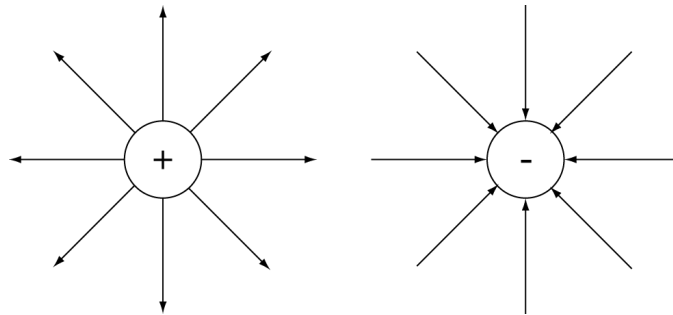
Gesamtkraft verschwindet nur wenn  $\parallel \propto \frac{1}{r^2}$

## 14.4 Erzeugung el. Felder durch Ladungen

### 14.4.1 Feld einer Punktladung:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \cdot r_{12} \hat{r}_{12} \\ &= q_1 \cdot \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{|\vec{r}_{12}|^2}}_{\text{Feld von } q_2} \cdot r_{12} \hat{r}_{12} \\ &= q_1 \vec{E}(\vec{r})\end{aligned}$$

- Felder einer Punktladung sind Zentralfelder mit Kugelsymmetrie
- Konvention: Feldlinien führen von positiver zu negativer Ladung



⇒ Punktladungsfelder sind inhomogen!

### 14.4.2 Feld einer Verteilung von Punktladungen

N Ladungen bei  $\vec{r}_i$

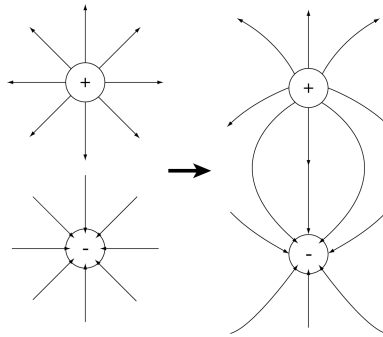
$$\vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Ungestörte Superposition:

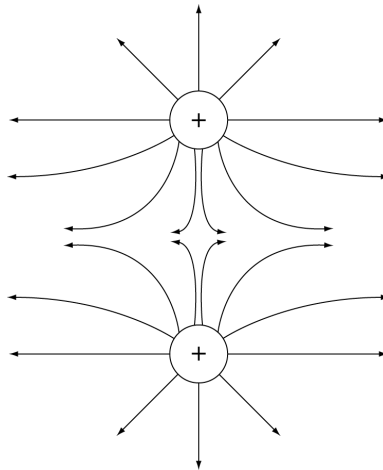
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$



2 Ladungen,  $q$  ;  $-q$  : Feld eines Dipols

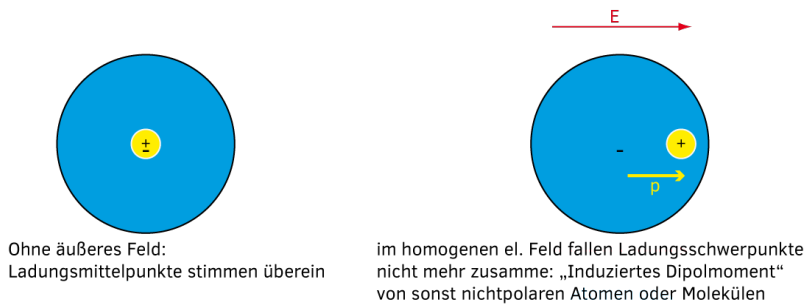


2 Ladungen:  $q$  ;  $q$

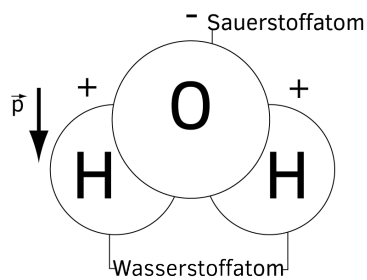


Beispiele für "natürliche Dipole":

### 1. Neutrales Atom im homogenen $\vec{E}$ -Feld



### 2. Polare Moleküle mit permanentem Dipolmoment

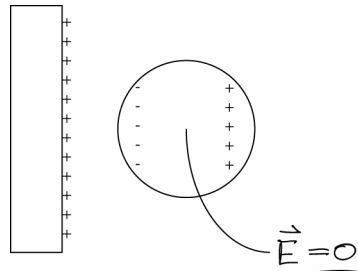


## 14.4.3 Leiter im el. Feld und Influenz

Leiter: Ladungen sind frei beweglich

Isolator: Ladungen sind ortsfest

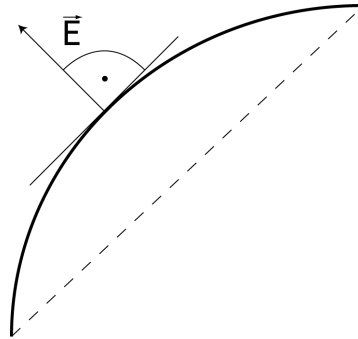
### 1. $\vec{E} = 0$ im Inneren des Leiters



falls  $\vec{E} \neq 0$ :  $\vec{F} = q\vec{E}$  verschiebt Ladung bis  $\vec{E} = 0$  !

2. Es folgt, sich bei einem Leiter die (Netto-)Ladungen immer an der Oberfläche befinden  $\Rightarrow$  Flächenladungsdichte  $\sigma = \frac{dQ}{dA}$

3.  $\vec{E}$  immer  $\perp$  auf Leiteroberfläche

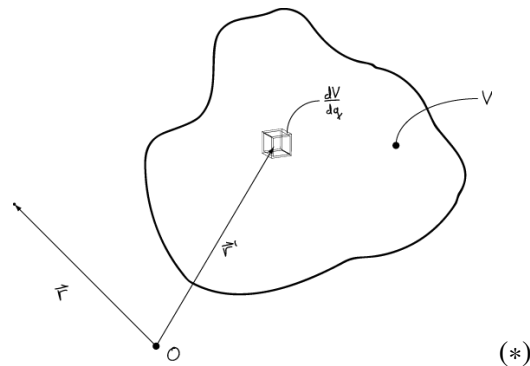


(falls  $\vec{E}_{||} \neq 0$ : Verschiebung der Ladung bis  $\vec{E}_{||} = 0$  !)

**Influenz:** Räumliche Ladungstrennung in el. Leitern durch äußeres  $\vec{E}$ -Feld (Kontaktlos!), so dass das Innere des Leiters feldfrei ist!

## 14.5 Kontinuierliche Ladungsverteilung

Betrachte Ladungsverteilung über endliches Volumen  $V = \int_V dV$



Ladungsdichte:  $\rho(\vec{r}) = \frac{dq(\vec{r})}{dV}$

Gesamtladung:  $Q = \int_V dq = \int_V \rho(\vec{r}) dV$

Flächenladungsdichte:  $\sigma = \frac{dq}{dA}$

Integral über geschlossene Oberfläche:  $A = \oint_A dA$

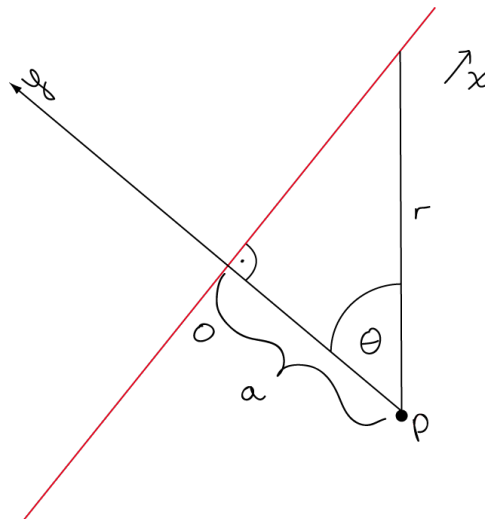
1-dim Ladungsdichte:  $\lambda = \frac{dq}{dl}$

Länge  $l = \int_l dl'$

für (\*) :

$$\begin{aligned} d\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \\ \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV \left\{ \frac{dq}{dV} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV \left\{ \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') \right\} \end{aligned}$$

**Beispiel:** unendlich langer geladener Draht



$$\frac{dq}{dx} = \lambda \text{ (lin. Ladungsdichte)}$$

$$\text{Symmetrie: } E_x = E_z = 0$$

$$E_y = E \cdot \cos(\theta)$$

$$dE_y = |d\vec{E}| \cdot \cos(\theta)$$

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2 \cdot \frac{\lambda \cdot dx}{r^2(\theta)} \cdot \cos(\theta) \quad ; \cos(\theta) = \frac{a}{r}$$

$$= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \cdot dx \cdot \underline{\cos^2 \theta} \cdot \cos \theta$$

$$\tan \theta = \frac{x}{a} \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = \frac{a}{\cos^2 \theta} \quad \Rightarrow dx = \frac{a}{\underline{\cos^2 \theta}} d\theta$$

$$\Rightarrow dE_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \cdot \frac{\cos \theta}{a} \cdot d\theta$$

$$E_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{a} \cdot \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \underline{\underline{\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{a}}}$$

## 14.6 Elektrischer Fluss und Satz von Gauß