0.0.1 Herleitung der Kirchhoff'schen Gesetze:

Maschenregel:
Es soll nun gezeigt werden, dass die Kirchhoff'schen Gesetzte direkt aus den Maxwellgleichungen folgen.
Dafür benutzen wir die Maxwellgleichung

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

in ihrer Integralform:

$$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{r}$$

Betrachten wir jetzt folgende Schaltung:
Dann können wir das Linienintegral als Summe über die einzelnen Bauelemente schreiben:

$$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \sum_n V_n$$

Wenn wir aber den Fall eines konstanten Magnetfeldes betrachten (hier sogar $\vec{B} = 0$), dann gilt:

$$0 = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{r} = \oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \sum_n V_n$$

Unterschiden wir nun die Spannungen in die von Widerständen und Elektromotorische Kräfte:

$$0 = \sum_n V_n = \sum_{\text{R's}} V_n + \sum_{\text{EMK's}} V_n$$

Die elektromotorischen Kräfte gehen mit positivem Vorzeichen ein, während die Widerstände das mit negativem tun.
Schreiben wir daher nun $V_n = -U_n$ für Widerstände und $V_n = \mathcal{E}_n$ für EMK. Wenn wir uns dann noch an das Ohmsche Gesetz erinnern, dann erhalten wir:

$$\boxed{\sum_n \mathcal{E}_n = \sum_n U_n = \sum_n I_n R_n}$$

Knotenregel:
Wieder beginnen wir mit einer Maxwellgleichung:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Wir gehen aber von stationären Strömen aus, also ist die Zeitableitung 0:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Integrieren wir nun beide Seiten über eine geschlossene Fläche, die unseren Knoten einschließt. Nennen wir diese A:

$$\oint_A \nabla \times \vec{B} = \oint_A \mu_0 \vec{\jmath} \cdot d\vec{A} \quad (*)$$

Nun benutzen wir den Satz von Stokes, der uns sagt, dass wir das linke Integral berechenen können, indem wir das Linienintegral von $\vec{B}$ um eine Kurve berechnen, die der Rand der Fläche ist.
Hier haben wir aber keine solche Kurve.
Betrachten wir daher nun den Grenzfall, dass die Fläche von einer kurzen Kurve mit Länge ϵ begrenzt wird.
Dann ist entland dieser Kurve $\vec{E}$ etwa konstant, sagen wir $\vec{E}_0$, und wir können schreiben

$$\left|\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{r}\right| \approx \left|\oint_{\partial A} \vec{E}_0 \cdot d\vec{r}\right| \leq \oint_{\partial A} \left|\vec{E}_0 \cdot d\vec{r}\right| \leq \oint_{\partial A} E_0 dr = E_0 \epsilon \longrightarrow 0,\ \epsilon \to 0$$

Damit haben wir 'gezeigt', dass das linke Integral in $(*)$ 0 ist. Nun zum Zweitem: Wir haben die Fläche so gewählt, dass sie den Konoten umschließt und, dass alle Drähte die Fläche senkrecht 'durchstechen'.
An diesen 'Durchstoßpunkten ist $\vec{\jmath} \neq 0$. Sonst aber überall schon.
Das Integral verschwindet also dast überall und wir können es als Summe über die einzelnen Drähte schreiben:

$$\oint_A \mu_0 \vec{\jmath} \cdot d\vec{A} = \mu_0 \oint_A \vec{\jmath}_i \cdot d\vec{A} = \mu_0 \sum_{i=1}^{N} \int_{\text{Leiter}_i} \vec{\jmath}_i \cdot d\vec{A}$$

Nun benutzten wir noch das senkrechte Durchstoßen. Damit ist nämlich:

$$\vec{\jmath}_i \cdot d\vec{A} = \jmath_i \ dA$$

Aber damit können wir das Integral vereinfachen zu:
(Ab jetzt integriere über Leiter i: $\int_i$)

$$\mu_0 \oint_A \vec{\jmath} \cdot d\vec{A} = \mu_0 \sum_{i=1}^{N} \int_i \vec{\jmath}_i \cdot d\vec{A} = \mu_0 \sum_{i=1}^{N} \int_i \jmath_i \ dA$$

Aber das $\jmath_i$ ist immer konstant, sodass die Integrale einfach immer die Querschnittsfläche des Drahtes mal $\jmath$ geben, was ja grade der Strom durch den Draht ist:

$$\mu_0 \oint_A \vec{\jmath} \cdot d\vec{A} = \mu_0 \sum_{i=1}^{N} \int_i \jmath_i \ dA = \mu_0 \sum_{i=1}^{N} \jmath_i \ A_i = \mu_0 \sum_{i=1}^{N} I_i$$

Wenn wir jetzt beide Integrale in $(*)$ einsetzten, dann bekommen wir:

$$0 = \oint_A \nabla \times \vec{B} = \oint_A \mu_0 \vec{\jmath} \cdot d\vec{A} = \mu_0 \sum_{i=1}^{N} I_i$$

Division mit mu_0 liefert dann:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} I_i = 0}$$

Wenden wir nun einmal diese Regel an:
In der Schaltung gilt nach der Machenregel zunächst:

$$U_0 = U_R + U_C$$

Diese sind leicht ermittelt, denn für den Widerstand gilt das Ohm'sche Gesetz und für den Kondensator benutzen wir die Kapazität:

$$U_R = IR,\ C = \frac{Q}{U} \Leftrightarrow U = \frac{Q}{C}$$

Nun benutzten wir noch, dass gilt: $\dot{Q} = I$ und erhalten:

$$U_0 = RI + \frac{Q}{C}$$

Um diese nicht homogene DGL zu lösen leiten wir sei einfach nach t ab:

$$0 = U_0 = R\dot{I} + \frac{1}{C}\dot{Q} = \frac{1}{C}I + R\dot{I} \Leftrightarrow \dot{I} = -\frac{1}{RC}I$$

Nun müssen wir nur noch die Veränderlichen trennen:

$$\frac{dI}{dt} = -RCI \Leftrightarrow \frac{dI}{I} = -\frac{1}{RC}dt$$

Integrieren von 0 bis t liefert dann:

$$\ln\frac{I}{I_0} = \ln I - \ln I_0 = \int_{I_0}^{I}\frac{d\tilde{I}}{\tilde{I}} = \int_0^t -\frac{1}{RC}d\tilde{t} = -\frac{1}{RC}t$$

Daraus folgt natürlich sofort:

$$I = I_0 e^{-\frac{1}{RC}t} = \exp\left(-\frac{1}{RC}t\right)$$

1 Das Vektorpotential und das Gesetz von Biot-Savart

1.1 Das Vektorpotential

In diesem Abschnitt leisten wir theoretische Vorarbeit, um dann anschließend das Gesetz von Biot-Savart herzuleiten.
Dafür lösen wir die Maxwell-Gleichungen der Magnetostatik:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_o \vec{\jmath}$$

Die erste Gleichung implitziert, dass es ein $\vec{A}$ gibt mit:

$$\boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}}$$

$\vec{A}$ heißt das Vektorpotential und ist genau wie das mechanische Potential nicht eindeutig.
Dieses hier ist aber nicht nur bis auf eine Konstante abhängig, sondern bis auf einen Gradienten $\nabla\psi$, wobei ψ eine beliebige skalare Funktion ist.
Daher legen wir der Einfachheit noch fest, dass $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ sein soll.
Setzen wir nun die Definition des Vektorpotentials in die zweite Maxwellgleichung ein, dann erhalten wir:

$$\mu_0 \vec{\jmath} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

Nach unser vorherigen Konvention ist der erste Term auf der rechten Seite 0 und Multiplikation mit -1 liefert:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{\jmath}$$

Wir wollen diese Gleichung nun lösen. Allerdings kennen wir die Lösung schon.

1.1.1 Erinnerung Elektrostatik

Betrachten wir die Maxwellgleichungen für die Elektrostatik:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\varrho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \vec{E} = 0$$

Die zweite Gleichung implitziert, dass $\vec{E} = -\nabla\phi$. ϕ ist das elektrostatische Potential.
Ineinander einsetzen liefert:

$$-\nabla^2\phi = \frac{\varrho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \nabla^2\phi = -\frac{\varrho}{\epsilon_0}$$

Aber das ist sinnlos, denn wir wissen ja, was die Lösung für *phi* ist, wenn wir einfach das Superpositionsprinzip benutzen:

$$\phi = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\varrho \, dV}{r}$$

Genug der Erinnerung!
Beachten wir nun, dass die Gleichung für ϕ ist mathematisch identisch mit der für die Komponenten von $\vec{A}$. Wenn wir also ein Vektorpotential bestimmen wollen, dann können wir auch das zugehörige Elektrostatische Problem lösen und dann einfach $\frac{\varrho}{\epsilon_0}$ mit $\mu_0 \jmath$ ersetzen.
Da wir aber schon das Problem für das Potential allgemein gelöst haben, haben wir auch eine Formel fürs Vektorpotential:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\varrho \, dV}{r} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\varrho}{\epsilon_0} \frac{dV}{r}$$

Für die i-te Komponente von $\vec{A}$ wegibt sich somit:

$$A_i = \frac{1}{4\pi} \int \mu_0 \jmath_i \frac{dV}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\jmath_i \, dV}{r}$$

Multiplitzieren wir mit $\hat{e}_i$ uns summieren von $i = 1$ bis $i = 3$ erhalten wir:

$$\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{\jmath} \, dV}{r}}$$

Damit haben wir auch eine Formel fürs $\vec{B}$-Feld:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int \frac{\vec{\jmath} \, dV}{r}}$$

1.2 Das Gesetz von Biot-Savart

Den schwierigen Teil haben wir eigentlich schon hinter uns. Ab hier wollen wir nur noch das Integral für $\vec{B}$ umschreiben.
Sei $P(x_1, y_1, z_1)$. Dann wollen wir nun das Magnetfeld im Punkt P bestimmen.
Dabei müssen wir aufpassen:
Die Formel fürs Vektorpotential gibt uns dieses in Abhängigkeit von (x_1, y_1, z_1).
Wenn wir die Rotation davon berechnen, dann wollen ist also:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial z_1} \right)^T$$

Wenn wir das beachten, dann dürfen wir Integration und ∇ vertauschen:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int \frac{\vec{\jmath} \, dV}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\nabla \times \frac{\vec{\jmath}}{r} \right) \, dV$$

Sei weiter:

$$\vec{\jmath} = (j_x, \ j_y, \ j_z)^T$$

Jetzt einfach r einsetzten:

$$r = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$$

Berechnen wir die x-Komponente von $\nabla \frac{\vec{\jmath}}{r}$:

$$\hat{e}_1 \cdot \nabla \frac{\vec{\jmath}}{r} = \partial_{y_1} \frac{j_z}{r} - \partial_{z_1} \frac{j_y}{r} = \frac{2(y-y_1)(-j_z)}{2\sqrt{(...)}^{3/2}} - \frac{2(z-z_1)(-j_y)}{2\sqrt{(...)}^{3/2}} = \frac{j_z(y_1-y)+j_y(z_1-z)}{r^3}$$

Damit wird die x Komponente des Magnetfeldes:

$$B_x(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j_z(y_1-y)+j_y(z_1-z)}{r^3} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\hat{e}_1 \cdot (\vec{\jmath} \times \vec{r})}{r^3} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\hat{e}_1 \cdot (\vec{\jmath} \times \hat{e}_r)}{r^2} dV$$

Dies gilt analog für alle Komponeten. In Vektorform gilt dann:

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{\jmath} \times \hat{e}_r}{r^2} dV$$

Hierbei ist r der Abstand zwischen P und dem Volumenelement über das grade integriert wird.
Wir schreiben daher auch:

$$\boxed{\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{\jmath} \times \hat{e}_{\vec{x}-\vec{P}}}{|\vec{x}-\vec{P}|^2}\ d^3x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{\jmath} \times (\vec{x}-\vec{P})}{|\vec{x}-\vec{P}|^3}\ d^3x}$$

Betrachten wir noch einen Spezialfall:
Sind die Ströme nur in dünnen (idealisiert: Dicke=0) Drähten, dann können wir die obige Gleichung noch etwas umschreiben:

$$\vec{\jmath}\, dV = \jmath\ Ad\vec{s} = (A\jmath)d\vec{s} = Id\vec{s}$$

Damit gilt dann:

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Id\vec{s} \times (\vec{x}-\vec{P})}{|\vec{x}-\vec{P}|^3}\ d^3x$$

Drehen wir jetzt noch das Kreuzprodukt um, sodass das Integral in üblericher Form da steht. Dadurch kommt natürlich ein $-$ vors Integral:

$$\boxed{\vec{B}(P) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I(\vec{x}-\vec{P}) \times d\vec{s}}{|\vec{x}-\vec{P}|^3}\ d^3x}$$