

Kapitel 14 - Statische elektrische Felder

Johannes Bilk
me@talachem.de

May 8, 2016

Contents

14 Statische Elektrische Felder	2
14.1 Elektrische Ladungen	2
14.1.1 Reibungselektrizität	2
14.1.2 Ladung ist eine skalare Größe	3
14.1.3 Quarks	4
14.1.4 Entdeckung und Bestimmung der Elementarladung	5
14.2 Kräfte zwischen Ladungen und das Coulomb-Gesetz	5
14.3 Potenzielle Energie einer Ladungsverteilung	7
14.4 Erzeugung el. Felder durch Ladungen	8
14.4.1 Feld einer Punktladung:	8
14.4.2 Feld einer Verteilung von Punktladungen	9
14.4.3 Leiter im el. Feld und Influenz	10
14.5 Kontinuierliche Ladungsverteilung	11
14.6 Elektrischer Fluss und Satz von Gauß	13
14.6.1 Definition:	13
14.6.2 Gauß'scher Satz	14
14.6.3 Beispiele	15

14 Statische Elektrische Felder

14.1 Elektrische Ladungen

→ Ab dem 17. Jahrhundert: Ursache für "elektrische Phänomene"; "neuartiger Stoff", elektrische Ladung



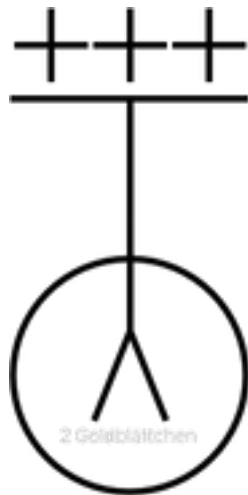
14.1.1 Reibungselektrizität

- Zwei Arten von "elektrischen Zuständen" sind erzeugbar:
 - Gleichartige Zustände \implies Abstoßung
 - Ungleichartige Zustände \implies Anziehung
- Charles Du Fay (1730): positiv/negativ elektrische Ladung
- Benjamin Franklin (1750): Über-/Unterschuss an "elektrischen Fluiden"
- Lichtenberg (1778): Zuordnung der Polarität

Hargummi stab: reiben mit Pelz, Wolle: - Glas, Plexiglas: reiben mit Seide: +
--

Reibezeug: entgegengesetzte Polarität \implies Ladungstrennung, nicht etwa Ladungserzeugung.

Grundsätzliches Messprinzip: Elektroskop:



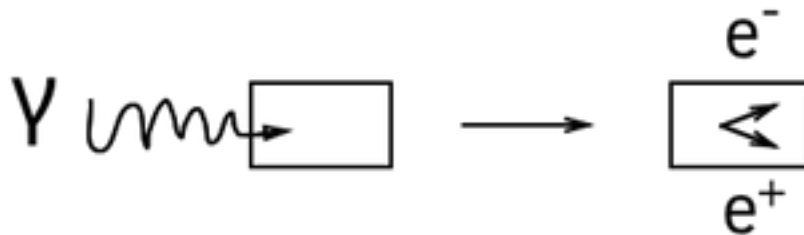
→ Elektrometer → quantitative Messung

- "Löffeln"; d.h. portionsweise Übertragung von Ladungen ist möglich
- Elektropendel: \implies periodisches Umladen eines "Kugelpendel"

14.1.2 Ladung ist eine skalare Größe

Einheit 1C = 1 Coulomb, SI

- Zu jedem geladenen Elementarteilchen gibt es ein Elementarteilchen mit entgegengesetzter Ladung (\rightarrow Ladungssymmetrie)
- Die Gesamtladung eines abgeschlossenen Systems bleibt erhalten (\rightarrow Ladungserhaltung)
- Beispiel: Produktion eines e^+e^- -Paares; $E_\gamma \geq 1,02 \text{ MeV}$



Nachweis: Blasenkammer im Magnetfeld:

Umkehrung: "Zerstrahlung" von Positronen; $E = m \cdot c^2$

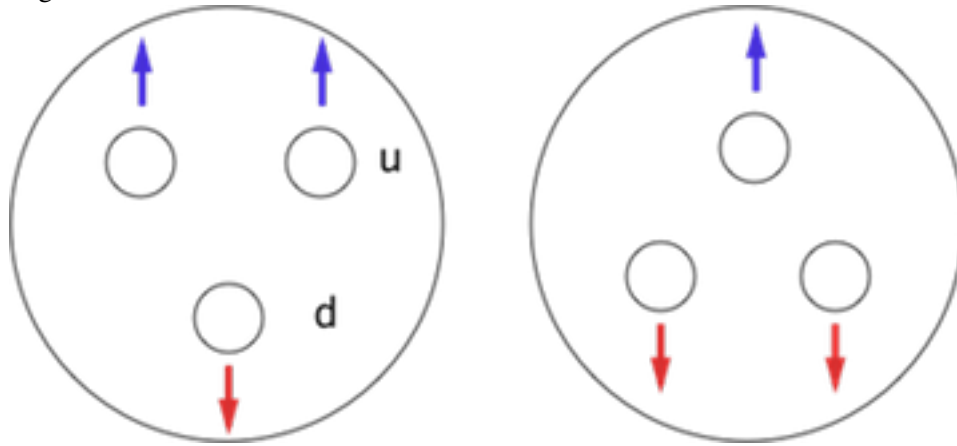
- Ladungsträger haben stets eine Masse
- Ladung kann nicht (im Gegensatz zur Masse) in Energie umgewandelt werden, bleibt auch bei Zerfallsprozessen erhalten.
- Quantisierung der Ladung: Alle in der Natur vorkommenden Ladungen sind ganzzahlige Vielfache der Elementarladung: $e_0 := 1,602 \cdot 10^{-19} \text{C}$; $1 \text{C} = 1 \text{AS}$

Beispiele von Ladungen

- Neutral: γ, ν, n
- einfach geladen: e^-, e^+, p, \bar{p}
- zweifach geladen: $\text{He}_2(2^+, Z : 2)$

14.1.3 Quarks

Seit 60er Jahre Nukleonen bestehen aus Quarks, diese haben "drittelzahlige Ladungen"



Up-Quarks: $u : +\frac{2}{3}e_0$
Down-Quarks: $d : -\frac{1}{3}e_0$
Proton: $2u + d : 1 \cdot e_0$
Neutron: $u + 2d : 0 \cdot e_0$

Quarks treten immer in 2er- oder 3er- Kombinationen auf.

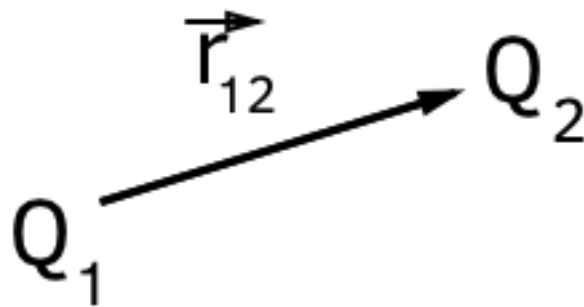
14.1.4 Entdeckung und Bestimmung der Elementarladung

Robert Andrews Millikan(1868-1953): Öltröpfchenversuch (→ Anfängerpraktikum)

14.2 Kräfte zwischen Ladungen und das Coulomb-Gesetz

Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806)

1785: Messung der Kraft zwischen zwei Ladungen als Funktion des Abstands mit Hilfe einer Torsionswaage



$$\vec{F}_{12} = f \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|} = f \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \cdot \hat{r}_{12}$$

F ist definiert durch die Definition der Ladungseinheit:

Internationales Messsystem (SI): $f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{(As)^2}{Nm^2}$$

ist Dielektrizitätskonstante des Vakuums oder elektrische Feldkonstante

$Q_1 \cdot Q_2 > 0$: Abstoßung

$Q_1 \cdot Q_2 < 0$: Anziehung

Coulomb-Kraft

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \cdot \hat{r}_{12}$$

1 Coulomb ist diejenige elektrische Ladung, die eine gleich große Ladung im Abstand von 1m mit der Kraft von $8,9874 \cdot 10^9 N$ abstößt

Analogie Gravitation : $\vec{F} = -\gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \hat{r}$

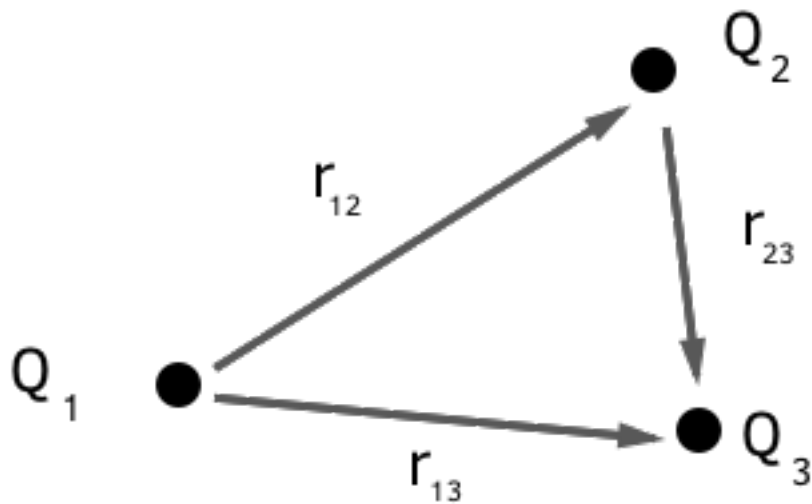
Vergleiche Gravitation und Coulombkraft zwischen Elektron und Proton:

$$|\vec{F}_C| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q_p| \cdot |q_e|}{r^2} = 2,3 \cdot 10^{-28} \frac{N}{r[m]^2}$$

$$|\vec{F}_G| = \gamma \cdot m_e \cdot m_p = 9,71 \cdot 10^{-68} \frac{N}{r[m]^2}$$

$$\implies \frac{|F_G|}{|F_C|} = 4,2 \cdot 10^{-40}$$

Wechselwirkung zwischen mehreren Ladungen



Die einzelnen Kräfte überlagern sich ungestört, (ungestörte Superposition)!

Kraft auf

$$Q_3 : \vec{F}_3 = \left[\frac{Q_1 \cdot Q_3}{r_{13}^2} \cdot \hat{r}_{13} + \frac{Q_2 \cdot Q_3}{r_{23}^2} \cdot \hat{r}_{23} \right]$$

14.3 Potenzielle Energie einer Ladungsverteilung

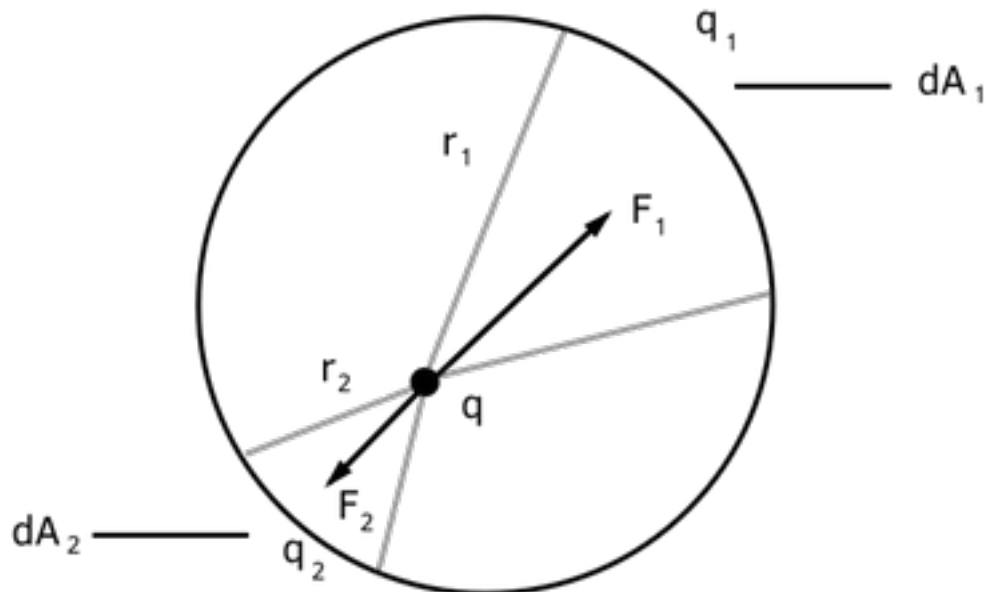
$$\begin{aligned}
 W_{12} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{\infty}^r \frac{Q_1 \cdot Q_2}{V^2} dV \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q_1 \cdot Q_2}{V} \right]_{\infty}^r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{V_{12}} \\
 W_{1,2,3} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1 \cdot Q_3}{r_{13}} + \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_2 \cdot Q_3}{r_{23}} \right)
 \end{aligned}$$

Anzahl an Summanden = Anzahl an Paaren

$$W = \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{Q_i \cdot Q_j}{r_{ij}} \right] \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

⇒ Aufsummieren auch unendlicher Ensembles möglich, wenn die Reihe konvergiert.

Betrachte Kraft auf Probeladung in homogen geladener Kugel



Für beliebige Räumlichelemente (und damit auch Flächenelemente) gilt:

$$q_1 \propto dA_1 \propto r_1^2$$

$$q_1 \propto dA_1 \propto r_1^2$$

$$\text{Geometrie} \implies \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

Annahme: Kraft $\propto \frac{1}{r^n}$

$$|\vec{F}_1| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot q_1}{r_1^n}$$

$$|\vec{F}_2| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot q_2}{r_2^n}$$

Geometrie einsetzen:

$$\frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{F}_2|} = \frac{q_1}{r_1^n} \cdot \frac{r_2^n}{q_2} \stackrel{!}{=} 1 \implies n = 2$$

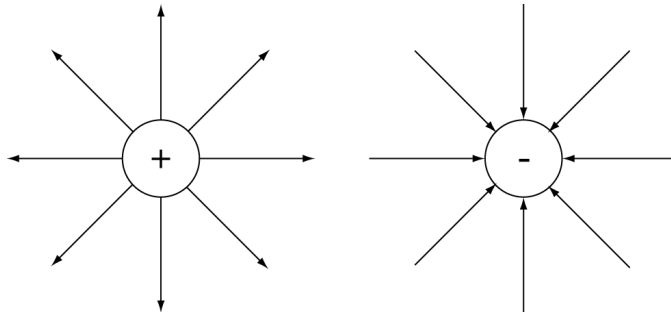
Gesamtkraft verschwindet nur wenn $\parallel \propto \frac{1}{r^2}$

14.4 Erzeugung el. Felder durch Ladungen

14.4.1 Feld einer Punktladung:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \cdot \hat{r}_{12} \\ &= q_1 \cdot \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{|\vec{r}_{12}|^2}}_{\text{Feld von } q_2} \cdot \hat{r}_{12} \\ &= q_1 \vec{E}(\vec{r}) \end{aligned}$$

- Felder einer Punktladung sind Zentralfelder mit Kugelsymmetrie
- Konvention: Feldlinien führen von positiver zu negativer Ladung



\implies Punktladungsfelder sind inhomogen!

14.4.2 Feld einer Verteilung von Punktladungen

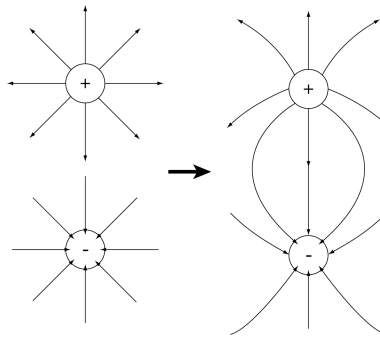
N Ladungen bei \vec{r}_i

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

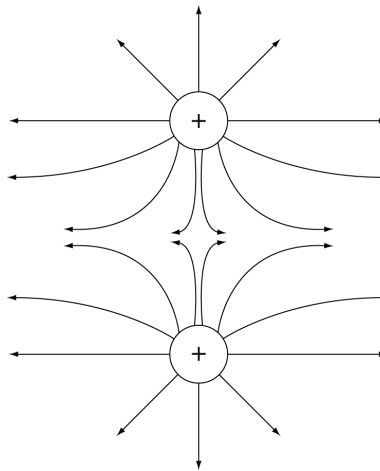
Ungestörte Superposition:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

2 Ladungen, q ; -q : Feld eines Dipols

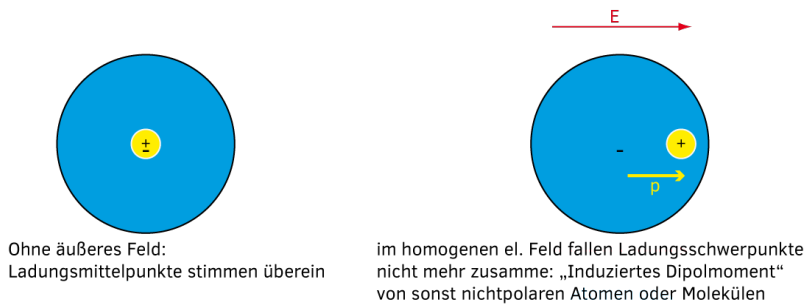


2 Ladungen: q ; q

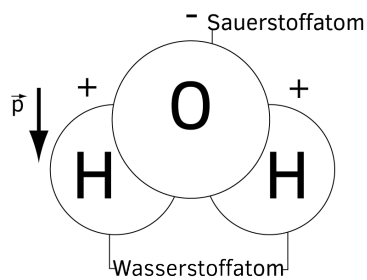


Beispiele für "natürliche Dipole":

1. Neutrales Atom im homogenen \vec{E} -Feld



2. Polare Moleküle mit permanentem Dipolmoment

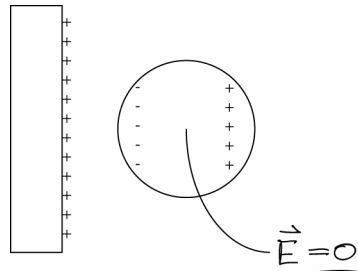


14.4.3 Leiter im el. Feld und Influenz

Leiter: Ladungen sind frei beweglich

Isolator: Ladungen sind ortsfest

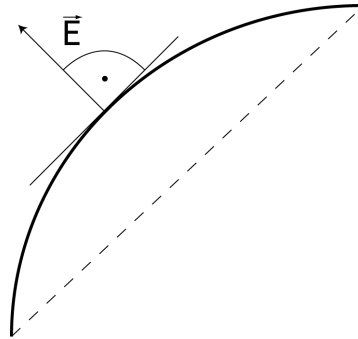
1. $\vec{E} = 0$ im Inneren des Leiters



falls $\vec{E} \neq 0$: $\vec{F} = q\vec{E}$ verschiebt Ladung bis $\vec{E} = 0$!

2. Es folgt, sich bei einem Leiter die (Netto-)Ladungen immer an der Oberfläche befinden \Rightarrow Flächenladungsdichte $\sigma = \frac{dQ}{dA}$

3. \vec{E} immer \perp auf Leiteroberfläche

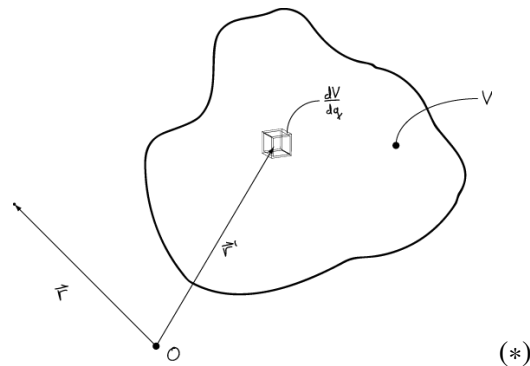


(falls $\vec{E}_{||} \neq 0$: Verschiebung der Ladung bis $\vec{E}_{||} = 0$!)

Influenz: Räumliche Ladungstrennung in el. Leitern durch äußeres \vec{E} -Feld (Kontaktlos!), so dass das Innere des Leiters feldfrei ist!

14.5 Kontinuierliche Ladungsverteilung

Betrachte Ladungsverteilung über endliches Volumen $V = \int_V dV$



Ladungsdichte: $\rho(\vec{r}) = \frac{dq(\vec{r})}{dV}$

Gesamtladung: $Q = \int_V dq = \int_V \rho(\vec{r}) dV$

Flächenladungsdichte: $\sigma = \frac{dq}{dA}$

Integral über geschlossene Oberfläche: $A = \oint_A dA$

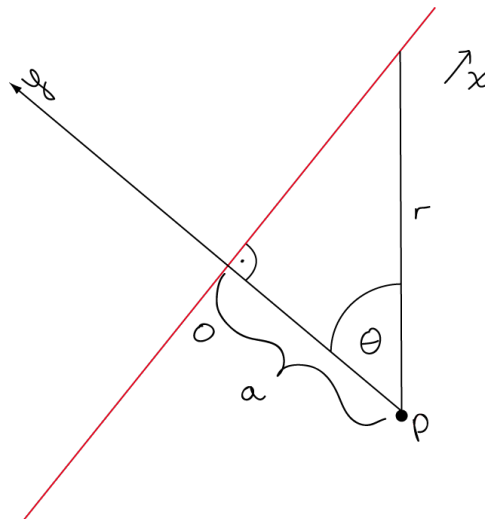
1-dim Ladungsdichte: $\lambda = \frac{dq}{dl}$

Länge $l = \int_l dl'$

für (*) :

$$\begin{aligned} d\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \\ \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV \left\{ \frac{dq}{dV} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV \left\{ \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') \right\} \end{aligned}$$

Beispiel: unendlich langer geladener Draht



$$\frac{dq}{dx} = \lambda \text{ (lin. Ladungsdichte)}$$

Symmetrie: $E_x = E_z = 0$

$$E_y = E \cdot \cos(\theta)$$

$$dE_y = |d\vec{E}| \cdot \cos(\theta)$$

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2 \cdot \frac{\lambda \cdot dx}{r^2(\theta)} \cdot \cos(\theta) \quad ; \cos(\theta) = \frac{a}{r}$$

$$= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \cdot dx \cdot \underline{\cos^2 \theta} \cdot \cos \theta$$

$$\tan \theta = \frac{x}{a} \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = \frac{a}{\cos^2 \theta} \quad \Rightarrow dx = \frac{a}{\underline{\cos^2 \theta}} d\theta$$

$$\Rightarrow dE_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \cdot \frac{\cos \theta}{a} \cdot d\theta$$

$$E_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{a} \cdot \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \underline{\underline{\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{a}}}$$

14.6 Elektrischer Fluss und Satz von Gauß

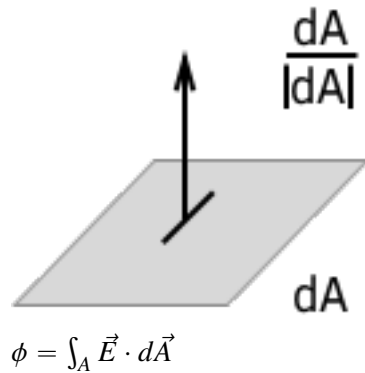


Zusammenhang zwischen "Elektrischem Fluss" (Feldliniendurchsatz) durch eine Oberfläche und der eingeschlossenen Ladung.

⇒ Allgemeinere Formulierung des Coulomb-Gesetzes

14.6.1 Definition:

Fluss ϕ eines Vektorfeldes \vec{E} durch eine Fläche A:



d : Richtung \perp Fläche (nach Außen)
Richtung der Flächennormale

Betrag dA : Größe der Fläche

Spezialfälle

\vec{E} – homogen $\vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot dA \cdot \cos \alpha$

• $\alpha = 0 : \vec{E} \parallel d\vec{A} : \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot dA$

• $\alpha = 90 : \vec{E} \perp d\vec{A} : \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$

14.6.2 Gauß'scher Satz

$$\phi = \oint_{\substack{A \\ \text{geschlossen}}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{eingeschlossen}}}{\epsilon_0}$$

Der elektrische Fluss durch einer beliebigen geschlossenen Oberfläche hängt weder von der Form der Oberfläche, noch von der Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r})$ ab, sondern nur von der eingeschlossenen Gesamtladung Q .

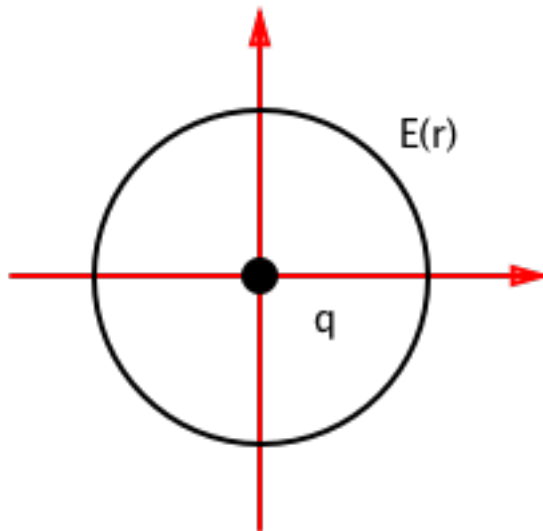
Mathematisch gilt:

[

Die Ladungsverteilung im Raum ist die lokale Quelle ($\rho(\vec{r}) > 0$) bzw. Senke ($\rho(\vec{r}) < 0$) des elektrischen Feldes.

14.6.3 Beispiele

(i) Feld einer Punktladung

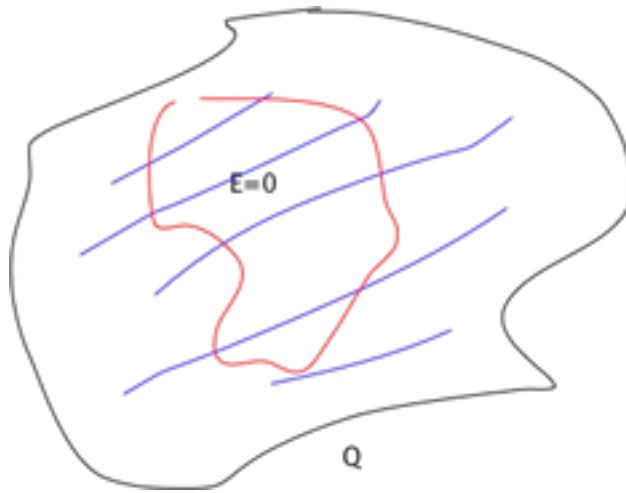


- Geeignete Wahl von A: Kugeloberfläche
- Symmetrie: $\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \cdot \hat{e}_r$
- $\implies \vec{E} \parallel d\vec{A}$

[

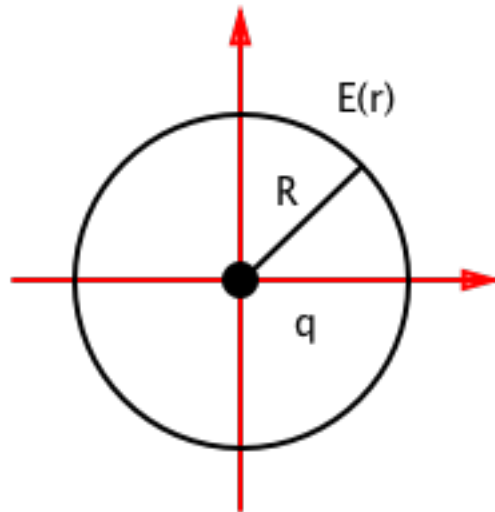
$$\text{Gau\ss: } \phi \stackrel{!}{=} \frac{Q}{\epsilon_0} = E(r) \cdot 4\pi r^2 \implies \underline{E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}}$$

(ii) Ladung auf beliebig geformten Leitern

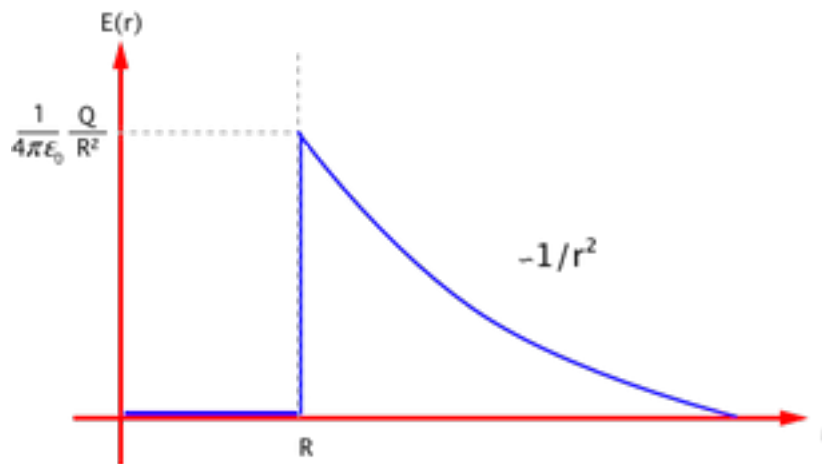


$$\phi = \oint_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} = 0$$

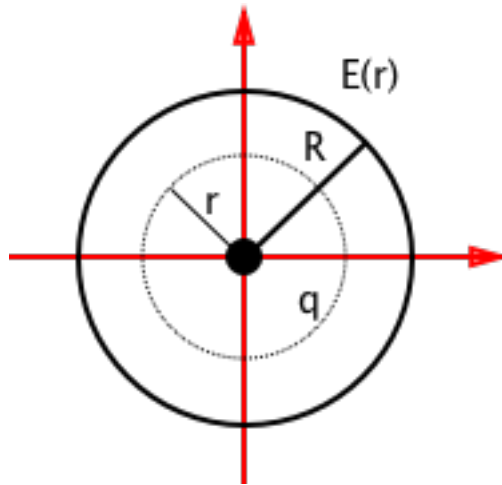
(iii) Feld einer leitenden Kugel mit Ladung Q : (Ladung auf der Oberfläche)



$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= E(\vec{r}) \cdot \hat{e}_r \\ r < R : E &= 0 \\ r > R : \phi &= \oint_A E(r) dA = E(r) \cdot 4\pi r^2 \\ \phi &= \frac{Q}{\epsilon_0} \\ \implies E(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}\end{aligned}$$



(iv) Feld einer homogen geladenen Kugel



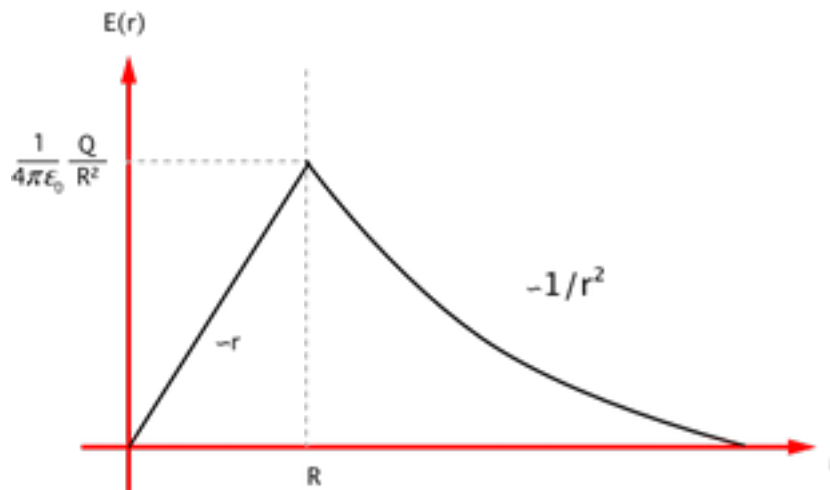
$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \text{ für } r < R \quad \rho = 0 \text{ für } r > R$$

$r < R$:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

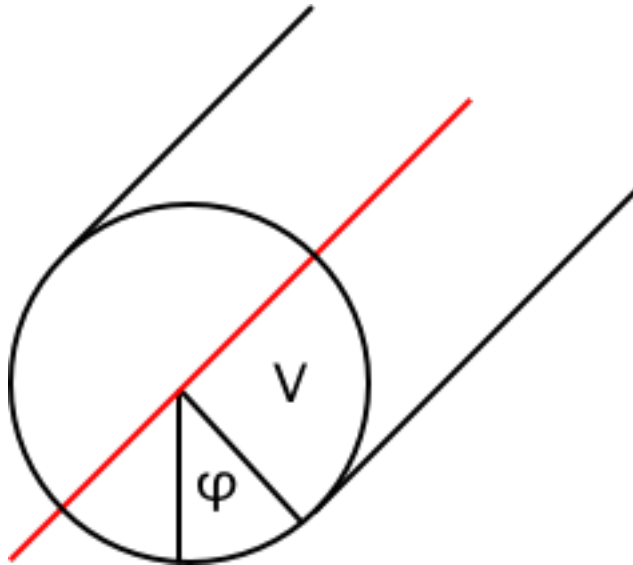
$$Q_{in} = Q \cdot \frac{r^3}{R^3}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^3} \cdot r$$



⇒ Von Außen ist nicht feststellbar, ob die geladene Kugel massiv oder hohl ist (Leiter oder homogen geladener Isolator)!

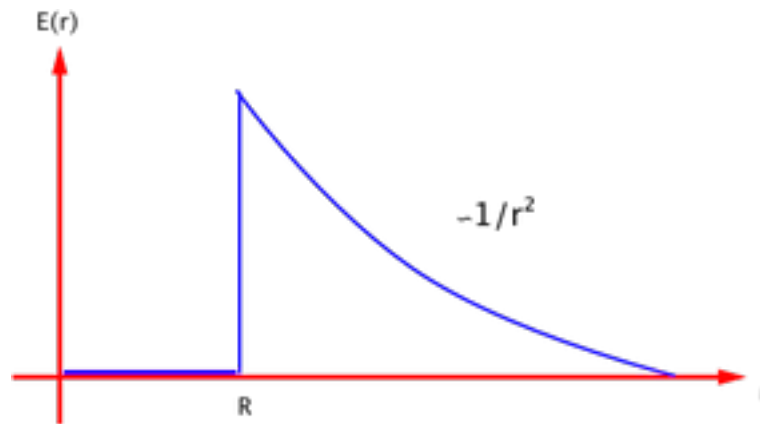
(v) Unendlich langer homogen geladener Draht



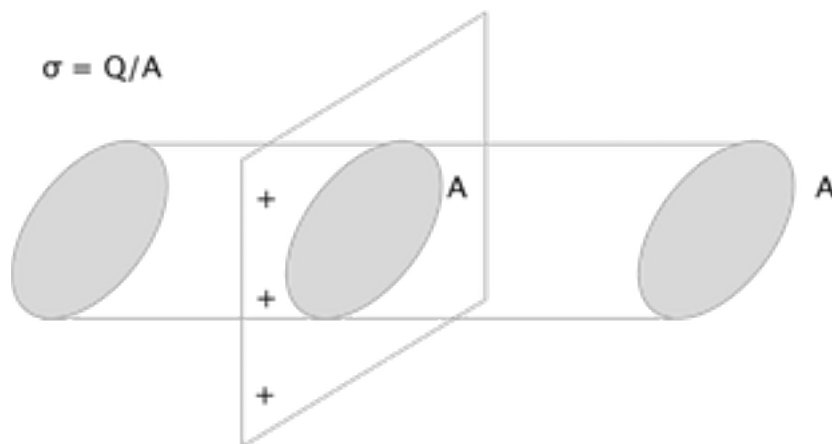
Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{dq}{dL} = \left(\frac{Q}{R}\right) \leftarrow \text{als endliche lange l} \\ \vec{E}(\vec{r}) &= \vec{E}(r) = E(r) \cdot \hat{e}_r \\ \phi &= \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_A E(r) dA = E(r) \oint_A da = E(r) \cdot 2\pi r l \\ \phi &= \frac{Q_{ges}}{\epsilon_0} \implies E(r) = \frac{Q_{ges}}{2\pi\epsilon_0 \cdot r l} \\ E(r) &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}\end{aligned}$$

(vi) Unendlich langer, homogen geladener leitender Zylinder



(vii) Feld einer homogen geladener unendliche leitenden Ebene



$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

$$\phi = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{A, \text{stirn}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{A, \text{mantel}} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

\vec{E} -Ebene

\implies Beitrag Über Mantelfläche verschwindet ($d\vec{A} \perp \vec{E}$)

$$\phi = \oint_A \vec{E} d\vec{A} = 2 \cdot E \cdot A_{\text{stirn}} \stackrel{G.S.}{=} \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\implies E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$