Kapitel 14 - Statische elektrische Felder

Johannes Bilk
me@talachem.de

May 9, 2016

Contents

14 Statische Elektrische Felder **2**
14.1 Elektrische Ladungen 2
14.1.1 Reibungselektrizizät 2
14.1.2 Ladung ist eine skalare Größe 3
14.1.3 Quarks 4
14.1.4 Entdeckung und Bestimmung der Elementarladung 5
14.2 Kräfte zwischen Ladungen und das Coulomb-Gesetz 5
14.3 Potenzielle Energie einer Ladungsverteilung 7
14.4 Erzeugung el. Felder durch Ladungen 8
14.4.1 Feld einer Punktladung: 8
14.4.2 Feld einer Verteilung von Punktladungen 9
14.4.3 Leiter im el. Feld und Influenz 11
14.5 Kontinuierliche Ladungsverteilung 12
14.6 Elektrischer Fluss und Satz von Gauß 14
14.6.1 Definition: Fluss ϕ eines Vektorfeldes $\vec{E}$ durch einen Fläche A: 15
14.6.2 Gauß'scher Satz 15
14.6.3 Beispiele 16
14.7 Das elektrische Potenzial 22
14.7.1 Elektrisches Feld und Potenzial 24
14.7.2 Poisson- und Laplace Gleichung: 26
14.8 Elektrisches Feld in der Umgebung von Leitern 26
14.8.1 Anwendungen: 28
14.8.2 Elektrisches Feld zwischen geladenen Leitern 29
14.8.3 Berechnung der Kapazität: 30

14 Statische Elektrische Felder

14.1 Elektrische Ladungen

→ Ab dem 17. Jahrhundert: Ursache für "elektrische Phänomene"; "neuartiger Stoff", elektrische Ladung

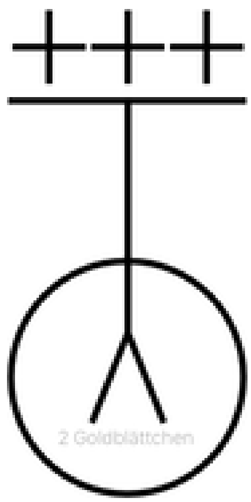
14.1.1 Reibungselektrizizät

- Zwei Arten von "elektrischen Zuständen" sind erzeugbar:
  - Gleichartige Zustände $\Longrightarrow$ Abstoßung
  - Ungleichartige Zustände $\Longrightarrow$ Anziehung
- Carles Du Fay (1730): positiv/negativ elektrische Ladung
- Benjamin Franklin (1750): Über-/Unterschuss an "elektrischen Fluiden"
- Lichtenberg (1778): Zuordnung der Polariät

Hargummi stab: reiben mit Pelz, Wolle: -   Glas, Plexiglas: reiben mit Seide: +

Reibezeug: entgegengesetzte Polarität $\Longrightarrow$ Ladungstrennung, nicht etwa Ladungserzeugung.

Grundsätzliches Messprinzip: Elektroskop:



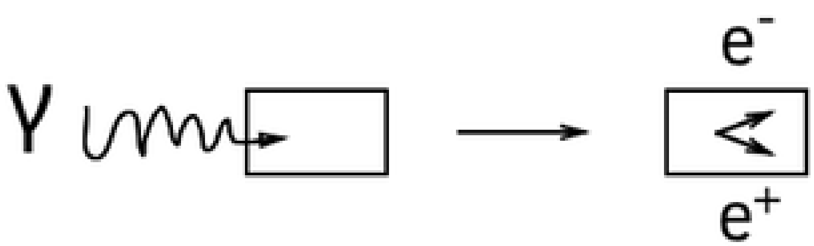
→ Elektrometer → quantitative Messung

- "Löffeln"; d.h. portionsweise Übertragung von Ladungen ist mglich
- Elektropendel: $\implies$ periodisches Umladen eines "Kugelpendel"

14.1.2 Ladung ist eine skalare Größe

Einheit 1C = 1 Coulomb, SI

- Zu jedem geladenen Elementarteilchen gibt es ein Elementarteilchen mit entgegengesetzter Ladung (→ Ladungssymmetrie)
- Die Gesamtladung eines abgeschlossenen Systems bleibt erhalten (→ Ladungserhaltung)
- Beispiel: Produktion eines e^+e^--Paares; $E_\gamma \geqslant 1{,}02$ MeV



Nachweis: Blasenkammer im Magnetfeld:
Umkehrung: "Zerstrahlung" von Positronen; $E = m \cdot c^2$

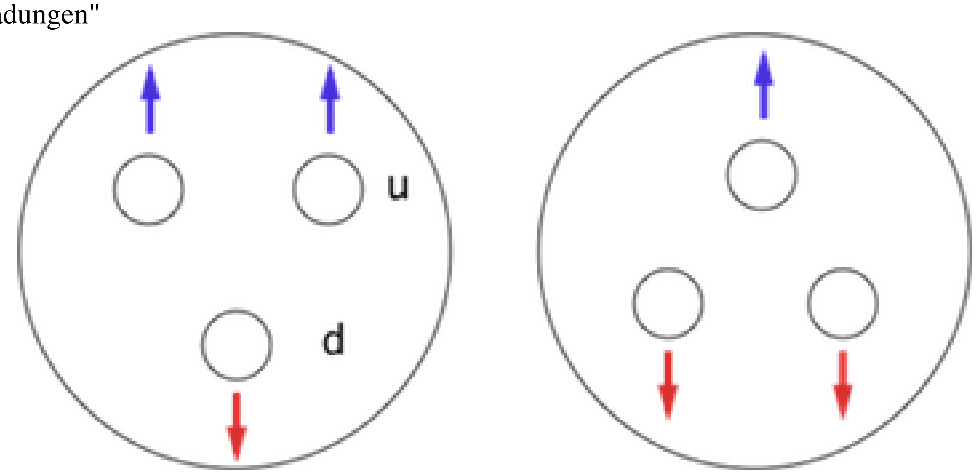
- Ladungträger haben stets eine Masse
- Ladung kann nicht (im Gegensatz zur Masse) in Energie umgewandelt werden, bleibt auch bei Zerfallsprozessen erhalten.
- Quantisierung der Ladung: Alle in der Natur vorkommenden Ladungen sind ganzzahlige Vielfache der Elementarladung: $e_0 := 1,602 \cdot 10^{-19}C; 1C = 1AS$

Beispiele von Ladungen

- Neutral: γ, ν, n
- einfach geladen: $e^-, e^+, p, \bar{p}$
- zweifach geladen:: $He_2(2^+, Z : 2)$

14.1.3 Quarks

Seit 60er Jahre Nukleonen bestehen aus Quarks, diese haben "drittelzahlige Ladungen"



Up-Quarks:$u : +\frac{2}{3}e_0$
Down-Quarks:$d : -\frac{1}{3}e_0$
Proton:$2u + d : 1 \cdot e_0$
Neutron:$u + 2d : 0 \cdot e_0$

Quarks treten immer in 2er- oder 3er- Kombinationen auf.

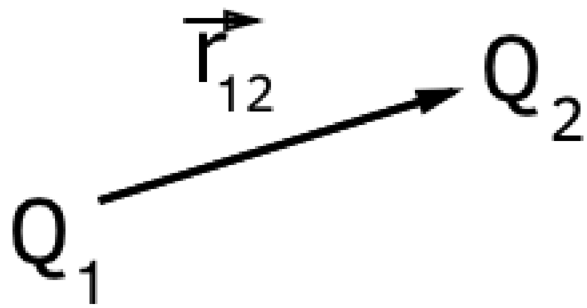
14.1.4 Entdeckung und Bestimmung der Elementarladung

Robert Andrews Millikan(1868-1953): Öltrpfchenversuch (→ Anfängerpraktikum)

14.2 Kräfte zwischen Ladungen und das Coulomb-Gesetz

Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806)

1785: Messung der Kraft zwischen zwei Ladungen als Funktion des Abstands mit Hilfe einer Torsionswaage



$$\boxed{\vec{F_{12}} = f \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r_{12}}}{|\vec{r_{12}}|} = f \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \cdot \hat{r}_{12}}$$

F ist definiert durch die Definition der Ladungseinheit:
Internationales Messsystem (SI): $f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$
$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{(As)^2}{Nm^2}$
ist Dielektrizitätskonste des Vakuums oder elektrische Feldkonstante
$Q_1 \cdot Q_2 > 0$: Abstoßung
$Q_1 \cdot Q_2 < 0$: Anziehung

Coulomb-Kraft

$$\boxed{\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \cdot \hat{r}_{12}}$$

1 Coulomb ist diejenige elektrische Ladung, die eine gleich große Ladung im Abstand von 1m mit der Kraft von $8,9874 \cdot 10^9 N$ abstößt

Analogie Gravitation: $\vec{F} = -\gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \hat{r}$

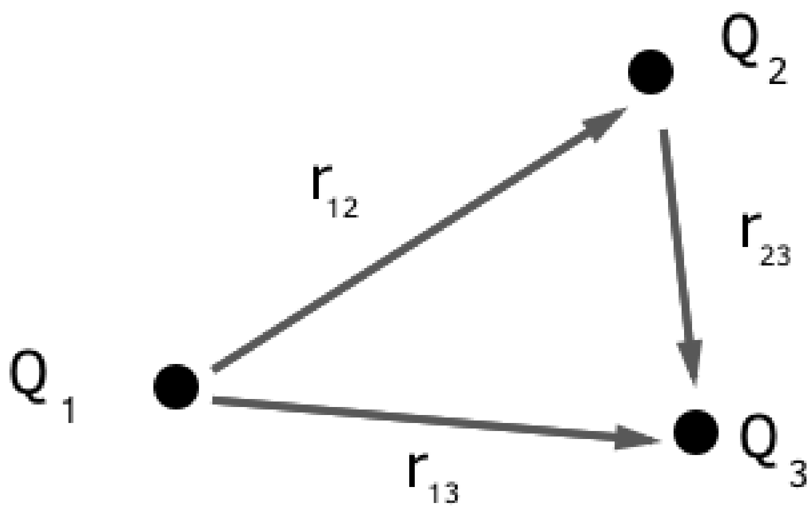
Vergleiche Gravitation und Coulombkraft zwischen Elektron und Proton:

$$|\vec{F}_C| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q_p| \cdot |q_e|}{r^2} = 2,3 \cdot 10^{-28} \frac{N}{r[m]^2}$$

$$|\vec{F}_G| = \gamma \cdot m_e \cdot m_p = 9,71 \cdot 10^{-68} \frac{N}{r[m]^2}$$

$$\implies \frac{|F_G|}{|F_C|} = 4,2 \cdot 10^{-40}$$

Wechselwirkung zwischen mehreren Ladungen



Die einzelnen Kräfte überlagern sich ungestört, (ungestörte Superposition)!

Kraft auf

$$Q_3 : \vec{F}_3 = \left[\frac{Q_1 \cdot Q_3}{r_{13}^2} \cdot \hat{r}_{13} + \frac{Q_2 \cdot Q_3}{r_{23}^2} \cdot \hat{r}_{23} \right]$$

14.3 Potenzielle Energie einer Ladungsverteilung

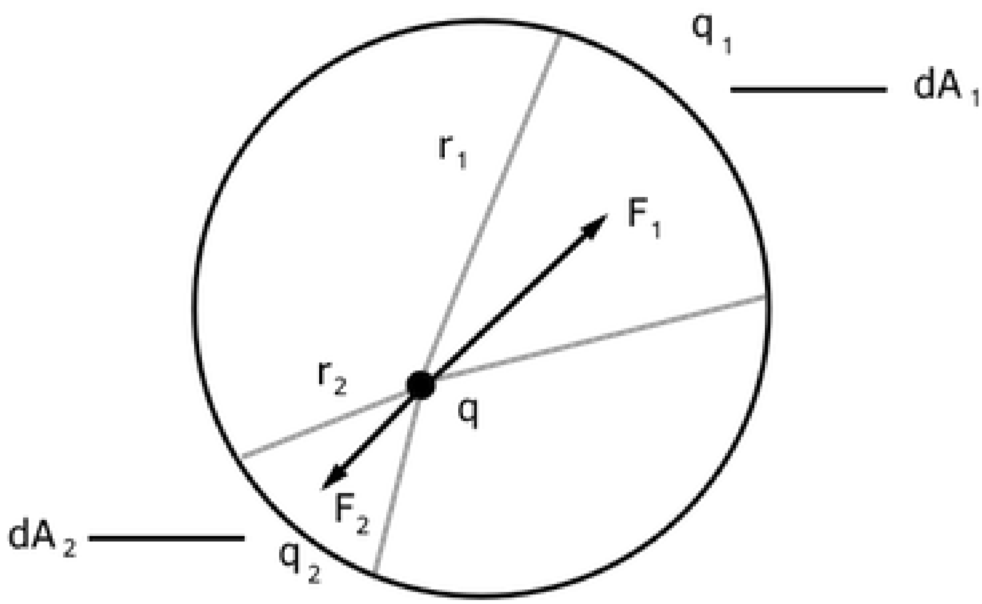
$$
\begin{aligned}
W_{12} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{\infty}^{r} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{V^2} \mathrm{d}V \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \Big[\frac{Q_1 \cdot Q_2}{V} \Big]_{\infty}^{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{V_{12}} \\
W_{1,2,3} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \Big(\frac{Q_1 \cdot Q_3}{r_{13}} + \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_2 \cdot Q_3}{r_{23}} \Big)
\end{aligned}
$$

Anzahl an Summanden = Anzahl an Paaren

$$
\boxed{W = \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{ji=1}^{N} \frac{Q_i \cdot Q_j}{r_{ij}} \right] \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0}}
$$

$\Longrightarrow$ Aufsummieren auch unendlicher Ensembles möglich, wenn die Reihe konvergiert.

Betrachte Kraft auf Probeladung in homogen geladener Kugel



Für beliebe Räumlichelemente (und damit auch Flächenelemente) gilt:
$q_1 \propto \mathrm{d}A_1 \propto r_1^2$
$q_1 \propto \mathrm{d}A_1 \propto r_1^2$
Geometrie $\implies \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$
Annahme: Kraft $\propto \frac{1}{r^n}$

$$|\vec{F}_1| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot q_1}{r_1^n}$$
$$|\vec{F}_2| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot q_2}{r_2^n}$$

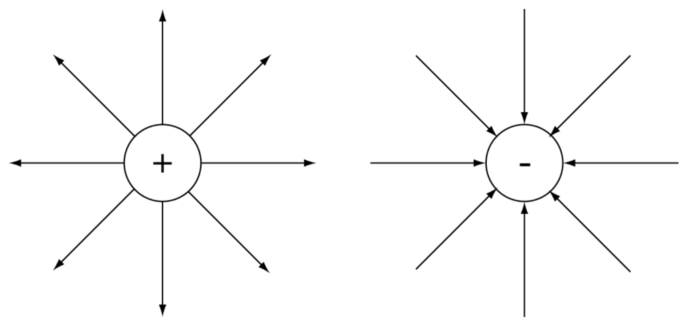
Geometrie einsetzen:
$\frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{F}_2|} = \frac{q_1}{r_1^n} \cdot \frac{r_2^n}{q_2} \stackrel{!}{=} 1 \implies n = 2$
Gesamtkraft verschwindet nur wenn $|\vec{F}| \propto \frac{1}{r^2}$

14.4 Erzeugung el. Felder durch Ladungen

14.4.1 Feld einer Punktladung:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \cdot \hat{r_{12}} \\ &= q_1 \cdot \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \cdot \hat{r_{12}}}_{\text{Feld von } q_2} \\ &= q_1 \vec{E}(\vec{r}) \end{aligned}$$

- Felder einer Punktladung sind Zentralfelder mit Kugelsymmetrie
- Konvention: Feldlinien führen von positiver zu negativer Ladung



$\Rightarrow$ <u>Punktladungsfelder sind inhomogen!</u>

14.4.2 Feld einer Verteilung von Punktladungen

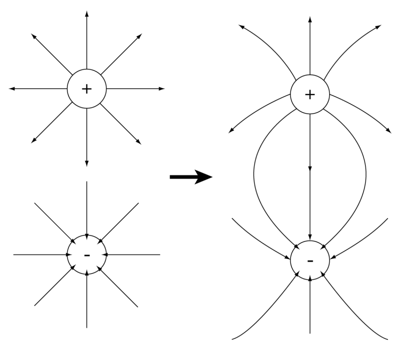
N Ladungen bei $\vec{r_i}$

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r_i}|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r_i}}{|\vec{r} - \vec{r_i}|}$$

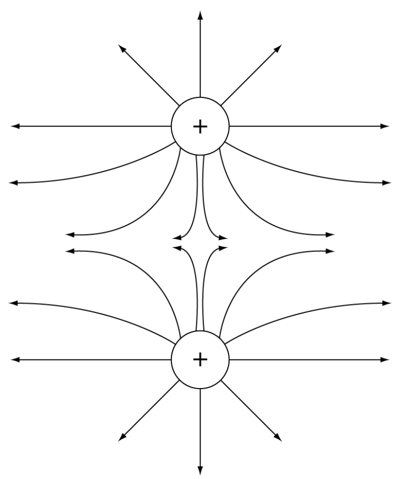
Ungestörte Superposition:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r_i}|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r_i}}{|\vec{r} - \vec{r_i}|}$$

2 Ladungen, q ; -q : Feld eines Dipols

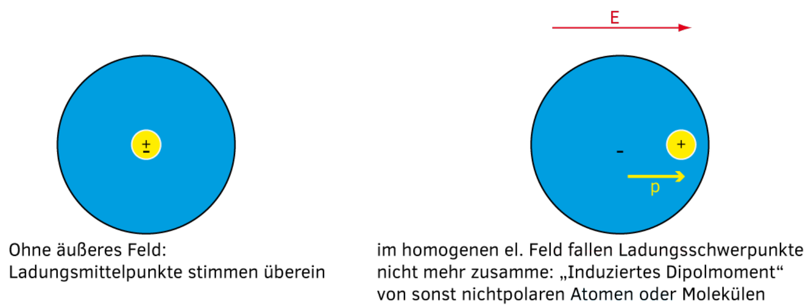


2 Ladungen: q ; q

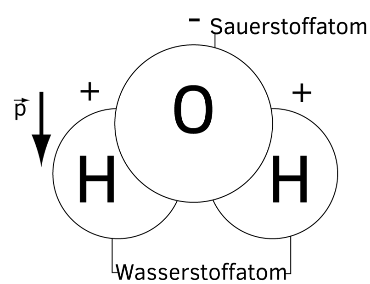


Beispiele für "natürliche Dipole":

1. Neutrales Atom im homogenen $\vec{E}$-Feld



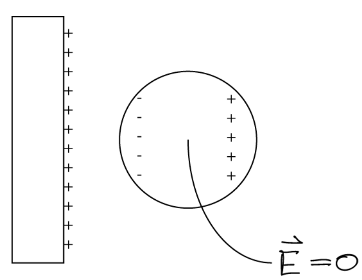
2. Polare Molekühle mit permanentem Dipolmoment



14.4.3 Leiter im el. Feld und Influenz

Leiter: Ladungen sind frei beweglich
Isolator: Ladungen sind ortsfest

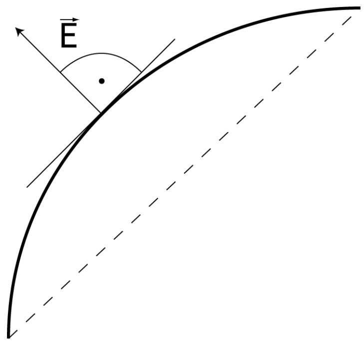
1. $\vec{E} = 0$ im Inneren des Leiters



falls $\vec{E} \neq 0$: $\vec{F} = q\vec{E}$ verschiebt Ladung bis $\vec{E} = 0$!

2. Es folgt, sich bei einem Leiter die (Netto-)Ladungen <u>immer</u> an der Oberfläche befinden $\Rightarrow$ Flächenladungsdichte $\boxed{\sigma = \frac{dQ}{dA}}$

3. $\vec{E}$ immer $\perp$ auf Leiteroberfläche

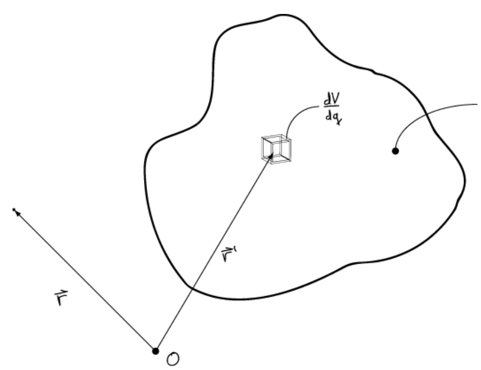


(falls $\vec{E}_{\shortparallel} \neq 0$: Verschiebung der Ladung bis $\vec{E}_{\shortparallel} = 0$!)

<u>Influenz</u>: Räumliche Ladungstrennung in el. Leitern durch äußeres $\vec{E}$-Feld (Kontaktlos!), so dass das Innere des Leiters Feldfrei ist!

14.5 Kontinuierliche Ladungsverteilung

Betrachte Ladungsverteilung über endliches Volumen $V = \int_V dV$



(*)

Ladungsdichte: $\rho(\vec{r}) = \frac{dq(\vec{r})}{dV}$

Gesamtladung: $Q = \int_V dq = \int_V \rho(\vec{r}) dV$

Flächenladungsdichte: $\sigma = \frac{dq}{dA}$

Integral über geschlossene Oberfläche: $A = \oint\limits_A dA$

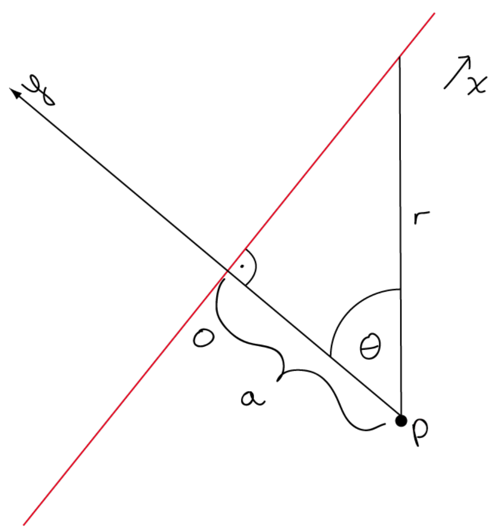
1-dim Ladungsdichte: $\lambda = \frac{dq}{dl}$

Länge $l = \int_l dl'$

für (∗) :

$$
\begin{aligned}
d\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \cdot (\vec{r}-\vec{r}') \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \\
\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV \left\{ \frac{dq}{dV} \cdot \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right\} \\
&= \underline{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV \left\{ \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \cdot (\vec{r}-\vec{r}') \right\}}
\end{aligned}
$$

Beispiel: unendlich langer geladener Draht



$$\frac{dq}{dx} = \lambda \text{ (lin. Ladungsdichte)}$$

$$\text{Symmetrie: } E_x = E_z = 0$$

$$E_y = E \cdot \cos(\theta)$$

$$dE_y = |d\vec{E}| \cdot \cos(\theta)$$

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2 \cdot \frac{\lambda \cdot dx}{r^2(\theta)} \cdot \cos(\theta) \qquad ; \cos(\theta) = \frac{a}{r}$$

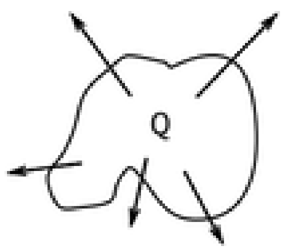
$$= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \cdot dx \cdot \underline{\cos^2\theta} \cdot \cos\theta$$

$$\tan\theta = \frac{x}{a} \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = \frac{a}{\cos^2\theta} \qquad \Rightarrow dx = \underline{\frac{a}{\cos^2\theta} d\theta}$$

$$\Rightarrow dE_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \cdot \frac{\cos\theta}{a} \cdot d\theta$$

$$E_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{a} \cdot \int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta = \underline{\underline{\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{a}}}$$

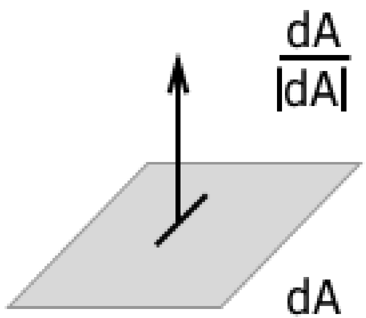
14.6 Elektrischer Fluss und Satz von Gauß



Zusammenhang zwischen "Elektrischem Fluss" (Feldliniendurchsatz) durch eine Oberfläche und der eingeschlossenen Ladung.

$\Longrightarrow$ Allgemeinere Formulierung des Coulomb-Gesetzes

14.6.1 Definition: Fluss ϕ eines Vektorfeldes $\vec{E}$ durch einen Fläche A:



$\phi = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$

$d\vec{A}$:Richtung $\perp$ Fläche (nach Außen)
Richtung der Flächennormale

Betrag dA: Größe der Fläche

Spezialfälle $\vec{E} - homogen\ \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot dA \cdot \cos\alpha$

- $\alpha = 0 : \vec{E} \parallel d\vec{A} : \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot dA$

- $\alpha = 90 : \vec{E} \perp d\vec{A} : \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$

14.6.2 Gauß'scher Satz

$$\boxed{\phi = \oint\limits_{\substack{A \\ geschlossen}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{eingeschlossen}}{\epsilon_0}}$$

Der elektrische Fluss durch einer belieben geschlossenen Oberfläche hängt weder von der Form der Oberfläche, noch von der Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r})$ ab, sondern nur von der eingeschlossenen Gesamtladung Q.

Mathematisch gilt:

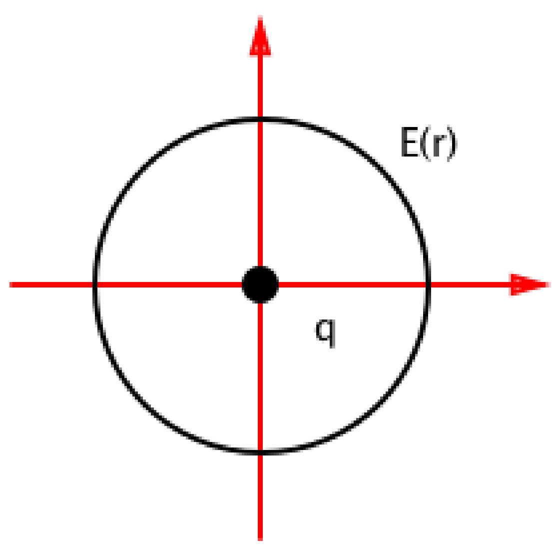
$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_V div \cdot \vec{E} \cdot dV$$
$$= \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \cdot dV$$

$$\Longrightarrow \int_V \vec{\nabla}\vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \varrho(\vec{r}) dV$$
$$= \vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\varrho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

Die Ladungsverteilung im Raum ist die lokale Quelle ($\varrho(\vec{r}) > 0$) bzw. Senke ($\varrho(\vec{r}) < 0$) des elektrischen Feldes.

14.6.3 Beispiele

(i)Feld einer Punktladung

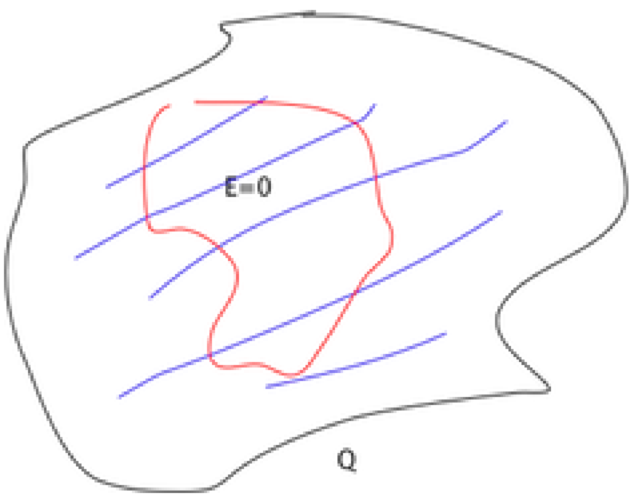


- Geeignete Wahl von A: Kugeloberfläche
- Symmetrie: $\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \cdot \hat{e}_r$
- $\Longrightarrow \vec{E} \parallel d\vec{A}$

$$
\begin{aligned}
\phi = \oint_A \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{A} &= \oint_A E(r) \cdot \hat{e}_r \cdot \mathrm{d}\vec{A} \\
&= \oint_A E(r) \cdot \mathrm{dA} \\
&= E(r) \cdot \oint_A \mathrm{dA} \\
&= E(r) \cdot 4\pi r^2
\end{aligned}
$$

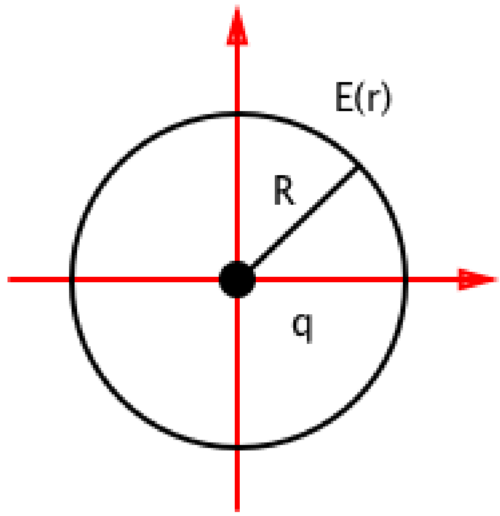
Gauß: $\phi \stackrel{!}{=} \frac{Q}{\epsilon_0} = E(r) \cdot 4\pi r^2 \implies \underline{E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}}$

(ii) Ladung auf beliebig geformten Leitern

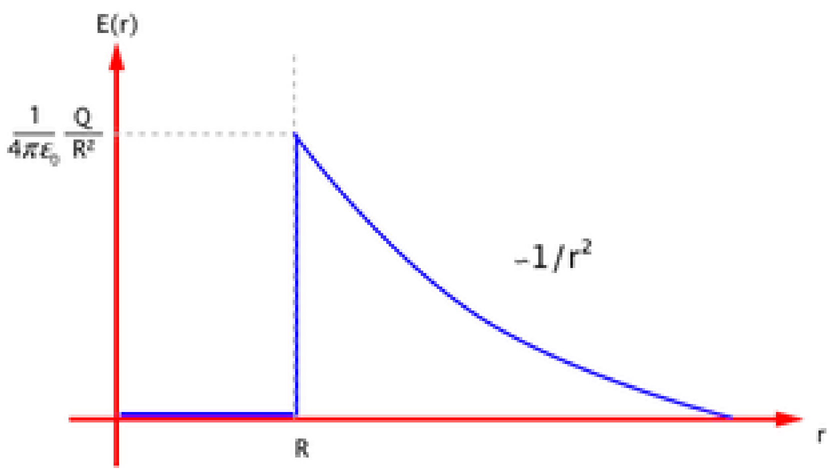


$\phi = \oint_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} = 0$

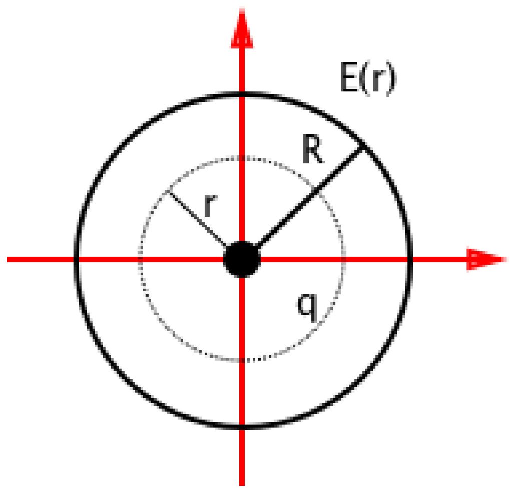
(iii) Feld einer leitenden Kugel mit Ladung Q: (Ladung auf der Oberfläche)



$\vec{E}(\vec{r}) = E(\vec{r}) \cdot \hat{e}_r$
$r < R : E = 0$
$r > R : \phi = \oint_A E(r)\mathrm{dA} = E(r) \cdot 4\pi r^2$
$\phi = \frac{Q}{\epsilon_0}$
$\implies \underline{E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}}$

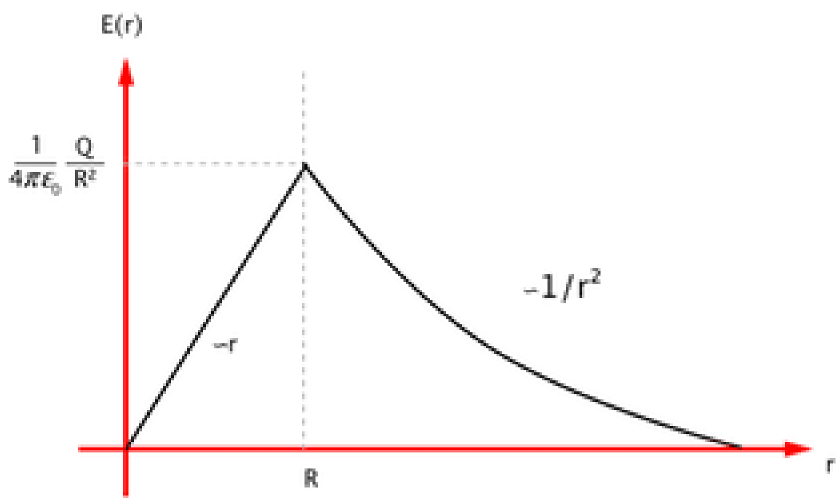


(iv) Feld einer homogen geladenen Kugel



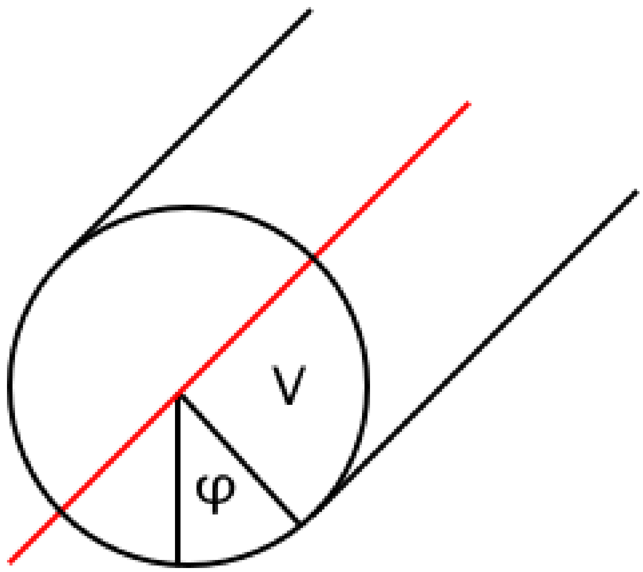
$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ für $r < R$ $\rho = 0$ für $r > R$
$\underline{r < R}$:
$\phi = \oint_A \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$
$Q_{in} = Q \cdot \frac{r^3}{R^3}$

$$\boxed{\implies E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^3} \cdot r}$$



$\implies$ Von Außen ist nicht feststellbar, ob die geladene Kugel massiv oder hohl ist (Leiter oder homogen geladener Isolator)!

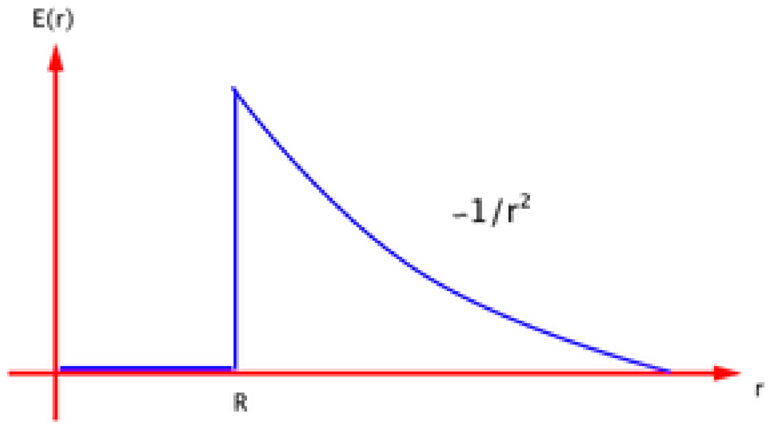
(v) Unendlich lnager homogen geladener Draht



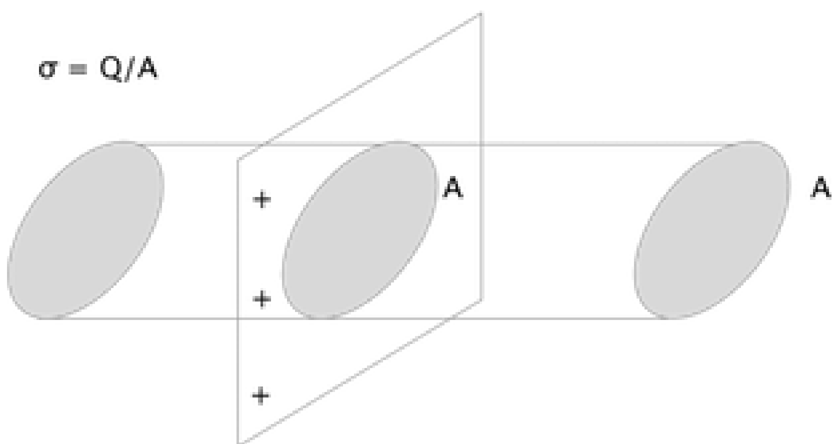
Zylinderkoordinaten:

$\lambda = \frac{dq}{dL} = (\frac{Q}{R}) \leftarrow$ als endliche lange l
$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(r) = E(r) \cdot \hat{e}_r$
$\phi = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_A E(r)dA = E(r) \oint_A da = E(r) \cdot 2\pi rl$
$\phi = \frac{Q_{ges}}{\epsilon_0} \implies E(r) = \frac{Q_{ges}}{2\pi\epsilon_0 \cdot rl}$
$E(r) = \underline{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}}$

(vi) Unendlich langer, homogen geladener leitender Zylinder



(vii) Feld einer homogen geladener unendliche leitenden Ebene



$\sigma = \frac{Q}{A}$

$\phi = \oint\limits_{A} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{A,stirn} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{A,mantel} \vec{E} \cdot d\vec{A}$

$\vec{E}$-Ebene

$\implies$ Beitrag Über Mantelfläche verschwindet $(d\vec{A} \perp \vec{E})$

$\phi = \oint_A \vec{E} d\vec{A} = 2 \cdot E \cdot A_{stirn} \overset{G.S.}{=} \frac{Q}{\epsilon_0}$

$\underline{\implies E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$

14.7 Das elektrische Potenzial

Coulombkraft: Zentralkraft, konservativ
$\Longrightarrow$ $\exists$ potentielle Energie (siehe 14.3)
für Ladungen q_0 im $\vec{E}$-Feld gilt:

$$\boxed{E_{pot}(\vec{r}) = -q_0 \cdot \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}}$$

Für das elektrische Potenzial $\varrho(\vec{r})$ gilt:

$$\boxed{\varphi = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{q_0} E_{pot} \cdot (\vec{r})}$$

$\rightarrow$ Beachte: Arbeit ist unabhängig vom Weg!
Verschiebe q_0 von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$; die benötigte Arbeit ist:

$$\begin{aligned} W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= q_0 \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\ &\underline{= q_0 \cdot (\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2))} \end{aligned}$$

$\varrho(\vec{r})$ nur bis auf Integrationskonste bestimmt!
Die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten:

$U = \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) = \frac{W_{12}}{q_0}$ heißt elektrische Spannung!

$q_0 \cdot U$ ist die Arbeit, die man braucht um q_0 von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ zu bringen!

$[U] = 1Volt = 1V = 1\frac{J}{C}$

Beachte: $\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) = -\oint \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0!!$

Typische Spannungen:

$$Batterie: \text{1,5V} \qquad [$$
$$Stadtnetz: \text{220V} \qquad [$$
$$berlandleitung: \text{250kV} \qquad [$$
$$Blitz: \text{10-15MV} \qquad [$$

Beispiele: (i) Punktladung:

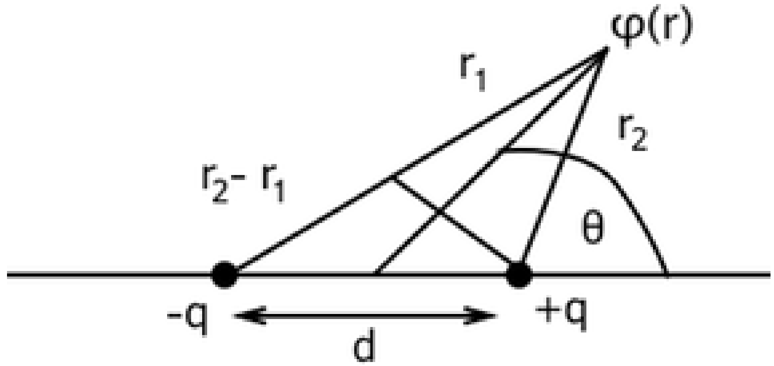
$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) &= -\int \vec{E}(\vec{r'}) \cdot d\vec{r'}; \vec{E} = E \cdot \hat{e}_r \\ &= -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_\infty^r \frac{d\vec{r}}{r^2}\end{aligned}$$

$\underline{\varphi(\vec{r}) = \varphi(r) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \cdot r}}$

Äquipotenzialflächen: r=const.
(in 3D: Kugelflächen
in 2D: Kreise)

(ii) Mehrere Punktladungen

$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \tilde{\vec{r}}_i|}$



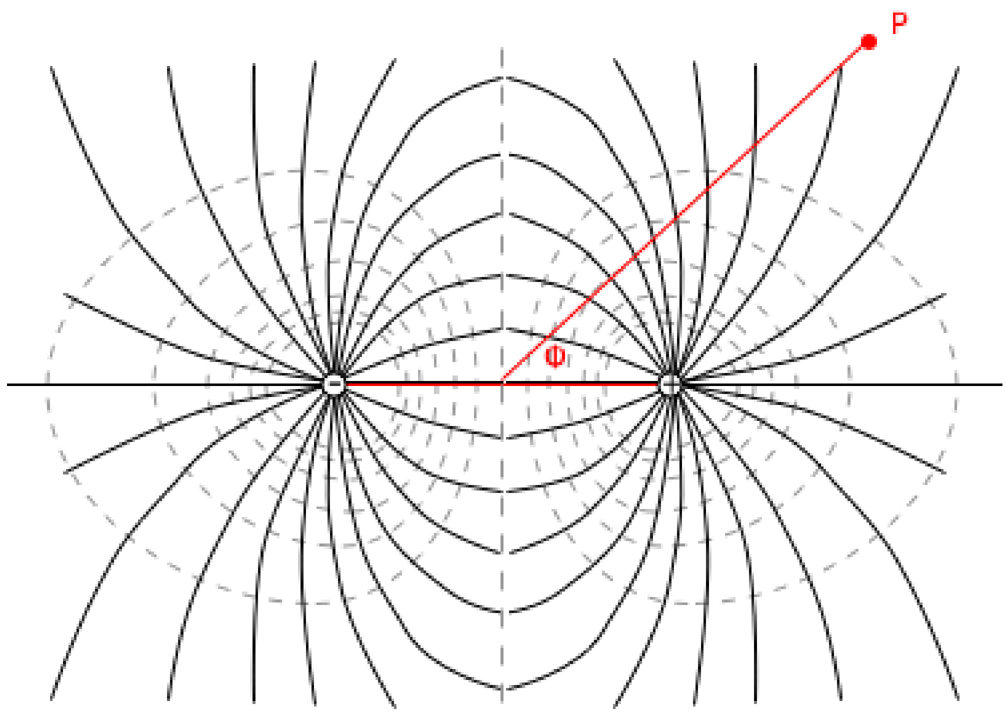
$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot (\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} - \frac{r_2 - r_1}{r_1 \cdot r_2}$

$$\text{für } \underbrace{d \ll r}_{\text{Fernfeld}} : r_1 \cdot r_2 = r^2$$

$$r_2 - r_1 = d \cdot \cos\theta$$

$\varphi(\vec{r}) = \varphi(r) = \frac{q \cdot d \cdot \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} = \frac{\varphi \cdot \cos\theta}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$

Potenzialverteilung:



(iii) Kontinuierliche Ladungsverteilung:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{\tilde{V}} \frac{dQ}{|\vec{r} - \tilde{\vec{r}}|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{\tilde{V}} d\tilde{V} \left\{ \frac{\varphi(\vec{r})}{|\vec{r} - \tilde{\vec{r}}|} \right\}$$

14.7.1 Elektrisches Feld und Potenzial

$\varphi(\vec{r})$: Skalare Größe, manchmal einfache zu berechen als $\vec{E}(\vec{r})$

$\implies \vec{E}(\vec{r})$ aus $\varphi(\vec{r})$ bestimmen?

$$\varphi = \varphi(\vec{r}) = \varphi(x,y,z); \vec{E} = \vec{E}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

$$d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{d\varphi}_{\text{vollständiges Differential}} = -\vec{E}d\vec{r} = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz)(*)$$

$\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cdot dz(**)$

$$(*),(**): \left.\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ E_x &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ E_x &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \end{aligned}\right\} \implies \underline{\vec{E} = -grad\varphi}$$

$\vec{E}$ zeigt in Richtung des betragsmäßig größten Anstiegs von φ, allerdiings in abnehmende Richtung.

Äquipontenziallinie: $d\varphi = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$
längst einer solchen Linie ist: $d\varphi = 0 \implies -\vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$
$\implies \underline{\vec{E} \perp d\vec{r}}$

Beispiel: Punktladung

$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$

Kugelkoordinaten, Kugelsymmetrie: $\vec{E} = -\nabla \cdot \varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} \cdot \hat{e}_r$

$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \implies \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \hat{e}_r$

14.7.2 Poisson- und Laplace Gleichung:

Gauß'scher Satz: $div\vec{E} = \vec{\nabla} = \frac{\varrho}{\epsilon_0}$
Potenzial: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$

Einsetzen: $\boxed{div grad \varphi = \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}}_{\Delta} \cdot \varphi = -\frac{\varrho}{\epsilon_0}}$

$\Delta\varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \cdot \varphi$

Spezialfall: $\varphi = 0 \implies$ Laplace-Gleich $= \underline{\Delta\varphi = 0}$

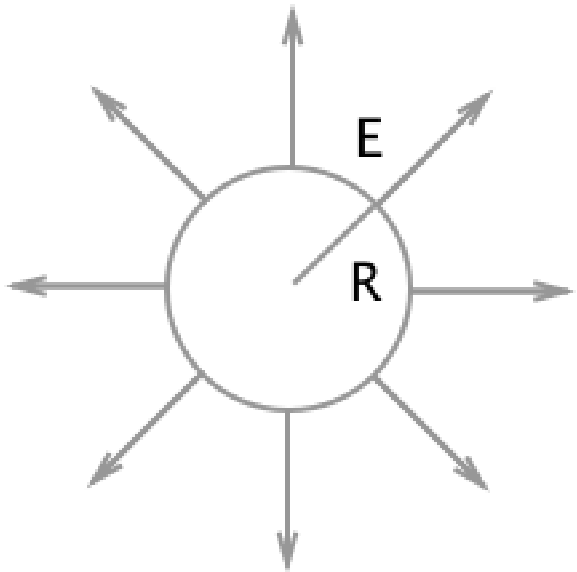
14.8 Elektrisches Feld in der Umgebung von Leitern

Gauß'scher Satz: $\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 \implies \varrho = 0$
(Leiter im Inneren Feldfrei!)

Potenzial: $\varphi(r) = -\int \vec{E} d\vec{r} =$ const.

$\implies$ Leiteroberfläche ist Äquipotenzialfläche

Beispiel: Elektrisches Feld an Kugeloberfläche:

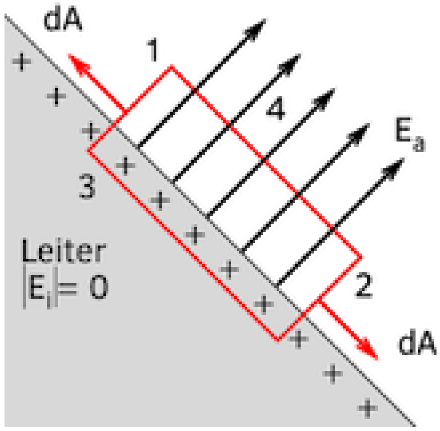


$E_\perp$

für jede Leiteroberfläche berechenbar:

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Beispiel:



Fläche:
1,2: $\perp d\vec{A} \implies$ "0"
$3 : \vec{E} = 0 \implies 0$
$4 : E \cdot A = \frac{Q}{\epsilon_0}$

$\implies |\vec{E}| = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \sigma$
$\implies$ Die Größe von $E_\perp$ an der Oberfläche ist $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$!

Weiter mit der Kugel: $E_a = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{4\pi \cdot R^2}$

$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot R} \implies E_a = \frac{\varphi}{R}$

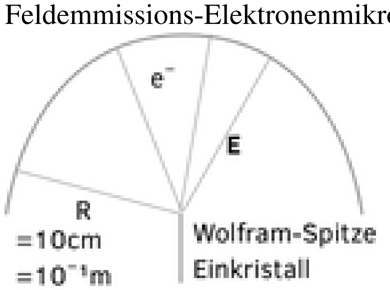
Bei gegebenen Potenzial ist Feldstärke an der Oberfläche umgekehrt proportional zum Kreis...radius!

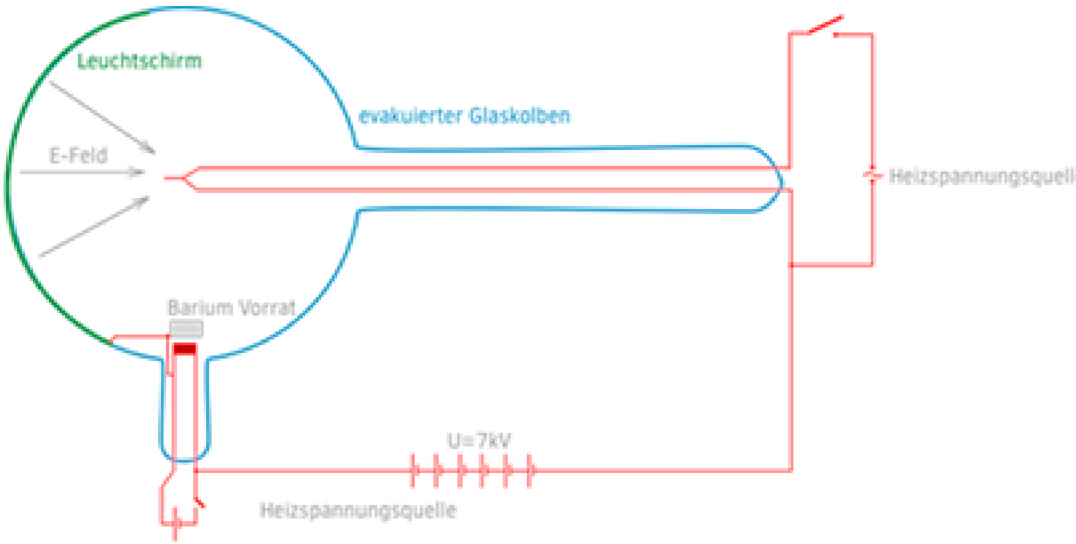
Lokal: $|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\varphi}{R}$

R Klein $\implies \varphi$ groß, σ groß

14.8.1 Anwendungen:

Feldemmissions-Elektronenmikroskop:





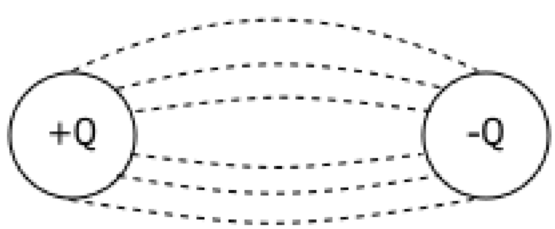
$|\vec{E}| = \frac{\varphi}{R} = \frac{10kV}{10^{-7}m} = 10^1 1 \frac{V}{m}$ an der Wolfram-Spitze
Bewegung der Elektronen Entlang der Feldlinien

- vergrößertes Bild der Wolfram-Spitze

- Vergrößerung: $\frac{R_{Schirm}}{R_{Spitze}} \approx \underline{10^6}$
- so erstmals Atome sichtbar gemacht
- Objekte $< 10^{-9}m \implies < 1mm$!

14.8.2 Elektrisches Feld zwischen geladenen Leitern

Anwendung: 2 isolierte, entgegengesetzt geladene Leiter, ($\implies$ Kondensator)



Coulomb: $|\vec{E}| \propto |Q|$

Spannung: $U_{21} = \varphi_2 - \varphi_1 = -\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} \propto Q$ ist unabhängig vom Weg!

$\implies Q \propto U$

Proportionalitätskonstante?

$\boxed{Q = C \cdot U}$

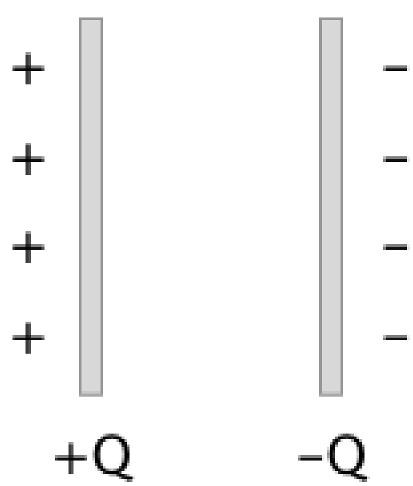
C:Kapazität

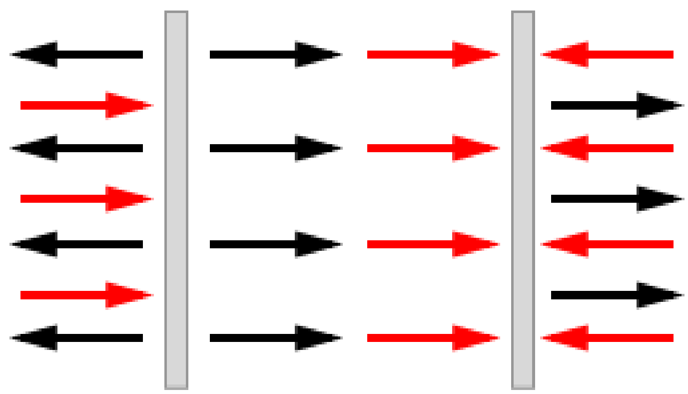
Einheit $[C] = \frac{1C}{1V} = 1F$ (Farad)

$$\begin{aligned} typisch :& 10^{-6}F = 1\mu F \\ & 10^{-9}F = 1nF \\ & 10^{-12}F = 1pF \end{aligned}$$

14.8.3 Berechnung der Kapazität:

Erinnerung: homogen geladene Platte: $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$





Im Außenraum: Kompensation
Im Innenraum: Addition

Im Innenraum: $|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$