

Experimental Physik II Kapitel 15

author

email

May 14, 2016

Contents

15 Stationäre El. Ströme	2
15.1	2
Definition: Elektrischer Strom	2
Definition: El. Stromdichte	2
Kontinuitätsgleichung	3
15.2 Das Ohmsche Gesetz	4
15.3	9
(i) Leitung in Elektrolyten	9
(ii) Leitung in Metallen	9
(iii) Leitung in Halbleitern	10
(iv) Leitung im Vakuum	11
(v) Leitung in Gasen	13
15.4 Leistungsumsetzung beim Ladungstransport	17
15.5 Widerstandnetzwerke und Kirchhoffsche Regeln	18
15.5.1 Kirchhoffsche Regeln	19
15.5.2 Serien-(Reihen)schaltung von Widerständen	20
15.5.3 Parallelschaltung	21
15.5.4 Beispiel	21
15.6 Stromquellen, elektromotorische Kraft, Urspannung, Klemmspannung	23
15.7 Langsam zeitlich veränderliche Ströme	27

15 Stationäre El. Ströme

15.1

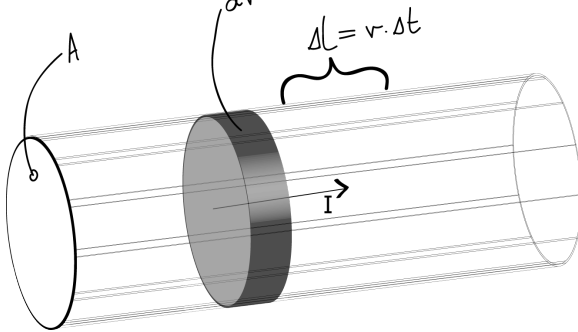
Definition: Elektrischer Strom := Bewegung von el. Ladung

$$\text{Stromstärke } \mathbf{I} = \frac{dQ}{dt} [\text{I}] = \left[\frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}} \right] = \frac{\text{C}}{\text{s}} = \text{A}$$

Stationäre Ströme: Keine explizite Zeitabhängigkeit.

Definition: El. Stromdichte \mathbf{j}

$$j := \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}} [j] = \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$



$N = n \cdot \Delta V$ Ladungsträger mit der Ladung q treten im Zeitintervall Δt durch (n ist die Ladungsträgerdichte)
Ø-Fläche A .

Annahme: Alle Ladungen haben die gleiche Geschwindigkeit v , dann ist die transportierte Ladung:

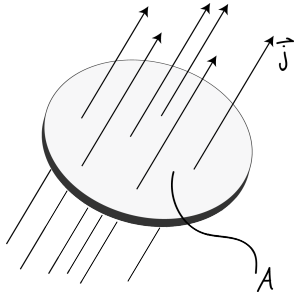
$$\Delta Q = N \cdot q = n \cdot \Delta V \cdot q = n \cdot q \cdot A \cdot \Delta l = n \cdot q \cdot A \cdot v \cdot \Delta t$$

$$j = \frac{\Delta Q}{\Delta t \cdot A} = n \cdot q \cdot v = \rho \cdot v$$

$\rho :=$ Ladungsdichte $[\text{C}/\text{m}^3]$

Allgemein: $\boxed{\vec{j} = \rho \cdot \vec{v}}$

Stromdichte \longrightarrow Stromstärke: $I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$

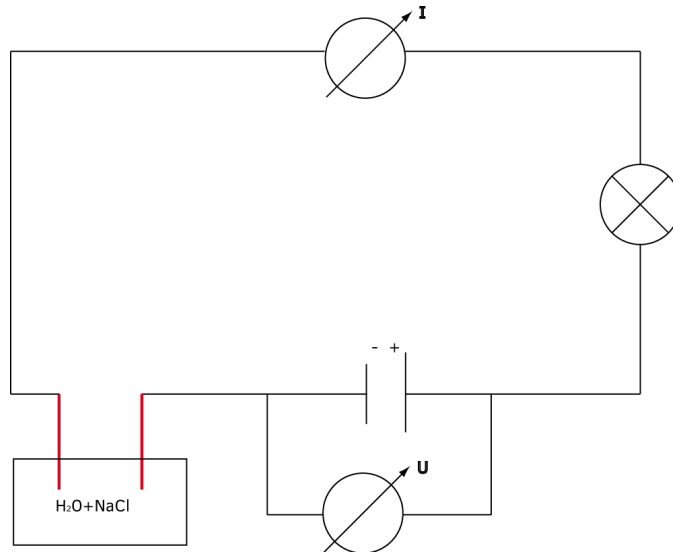


Kontinuitätsgleichung: Geschlossene Fläche A umschließt Volumen V .

$$I = \oint_A \vec{J} d\vec{A} = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \overbrace{\int_V \rho dV}^{=Q}$$

Differenz zwischen ein- und ausgeströmter Ladung entspricht der negativen Änderung der Gesamtladung im Volumen!
 (\Rightarrow Ladungserhaltung)

15.2 Das Ohmsche Gesetz



⇒ freie Ladungsträger (Ionen) notwendig, damit Strom fließt.

⇒ Dissoziation von $NaCl$ in Na^+ und Cl^-

Coulombkraft $|\vec{F}_c| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \frac{1}{\epsilon}$

$\epsilon_{H_2O} \approx 80 \Rightarrow$ Reduktion von F_c in H_2O

⇒ Dissoziation möglich!

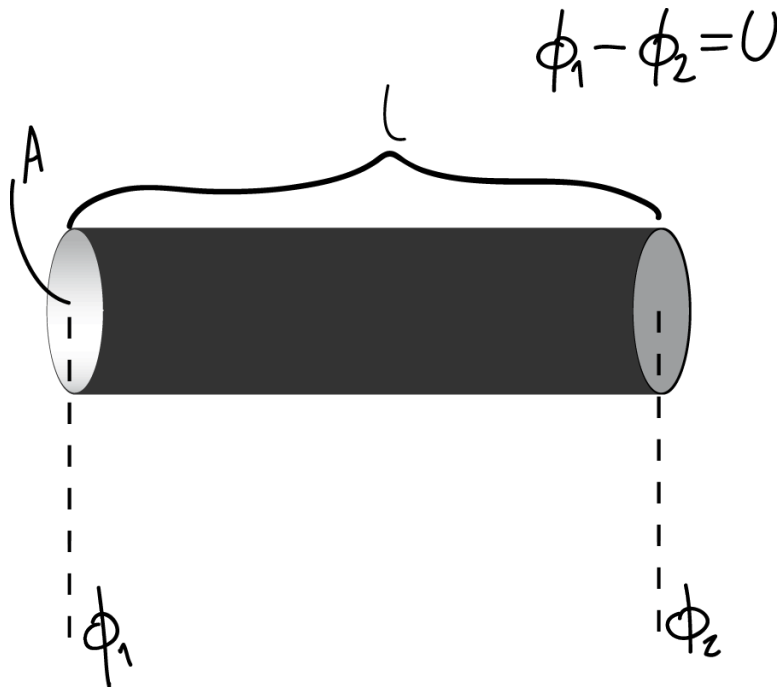
quantitativ: $I \sim U$

Ersetze Elektrolyt durch Metallwiderstand!

$$I \propto U$$

Ohmsches Gesetz: Wird eine Potenzialdifferenz U an das Ende eines el. Leiters appliziert, so fließt ein el. Strom I , dessen Stromstärke proportional zu U ist.

$$I = \frac{1}{R} \cdot U$$



Empirischer Befund:

$$\begin{aligned}
 I &\sim (\phi_2 - \phi_1) \\
 I &= \frac{1}{R}(\phi_2 - \phi_1) \\
 &= \frac{A}{l} \cdot \frac{1}{\rho}(\phi_2 - \phi_1)
 \end{aligned}$$

Definition: $R := \rho \cdot \frac{l}{A}$ el. Widerstand $[R] = \frac{V}{A} = \Omega = 1 \text{ Ohm}$

ρ : Materialkonstante: spezifischer el. Widerstand $[\rho] = \Omega m$

$\frac{l}{A}$: Geometrieparameter

Ohmsches Gesetz: $I = \frac{U}{R}$

$$\frac{I}{A} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\phi_2 - \phi_1}{l}$$

$$|\vec{j}| = \frac{1}{\rho} \cdot |\vec{E}|$$

$$|\vec{j}| = \sigma \cdot |\vec{E}|$$

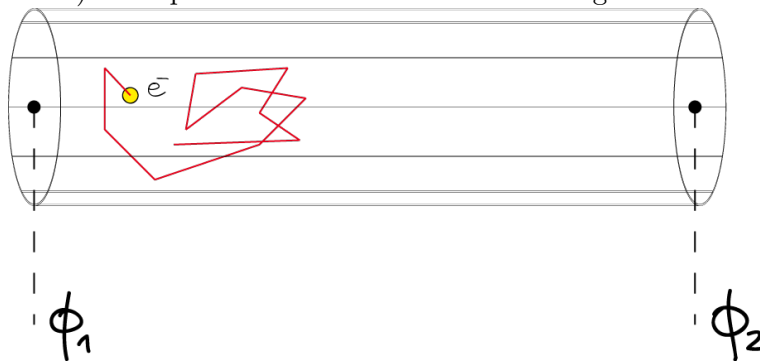
$\frac{1}{\rho} = \sigma :=$ el. Leitfähigkeit $[\sigma] = \text{Ohm}^{-1} m^{-1} = \frac{A}{Vm}$

Empirischer Befund: $\vec{j}_m = \sigma_{mn} \vec{E}_n$ Allgemeines Ohmsches Gesetz

Mikroskopische betrachtung - Drende Modell

Metall: positiv geladene Atomrümpfe; Elektronen dazwischen beweglich.

a.) ohne potenzialdifferenz: thermische ungeordnete bewegung.

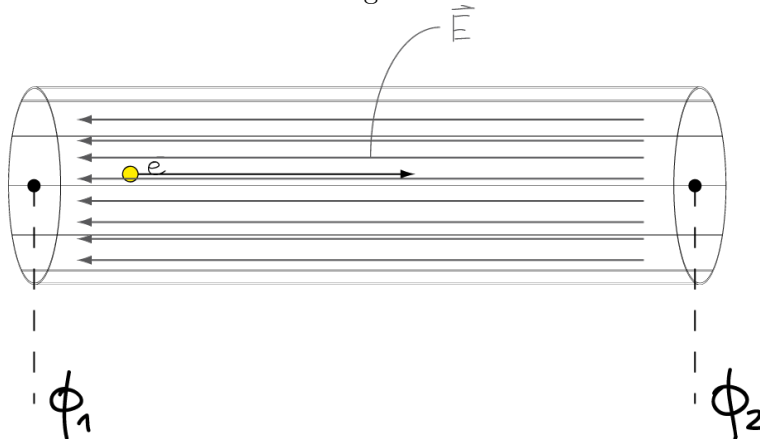


$\langle \vec{v} \rangle = 0 \Rightarrow$ Im Mittel kein Transport

$$\text{obwohl: } \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \frac{\sqrt{3K_B T}}{m_e} \approx 10^5 \frac{m}{s} \\ \text{bei } (T = RT)$$

b.) $\phi_2 - \phi_1 \neq 0 \Rightarrow$ El. Feld im Leiter

Zwischen Stößen Beschleunigt durch el. Feld:



\Rightarrow "Drift" mit Geschwindigkeit v_D , die der thermischen Bewegung überlagert ist.

Kraft auf Elektron: $\vec{F} = q_{el} \cdot \vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{q_{el}}{m} \cdot \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_D = \frac{q_{el}}{m} \cdot \vec{E} \cdot \Delta t$$

Betrachte Ohmsches Gesetz.

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}; \vec{j} = q_{el} \cdot n \cdot \vec{v}_D$$

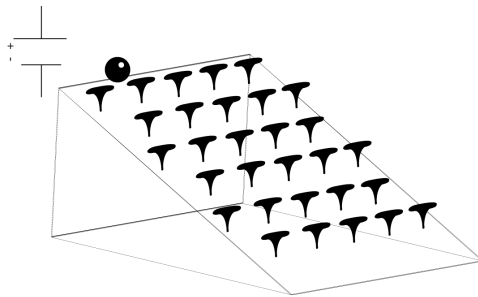
Beträge: $j = \frac{q_{el} \cdot n \cdot v_D}{E} \cdot E = \sigma \cdot E$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{n \cdot q_{el} \cdot v_D}{E} = const.$$

$$\Rightarrow \frac{|\vec{v}_D|}{|\vec{E}|} = const.$$

$$|\vec{v}_D| = \mu \cdot |\vec{E}| \quad \mu: \text{Beweglichkeit (unabh. von } \vec{E}\text{)!}$$

$$\sigma = n \cdot q_{el} \cdot \mu$$



Damit sich im el. Feld ein Konstantes v_D einstellt, muss es etwas geben wie \Rightarrow Exp.Phy.I:
 geschwindigkeitsabhängige Reibung! \Rightarrow Stokes-
 \Rightarrow Makroskopisch: (1-dim) \Rightarrow Reibung

$$m\ddot{x} + \frac{m}{\tau}\dot{x} = q_{el}E$$

$$\dot{x} = \frac{q_{el}}{m} \cdot E \cdot \tau \cdot (1 - \exp(-t/\tau))$$

τ ; Relaxationszeit: Gibt an, nach welcher Zeit v auf v/e abgenommen hat.

\Rightarrow Mikroskopisch:

τ : Zeit zwischen zwei Stößen ("Stößzeit")

$$\begin{aligned} &\Rightarrow m \cdot \vec{v}_D = q_{el} \cdot \vec{E} \cdot \tau \\ \Rightarrow \vec{j} = n \cdot q_{el} \cdot \vec{v}_D &= \frac{n \cdot q_{el}^2 \cdot \tau}{m} \cdot \vec{E} \\ &\boxed{\sigma = \frac{n \cdot q_{el}^2 \cdot \tau}{m}} \\ &\text{Drude-Leitfähigkeit} \\ \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{q_{el} \cdot \tau}{m}} &\quad [\mu] = \frac{m^2}{Vs} \end{aligned}$$

\Rightarrow Voraussetzung für Gültigkeit des Ohmschen Gesetz:

1. Transport durch Stöße dominiert
2. n unabhängig von \vec{E}
3. τ unabhängig von \vec{E}

τ klein $\Rightarrow v_D$ klein (und beobachtbar!)

15.3

(i) Leitung in Elektrolyten

- Stofftransport (Ionen) und Ablagerung an Kontakten (Elektroden)
- geringe Beweglichkeit
- geringe Ladusträgerkonzentration

(i) Leitung in Metallen

- Ladungstransport nur durch Elektronen
- Jedes Atom gibt 1 Elektron ab \Rightarrow hohe Ladungsträgerdichte (LT)
- Beispiel:

$$\begin{aligned}\text{Cu,} \quad n &= 8,4 \cdot 10^{28} \text{Ladungen}/m^3 \\ &= 8,4 \cdot 10^{22} \text{Ladungen}/cm^3\end{aligned}$$

- Beweglichkeit:

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{\sigma}{n \cdot q} = \frac{5 \cdot 10^7 (\Omega m)^{-1}}{8,4 \cdot 10^{28} m^{-3} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} C} \\ &= 4 \cdot 10^{-3} \frac{m^2}{Vs} = 40 \frac{cm^2}{Vs}\end{aligned}$$

$|\vec{E}|$?

$$\begin{aligned} |j_{\max}^{\rightarrow}| &\approx \frac{5A}{mm^2} = 5 \cdot 10^6 A/m^2 \\ |E_{\max}^{\rightarrow}| &= \frac{|j_{\max}^{\rightarrow}|}{\sigma} = 0,1 V/m \\ \langle v_D \rangle &= \mu |\vec{E}| = 4 \cdot 10^{-4} m/s \approx 0,4 \frac{mm}{s} \\ \langle v_D \rangle &\ll v_{therm} \text{ (ähnlich wie Elektrolyt)} \\ \tau &= \mu \cdot \frac{m}{q} = \underline{2,3 \cdot 10^{-14} s} \end{aligned}$$

Hauptunterschied Metall/Elektrolyt: μ, n !

$$\begin{aligned} \text{Mittlere freie Weglänge: } \lambda &= v_{therm} \cdot \tau = 10^5 m/s \cdot \tau \\ &= 20 \cdot 10^{-10} m \\ &= 20 \text{ \AA} \end{aligned}$$

\Rightarrow ca. 20 Atomdistanzen zw. zwei Stößen!

Temperaturabhängigkeit:

In el. Leitern gilt: $R = R(T)$

Fe-Widerstand:

Abkühlen auf LN_2 -Temp: $I \longrightarrow I \times 2$

Aufheizen mit Brenner: $I \longrightarrow I/2$

Konstantandraht (Legierung): nahezu keine Änderung

n sei temperaturunabhängig! $\Rightarrow T \uparrow \Rightarrow \tau \downarrow, \sigma \downarrow$:

Durch thermische Anregung mehr Gitterschwingungen; mehr Stöße! (\Rightarrow Kürzere Stoßzeit)

Konstantan-Legierung: Streuung vornehmlich an Fremdatomen deren Dichte ist T-unabhängig!

(iii) Leitung in Halbleitern

$$T \uparrow \quad : \quad \sigma \uparrow$$

Grund:

Starke Temp.-abhängigkeit von n durch thermische Anregung von Ladungsträgern über eine Energielücke

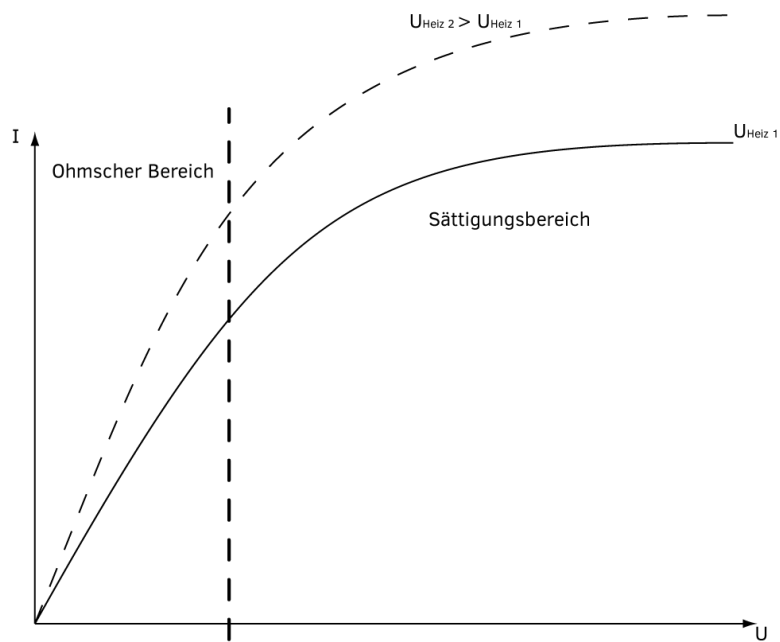
Erhöhung und Kontrolle von σ durch Einbringen von Fremdatomen in Konzentration von $10^{15} \text{ cm}^{-3} \dots 10^{20} \text{ cm}^{-3}$: Dotierung
 $\Rightarrow \tau$ nimmt auch mit zunehmender T ab, aber Zunahme von n überwiegt!

(iv) Leitung im Vakuum

Leitung im wesentlichen durch freie Elektronen.
El- Feld zur Beschleunigung \Rightarrow Ladungstransport

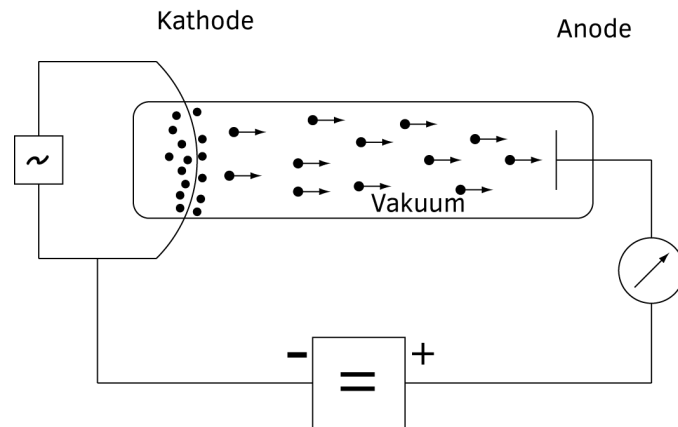
Erzeugung von freien Elektronen:

U [V]	I [mA]
20	0,25
40	0,5
60	0,75
80	1,05
100	1,3
120	1,6
140	1,9
160	2,15
180	2,35
200	2,5
220	2,6
240	2,65
260	2,7
280	2,75
300	2,7

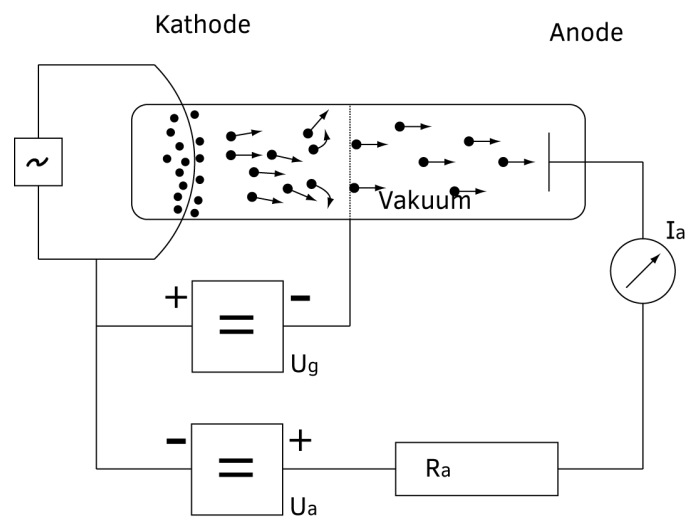


⇒ Umkehrung der Beschleunigungsspannung: Kein Strom!

Diode:



Triode:

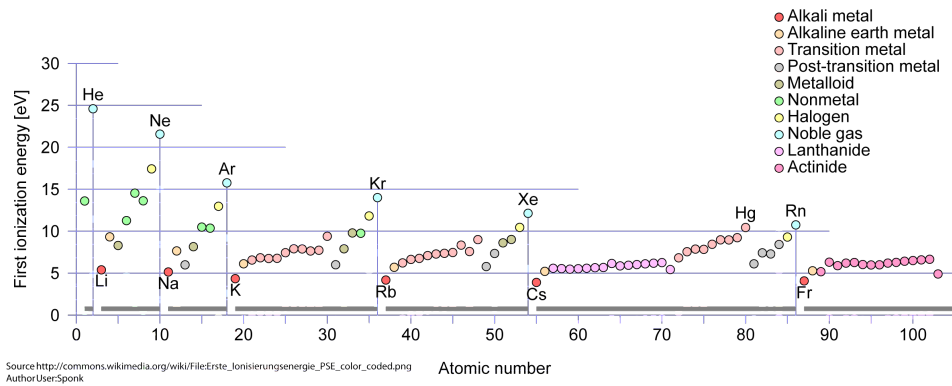


⇒ Verstärkerschaltung möglich!

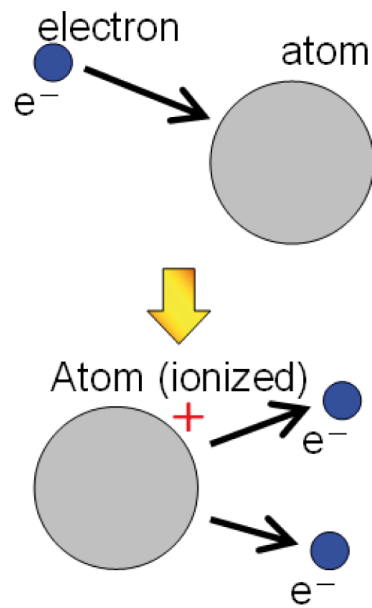
(v) Leitung in Gasen

- Alle Gase haben sehr kleine Leitfähigkeit
 (→ Entladung des Kondensators an Atmosphäre)
 (→ Gasentladung)

- Ladungsträger müssen erzeugt werden: Elektronen, Ionen
Ionisation ist möglich durch:
Ionisierende Strahlung; Stoßionisation



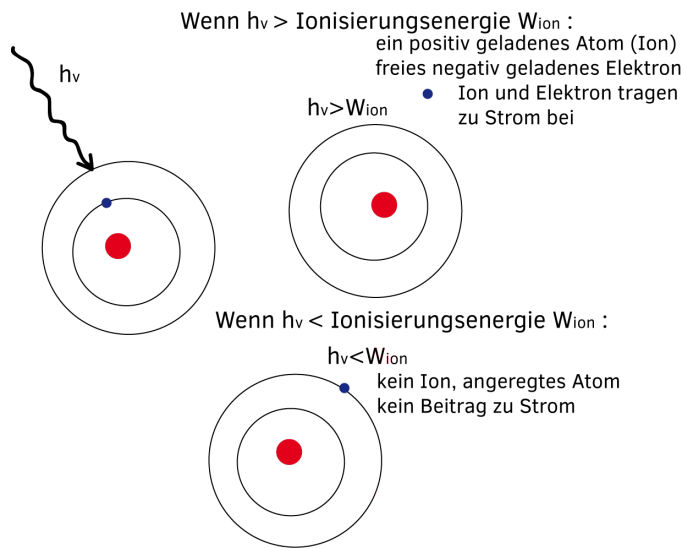
Ionisation braucht Energie!
Stoßionisation:



Source: <https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:ImpactIonization.PNG>

Photoionisation:

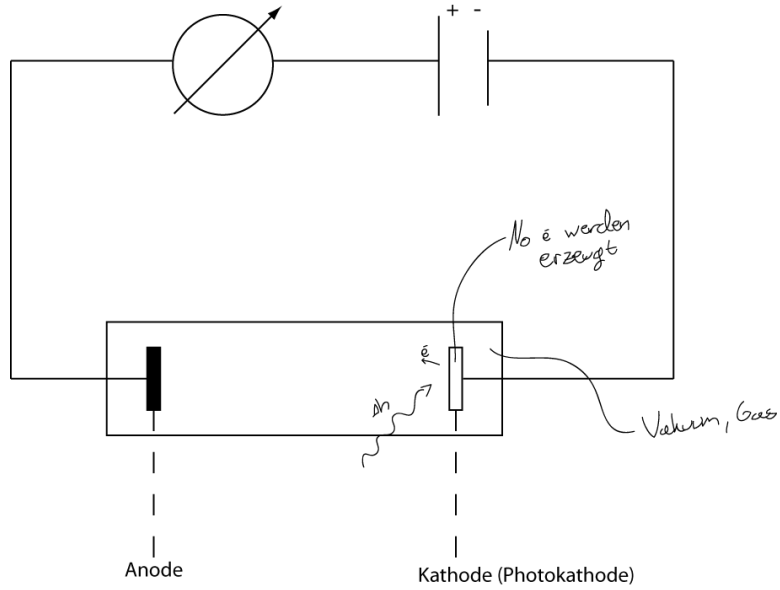
Elektron wird Energie $h\nu$ zugeführt



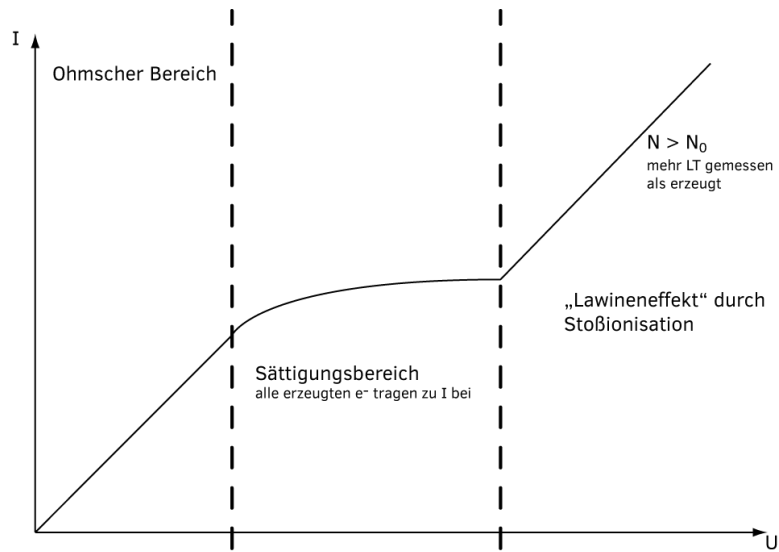
- Thermische Ionisation ist möglich.
- Glüemission ist auch möglich; Radioaktivität \Rightarrow ionisierende Strahlung
- Rekombination von Ionen und Elektronen ist möglich

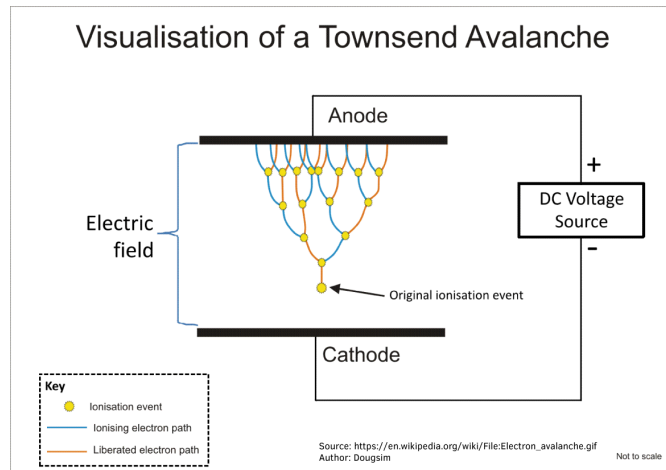
Strom:
$$I = \underbrace{N}_{\# \text{LT (sehr klein)}} \cdot \underbrace{z \cdot e}_{\text{Ladung: } z \in \mathbb{N}} \cdot \underbrace{\mu}_{\mu_{\text{Flüssigkeit}} < \mu < \mu_{\text{Metalle}}} \cdot |\vec{E}|$$

Prinzipieller Aufbau:



(i) Unselbstständige Gasentladung





Spannung ist sehr groß, Elektronen werden start beschleunigt, hohe Elektronenenergie Stoßionisation: **Lawineneffekt**

Strom wird unabhängig von Zahl der Ionisation generierten Ladungsträger.

⇒ 1 Strompuls pro Ionisierungsereignis oder pro ausgelöstem e^- !

⇒ Selbstständige Gasentladung

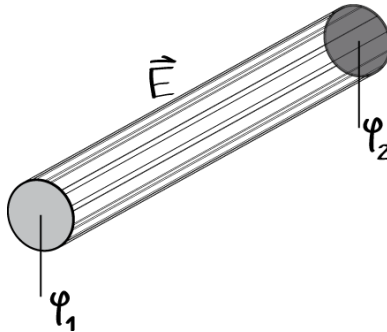
- Aufrechterhaltung der Entladung ohne äußeren Einsatz!
- Voraussetzung: Hohe kinetische Energie (→ hohe Spannung!)
- Häufig auch Lichtemission (Rekombination von e^- und Ion oder Relaxation angeregter Zustände)
- UV-Emission in Plasmen und in Leuchtstoffröhren genutzt

15.4 Leistungsumsetzung beim Ladungstransport

- Elektrolyte: Ladungstransport durch Ionen.
- Ladungstransport durch Elektronen: Stöße mit Gitterionen

Elektrische Energie → E_{kin} + Wärmeenergie.

Leistung im Ohmschen Widerstand R :



$$U = \varphi_2 - \varphi_1, \quad W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = q \int \vec{E} d\vec{r} = \int q dU = U \cdot q$$

Bei N Ladungen: $W = NUq = UQ$

$$\text{Leistung } P = \frac{dW}{dt} = \frac{dQ}{dt} U = I \cdot U \quad |(U = R \cdot I)$$

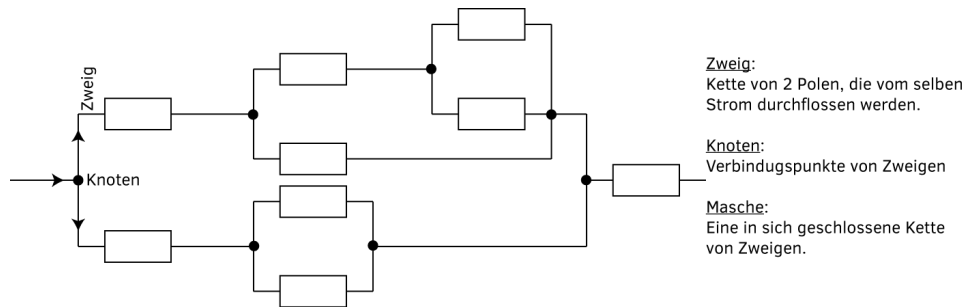
$$\Rightarrow \boxed{P = I^2 R = \frac{1}{R} U^2} \quad [P] = W = V A$$

Anwendung: - Elektrisch Betriebene Heizung

Exp: \longrightarrow Heizdrahtmesswerk

15.5 Widerstandnetzwerke und Kirchhoffsche Regeln

- Netzwerk: Leitsystem, in das Bauelemente eingefügt sind
- Hier nur Verbindungen von Widerständen und Stromquellen
- Alle Elemente: 2 Pole \longrightarrow 2 Anschlüsse
Widerstände: passive 2 Pole, Stromquellen: aktive 2 Pole
- Richtungen/Vorzeichen: Strompfeile: geben formal Richtung positiver Ladungsträger an.
passiv: $+$ \longrightarrow $-$ aktiv: $-$ \longrightarrow $+$
Spannungspfeile: $+$ \longrightarrow $-$



→ Ersetzen durch 1 Ersatzwiderstand

15.5.1 Kirchhoffsche Regeln

→ Verallgemeinerung des Ohmschen Gesetzes, dass zu Gleichungssystem führt, mit dem immer alle unbekannten Ströme und Spannungen berechnet werden können. (G.R. Kirchhoff: 1845 (1824-1887))

1. Knotenregeln

In einem Knoten kann keine Ladung gespeichert werden.

$\sum \text{Zufließende Ströme} = \sum \text{Abfließende Ströme}$

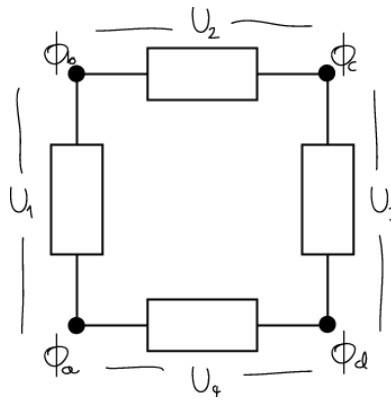
$\sum_j I_j = 0$ (\forall Knoten und "folgt" aus der Ladungserhaltung)

2. Maschenregel

Spannungen sind Potenzialdifferenzen. Für Maschen ohne elektromotorische Kraft gilt:

In Masche: $0 = \sum_j u_j = \sum_j R_j I_j$ (Umlaufspannung = 0!)

Beispiel:



$$U_1 = \phi_b - \phi_a$$

$$U_2 = \phi_c - \phi_d$$

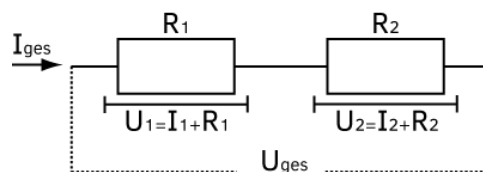
$$\sum_{j=1}^4 U_j = 0$$

$$U_3 = \phi_d - \phi_c$$

$$U_4 = \phi_a - \phi_b$$

Mit diesen Regeln lassen sich die Ströme I Spannungen in einem beliebigen Netzwerk durch ein Gleichungssystem berechnen.

15.5.2 Serien-(Reihen)schaltung von Widerständen

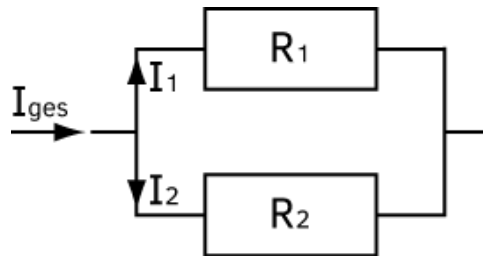


$$U_{ges} = U_1 + U_2$$

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 = I_{ges} R_{ges}$$

$$I_1 = I_2 = I_{ges} \Rightarrow \boxed{R_1 + R_2 = R_{ges}}$$

15.5.3 Parallelschaltung



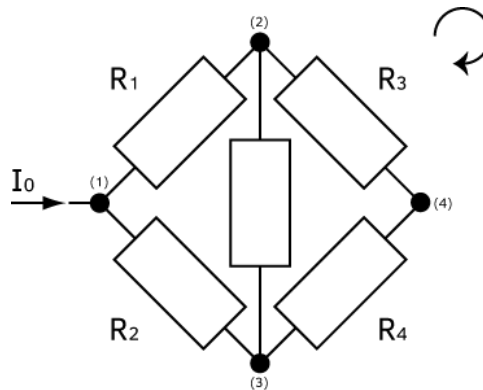
$$U_{ges} = U_1 = U_2$$

$$I_{ges} = I_1 + I_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{U_{ges}}{R_{ges}} = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} \quad | \cdot U_{ges}^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

15.5.4 Beispiel

Wheatstonesche Messbrücke



KR:

$$(1): I_0 = I_1 + I_2 \quad (3): I_4 = I_2 + I_5$$

$$(2): I_1 = I_3 + I_5$$

MR:

$$l: I_1 R_1 + I_5 R_5 - I_2 R_2 = 0$$

$$r: I_3 R_3 + I_4 R_4 - I_5 R_5 = 0 \Rightarrow 5 \text{ Bestimmungsgleichungen für } I_1, \dots, I_5$$

Bei Vorgabe von I_0 ist dieses Problem lösbar

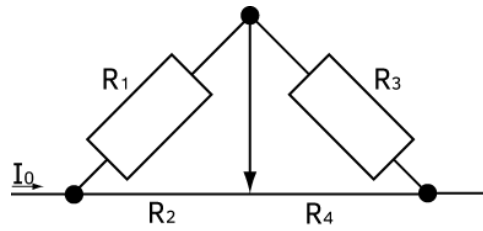
” \Rightarrow ” Durch Veränderung von R_2 und R_4 kann erreicht werden, dass $I_5 = 0$.

Dies kann genutzt werden um Widerstände zu Messen.

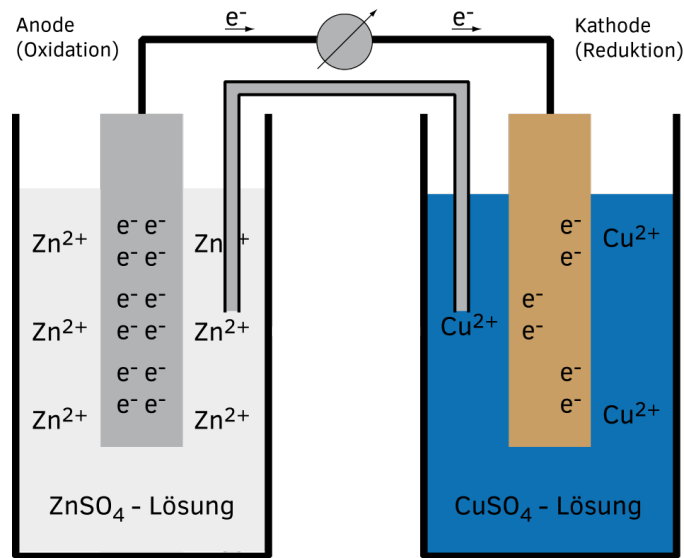
$$I_5 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow I_1 = I_3, \quad I_2 = I_4$$

$$\stackrel{MR}{\Rightarrow} I_1 R_1 = I_2 R_2, \quad I_3 R_3 = I_4 R_4 \Rightarrow I_1 R_3 = I_2 R_4$$

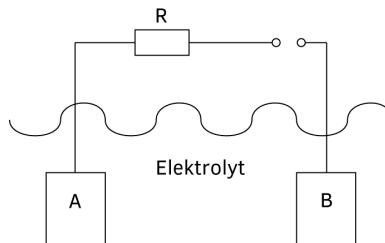
$$\Rightarrow \frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4} \Rightarrow \text{ermittel } R_1$$



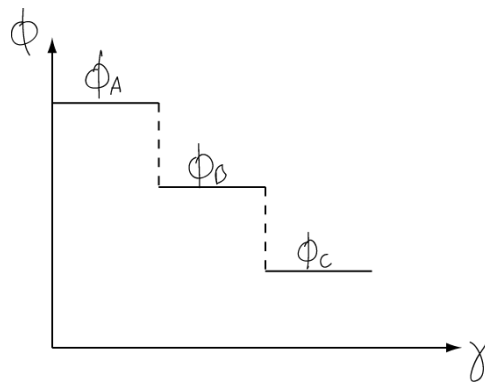
15.6 Stromquellen, elektromotorische Kraft, Urspannung, Klemmspannung



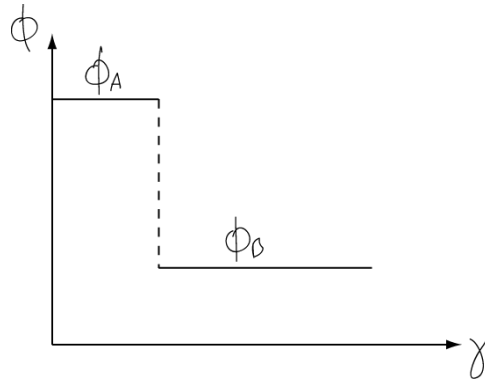
offenes galvanisches Element



innen



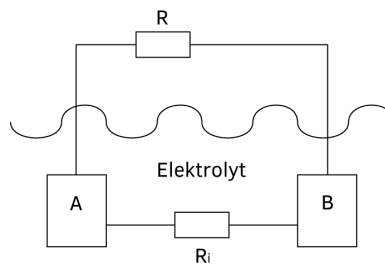
außen



$$U_R = \phi_A - \phi_B = \underbrace{(\phi_A - \phi_{el}) + (\phi_{el} - \phi_B)}_{U_0: \text{Ursprung (Elektromotorische Kraft)}} = U_0$$

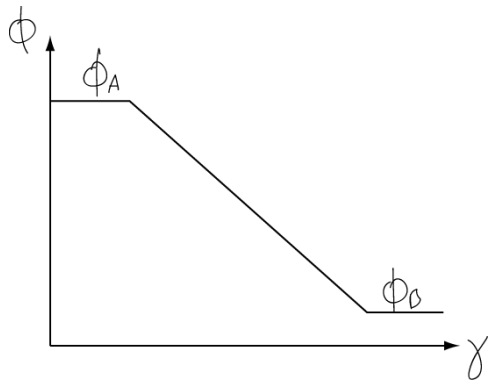
offenes galvanisches Element $U_R = U_0$

Belastet

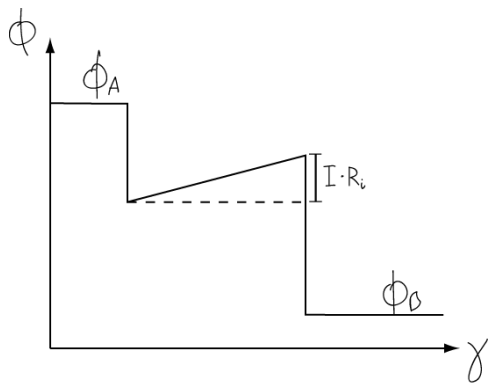


R_i : Innenwiderstand

innen

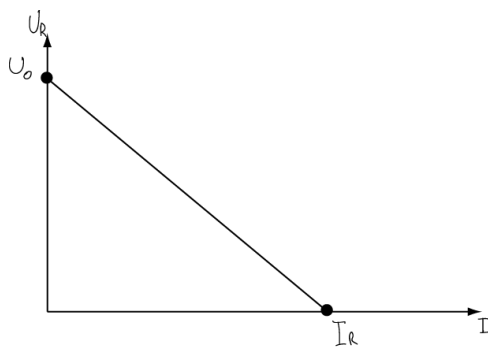


außen



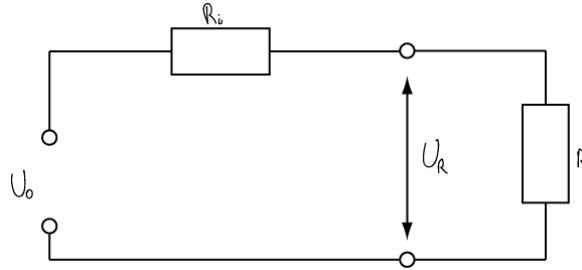
$$U_R = \phi_A - \phi_B = (\phi_A - \phi_{el}) - I \cdot R_i + (\phi_{el} - \phi_B)$$

$$U_R = U_0 - I \cdot R_i$$



Kurzschlussstromstärke $I_R = \frac{U_0}{R_I}$

Im Schaltbild:



Hilfe:

- Elektromotorische Kraft \equiv Urspannung
Diese ist die Differenz $E_{Kathode} - E_{Anode} = \Delta E$
Die formale Definition ist $\mathcal{E} = - \int_A^B \vec{E}_{CS} \cdot d\vec{\ell}$, wobei \vec{E}_{CS} das Elektrostatische Feld von/zwischen A und B ist.
- Stromquellen werden häufig als Spannungsquelle bezeichnet bzw. diese ist gemeint
- An einer realen Spannungsquelle greift man die Klemmspannung (U_K) ab. Diese ist *nicht* gleich der Quellenspannung (*)
- Quellenspannung wird hier als U_0 bezeichnet, häufiger aber U_Q
- Klemmspannung wird hier als U_R bezeichnet, häufiger aber U_K

15.7 Langsam zeitlich veränderliche Ströme

Auf- und Entladen eines Kondensators

a.) Aufladen

$I(t)? : U_C(t)?$

BILD

S schließen bei $t = 0$

Maschenregel:

$$\begin{aligned}U_0 &= U_R + U_C = I(t) \cdot R + C^{-1} \cdot Q(t) \quad | \cdot \frac{d}{dt} \\ \frac{d}{dt} U_0 &= R \cdot \dot{I}(t) + C^{-1} \frac{dQ(t)}{dt} \\ \Longleftrightarrow 0 &= C^{-1} \cdot I(t) + R \cdot \dot{I}(t)\end{aligned}$$

DGL für $I(t)$: $\boxed{\dot{I}(t) + \frac{1}{RC} I(t) = 0}$

Lösung der DGL durch Separation der Variablen:

$$\begin{aligned}\frac{dI(t)}{dt} &= -\frac{1}{RC} I(t) \\ \frac{dI(t)}{I(t)} &= -\frac{1}{RC} \cdot dt \\ \Rightarrow \int \frac{dI(t)}{I} &= -\frac{1}{RC} \int dt \\ \ln I(t) &= -\frac{1}{RC} \cdot t + \underline{const} \\ &= -\frac{t}{RC} + \underline{\ln I_0}\end{aligned}$$

$$\ln \frac{I(t)}{I_0} = -\frac{t}{RC}$$

$$\Rightarrow I(t) = I_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

Anfangsbedingungen: $t = 0 : U_C = 0 ; U_0 = I_0 \cdot R$

$$I(t = 0) = I_0 = \frac{U_0}{R}$$

außerdem $I(t \rightarrow \infty) = 0$ (Kondensator aufgeladen)

$\tau = RC$: Relaxationszeit: $[\tau] = \frac{V}{A} \cdot \frac{As}{V} = s$
("RC-Konstante")

Spannung am Kondensator: