

Kapitel 14 - Statische elektrische Felder

Johannes Bilk
me@talachem.de

May 11, 2016

Contents

14 Statische Elektrische Felder	3
14.1 Elektrische Ladungen	3
14.1.1 Reibungselektrizität	3
14.1.2 Ladung ist eine skalare Größe	4
14.1.3 Quarks	5
14.1.4 Entdeckung und Bestimmung der Elementarladung	6
14.2 Kräfte zwischen Ladungen und das Coulomb-Gesetz	6
14.3 Potenzielle Energie einer Ladungsverteilung	8
14.4 Erzeugung el. Felder durch Ladungen	9
14.4.1 Feld einer Punktladung	9
14.4.2 Feld einer Verteilung von Punktladungen	10
14.4.3 Leiter im el. Feld und Influenz	12
14.5 Kontinuierliche Ladungsverteilung	13
14.6 Elektrischer Fluss und Satz von Gauß	16
14.6.1 Def.: Fluss ϕ eines Vektorfeldes \vec{E} durch eine Fläche A	16
14.6.2 Gauß'scher Satz	17
14.6.3 Beispiele	17
14.7 Das elektrische Potenzial	24
14.7.1 Elektrisches Feld und Potenzial	27
14.7.2 Poisson- und Laplace Gleichung	28
14.8 Elektrisches Feld in der Umgebung von Leitern	29
14.8.1 Anwendungen:	31
14.8.2 Elektrisches Feld zwischen geladenen Leitern	32
14.8.3 Berechnung der Kapazität	32
14.8.4 Feldstärke im Inneren eines Plattenkondensators:	33
14.8.5 Realisierung von Kondensatoren:	34

14.8.6	Energie eines aufgeladenen Kondensators	34
14.8.7	Entladen eines Kondensators	35
14.8.8	Kraft zwischen Zwei Kondensatorplatten	36
14.8.9	Kraft zwischen Kondensatorplatten	36
14.9	Isolatoren (Dielektrikum) im elektrischen Feld	36
14.9.1	Mikroskopische Deutung und elektrische Suszeptibilität .	37
14.9.2	Nachtrag: Schaltungen mit Kapazitäten	39

14 Statische Elektrische Felder

14.1 Elektrische Ladungen

→ Ab dem 17. Jahrhundert: Ursache für "elektrische Phänomene"; "neuartiger Stoff", elektrische Ladung



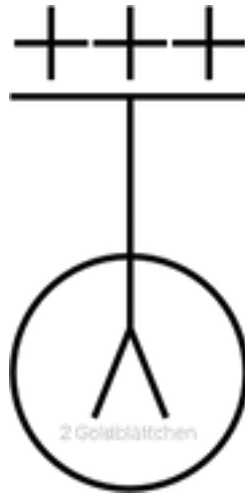
14.1.1 Reibungselektrizität

- Zwei Arten von "elektrischen Zuständen" sind erzeugbar:
 - Gleichartige Zustände \implies Abstoßung
 - Ungleichartige Zustände \implies Anziehung
- Charles Du Fay (1730): positiv/negativ elektrische Ladung
- Benjamin Franklin (1750): Über-/Unterschuss an "elektrischen Fluiden"
- Lichtenberg (1778): Zuordnung der Polarität

Hargummi stab: reiben mit Pelz, Wolle: - Glas, Plexiglas: reiben mit Seide: +
--

Reibezeug: entgegengesetzte Polarität \implies Ladungstrennung, nicht etwa Ladungserzeugung.

Grundsätzliches Messprinzip: Elektroskop:



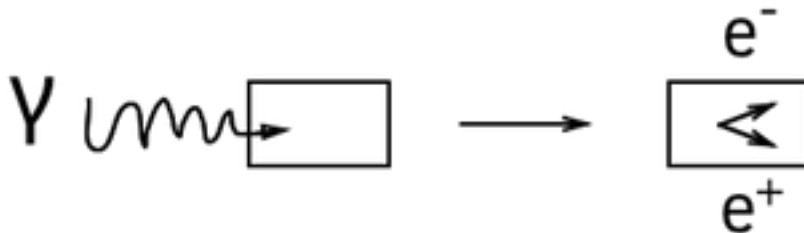
→ Elektrometer → quantitative Messung

- "Löffeln"; d.h. portionsweise Übertragung von Ladungen ist möglich
- Elektropendel: \implies periodisches Umladen eines "Kugelpendel"

14.1.2 Ladung ist eine skalare Größe

Einheit 1C = 1 Coulomb, SI

- Zu jedem geladenen Elementarteilchen gibt es ein Elementarteilchen mit entgegengesetzter Ladung (\rightarrow Ladungssymmetrie)
- Die Gesamtladung eines abgeschlossenen Systems bleibt erhalten (\rightarrow Ladungserhaltung)
- Beispiel: Produktion eines e^+e^- -Paares; $E_\gamma \geq 1,02 \text{ MeV}$



Nachweis: Blasenkammer im Magnetfeld:

Umkehrung: "Zerstrahlung" von Positronen; $E = m \cdot c^2$

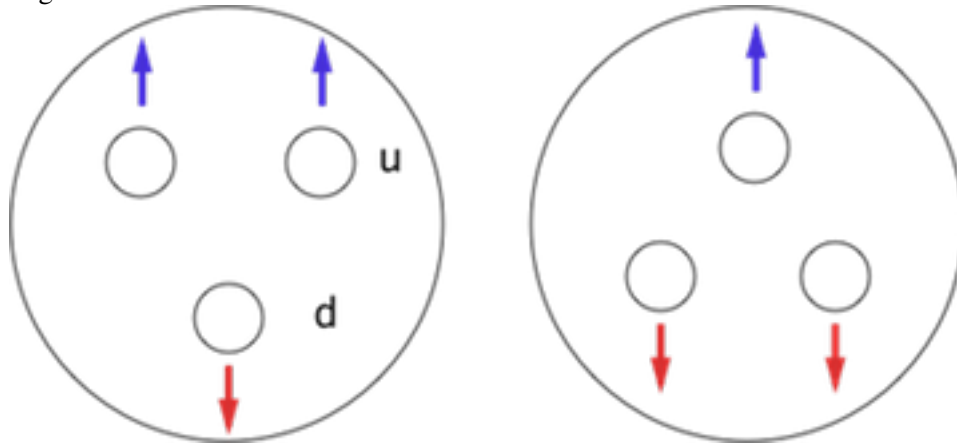
- Ladungsträger haben stets eine Masse
- Ladung kann (im Gegensatz zur Masse) nicht in Energie umgewandelt werden.
Sie bleibt auch bei Zerfallsprozessen erhalten.
- Quantisierung der Ladung:
Alle in der Natur vorkommenden Ladungen sind ganzzahlige Vielfache der Elementarladung: $e_0 := 1,602 \cdot 10^{-19} \text{C}$; $1\text{C} = 1\text{AS}$

Beispiele von Ladungen

- Neutral: Photon: γ , Neutrino, Neutron n
- einfach geladen: Elektron e^- , Positron e^+ , Proton p , Antiproton \bar{p}
- zweifach geladen: $\text{He}_2(2^+, Z : 2)$

14.1.3 Quarks

Seit 60er Jahre Nukleonen bestehen aus Quarks, diese haben "drittelzahlige Ladungen"



Up-Quarks: $u : +\frac{2}{3}e_0$
Down-Quarks: $d : -\frac{1}{3}e_0$
Proton: $2u + d : 1 \cdot e_0$
Neutron: $u + 2d : 0 \cdot e_0$

Quarks treten immer in 2er- oder 3er- Kombinationen auf.

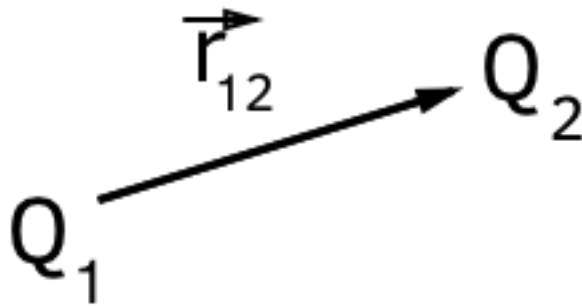
14.1.4 Entdeckung und Bestimmung der Elementarladung

Robert Andrews Millikan(1868-1953): Öltröpfchenversuch (→ Anfängerpraktikum)

14.2 Kräfte zwischen Ladungen und das Coulomb-Gesetz

Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806)

1785: Messung der Kraft zwischen zwei Ladungen als Funktion des Abstands mit Hilfe einer Torsionswaage



$$\vec{F}_{12} = f \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|} = f \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \cdot \hat{r}_{12}$$

F ist definiert durch die Definition der Ladungseinheit:

Internationales Messsystem (SI): $f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{(As)^2}{Nm^2}$$

ist Dielektrizitätskonste des Vakuums oder elektrische Feldkonstante

$Q_1 \cdot Q_2 > 0$: Abstoßung

$Q_1 \cdot Q_2 < 0$: Anziehung

Coulomb-Kraft

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \cdot \hat{r}_{12}$$

1 Coulomb ist diejenige elektrische Ladung, die eine gleich große Ladung im Abstand von 1m mit der Kraft von $8,9874 \cdot 10^9 N$ abstößt

Analogie Gravitation: $\vec{F} = -\gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \hat{r}$

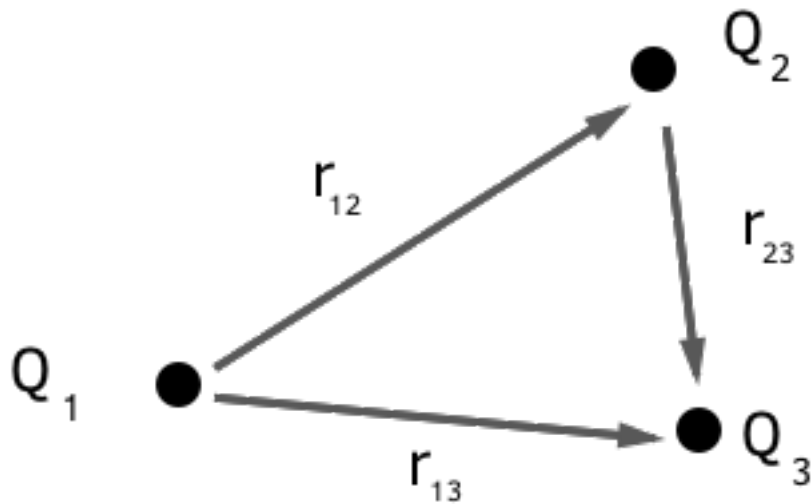
Vergleiche Gravitation und Coulombkraft zwischen Elektron und Proton:

$$|\vec{F}_C| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q_p| \cdot |q_e|}{r^2} = 2,3 \cdot 10^{-28} \frac{N}{r[m]^2}$$

$$|\vec{F}_G| = \gamma \cdot m_e \cdot m_p = 9,71 \cdot 10^{-68} \frac{N}{r[m]^2}$$

$$\implies \frac{|F_G|}{|F_C|} = 4,2 \cdot 10^{-40}$$

Wechselwirkung zwischen mehreren Ladungen



Die einzelnen Kräfte überlagern sich ungestört, (ungestörte Superposition)!

Kraft auf

$$Q_3 : \vec{F}_3 = \left[\frac{Q_1 \cdot Q_3}{r_{13}^2} \cdot \hat{r}_{13} + \frac{Q_2 \cdot Q_3}{r_{23}^2} \cdot \hat{r}_{23} \right]$$

14.3 Potenzielle Energie einer Ladungsverteilung

$$\begin{aligned}
 W_{12} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{\infty}^{r_{12}} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{\rho^2} d\rho \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q_1 \cdot Q_2}{\rho} \right]_{\infty}^{r_{12}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}} \\
 W_{1,2,3} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1 \cdot Q_3}{r_{13}} + \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_2 \cdot Q_3}{r_{23}} \right)
 \end{aligned}$$

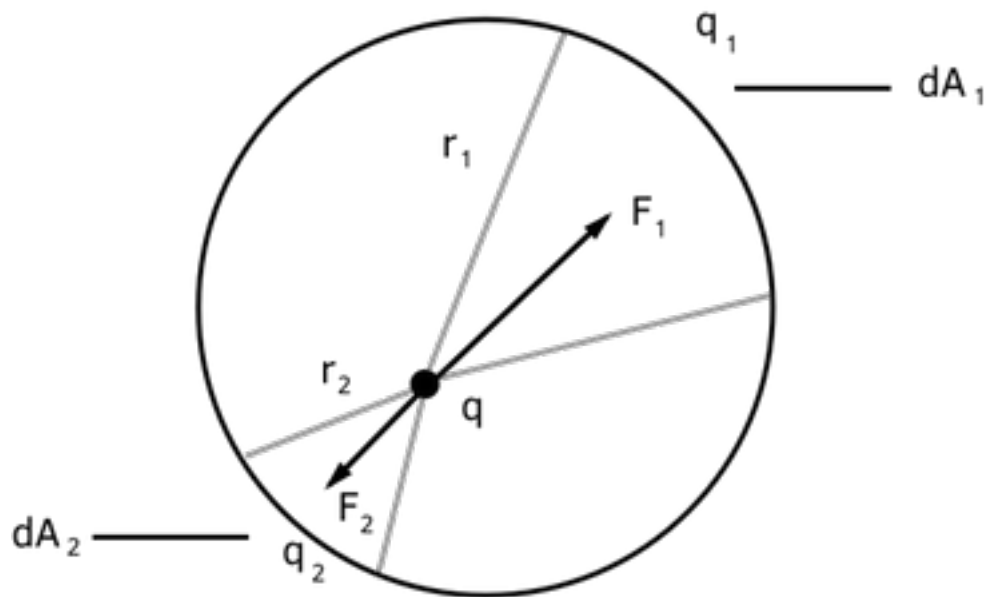
Anzahl an Summanden = Anzahl an Paaren.

Da aber jedes Paar doppelt gezählt wird, muss noch mit $\frac{1}{2}$ multipliziert werden

$$W = \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{Q_i \cdot Q_j}{r_{ij}} \right] \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

⇒ Aufsummieren auch unendlicher Ensembles möglich, wenn die Reihe konvergiert.

Betrachte Kraft auf Probeladung in homogen geladener Kugel



Für beliebige Räumlichelemente (und damit auch Flächenelemente) gilt:

$$q_1 \propto dA_1 \propto r_1^2$$

$$\text{Geometrie} \implies \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

$$\text{Annahme: Kraft} \propto \frac{1}{r^n}$$

$$|\vec{F}_1| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot q_1}{r_1^n}$$

$$|\vec{F}_2| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot q_2}{r_2^n}$$

$$\frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{F}_2|} = \frac{q_1}{r_1^n} \cdot \frac{r_2^n}{q_2} \stackrel{!}{=} 1 \implies \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1^n}{r_2^n}$$

Nun kann das mit dem Geometrieausdruck gleichgesetzt werden:

$$\frac{r_1^n}{r_2^n} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \implies n = 2$$

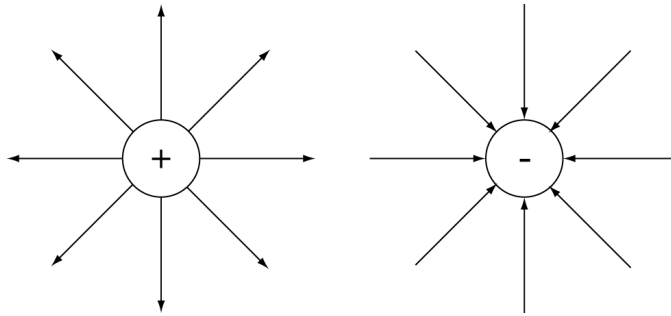
Gesamtkraft verschwindet nur wenn $|\vec{F}| \propto \frac{1}{r^2}$

14.4 Erzeugung el. Felder durch Ladungen

14.4.1 Feld einer Punktladung

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \cdot \hat{r}_{12} \\ &= q_1 \cdot \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{|\vec{r}_{12}|^2}}_{\text{Feld von } q_2} \cdot \hat{r}_{12} \\ &= q_1 \vec{E}(\vec{r}) \end{aligned}$$

- Felder einer Punktladung sind Zentralfelder mit Kugelsymmetrie
- Konvention: Feldlinien führen von positiver zu negativer Ladung



⇒ Punktladungsfelder sind inhomogen!

14.4.2 Feld einer Verteilung von Punktladungen

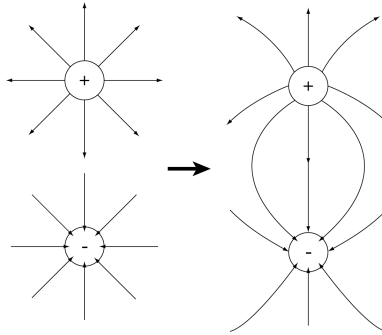
N Ladungen bei \vec{r}_i

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

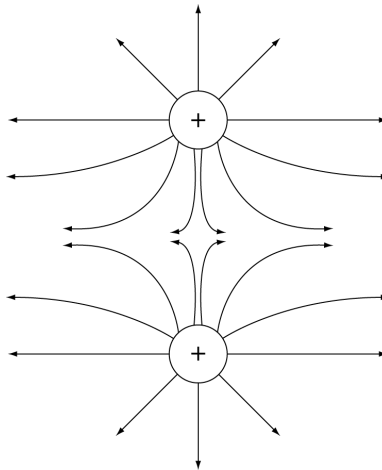
Ungestörte Superposition:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

2 Ladungen, q ; $-q$: Feld eines Dipols

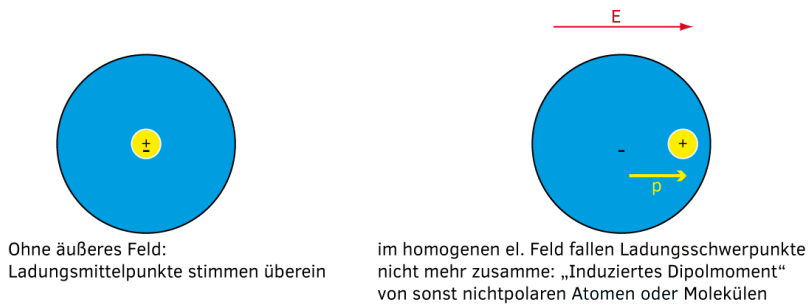


2 Ladungen: q ; q

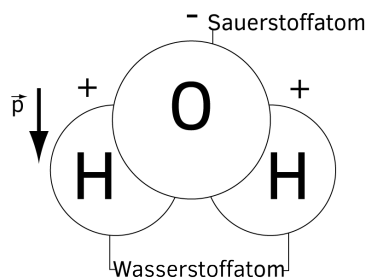


Beispiele für "natürliche Dipole":

1. Neutrales Atom im homogenen \vec{E} -Feld



2. Polare Moleküle mit permanentem Dipolmoment

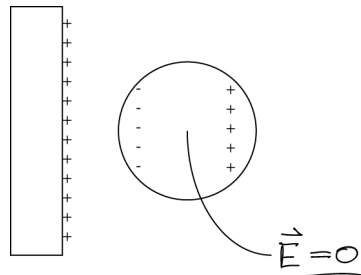


14.4.3 Leiter im el. Feld und Influenz

Leiter: Ladungen sind frei beweglich

Isolator: Ladungen sind ortsfest

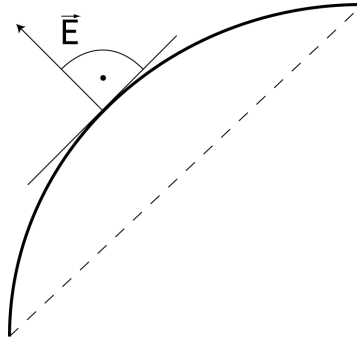
1. $\vec{E} = 0$ im Inneren des Leiters



Denn falls $\vec{E} \neq 0$: $\vec{F} = q\vec{E}$ verschiebt Ladung bis $\vec{E} = 0$!

2. Es folgt, sich bei einem Leiter die (Netto-)Ladungen immer an der Oberfläche befinden \Rightarrow Flächenladungsdichte $\sigma = \frac{dQ}{dA}$

3. \vec{E} immer \perp auf Leiteroberfläche

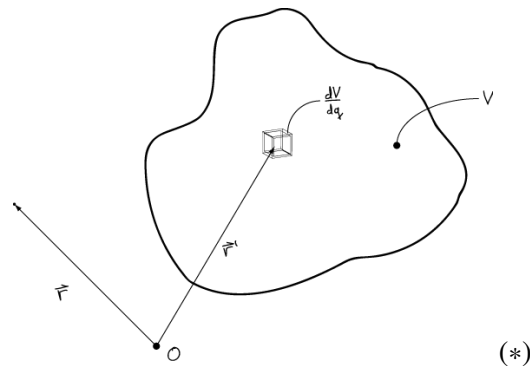


(Denn falls $\vec{E}_{||} \neq 0$: Verschiebung der Ladung bis $\vec{E}_{||} = 0$!)

Influenz: Räumliche Ladungstrennung in el. Leitern durch äußeres \vec{E} -Feld (Kontaktlos!), so dass das Innere des Leiters feldfrei ist!

14.5 Kontinuierliche Ladungsverteilung

Betrachte Ladungsverteilung über endliches Volumen $V = \int_V dV$



Ladungsdichte: $\rho(\vec{r}) = \frac{dq(\vec{r})}{dV}$

Gesamtladung: $Q = \int_V dq = \int_V \rho(\vec{r}) dV$

Flächenladungsdichte: $\sigma = \frac{dq}{dA}$

Integral über geschlossene Oberfläche: $A = \oint_A dA$

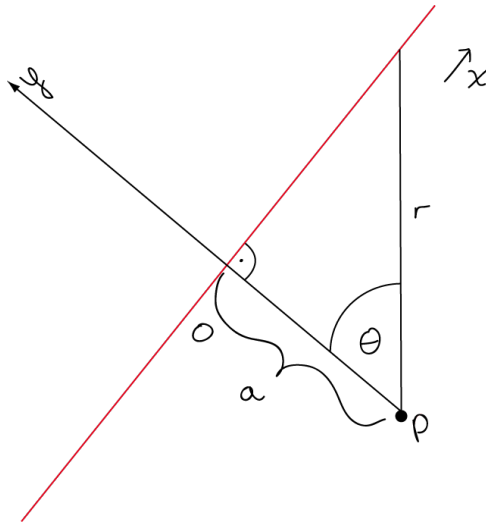
1-dim Ladungsdichte: $\lambda = \frac{dq}{dl}$

Länge $l = \int_l dl'$

für (*) :

$$\begin{aligned} d\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \\ \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV \left\{ \frac{dq}{dV} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV \left\{ \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') \right\} \end{aligned}$$

Beispiel: unendlich langer geladener Draht



Ziel: Berechnung des \vec{E} -Feldes im Punkt P.

Betrachte einen kleinen Abschnitt des Drahtes der Länge dx . Dieser hat dann die Ladung dq mit:

$$dq = \lambda dx$$

wobei $\lambda = \frac{dq}{dx}$ die lineare Ladungsdichte ist.

Die Symmetrie des Problems impliziert außerdem: $E_x = E_z = 0$.

Für die y-Komponente beachte, dass:

$$\frac{dE_y}{|d\vec{E}|} = \frac{a}{r} = \cos \theta \Rightarrow dE_y = |d\vec{E}| \cos \theta$$

Nun kann aber das Drahtstück mit der infinitesimalen Länge dx als Punktladung angesehen werden. Das heißt:

$$|d\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2(\theta)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r^2(\theta)}$$

Nun muss $r(\theta)$ ermittelt werden. Dafür benutzen wir nochmal:

$$\cos \theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{r(\theta)} \Rightarrow r(\theta) = \frac{a}{\cos \theta}$$

Damit wird dE_y dann:

$$dE_y = |d\vec{E}| \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r^2(\theta)} \frac{a}{r(\theta)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \lambda dx}{r^3(\theta)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \lambda dx}{a^3} \cos^3 \theta$$

Um jetzt aufzuintegrieren muss zuletzt noch die Abhängigkeit von x und θ berücksichtigt werden:

$$\tan \theta = \frac{x}{a} \Rightarrow \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{dx}{a} \Rightarrow dx = \frac{a d\theta}{\cos^2 \theta}$$

Das in den Ausdruck für dE_y liefert dann:

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \lambda dx}{a^3} \cos^3 \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{a^2 \lambda d\theta}{a^3 \cos^2} \cos^3 \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\theta}{a} \cos \theta = \frac{\lambda}{4a\pi\epsilon_0} \cos \theta d\theta$$

Nun muss über den ganzen Stab integriert werden, sprich von $x = -\infty$ bis $x = \infty$.

Nun ist ja $\theta = \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$ und $a > 0$. Also:

$$x = \pm \infty \Rightarrow \theta = \arctan(\pm \infty) = \pm \frac{\pi}{2}$$

Damit gilt nun:

$$E_y = \int_{\text{Draht}} dE_y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda}{4a\pi\epsilon_0} \cos \theta d\theta = \frac{2\lambda}{4a\pi\epsilon_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda}{2a\pi\epsilon_0} \sin \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{a}$$

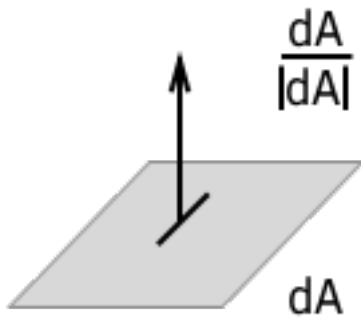
14.6 Elektrischer Fluss und Satz von Gauß



Zusammenhang zwischen "Elektrischem Fluss" (Feldliniendurchsatz) durch eine Oberfläche und der eingeschlossenen Ladung.

⇒ Allgemeinere Formulierung des Coulomb-Gesetzes

14.6.1 Definition: Fluss ϕ eines Vektorfeldes \vec{E} durch eine Fläche A :



$$\phi = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$d\vec{A}$: Richtung \perp Fläche (nach Außen)
Richtung der Flächennormale

Betrag dA : Größe der Fläche

Spezialfälle \vec{E} – homogen $\vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot dA \cdot \cos \alpha$

- $\alpha = 0$: $\vec{E} \parallel d\vec{A}$: $\vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot dA$

- $\alpha = 90$: $\vec{E} \perp d\vec{A}$: $\vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$

14.6.2 Gauß'scher Satz

$$\phi = \oint_{\substack{A \\ \text{geschlossen}}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{eingeschlossen}}}{\epsilon_0}$$

Der elektrische Fluss durch einer beliebigen geschlossenen Oberfläche hängt weder von der Form der Oberfläche, noch von der Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r})$ ab, sondern nur von der eingeschlossenen Gesamtladung Q .

Mathematisch gilt:

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_V \text{div} \cdot \vec{E} \cdot dV = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \cdot dV$$

Nach Gauß aber auch:

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V dQ = \int_V \varrho(\vec{r}) dV$$

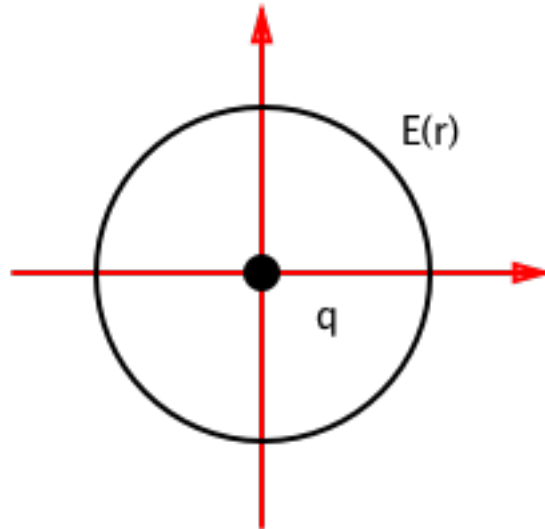
Zusammen also:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_V \frac{\varrho(\vec{r})}{\epsilon_0} dV \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\varrho(\vec{r})}{\epsilon_0}}$$

Die Ladungsverteilung im Raum ist die lokale Quelle ($\varrho(\vec{r}) > 0$) bzw. Senke ($\varrho(\vec{r}) < 0$) des elektrischen Feldes.

14.6.3 Beispiele

(i) Feld einer Punktladung



- Geeignete Wahl von A: Kugeloberfläche
- Symmetrie: $\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \cdot \hat{e}_r$
- $\Rightarrow \vec{E} \parallel d\vec{A}$

Der elektrische Fluss ist:

$$\phi = \oint_A \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \oint_A E(r) \hat{e}_r \cdot d\vec{A} = \oint_A E(r) dA$$

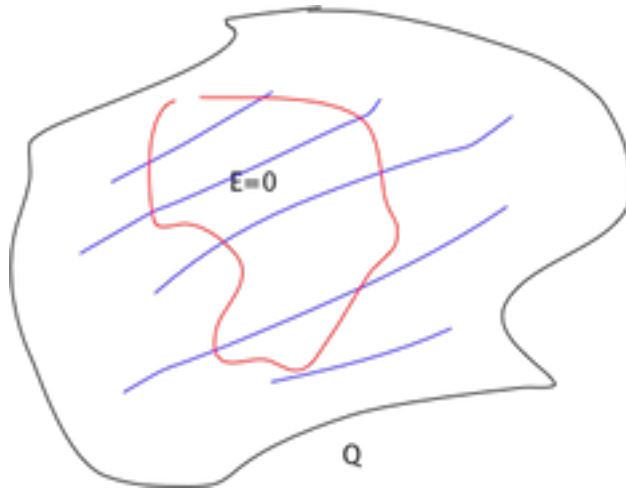
Nun ist aber E nur von r abhängig und im Integral ist $r = \text{const.}$ Damit also:

$$\phi = E(r) \oint_A dA = 4\pi r^2 E(r)$$

Der Satz von Gauß liefert nun:

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \phi \stackrel{!}{=} \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}}$$

(ii) Ladung auf beliebig geformten Leitern



$$\phi = \oint_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} = 0$$

(iii) Feld einer leitenden Kugel mit Ladung Q : (Ladung auf der Oberfläche)

Aus der Symmetrie des Problems ist ersichtlich: $\vec{E}(\vec{r}) = E(\vec{r}) \cdot \hat{e}_r$

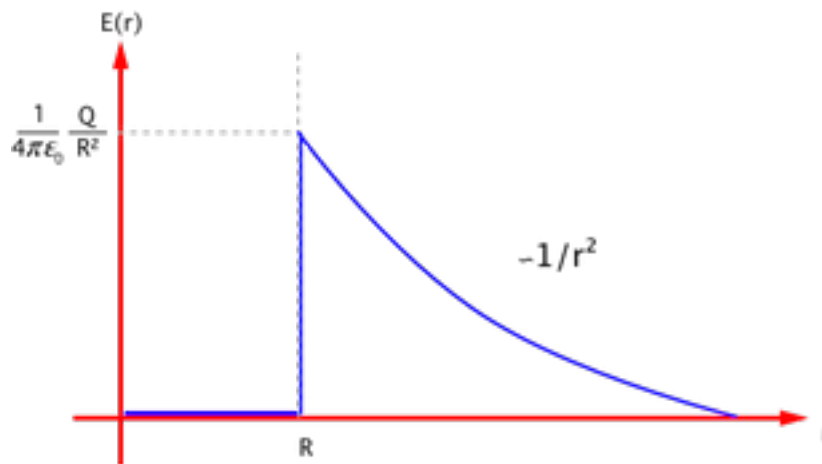
Im Inneren, also für $r < R$, gilt nach der vorherigen Überlegung: $E = 0$

Außerhalb, also $r > R$, wird als Gaußfläche wieder eine Kugel mit Radius r gewählt. Dann gilt nach Gauß:

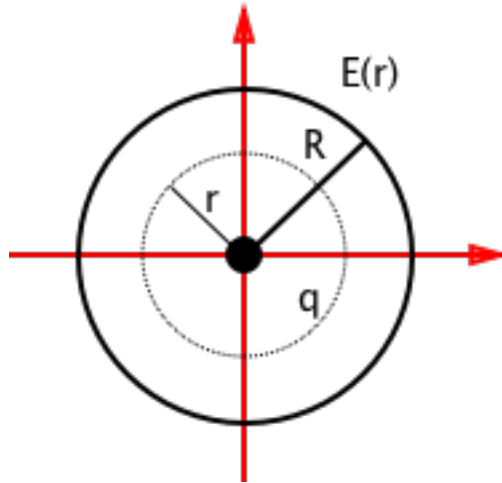
$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \oint_A E(r) dA = E(r) 4\pi r^2 \Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Zusammen kann $E(r)$ also abschnittsweise angegeben werden:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & , r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} & , r > R \end{cases}$$



(iv) Feld einer homogen geladenen Kugel



Für die Ladungsdichte ϱ als Funktion vom Abstand r vom Kugelmittelpunkt heißt das:

$$\varrho = \begin{cases} 0 & , r > R \\ \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} & , r < R \end{cases}$$

Als Gaußoberfläche wird wieder eine Kugel genommen. Auch wird wieder eine Fallunterscheidung gemacht:

Innerhalb der Kugel und außerhalb der Kugel

Zunächst wird analog zu vorher der Elektrische Fluss ausgerechnet und der Satz von Gauß benutzt:

$$\phi = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{in}}{r^2}$$

Um auf Q_{in} zu schließen müssen wir nur die Ladungsdichte über das Volumen des Gaußvolumens integrieren:

1. $r > R$.

$$Q_{in} = \int_{V_{Gau}} \varrho(\tilde{r}) dV = \int_{0 \leq \tilde{r} \leq R} \varrho(\tilde{r}) dV + \int_{R \leq \tilde{r} \leq r} \varrho(\tilde{r}) dV$$

Aber im zweiten Integral ist $\varrho = 0$ und somit fällt dieses Integral raus.

$$\Rightarrow Q_{in} = \int_{0 \leq \tilde{r} \leq R} \varrho(\tilde{r}) dV = \int_{0 \leq \tilde{r} \leq R} \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} dV = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int_{0 \leq \tilde{r} \leq R} dV = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi R^3 = Q$$

Das ist auch vollkommen klar, denn die gesamte Ladung ist ja in der Kugel verteilt und die Gaußkugel enthält diese.

2. Falls $r < R$:

Da hier nur innerhalb der Kugel integriert wird, ist ρ konstant und es reicht ein Integral:

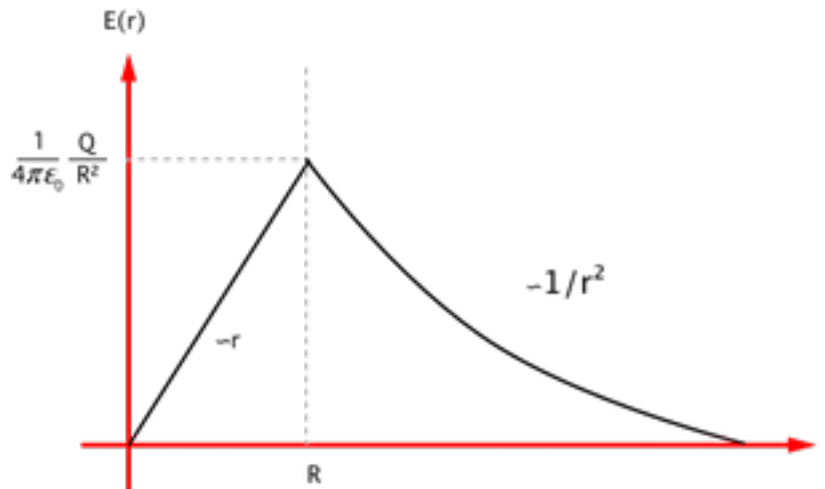
$$Q_{in} = \int_{V_{Gau}} \varrho(\tilde{r}) dV = \int_{V_{Gau}} \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} dV = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int_{V_{Gau}} dV = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi r^3 = Q \frac{r^3}{R^3}$$

Nun kann dies in den Satz von Gauß eingesetzt werden:

$$E(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} & , r > R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} Q \frac{r^3}{R^3} & , r < R \end{cases}$$

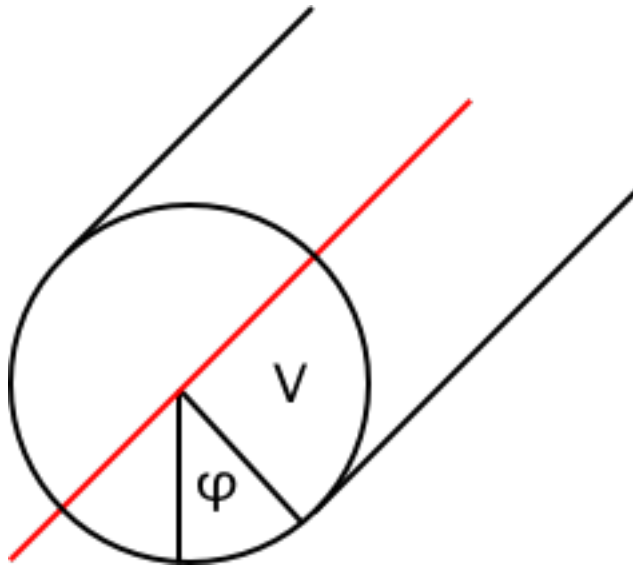
Oder zusammengefasst:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{Q}{r^2} & , r > R \\ \frac{Q}{R^3} r & , r < R \end{cases}$$



Es gilt also, dass man Von Außen nicht feststellen kann, ob die geladene Kugel massiv oder hohl ist (Leiter oder homogen geladener Isolator)!

(v) Unendlich langer homogen geladener Draht



Zylinderkoordinaten:

$$\lambda = \frac{dq}{dL} = \left(\frac{Q}{R}\right) \leftarrow \text{als endliche lange } l$$

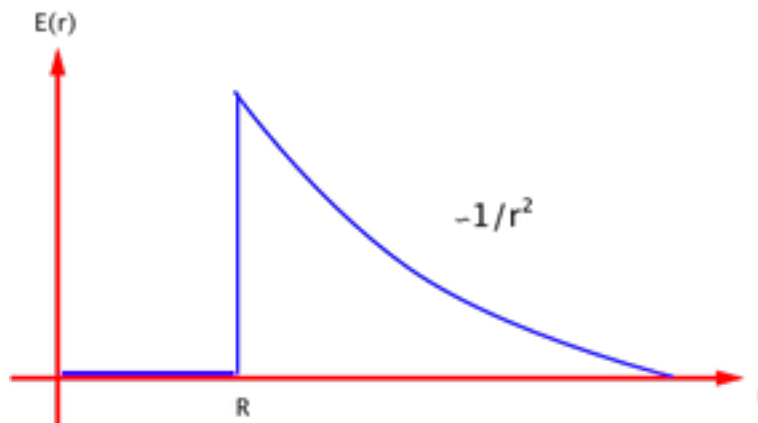
$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(r) = E(r) \cdot \hat{e}_r$$

$$\phi = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_A E(r) dA = E(r) \oint_A da = E(r) \cdot 2\pi r l$$

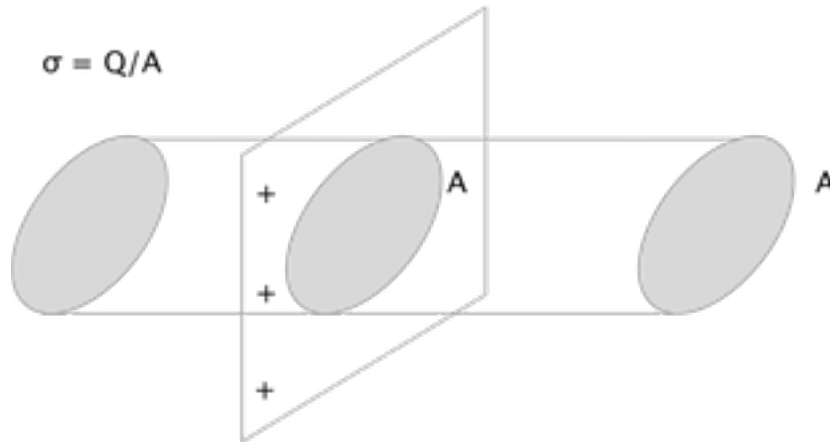
$$\phi = \frac{Q_{ges}}{\epsilon_0} \implies E(r) = \frac{Q_{ges}}{2\pi\epsilon_0 \cdot r l}$$

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

(vi) Unendlich langer, homogen geladener leitender Zylinder



(vii) Feld einer homogen geladener unendliche leitenden Ebene



$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

$$\phi = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{A, \text{stirn}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{A, \text{mantel}} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

\vec{E} -Ebene
 \Rightarrow Beitrag Über Mantelfläche verschwindet ($d\vec{A} \perp \vec{E}$)

$$\phi = \oint_A \vec{E} d\vec{A} = 2 \cdot E \cdot A_{\text{stirn}} \stackrel{G.S.}{=} \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

14.7 Das elektrische Potenzial

Coulombkraft: Zentralkraft, konservativ

$\Rightarrow \exists$ potentielle Energie (siehe 14.3)

für Ladungen q_0 im \vec{E} -Feld gilt:

$$\boxed{E_{\text{pot}}(\vec{r}) = \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} = -q_0 \cdot \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Das elektrische Potenzial $\varphi(\vec{r})$ ist definiert als potentielle Energie pro Ladung:

$$\varphi = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{q_0} E_{pot} \cdot (\vec{r})$$

→ Beachte: Arbeit ist unabhängig vom Weg!

Verschiebe q_0 von \vec{r}_1 nach \vec{r}_2 ; die benötigte Arbeit ist:

$$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = q_0 \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\ = q_0 \cdot (\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2))$$

$\varphi(\vec{r})$ nur bis auf Integrationskonste bestimmt!

Die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten:

$$U = \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) = \frac{W_{12}}{q_0} \text{ heißt elektrische Spannung!}$$

$q_0 \cdot U$ ist die Arbeit, die man braucht um q_0 von \vec{r}_1 nach \vec{r}_2 zu bringen!

$$[U] = 1 \text{ Volt} = 1 \text{ V} = 1 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

Beachte: $\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) = - \oint \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0!!$

Typische Spannungen:

Batterie : 1,5V

Stadtnetz : 220V

berlandleitung : 250kV

Blitz : 10 – 15MV

Beispiele: (i) Punktladung:

$$\varphi(\vec{r}) = - \int \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}; \vec{E} = E \cdot \hat{e}_r \\ = - \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{\infty}^r \frac{d\vec{r}}{r^2}$$

$$\underline{\varphi(\vec{r}) = \varphi(r) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \cdot r}}$$

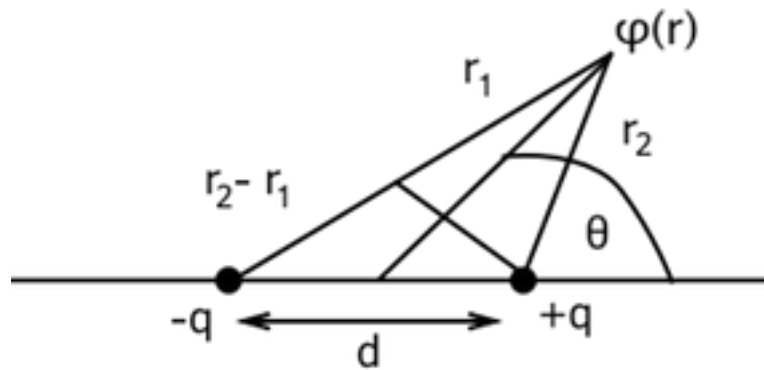
Äquipotenzialflächen: $r = \text{const.}$

(in 3D: Kugelflächen

in 2D: Kreise)

(ii) Mehrere Punktladungen

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$



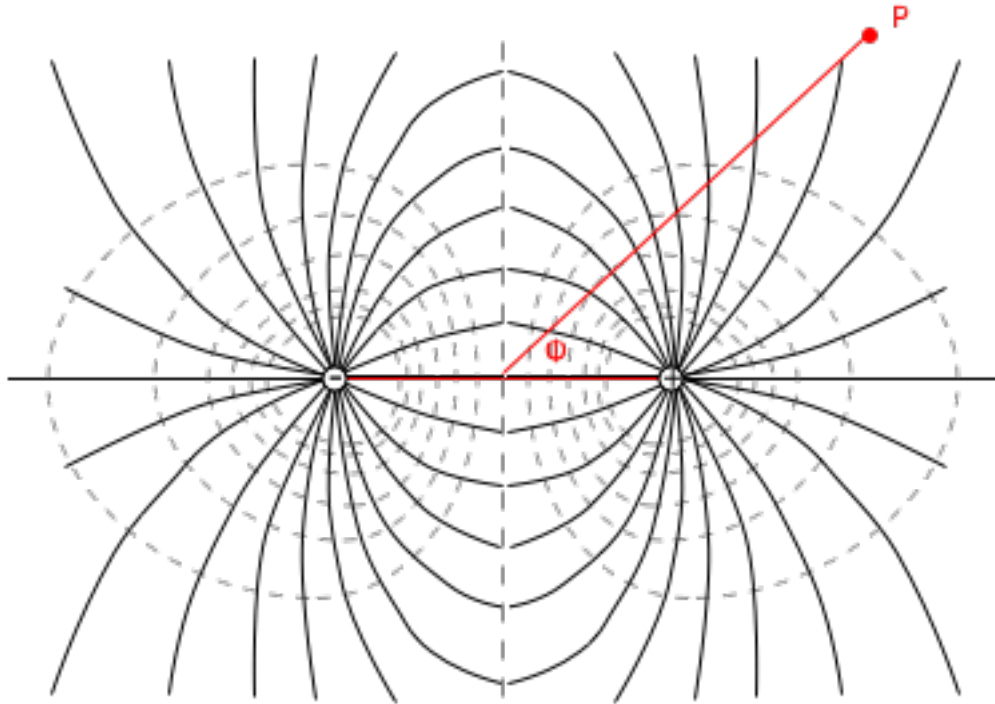
$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} - \frac{r_2 - r_1}{r_1 \cdot r_2}$$

für $\underbrace{d \ll r}_{\text{Fernfeld}} : r_1 \cdot r_2 = r^2$

$$r_2 - r_1 = d \cdot \cos \theta$$

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(r) = \frac{q \cdot d \cdot \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} = \frac{\varphi \cdot \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$$

Potenzialverteilung:



(iii) Kontinuierliche Ladungsverteilung:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{\tilde{V}} \frac{dQ}{|\vec{r} - \tilde{\vec{r}}|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{\tilde{V}} d\tilde{V} \left\{ \frac{\varphi(\tilde{\vec{r}})}{|\vec{r} - \tilde{\vec{r}}|} \right\}$$

14.7.1 Elektrisches Feld und Potenzial

$\varphi(\vec{r})$: Skalare Größe, manchmal einfacher zu berechnen als $\vec{E}(\vec{r})$

$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r})$ aus $\varphi(\vec{r})$ bestimmen?

$$\varphi = \varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z); \vec{E} = \vec{E}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

$$d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{d\varphi}_{\text{vollständiges Differential}} = -\vec{E}d\vec{r} = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz) \quad (*)$$

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot dz \quad (**)$$

$$(*), (**): \left\{ E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\} \implies \underline{\vec{E} = -\text{grad}\varphi}$$

\vec{E} zeigt in Richtung des betragsmäßig größten Anstiegs von φ , allerdings in abnehmende Richtung.

$$\text{Äquipotenziallinie: } d\varphi = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\text{längst einer solchen Linie ist: } d\varphi = 0 \implies -\vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \\ \implies \underline{\vec{E} \perp d\vec{r}}$$

Beispiel: Punktladung

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\text{Kugelkoordinaten, Kugelsymmetrie: } \vec{E} = -\nabla \cdot \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \hat{e}_r$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \implies \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \hat{e}_r$$

14.7.2 Poisson- und Laplace Gleichung

$$\text{Gauß'scher Satz: } \text{div}\vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{Potenzial: } \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$

$$\text{Einsetzen: } \boxed{\text{divgrad}\varphi = \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}}_{\Delta} \cdot \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

$$\Delta\varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot \varphi$$

Spezialfall: $\varrho = 0 \implies \text{Laplace-Gleich} = \underline{\Delta\varphi = 0}$

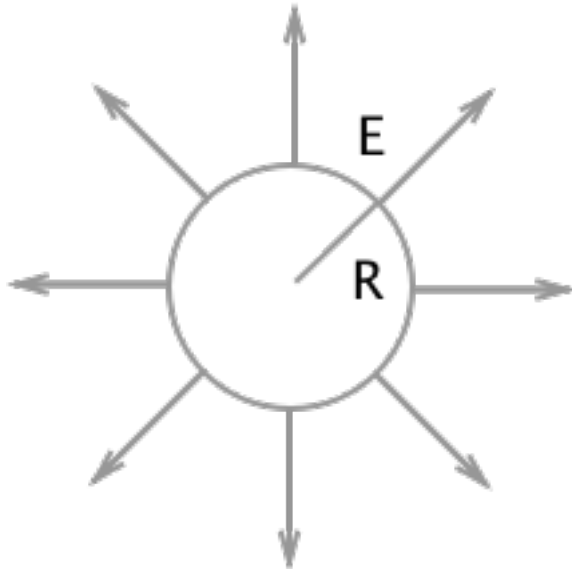
14.8 Elektrisches Feld in der Umgebung von Leitern

Gauß'scher Satz: $\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 \implies \varrho = 0$
(Leiter im Inneren Feldfrei!)

Potenzial: $\varphi(r) = - \int \vec{E} d\vec{r} = \text{const.}$

\implies Leiteroberfläche ist Äquipotenzialfläche

Beispiel: Elektrisches Feld an Kugeloberfläche:

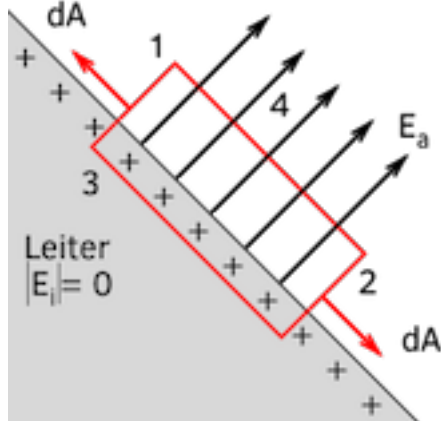


E_{\perp}

für jede Leiteroberfläche berechenbar:

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Beispiel:



Fläche:

1,2: $\vec{E} \perp d\vec{A} \implies "0"$

3: $\vec{E} = 0 \implies 0$

4: $E \cdot A = \frac{Q}{\epsilon_0}$

$$\implies |\vec{E}| = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \sigma$$

$$\implies \text{Die Größe von } E_{\perp} \text{ an der Oberfläche ist } \frac{\sigma}{\epsilon_0}!$$

Weiter mit der Kugel: $E_a = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{4\pi \cdot R^2}$

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot R} \implies E_a = \frac{\varphi}{R}$$

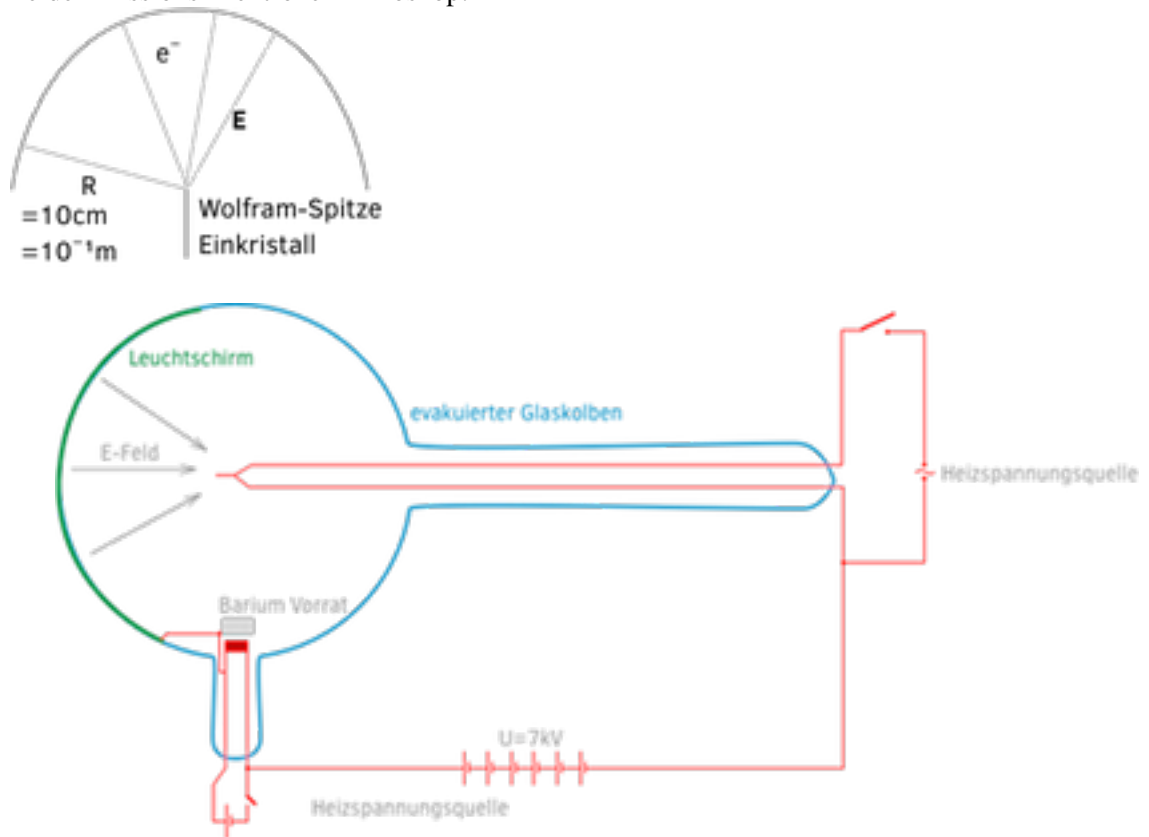
Bei gegebenen Potenzial ist Feldstärke an der Oberfläche umgekehrt proportional zum Kreisradius!

Lokal: $|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\varphi}{R}$

R Klein $\implies \varphi$ groß, σ groß

14.8.1 Anwendungen:

Feldemissions-Elektronenmikroskop:



$|\vec{E}| = \frac{\varphi}{R} = \frac{10kV}{10^{-7}m} = 10^1 1 \frac{V}{m}$ an der Wolfram-Spitze
Bewegung der Elektronen Entlang der Feldlinien

- vergrößertes Bild der Wolfram-Spitze
- Vergrößerung: $\frac{R_{Schirm}}{R_{Spitze}} \approx 10^6$
- so erstmals Atome sichtbar gemacht
- Objekte $< 10^{-9}m \implies < 1nm!$

14.8.2 Elektrisches Feld zwischen geladenen Leitern

Anwendung: 2 isolierte, entgegengesetzt geladene Leiter, (\implies Kondensator)



Coulomb: $|\vec{E}| \propto |Q|$

Spannung: $U_{21} = \varphi_2 - \varphi_1 = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} \propto Q$ ist unabhängig vom Weg!

$$\implies Q \propto U$$

Proportionalitätskonstante?

$$\boxed{Q = C \cdot U}$$

C: Kapazität

Einheit $[C] = \frac{1C}{1V} = 1F$ (Farad)

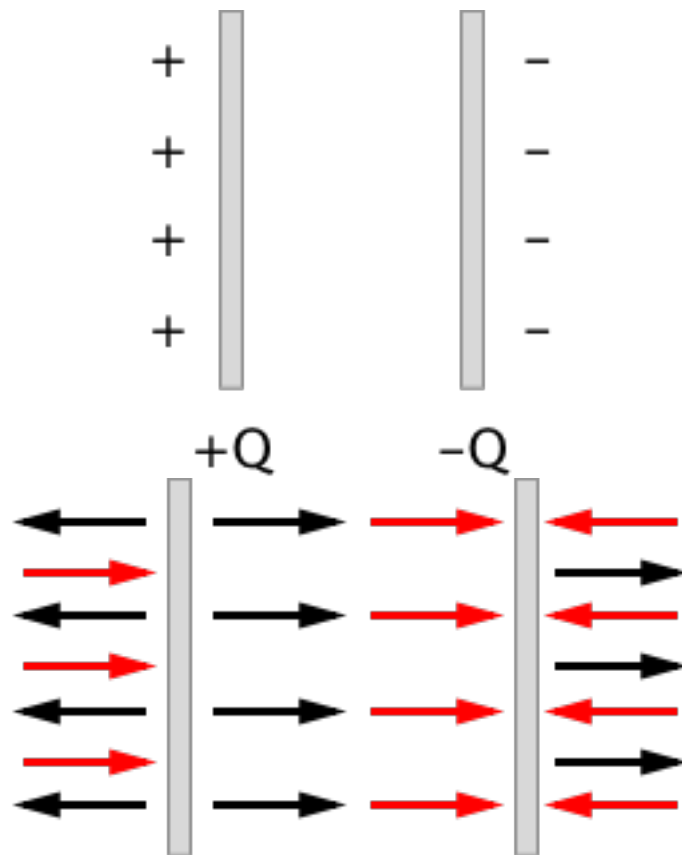
$$\text{typisch : } 10^{-6}F = 1\mu F$$

$$10^{-9}F = 1nF$$

$$10^{-12}F = 1pF$$

14.8.3 Berechnung der Kapazität

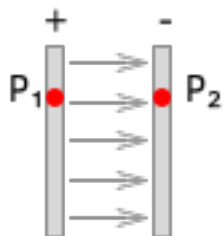
Erinnerung: homogen geladene Platte: $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$



Im Außenraum: Kompensation
 Im Innenraum: Addition

Im Innenraum: $|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

14.8.4 Feldstärke im Inneres eines Plattenkondensator:



Seicherung von Ladungen auf voneinander isolierten leitenden Platten, Aufladung über Spannungsquelle oder Batterie.

Spannungspotenzialdifferenz: $U_{21} = p_2 - p_1 = \int \vec{F} d\vec{r} = E \cdot d$
 $U = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot d = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot A} \cdot d$
 mit $Q = C \cdot U$ folgt $C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$

$$\boxed{|\vec{E}| = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot A}} \text{ ist unabhängig von } d$$

$$\boxed{C = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d}} \text{ ist eine rein geometrische Größe}$$

$$d \uparrow \implies C \downarrow \implies U \uparrow$$

$$d \downarrow \implies C \uparrow \implies U \downarrow$$

14.8.5 Realisierung von Kondensatoren:

Großes C: A groß, d klein

Beidseitiges Bedampfte dünne Kunststofffläche, dann aufrollen, \implies Kunststoff-folienkondensator.

Größenordnung:

$$\left. \begin{array}{l} d = 1mm \\ A = 1cm^2 \end{array} \right\} C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} &= 8,8 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2} \frac{10^{-4}m^2}{10^{-3}m} \\ &= 0,9 \cdot 10^{-12} F \\ &\approx \underline{1pF} \times \text{Anzahl der Lagen} \end{aligned}$$

14.8.6 Energie eines aufgeladenen Kondensators

Kondensator C sie mit Ladung q aufgeladen: $U = \frac{q}{C}$

Die Arbeit, die zum Aufbringen einer weiteren Ladung benötigt wird, hängt vom

aktuellen Ladungszustand ab:

$$\begin{aligned} dW &= dq \cdot U(q) \\ &= dq \cdot \frac{q \cdot d}{A \cdot \epsilon_0} \end{aligned}$$

$$W = \int_0^Q dW = \frac{d}{A\epsilon_0} \int_0^Q q \cdot dq = \frac{1}{2} \frac{1}{C} Q^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2}}$$

$$\text{Energiedichte: } \underbrace{\frac{W}{V}}_{A \cdot d} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} \frac{1}{Ad} E^2 d^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2}}$$

(Dieses Ergebnis gilt auch für andere Feldverteilungen, nicht nur im Plattenkondensator)

→ Feldenergie $\propto E^2$ (später wichtig!)

⇒ wichtige Anwendung: Schnelle Entladung eines langsam aufgeladenen Kondensators ⇒ Kurzzeitig hohe Leistung!

Beispiele : Defibrillator, Blitzlicht

14.8.7 Entladen eines Kondensators

$$C = 8 \cdot 20\mu F; U = 500V$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot C U^2 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 10^{-5} F \cdot 25 \cdot 10^4 V^2$$

$$= \underline{\underline{20J}}$$

Entladung in 1ms → 20kW

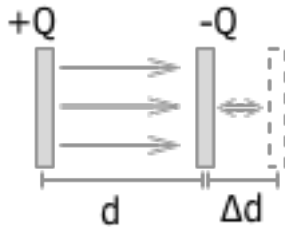
Defibrillator: 100 – 800kW

Fusionsanlage: Kondensatorbatterie ermöglichen $W \sim 10^6 J$

Entladung in 3ns

$$\Rightarrow P = 3 \cdot 10^{14} W$$

14.8.8 Kraft zwischen Zwei Kondensatorplatten



Anziehungskraft zwischen entgegengesetzt geladenen Kondensatorplatten
 \implies Arbeit gegen Kraft F , um Abstand um Δd zu erhöhen.

Volumenänderung:

$$\Delta V = A \cdot \Delta d$$

$$\Delta W = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 |\vec{E}|^2 \cdot A \cdot \Delta d$$

$$\Delta W = F \cdot \Delta d \implies \underline{F} = \frac{\epsilon_0}{2} \cdot |\vec{E}|^2 \cdot A = \underline{\frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{V}{d} \right)^2 \cdot A \propto V^2}$$

14.8.9 Kraft zwischen Kondensatorplatten

$$U = 2000V; d = 10mm; = 30cm \implies A = 0,071m^2$$

$$F = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{V}{d} \right)^2 \cdot A = 0,0197N$$

Die äquivalente Masse wird von der Waage angezeigt:

$$M = \frac{F}{g} = 1,29g \text{ (gemessen : } m = 1,33g)$$

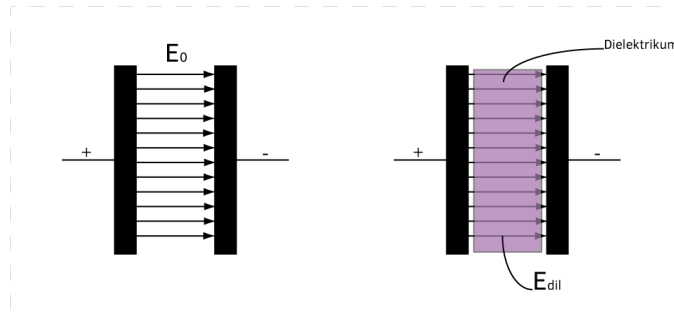
Verdopplung von U auf $4000V \implies$ 4-Fache Masse.

(gemessen: $m \approx 5,22g$)

14.9 Isolatoren (Dielektrikum) im elektrischen Feld

- Isolator $\hat{=}$ Nichtleiter
- Ladungen nicht frei beweglich, sondern nur lokal gegeneinander verschiebar (polarisierbar)

Experiment: Dielektrikum im Kondensator



$$Q = C_0 \cdot U_0,$$

$$Q' = Q = C_{diel} \cdot U_{diel},$$

$$U_0 = 250V$$

$$U_{diel} = 65V$$

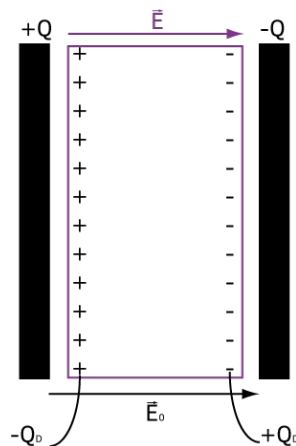
$$\Rightarrow \frac{U_0}{U_{diel}} = \frac{C_{diel}}{C_0} := \epsilon = \frac{|\vec{E}_0|}{|\vec{E}_{diel}|}$$

Definition: Relative Dielektrizitätskonstante $\epsilon := \frac{C_{diel}}{C_0} > 1$

[Im Skript steht "Tabelle"]

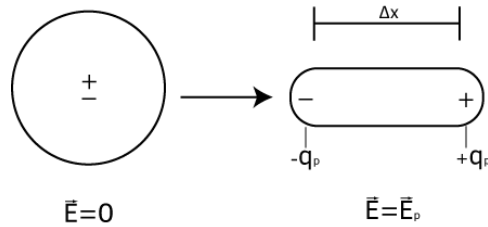
14.9.1 Mikroskopische Deutung und elektrische Suszeptibilität

Reduzierung des elektrischen Feldes bei Einführung eines Dielektrikums. Grund: Dielektrikum wird polarisiert!



Gesamtfeld zwischen den Platten:
 $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{pol} \leftarrow$ entgegengesetzte Orientierung

Verschiebungspolarisation:



Q_p : Polarisationsladung
 $F = K \cdot x \implies E = \frac{F}{q} = \frac{K}{q} \cdot x \implies x = \frac{q}{K} \cdot E$

Dipolmoment: $\vec{p} = q \cdot \vec{x} = \frac{q^2}{K} \cdot \vec{E} = \alpha \cdot \vec{E}$ (Polarisierbarkeit)

Markroskopisch: Polarisation: $\vec{P} = \underbrace{\frac{N}{V}}_{\text{Teilchendichte}} \vec{p} = n \cdot \alpha \cdot \vec{E}$ (mikroskopisch)

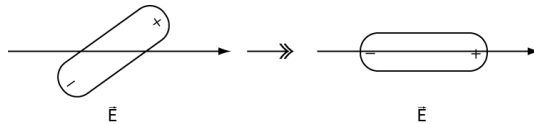
$$\vec{p} = (\epsilon - 1) \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E} \text{ (makroskopisch)}$$

$$= \chi_e \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}$$

χ_e : elektrische Suszeptibilität: $\chi_e = \epsilon - 1$

Orientierungspolarisation

- trifft auf, wenn Dielektrikum schon aus Dipolen bestehen (permaente Dipole)

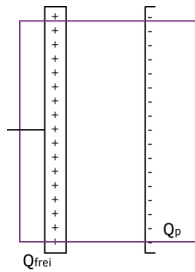


- Orientierungspolarisation ist temperaturabhängig (Ausrichtung nimmt bei hohentemperaturen ab)

Dielektrische Verschiebungsdichte

$$\begin{aligned}\vec{D} &:= \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \underbrace{(\epsilon - 1)}_{\chi} \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E} \\ &= \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}\end{aligned}$$

$$[D] = 1 \frac{C}{m^2}$$



$$\begin{aligned}\oint \vec{E} d\vec{A} &= \frac{Q_{frei} + Q_p}{\epsilon_0} = \frac{Q_{frei}}{\epsilon_0} \\ \implies \oint \epsilon \epsilon_0 \vec{E} d\vec{A} &= Q_{frei} \\ &= \int_V \underbrace{div(\epsilon \epsilon_0 \vec{E})}_{\vec{D}} dV = \int \varrho_{frei} dV \\ \implies div \vec{D} &= \varrho_{frei}\end{aligned}$$

$$\text{vergleiche: } div \vec{E} = \frac{\varrho_{ges}}{\epsilon_0}$$

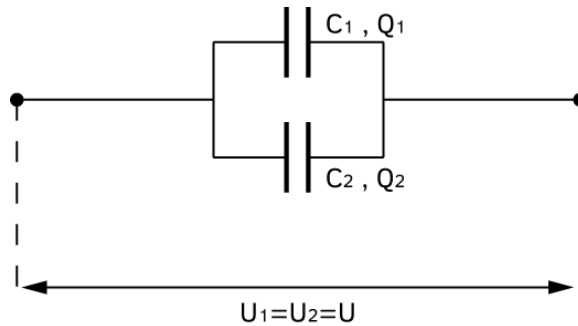
14.9.2 Nachtrag: Schaltungen mit Kapazitäten

Verschaltung mehrerer Kapazitäten C_i .

Wie groß ist dann die Gesamtkapazität?

Beispiele:

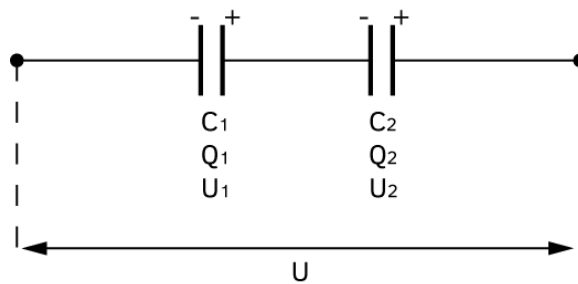
a) Parallelschaltung: Gleiche Spannung an beiden Kapazitäten.



$$\begin{aligned}
 Q_{ges} &= Q_1 + Q_2 = C_1 U + C_2 U \\
 &= (C_1 + C_2) U \\
 &= C_{ges} U
 \end{aligned}$$

$$C = \sum_{i=1}^n C_i$$

b) Reihenschaltung



Anschauung: Nur die äußeren Platten werden durch Verbindung und Spannungsquelle aufgeladen, die anderen Platten erhalten ihre Ladung durch Influenz
 \Rightarrow alle Ladungen sind gleich groß.
 $\Rightarrow Q_1 = Q_2 = Q$

Spannungen verteilen sich auf die Kapazitäten gemäß:
 $U = \frac{Q}{C_i}, U_1 + U_2 = U$

$$U = \frac{Q}{C_{ges}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q \cdot \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}},$$

$$\boxed{C_{ges} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}}$$