Experimental Physik II Kapitel 19

author
email

June 20, 2016

Contents

19 Wellen

$t = t_0$:

BILD fehlt hier noch

Räumliche Periodizität

$\vec{r} = \vec{r}_0$

BILD fehlt hier noch

zeitliche Periodizität

Welle: Zeitlich und räumlich periodische Auslenkung einer Zustandsänderung.
⇒ Energie- und Impulstransport <u>ohne</u> Materialtransport!

Experiment
Einmalige Störung

BILD fehlt hier noch

⇒ Kein periodischer Vorgang!

Experiment: WWW
Periodische Erregung, Ausbreitung ohne Materialtransport!

- punktförmiger Erreger: Kreiswellen
- linienförmiger Erreger: Ebene Welle

Heutz'sche Dipol
Emission mit charakteristischer Abschallgeometrie

Verdichtungswelle (⇒ "Wellenmaschine")
⇒ Unterschied: <u>Transversalwelle</u>, <u>Longitudinalwelle</u>

19.1 2 Arten von Wellenausbreitung

- Transversalwellen (Transversal Polarisiert)
  Schwingungsrichtung $\perp$ Ausbreitungsrichtung
  z.B. Seilwelle:

  BILD fehlt hier noch

  2 Möglichkeitden der Polarisierung:

  BILD fehlt hier noch

  Transversalwellen sind polarisierbar

- Longitudinalwellen (longitudinal Polarisiert)
  z.B. Schallwellen

  BILD fehlt hier noch

Mathematische Beschreibung der Wellenausbreitung

"Störung" wandert mit Ausbreitungsgeschwindigkeit v_{Ph}

BILD fehlt hier noch

BILD fehlt hier noch

Für mit-bewegten Beobachter bleibt Störung ortsfest (in *S'*)

$$f(x') = f(x - v_{Ph} \cdot t)$$

$\Rightarrow$ 1-dim Welle kann man beschreiben durch, $\Psi(x,t) = \underline{\underline{f(x - v_{Ph} \cdot t)}}$ Jeder Punkt der Störung wandert mit v_{Ph} nach rechts.

v_{Ph}: Phasengeschwindigkeit

(Ausbreitung der Störung ohne Verformung!)
$\Phi(x,t)$: Auslenkung, Druck, Dichte, $\vec{E}$,$\vec{B}$-Feld Amplitude, ...

Sonderfall: Harmonische Wellen

$$\Psi(x,t) = \Psi_0 \cdot \overbrace{\sin(K \cdot x - \omega t)}^{f(x,t)}$$
$$\varphi = K \cdot x = \omega t : \text{ Phase}$$
$$K : \text{Wellenzahl}$$
$$\omega : \text{Kreisfrequenz}$$

(a)

BILD fehlt hier noch

(b)

BILD fehlt hier noch

(a)

$$\begin{aligned}\Psi(x,t) = \Psi &= \Psi_0 \cdot \sin(Kx - \omega t) \\ &= \Psi_0 \cdot \sin(K(x+\lambda) - \omega t) \\ &= \Psi_0 \cdot \sin((Kx - \omega t) + K \cdot \lambda) \\ &\Rightarrow K \cdot \lambda = 2\pi \qquad\qquad \lambda\text{:Wellenlänge} \\ &\Rightarrow K = \frac{2\pi}{\lambda}\end{aligned}$$

(a)

$$\begin{aligned}\Psi &= \Psi_0 \cdot (Kx - \omega t) \\ &= \Psi_0 \cdot \sin(Kx - \omega(t+T)) \\ &\Rightarrow \omega \cdot T = 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \qquad\qquad \underline{T\text{: Periodendauer}}\end{aligned}$$

Wellen darstellbar:

$$\begin{aligned}\Psi(x,t) &= \Psi_0 \cdot \sin(Kx - \omega t) \\ &= \underline{\Psi_0 \cdot \sin(2\pi(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}))}\end{aligned}$$

In der Zeit T (Periodendauer) breitet sich die Welle um eine Wellenlänge (λ) aus.

$\Rightarrow$ Ausbreitungsgeschwindigketi $\boxed{v_{Ph} = c = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \underset{\text{Frequenz}}{\nu}}$

$$\Psi^{\pm}(x,t) = \Psi_0 \cdot \sin(Kx \pm \omega t)$$

Ψ^{+}: läuft im Ortsraum nach links

Ψ^{-}: läuft im Ortsraum nach rechts

19.2 Die Wellengleichung

Erinnerung: Schwingungsgleichung: $\ddot{\Psi} + \omega^2 \cdot \Psi = 0$
Lösung: Harmonische Schwingung: $\Psi = \Psi_0 \cdot \sin(\omega t)$
Wellen: Periodisch /bisher: auch harmonisch) in Ort und Zeit

$\Rightarrow$ Vermutung: Wellengleichung muss 2. Ableitung enthalten

Ansatz für Ψ: $\Psi(x,t) = \Psi_0 \cdot f(Kx - \omega t)$
f ist beliebig (aber periodische) Funktion der Phase φ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = K \quad ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\omega$$

2. Ableitung berechnen:
Ort:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= \Psi_0 \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} && \text{(Kettenregel)} \\ &= \Psi_0 \cdot K \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} &= \Psi_0 \cdot K \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \Psi_0 \cdot K^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \\ &\Leftrightarrow \underline{\Psi_0 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = K^{-2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}} \end{aligned}$$

Zeit:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \Psi_0 \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\omega \cdot \Psi_0 \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \omega^2 \cdot \Psi_0 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \Rightarrow \underline{\Psi_0 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = \omega^{-2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow K^{-2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \omega^{-2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \\ &\underline{\underline{\frac{\omega^2}{K^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}}} && \text{2. Ableitung nach Ort und Zeit verknüpft!!} \end{aligned}$$

mit $v_{Ph} = \frac{\omega}{K}$ $\quad \boxed{v_{Ph}^2 \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}}$ ist die Wellengleichung in 1 Dimension!

$f(x - v_{Ph} \cdot t)$ ist Lösung und beschreibt Ausbreitung in positiver x-Richtung!

Dann ist auch $g(x + v_{Ph} \cdot t)$ Lösung, Ausbreitung in negativer x-Richtung!

$\Rightarrow$ Allgemeine Lösung der Wellengleichung:

$$\Psi(x,t) = f(x - v \cdot t) + g(x + v \cdot t)$$

BILD fehlt hier noch

19.3 Überlagerung von Wellen

(in einer Dimension)
Superpositionsprinzip: Ungestörte Überlagerung mehrerer Wellen

$$\Psi(\vec{r},t) = \sum_{i=1}^{N} \Psi_1(\vec{r},t)$$

Reflexion von Wellen → stehende Wellen
Experiment: Reflexion der Welle einer Pendelkette

- Festes Ende: Phasensprung von π bei Reflexion

BILD fehlt hier noch

- Freies Ende: Kein Phasensprung

BILD fehlt hier noch

Überlegung von links- und rechts-laufender Welle
Gleiche Amplitude, gleiche Frequenz, Phasenverschiebung φ

$$\Psi(x,t) = \Psi_0 \cdot \cos(Kx - \omega t) \pm \Psi \cdot \cos(Kx + \omega t + \varphi)$$
$$\text{Additionstheroeme} \rightarrow = \underline{\underline{2 \cdot \Psi_0 \cdot \cos(\omega t + \frac{\varphi}{2}) \cdot \cos(Kx + \frac{\varphi}{2})}}$$

Faktorisieren der Orts- und Zeitabhängigkeit:
Für alle t gibt es Punkte x; bei denen $\Psi(x,t) = 0$: "Knoten"
Betrachte Orts-Teil: Festes Ende: $\varphi = \pi$

Knoten: $\underbrace{\cos(Kx + \frac{\varphi}{z})}_{\Rightarrow \text{Knoten bei } x_0, x_0 + \frac{\pi}{2}, x_0 + \frac{3\pi}{2} \ldots} = 0 \Rightarrow Kx + \overbrace{\frac{\varphi}{2}}^{\pi/2} = \frac{(2\mathbb{N}+1)}{2} \cdot \pi$

Resonanz-Situation: $\underset{K=\frac{2\pi}{2}}{K} \cdot x = \frac{(2\mathbb{N}+1)}{2} \cdot \pi$

$$\text{Resonanz: } \underset{\text{Länge}}{L} = \frac{\mathbb{N}}{2} \cdot \lambda$$
$$\underline{\Rightarrow \lambda = \frac{2}{\mathbb{N}} \cdot L}$$
$$\underline{\mathbb{N} \cdot \frac{\lambda}{2} = L}$$

BILD fehlt hier noch

Loses Ende: $\varphi = 0!$

$$\Rightarrow \text{Resonanz: } \frac{2\mathbb{N}+1}{2} \cdot \lambda = L$$
$$\lambda = \frac{4 \cdot L}{(2\mathbb{N}-1)}$$

BILD fehlt hier noch

Mikrowelle:

$$d_{Knoten} = \frac{\lambda}{2} \approx 10\,\mathrm{cm}$$
$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{0.2\,\mathrm{m}} = 1.5 \times 10^{9}\,\mathrm{s^{-1}}$$
$$= \underline{1.5\,\mathrm{GHz}}$$

BILD fehlt hier noch

BILD fehlt hier noch

19.4 Wellenpakete und Synthese/Analyse nicht harmonischer Wellen

Eine streng monochromatische ($\omega = \omega_0$, harmonisch) Welle ist zeitlich und räumlich unendlich ausgedehnt! Alle nicht-harmonischen Wellen sind als Überlagerung harmonischer Wellen darstellbar.

Schwingungsanteil: $\underbrace{\boxed{\Psi(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n \cdot \omega_1 \cdot t + \varphi_n)}}_{\text{Fourier-Zerlegung}}$

Auch für Wellenzüge möglich!

BILD fehlt hier noch

BILD fehlt hier noch

BILD fehlt hier noch

- Darstellung ist immer durch Überlagerung der Grundwelle mit harmonischen Oberwellen möglich.
- Amplituden nehmen mit wachsender Frequenz ab!
- Obertonspektrum (a_n von $\omega_n = b \cdot \omega_1$) ist charakteristisch für den individuellen Klang der Stimme! Es hängt von der Beschaffenheit des "Klangkörpers" ab!

Überlagerung von Wellen mit ähnlichem K, ω bei gleicher Ausbreitungsrichtung und Amplitude.

BILD fehlt hier noch

$$\Psi(x,t) = \Psi_0 \left[\underbrace{\sin(Kx - \omega t)}_{\text{1. Welle}} + \underbrace{\sin\left((K+\Delta K)x - (\omega + \Delta\omega)t\right)}_{\text{2. Welle}} \right]$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \cdot \cos\frac{(\alpha-\beta)}{2} \cdot \sin\frac{(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\alpha = (K+\Delta K)x - (\omega + \Delta\omega) \cdot t$$

$$\beta = Kx - \omega t$$

$$\text{Näherung:} \frac{\omega + (\omega + \Delta\omega)}{2} \approx \omega \quad , \quad K + ...$$

$$\Psi(x,t) = 2\Psi_0 \cdot \underbrace{\cos(\frac{1}{2}(\Delta K \cdot x - \Delta\omega \cdot t))}_{\text{Modulation der Amplitude}} \cdot \underbrace{\sin(Kx - \omega t)}_{\text{Welle}}$$

BILD fehlt hier noch

19.4.1 Gruppengeschwindigkeit

Wie schnell bewegt sich die cos-Modulation (Einhüllende) im Raum?
Amplitudenfaktor; $2 \cdot \Psi_0 \cdot \cos(\frac{1}{2}(\Delta K \cdot x - \Delta\omega \cdot t)) = const.$
(bedenke: feste Phase der Einhüllenden!)

$$\Delta K \cdot -\Delta\omega \cdot t = 0$$

$$\overset{\Delta\omega \to 0}{\Rightarrow} x = \frac{d\omega}{dK} \cdot t$$

$$= v_{Gr} \cdot t$$

Ausbreitung der Modulation (oder Wellengruppe) mit $v_{Gr} = \frac{d\omega}{dK}$

<u>v_{Gr} Gruppengeschwindigkeit</u>

Mit v_{Gr} breiten sich Informationen (Signale) aus!

19.4.2 Phasen- vs Gruppengeschwindigkeit

$$v_{Gr} = \frac{d\omega}{dK} = \frac{d}{dK}(v_{Ph} \cdot K) \qquad K = \frac{2\pi}{\lambda} \quad ; \quad \lambda = \frac{2\pi}{K}$$
$$= v_{Ph} + K \cdot \frac{dv_{Ph}}{dK} \qquad \frac{d\lambda}{dK} = -\frac{2\pi}{K^2}$$
$$\left(\frac{dv_{Ph}}{dK} = \frac{dvPh}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dK}\right)$$
$$v_{Gr} = v_{Ph} - \frac{2\pi}{K} \cdot \frac{dv_{Ph}}{d\lambda}$$
$$\boxed{v_{Gr} = v_{Ph} - \lambda \cdot \frac{dv_{Ph}}{d\lambda}}$$

$v_{Gr} = v_{Ph}$ wenn v_{Ph} unabhängig von k , λ
wenn $v_{Ph} \neq v_{Ph}(\lambda)$: Alle Fourier-Komponenten breiten sich mit gleicher Geschwindigkeit aus! Dann heißt die Welle "dispersionsfrei"!
Sonst: $v_{Gr} \neq v_{Ph}$, dann: Wellenpaket läuft auseinander! (⇒ Dispersion)

Experiment: Wasserwellen sind dispersionsfrei!

BILD fehlt hier noch

Beispiele
Seilwellen

BILD fehlt hier noch

Seil erfährt Spannung: $\underset{\text{Seilspannung}}{\tau} = \frac{\overset{\text{Kraft}}{F_0}}{\underset{\varnothing\text{-Fläche}}{A}}$
Auslenkung in y-Richtung: Rückstellkraft
Wellen in x-Richtung: Transversalwelle

$$F_2 = \tau \cdot A \cdot \sin\alpha_2 \qquad \alpha_1 > \alpha_2$$
$$F_1 = \tau \cdot A \cdot \sin\alpha_1$$

Wenn betrachtetes Element klein ist, dann:

$$F_y = F_1 - F_2 \quad \text{(nach einsetzen!)}$$
$$= \tau \cdot A \cdot (\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2)$$
$$\approx \tau \cdot A \cdot (\alpha_1 - \alpha_2) = \tau \cdot A \cdot \Delta\alpha$$

$\Rightarrow \Delta M$ wird beschleunigt: $\Delta M = \Delta x \cdot A \cdot \underbrace{\rho}_{Massendichte}$ (im GG)

$F_y = \Delta M \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = \rho \cdot \cancel{A} \cdot \Delta x \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = \tau \cdot \cancel{A} \cdot \Delta\alpha$

$\Leftrightarrow \tau \cdot \frac{\Delta\alpha}{\Delta x} = \rho \cdot \frac{d^2y}{dt^2}$

$\alpha = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{d\alpha}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$ für $\Delta x \to 0$

$\Rightarrow \tau \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \rho \cdot \frac{d^2y}{dt^2}$

Wellengleichung $\boxed{\frac{\tau}{\rho} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}}$

$v_{Ph}^2 \cdot \frac{d^2\Psi}{dx^2} = \frac{d^2\Psi}{dt^2}$

$\Rightarrow v_{Ph} = \underline{\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}} = \sqrt{\frac{\tau \cdot A}{\rho \cdot A}} = \sqrt{\frac{F}{\underbrace{\mu}_{\text{lineare Massendichte}}}}$

$v_{Ph} = \frac{\omega}{K} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \cdot K$

BILD fehlt hier noch

<u>Keine Dispersion!</u>

Beidseitig eingespannte Seite

BILD fehlt hier noch

Lösung der Wellengleichung: Stehende Welle

$$\Psi = \Psi_0 \cdot \sin Kx \cdot \cos \omega t$$

$$\underbrace{\Psi = 0:}_{\text{Knoten}} \quad y = 0 \;\; ; \;\; \underbrace{x = L}_{\text{2. RB}} \text{ für alle } t$$

$$\Rightarrow K \cdot L = n \cdot \pi$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\lambda_n = \frac{2}{n} \cdot L}}$$

Dies definiert die Schwingungsmoden der Seite

Dispersion: $\omega_n = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \cdot K_n == \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \cdot \frac{2\pi}{\lambda_n}$ $2\pi\nu_n$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\nu_n = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \cdot \lambda_n^{-1} = \frac{n}{2L} \cdot \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}}}$$

Saiteninstrument:

- λ durch Geometrie bestimmt
- zugehörige Frequenz durch Spannung eingestellt!

$\Rightarrow$ Umwandlung von stehender Welle in Schallwelle
Klang: Obertöne gleichzeitig angeregt; Superposition von Grund- und Oberschwingung

$$\Psi(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Psi_{0,n} \sin(K_n x) \cdot \cos(\omega_n t)$$

$$\Rightarrow \underline{v_S = \frac{d\omega}{dK} = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} = v_{Ph}}$$