Experimental Physik II Kapitel 16

author email

$\mathrm{May}\ 22,\ 2016$

Contents

16	Stat	ische r	nagnetische Felder	2
	16.1	Kräfte	e auf bewegte Ladungen	4
		16.1.1	Lorentzkraft \vec{F}_L	4
		16.1.2	Bewegungsgleichung:	5
		16.1.3	Zyklonen:	6
		16.1.4	Kräfte auf stromdurchflossene Leiter	9
		16.1.5	Stromdurchflossene Leiterschleife	11
	16.2	Magne	tfelder von stromdurchgeflossenen Leitern	13
		16.2.1	Bestimmung der Abstandsabhängigkeit	13
		16.2.2	Definition Ampere	15
		16.2.3	Ampere'sches Gesetz	16
		16.2.4	Das Ampere'sches Gesetz in differentieller Form	16
		16.2.5	Das Gesetz von Biot-Savart	17
		16.2.6	Zusammenhang zwischen elektrischen und magnetis-	
			chen Feld	18

16 Statische magnetische Felder

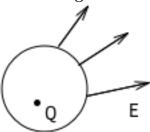
Experimente:

- gleichnamige Pole stoßen sich ab
- ungleichnamige Pole ziehen sich an
- Kraftwirkung $\propto \frac{1}{r^2}$ (1750; Coulomb)
- ähnliche Abstandsabhängigkeit für elektrische und für magnetische Kräfte
- zunächst kein Zusammenhang zwischen beiden Kräften erkennbar
- Experiment: Magnetische Pole treten nur paarweise auf.
 (⇒ keine "magnetische Ladung")

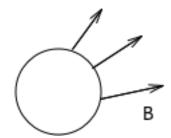
Feldlinien sichtbarmachen durch Eisenfeilspitzen:

Magnetische Feldlinien sind stets geschlossen; es gibt keine isolierbaren Quellen oder Senken des 1

Erinnerung: Satz von Gauß:



 \vec{E} : elektrische Feldstärke: Gesamtfluss: $\phi_{el}=\oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{Q}{\epsilon_0}$



Magnetische Felder:

Gesamtfluss:

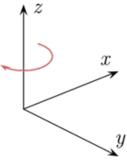
$$\phi_{mag} = \oint_A \qquad \vec{B} \cdot d\vec{A} \qquad = 0$$

 \vec{B} : magnetische Flussdichte

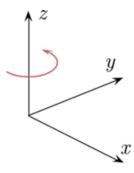
Kräfte auf bewegte Ladungen 16.1

Lorentzkraft \vec{F}_L 16.1.1

$$ec{F}_L = q \cdot \vec{v} imes \vec{B} \ (ec{F}_L \perp \vec{v}; ec{F} \perp \vec{B})$$



Linkshändiges System



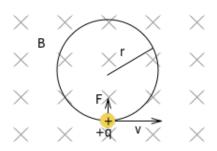
Rechtshändiges System

UVW-Regel: Ursache \rightarrow Vermittler \rightarrow Wirkung Vorsicht!: Elektrische Ladung ist negativ!

$$[|\vec{B}|] = \frac{N}{As \cdot \frac{m}{s}} = \frac{Vs}{m^2} = 1T(Tesla)$$

Kreisbahn: $\vec{F}_L \perp \vec{v}$ $\implies \vec{F}_L$ beeinfluss die Richtung von \vec{v} , aber nicht den Betrag! $\implies \vec{F}_L$ leistet keine Arbeit

Konventionen:



 $\otimes \vec{B}$ zeigt in die Papierebene hinein

 $\odot \vec{B}$ zeigt aus der Papierebene heraus

16.1.2 Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}} = \vec{F}_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{\dot{\vec{p}}}{m} = \frac{q}{m} \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

$$d\vec{v} \perp \vec{v}; d\vec{v} \perp \vec{B}$$

 \implies Kreisbahn: \vec{F}_L ist Zentripetalkraft

$$\implies q \cdot v \cdot B = m \cdot \frac{v^2}{r}; v = \omega \cdot r$$

$$\omega = \frac{q}{m} \cdot B$$

$$\boxed{\omega = \frac{q}{m} \cdot B}$$

$$v = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{q}{m} \cdot B$$

 ω Zyklotronfrequenz (1930, Lawrence)

 \implies unabhängig von Impuls und Energie; nur von $\frac{q}{m}$ und \vec{B} bestimmt!

Radius:

$$r = \frac{m \cdot v}{q \cdot B} = \frac{p}{q \cdot B} = \frac{\sqrt{2mqV}}{q \cdot B}$$

$$E_{kin} = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}m \cdot v^2 = q \cdot V$$

Experiment:

$$r_1: V_1 = 200V \implies 2SKT$$

$$r_{:}V_{1} = 300V \implies 2,5SKT$$

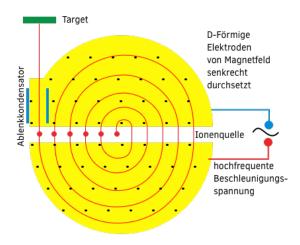
$$\frac{r_1}{r_2} \stackrel{!}{=} \sqrt{\frac{V_1}{V_2}}$$

$$\frac{4}{5} \stackrel{!}{=} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

 $\frac{16}{25} \stackrel{!}{=} \frac{2}{3} \ \surd \mathrm{im}$ Rahmen der Messungenaugikeit!

16.1.3 Zyklonen:

Ziel: H- oder D-Kerne auf hohe Geschwindigkeit zubeschleunigen.



Beispiele:

(i) Protonenbeschleunigung: r=0,5m; B=1,5TZyklonenfrequenz: $\nu\frac{e\cdot B}{2\pi m_0}=23MHz$

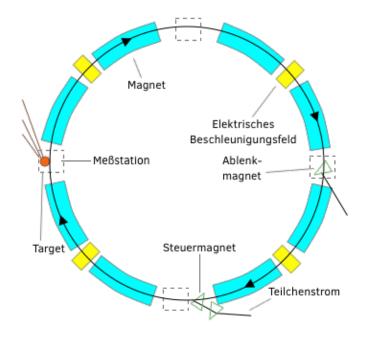
$$E_{kin} = \frac{1}{2} \frac{q^2 B^2}{m_0} \cdot v^2 = 4, 3 \cdot 10^{-1} J$$

Angabe in Elektronenvolt

$$[eV]: 1eV = 1,602 \cdot 10^{-19} As \cdot 1V$$

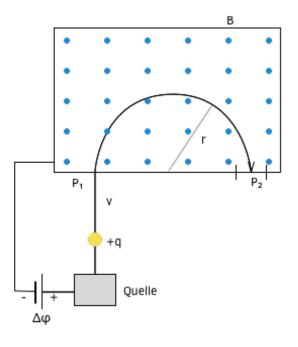
$$= 1,602 \cdot 10^{-19} J$$
(2)

$$\implies 26,9 MeV$$



(ii) Massenspektrometer: Trennung von Isotopenmasser und Messung natürlicher Isotopenverhältnis:

Beschleunigung (auf höhere E_{kin}) ist nur im elektrischen Feld möglich! (\implies Design von Beschleunigung!)



(Ashton 1919;
$$\frac{\Delta m}{m} = 10^{-4}$$
)

Beispiel: Mg-Isotop: $^{24}Mg:78,7~\%$ $^{25}Mg:10,1~\%$ $^{26}Mg:11,2~\%$

Massenverhältnis: 24:25:26

 $\frac{q}{m}$ von Ionen bei bekannter Ladung: U

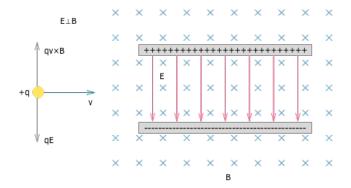
- Beschleunigung: $q \cdot \Delta \varphi \implies E_{kin} = q \cdot U = \frac{1}{2}mv^2$
- Kreisbahn: $r = \frac{m \cdot v}{q \cdot B}$

$$\implies q \cdot U = \frac{1}{2}v^2 \cdot B^2 \cdot q^2 \cdot \frac{1}{m}$$

$$\boxed{\frac{m}{q} = \frac{B^2 \cdot v^2}{2U}}$$

$$\frac{m}{q} = \frac{B^2 \cdot v^2}{2U}$$

(iii) Geschwindigkeitsfilter: Gekreuzte elektrische und magnetische Felder (Wien-Filter)



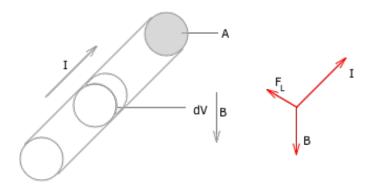
Kompensation der Felder ("Kräftegleichgewicht") für:

$$q \cdot E = q \cdot v \cdot B$$

$$v = \frac{E}{B}$$

 $q \cdot E = q \cdot v \cdot B$ $\frac{v = \frac{E}{B}}{\text{Ionen mit } v = \frac{E}{B} \text{ passieren die Anordnung ohne Ablenkung! } (\rightarrow \text{Lochblende})$ Anwendungsbeispiel: SIMS

16.1.4 Kräfte auf stromdurchflossene Leiter



Kraft auf eine Ladung: $\vec{F}_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$

$$\vec{F}_I = a \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Kraft auf N Ladungen in dV:

$$d\vec{F} = \underbrace{dV \cdot n}_{N} \cdot \vec{v} \times \vec{B} \tag{3}$$

$$dV \cdot \vec{j} \times \vec{B} \tag{4}$$

$$\vec{F}_L = \int_V (\vec{j} \times \vec{B}) dV \tag{5}$$

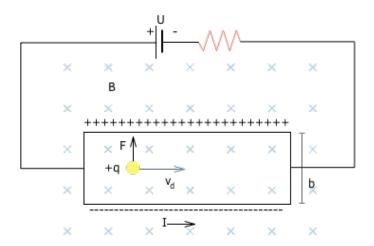
Geradliniger Leiter: Länge L

$$\vec{F}_L = \int_0^L (\vec{j} \times \vec{B} \underbrace{A \cdot dl}_{=dV}) = \int_0^L (\vec{I} \times \vec{B}) dl = \underbrace{(L \cdot (\vec{I} \times \vec{B}))}_{=dV}$$

Leiterschaukel

Problem: Ladungsträgertyp nicht identifizierbar!

 \Longrightarrow Edmin Hall (1879): Hall-Effekt - Typ und Konzentration der Ladungsträger messbar!



Annahme: positive Ladungsträger; Bewegung mit $|\vec{v}| = \vec{v}_D$ Gleichgewicht bei: $q \cdot \vec{v}_0 \times \vec{B} + q \cdot \vec{E}_H = 0$

 $\vec{E}_H = -\vec{v}_0 \times \vec{B}$

Zugehörige Potentialdifferenz: U_H (Hall-Spannung): \Longrightarrow Polarität erlaubt Bestimmung des Ladungsträger-Types

⇒ Dadurch konnte gezeigt werden, dass Ladungstransport in Metallen durch Elektronen erfolgt!

$$|\vec{E}_H| = \frac{U_H}{b} = D \cdot B = \frac{n \cdot q \cdot v_D}{n \cdot q} \cdot B = \frac{j \cdot B}{n \cdot B}$$

Streifen der Dicke d
: $j=\frac{I}{b\cdot d}$

$$U_H = \frac{I \cdot B}{n \cdot q \cdot d} = K_H \cdot \frac{I \cdot B}{d}$$

 K_H :Hallkonstante (Materialspezifisch):

$$K_H = \frac{1}{n \cdot q} = \frac{\mu}{\nu}$$

 \implies Bei Kenntnis von ν ist μ zu bestimmen!

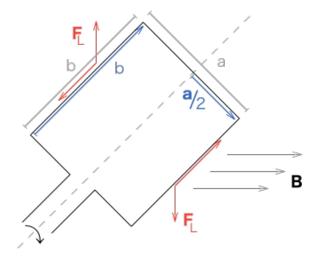
Cu-Streifen:

$$\begin{split} I &= 4A; B = 0,28T; d = 2,0\mu\text{m}; U_H = 50\mu\text{V} \\ n_e &= \frac{I \cdot B}{U_H \cdot q \cdot d} = \frac{4 \cdot 0,28A \frac{Vs}{m^2}}{50 \cdot 10^{-4} V \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} As \cdot 2 \cdot 10^{-6} m} \\ &= \frac{1}{1,6} 10^{29} m^{-3} \\ &= \dots \end{split}$$

Dichte der Cu-Atome: $n_{Cu}=8,4\cdot 10^{22}cm^{-3}$... im Mittel $1\frac{e^-}{\text{Atom}}!$ Weitere Anwendungen: Hall-Sonde zur MEssung von B!

 \Longrightarrow Quanten-Hall-Effekt!

16.1.5 Stromdurchflossene Leiterschleife



Kräfte auf Teilstücke:

- Entlang der Seite "a": $\vec{I} \parallel \vec{B} \rightarrow \vec{I} \times \vec{B} = 0$

- Entlang der Seite "b": \implies Kräftepaar \implies Drehmoment!

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{\vec{a}}{2} \times \vec{F} + (\frac{-\vec{a}}{2}) \times (-\vec{F}) = \vec{a} \times \vec{F}$$

$$|\vec{F}| = |\vec{b}| \cdot (\vec{I} \times \vec{B}); \qquad |\vec{M}|_{max} = a \cdot b \cdot I \cdot B$$

All
gemein:
$$\vec{M} = I \cdot (\vec{A} \times \vec{B}); \qquad \qquad \vec{A} = (\vec{a} \times \vec{b})$$

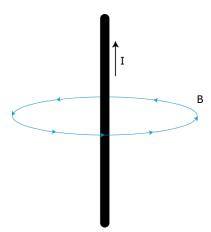
<u>Definition:</u> Magnetisches Moment einer Leiterschleife:

 \implies Messung von I im Drehspurgalvanometer!

16.2 Magnetfelder von stromdurchgeflossenen Leitern

Oersted (1820): Magnetische Wirkung eines geschlossenen Stromkreises

- \Rightarrow wenn $\vec{I} \neq 0$: Drehmoment auf Kompassnadel, $\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$
- $\Rightarrow \vec{B}$ in Ebene \perp Leiter
- \Rightarrow Richtung (Vorzeichen, VZ) ist abhängig von Stromrichtung (Rechtsschraubregel)



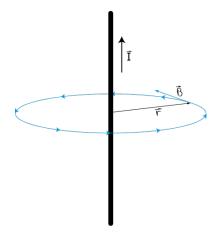
16.2.1 Bestimmung der Abstandsabhängigkeit

$$|\vec{B}| \sim \frac{I}{r}$$

 \Rightarrow Beachte: "Quelle" des Magnetfeldes ist 1D \Rightarrow Abstandsabhängigkeit quantitativ:

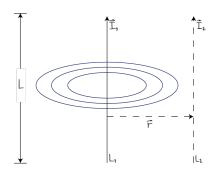
$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r}$$

 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \,\mathrm{N/A^2}$ magnetische Konstante



 \Rightarrow Bewegte Ladungen erzeugen ein Magnetfeld in Richtung: $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \times \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ Bisher:

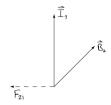
- \vec{B} -Feld übt Kraft auf bewegte Ladung aus
- Bewegte Ladung (Strom) erzeugt Magnetfeld
- \Rightarrow Wechselwirkung zwischen Strömen muss existieren!



 I_1 erzeugt $\vec{B}\text{-}\mathrm{Feld}$ am Ort des Leiters L_2

$$|\vec{B}_1| = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1}{r}$$

 \Rightarrow Kraft auf L_2



$$\vec{F}_{21} = L \cdot \vec{I}_2 \times \vec{B}_1$$

$$|\vec{F}_{21}| = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{r} \cdot L$$

$$= 2 \times 10^{-7} \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{r} \cdot L$$

 \vec{F}_{21} : anziehend bei parallelen Strömen!

16.2.2 Definition Ampere

Elektrische Stromstärke: Ampere [A] Das Ampere ist die Stärke eines konstanten elektrischen Stromes, der, durch zwei parallele, gradlinige, unendlich lange und im Vakuum im Abstand von einem Meter voneinander angeordnete Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigem Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern je einem Meter Leiterlänge die Kraft 2×10^{-7} N hervorrufen würde.

Ströme parallel:

BILD $I_1 \uparrow \downarrow I_2$

BILD

Elektrostatik: Gaußscher Satz: Zusammenhang zwischen Quellen-Verteilung und Feldstärke!

 \Rightarrow Normalkomponente des \vec{E} -Feldes wichtig

Hier: Ströme als "Quelle" des magnetischen Feldes

"Umhüllung" der Ströme <u>ohne</u> die Quelle zu "schneiden" nur mit geschlossenem Umlauf möglich (Quellen <u>nicht</u> punktförmig!)

Beachte also: $\oint \vec{B} d\vec{s}$ BILD Integrieren über dl $(0...2\pi)$ statt über die Länge der Kurve

$$\vec{B} \cdot d\vec{s} = B \cdot r \cdot dl$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r} \cdot dl = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot I \cdot dl$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \oint dl = \mu_0 \cdot I$$

Da \vec{B} nur Tangentialkomponente besitzt ist die Orientierung des Integrationswegs bezüglich des Leiters (Verkippung) unbedeutend; alle Komponenten parallel zum Leiter verschwinden!

Richtung des Integrationswegs muss Rechtsschraube mit Strom bilden! Erweiterung auf mehrere Leiter im Raum bei vorzeichenrichtiger Summe der

Einzelströme: BILD

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{s} = \mu_0 \cdot I_{ges}$$

$$= \mu_0 \cdot \sum_{i=1}^{N} I_i$$

16.2.3 Ampere'sches Gesetz

Für kontinuierliche Medien: $I=\int_A \vec{j}\cdot d\vec{A}$ $\Rightarrow \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_A \vec{j}\cdot d\vec{A}$

A: von C umradnete Fläche

Beispiel 1: Stromdurchflossener Leiter: BILD

- $|\vec{B}|$ hängt nur von Abstand r ab
- tangentiale Orientierung

$$\mu_0 \cdot I = \oint \vec{B} d\vec{s} = B \cdot 2\pi r$$

$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r}$$

Beispiel 2: Magnetfeld einer langen Spule: BILD

16.2.4 Das Ampere'sches Gesetz in differentieller Form

Integralsatz von Stokes:
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{v} = \int_A (\nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{A}) = \int_A rot \vec{B} \cdot d\vec{A}$$
$$\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{v} = \int_A (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{A} = \mu_0 \cdot \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

$$\Rightarrow
abla imes ec{B} = \mu_0 \cdot ec{j}$$

Ampere'sches Gesetz in differentieller Form

Das Gesetz von Biot-Savart

Suche Formulierung zur Berechnung des Beitrags $d\vec{B}$ eines Leiterstückers von beliebig geformtem Leiter am Punkt P: BILD

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|^3}$$

 $(\frac{1}{r^2}$ - Abstandsabhängigkeit)

genaue Herleitung komplex (→Theoretische Physik)

Gesamter Leiter:
$$B(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \int_{Leiter} \frac{d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|^3} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \int_{Leiter} \frac{d\vec{s} \times \hat{e}_{\vec{r} - \vec{s}}}{|\vec{r} - \vec{s}|^2}$$

Zur Berechnung des Magnetfeldes beliebiger Stromverteilungen

(Vile Leiter: Addition der einzelnen Beträge)

Beispiel: Magnetfeld eines elektrischen Ringstroms (entlang Symmetrieachse) BILD

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{s} \times \hat{e}_r}{r^2}; \qquad d\vec{s} \perp \hat{e}_r$$
$$= \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{ds}{r^2}$$

Beachte: Beiträge in Ebene $\perp z$ Kompensieren sich entlang der Symmetrieachse!

$$dB_z = dB \cdot \sin \beta = dB \cdot \frac{R}{r} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{R}{r} \cdot \frac{1}{r^2} ds$$

$$B_z = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \oint_{Umfang} \frac{R}{\text{konstant entlang Umfang}} ds = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{R}{r^3} \oint ds \qquad = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{R}{r^3} \cdot 2\pi R$$

$$= \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot R^2 \pi \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \underbrace{IR^2 \pi}_{\mu_{mg}} \cdot \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow B_z = \underbrace{\frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \mu_{mg} \cdot r^{-3}}_{\mu_{mg}}$$

Analogie: Elektrischer Dipol: $E_r(\vec{r}) \sim \frac{\rho}{r^3}$

Helmholtz-Spulenpaar: Mit einer Anordnung aus zwei kreisförmigen Spulen

im Abstand von dem halben Durchmesser kann ein sehr homogenes Magnetfeld erzeugt werden. (Abweichung < 1% für $z < 0.3 \cdot R$) BILD

$$B_z(0,0,z) = \frac{\mu_0}{2} I \left(\frac{R^2}{(R^2 + (z + \frac{R}{2})^2)^{3/2}} + \frac{R^2}{(R^2 + (z + \frac{R}{2})^2)^{3/2}} \right)$$

Entwicklung in eine Potenzreihe liefert näherungsweise $B_z(0,0,z)=\frac{\mu_0 I}{(5R^2/4)^{3/2}}\left(1-\frac{144z^4}{125R^4}\right)$

16.2.6 Zusammenhang zwischen elektrischen und magnetischen Feld

Gedankenexperiment:

 $\overline{+q}$, -q; Masse m, Geschwindigkeit \vec{v}

Bewegtes Koordinatensystem (\vec{v}) ; Ladungen ruhen BILD Coulombkraft:

$$m\ddot{z_1} = -rac{1}{4\pi\epsilon_0} rac{q^2}{(z_1 - z_2)^2}$$
 $m\ddot{z_2} = rac{1}{4\pi\epsilon_0} rac{q^2}{(z_2 - z_1)^2}$

Ruhendes Koordinatensystem: BILD zusätzlich: \vec{B} -Feld

$$\vec{B}(z_1)=\frac{\mu_0}{4\pi}q\frac{\vec{r}_{12}\times\vec{v}}{|\vec{r}_{12}|^3}\quad\text{aus Biot-Savart}$$

$$B_y(z_1)=\frac{\mu_0}{4\pi}qv\frac{1}{(z_1-z_2)^2}$$

Zusätzliche Lorentzkraft auf obere Ladung:

$$ec{F_l} = q \cdot (ec{v} imes ec{B})$$
 $|ec{F_l}| = q \cdot v \cdot B_y = q^2 \cdot rac{\mu_0}{4\pi} \cdot v^2 \cdot rac{1}{(z_1 - z_2)^2}$

Gesamtkraft: $F = F_L + F_C$

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(z_1 - z_2)^2} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q^2 v^2}{(z_1 - z_2)^2}$$

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(z_1 - z_2)^2} \underbrace{(1 - \epsilon_0 \mu_0 v^2)}_{\text{kleinere Beschleunigung im ruhendem System!}}$$

$$\epsilon_0 \cdot \mu_0 = c^{-2}$$
; $c \approx 2.998 \times 10^8 \,\mathrm{m\,s^{-1}}$ $= (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ Lichtgeschwindigkeit im Vakuum

 \Rightarrow Beschleunigung ist um $\underbrace{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}_{\text{aus}}$ aus Relativistischer Mechanik! kleiner!

- \Rightarrow In relativistischer Beschreibung laufen die beiden Experimente in beiden Bezugssystemen gleich ab!
- \Rightarrow Transformation der physikalischen Größen beinhalten Umwandlung von elektrische in magnetische Kraft!