Experimental Physik II Kapitel 19

author
email

June 24, 2016

Contents

19 Wellen

$t = t_0$:

BILD fehlt hier noch

Räumliche Periodizität

$\vec{r} = \vec{r}_0$

BILD fehlt hier noch

zeitliche Periodizität

Welle: Zeitlich und räumlich periodische Auslenkung einer Zustandsänderung.
⇒ Energie- und Impulstransport <u>ohne</u> Materialtransport!

Experiment
Einmalige Störung

BILD fehlt hier noch

⇒ Kein periodischer Vorgang!

Experiment: WWW
Periodische Erregung, Ausbreitung ohne Materialtransport!

- punktförmiger Erreger: Kreiswellen
- linienförmiger Erreger: Ebene Welle

Heutz'sche Dipol
Emission mit charakteristischer Abschallgeometrie

Verdichtungswelle (⇒ "Wellenmaschine")
⇒ Unterschied: <u>Transversalwelle</u>, <u>Longitudinalwelle</u>

19.1 2 Arten von Wellenausbreitung

- Transversalwellen (Transversal Polarisiert)
  Schwingungsrichtung $\perp$ Ausbreitungsrichtung
  z.B. Seilwelle:

  BILD fehlt hier noch

  2 Möglichkeitden der Polarisierung:

  BILD fehlt hier noch

  Transversalwellen sind polarisierbar

- Longitudinalwellen (longitudinal Polarisiert)
  z.B. Schallwellen

  BILD fehlt hier noch

Mathematische Beschreibung der Wellenausbreitung

"Störung" wandert mit Ausbreitungsgeschwindigkeit v_{Ph}

BILD fehlt hier noch

BILD fehlt hier noch

Für mit-bewegten Beobachter bleibt Störung ortsfest (in *S'*)

$$f(x') = f(x - v_{Ph} \cdot t)$$

$\Rightarrow$ 1-dim Welle kann man beschreiben durch, $\Psi(x,t) = \underline{\underline{f(x - v_{Ph} \cdot t)}}$ Jeder Punkt der Störung wandert mit v_{Ph} nach rechts.

v_{Ph}: Phasengeschwindigkeit

(Ausbreitung der Störung ohne Verformung!)
$\Phi(x,t)$: Auslenkung, Druck, Dichte, $\vec{E}$,$\vec{B}$-Feld Amplitude, ...

Sonderfall: Harmonische Wellen

$$\Psi(x,t) = \Psi_0 \cdot \overbrace{\sin(K \cdot x - \omega t)}^{f(x,t)}$$
$$\varphi = K \cdot x = \omega t: \text{ Phase}$$
$$K: \text{Wellenzahl}$$
$$\omega: \text{Kreisfrequenz}$$

(a)

BILD fehlt hier noch

(b)

BILD fehlt hier noch

(a)

$$\begin{aligned}
\Psi(x,t) = \Psi &= \Psi_0 \cdot \sin(Kx - \omega t) \\
&= \Psi_0 \cdot \sin(K(x+\lambda) - \omega t) \\
&= \Psi_0 \cdot \sin((Kx - \omega t) + K \cdot \lambda) \\
&\Rightarrow K \cdot \lambda = 2\pi \qquad\qquad \lambda\text{:Wellenlänge} \\
&\Rightarrow K = \frac{2\pi}{\lambda}
\end{aligned}$$

(a)

$$\begin{aligned}
\Psi &= \Psi_0 \cdot (Kx - \omega t) \\
&= \Psi_0 \cdot \sin(Kx - \omega(t+T)) \\
&\Rightarrow \omega \cdot T = 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \qquad\qquad \underline{T\text{: Periodendauer}}
\end{aligned}$$

Wellen darstellbar:

$$\begin{aligned}
\Psi(x,t) &= \Psi_0 \cdot \sin(Kx - \omega t) \\
&= \underline{\Psi_0 \cdot \sin(2\pi(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}))}
\end{aligned}$$

In der Zeit T (Periodendauer) breitet sich die Welle um eine Wellenlänge (λ) aus.

$\Rightarrow$ Ausbreitungsgeschwindigketi $\boxed{v_{Ph} = c = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \underbrace{\nu}_{\text{Frequenz}}}$

$$\Psi^{\pm}(x,t) = \Psi_0 \cdot \sin(Kx \pm \omega t)$$

Ψ^{+}: läuft im Ortsraum nach links

Ψ^{-}: läuft im Ortsraum nach rechts

19.2 Die Wellengleichung

Erinnerung: Schwingungsgleichung: $\ddot{\Psi} + \omega^2 \cdot \Psi = 0$
Lösung: Harmonische Schwingung: $\Psi = \Psi_0 \cdot \sin(\omega t)$
Wellen: Periodisch /bisher: auch harmonisch) in Ort und Zeit
$\Rightarrow$ Vermutung: Wellengleichung muss 2. Ableitung enthalten
Ansatz für Ψ: $\Psi(x,t) = \Psi_0 \cdot f(Kx - \omega t)$
f ist beliebig (aber periodische) Funktion der Phase φ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = K \quad ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\omega$$

2. Ableitung berechnen:
Ort:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= \Psi_0 \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} && \text{(Kettenregel)} \\ &= \Psi_0 \cdot K \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} &= \Psi_0 \cdot K \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \Psi_0 \cdot K^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \\ &\Leftrightarrow \underline{\Psi_0 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = K^{-2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}} \end{aligned}$$

Zeit:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \Psi_0 \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\omega \cdot \Psi_0 \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \omega^2 \cdot \Psi_0 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \Rightarrow \underline{\Psi_0 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = \omega^{-2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}}$$

$$\Rightarrow K^{-2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \omega^{-2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

$$\underline{\underline{\frac{\omega^2}{K^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}}} \qquad \text{2. Ableitung nach Ort und Zeit verknüpft!!}$$

mit $v_{Ph} = \frac{\omega}{K}$ $\boxed{v_{Ph}^2 \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}}$ ist die Wellengleichung in 1 Dimension!

$f(x - v_{Ph} \cdot t)$ ist Lösung und beschreibt Ausbreitung in positiver x-Richtung!

Dann ist auch $g(x + v_{Ph} \cdot t)$ Lösung, Ausbreitung in negativer x-Richtung!

$\Rightarrow$ Allgemeine Lösung der Wellengleichung:

$$\Psi(x,t) = f(x - v \cdot t) + g(x + v \cdot t)$$

BILD fehlt hier noch

19.3 Überlagerung von Wellen

(in einer Dimension)
Superpositionsprinzip: Ungestörte Überlagerung mehrerer Wellen

$$\Psi(\vec{r},t) = \sum_{i=1}^{N} \Psi_1(\vec{r},t)$$

<u>Reflexion von Wellen → stehende Wellen</u>
Experiment: Reflexion der Welle einer Pendelkette

- Festes Ende: Phasensprung von π bei Reflexion

BILD fehlt hier noch

- Freies Ende: Kein Phasensprung

BILD fehlt hier noch

Überlegung von links- und rechts-laufender Welle
Gleiche Amplitude, gleiche Frequenz, Phasenverschiebung φ

$$\Psi(x,t) = \Psi_0 \cdot \cos(Kx - \omega t) \pm \Psi \cdot \cos(Kx + \omega t + \varphi)$$

$$\text{Additionstheroeme} \rightarrow = \underline{\underline{2 \cdot \Psi_0 \cdot \cos(\omega t + \frac{\varphi}{2}) \cdot \cos(Kx + \frac{\varphi}{2})}}$$

Faktorisieren der Orts- und Zeitabhängigkeit:
Für alle t gibt es Punkte x; bei denen $\Psi(x,t) = 0$: "Knoten"
Betrachte Orts-Teil: Festes Ende: $\varphi = \pi$

$$\text{Knoten:} \qquad \underbrace{\cos(Kx + \frac{\varphi}{z})}_{\Rightarrow \text{Knoten bei } x_0, x_0 + \frac{\pi}{2}, x_0 + \frac{3\pi}{2} \ldots} \qquad = 0 \Rightarrow Kx + \overbrace{\frac{\varphi}{2}}^{\pi/2} = \frac{(2\mathbb{N}+1)}{2} \cdot \pi$$

Resonanz-Situation: $\underset{K=\frac{2\pi}{2}}{K} \cdot x = \frac{(2\mathbb{N}+1)}{2} \cdot \pi$

$$\text{Resonanz: } \underset{\text{Länge}}{L} = \frac{\mathbb{N}}{2} \cdot \lambda$$

$$\underline{\Rightarrow \lambda = \frac{2}{\mathbb{N}} \cdot L}$$

$$\underline{\mathbb{N} \cdot \frac{\lambda}{2} = L}$$

BILD fehlt hier noch

Loses Ende: $\varphi = 0$!

$$\Rightarrow \text{Resonanz: } \frac{2\mathbb{N}+1}{2} \cdot \lambda = L$$
$$\lambda = \frac{4 \cdot L}{(2\mathbb{N}-1)}$$

BILD fehlt hier noch

Mikrowelle:

$$d_{Knoten} = \frac{\lambda}{2} \approx 10\,\mathrm{cm}$$
$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{0.2\,\mathrm{m}} = 1.5 \times 10^9\,\mathrm{s^{-1}}$$
$$= \underline{1.5\,\mathrm{GHz}}$$

BILD fehlt hier noch

BILD fehlt hier noch

19.3.1 Wellenpakete und Synthese/Analyse nicht harmonischer Wellen

Eine streng monochromatische ($\omega = \omega_0$, harmonisch) Welle ist zeitlich und räumlich unendlich ausgedehnt! Alle nicht-harmonischen Wellen sind als Überlagerung harmonischer Wellen darstellbar.

Schwingungsanteil: $\underbrace{\boxed{\Psi(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n \cdot \omega_1 \cdot t + \varphi_n)}}_{\text{Fourier-Zerlegung}}$

Auch für Wellenzüge möglich!

BILD fehlt hier noch

BILD fehlt hier noch

BILD fehlt hier noch

- Darstellung ist immer durch Überlagerung der Grundwelle mit harmonischen Oberwellen möglich.
- Amplituden nehmen mit wachsender Frequenz ab!

- Obertonspektrum (a_n von $\omega_n = b \cdot \omega_1$) ist charakteristisch für den individuellen Klang der Stimme! Es hängt von der Beschaffenheit des "Klangkörpers" ab!

Überlagerung von Wellen mit ähnlichem K, ω bei gleicher Ausbreitungsrichtung und Amplitude.

BILD fehlt hier noch

$$\Psi(x,t) = \Psi_0 \left[\underbrace{\sin(Kx - \omega t)}_{\text{1. Welle}} + \underbrace{\sin\left((K+\Delta K)x - (\omega + \Delta\omega)t\right)}_{\text{2. Welle}} \right]$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \cdot \cos\frac{(\alpha - \beta)}{2} \cdot \sin\frac{(\alpha + \beta)}{2}$$

$$\alpha = (K + \Delta K)x - (\omega + \Delta\omega) \cdot t$$

$$\beta = Kx - \omega t$$

$$\text{Näherung:} \frac{\omega + (\omega + \Delta\omega)}{2} \approx \omega \quad , \quad K + ...$$

$$\Psi(x,t) = 2\Psi_0 \cdot \underbrace{\cos(\frac{1}{2}(\Delta K \cdot x - \Delta\omega \cdot t))}_{\text{Modulation der Amplitude}} \cdot \underbrace{\sin(Kx - \omega t)}_{\text{Welle}}$$

BILD fehlt hier noch

19.3.2 Gruppengeschwindigkeit

Wie schnell bewegt sich die cos-Modulation (Einhüllende) im Raum?
Amplitudenfaktor; $2 \cdot \Psi_0 \cdot \cos(\frac{1}{2}(\Delta K \cdot x - \Delta\omega \cdot t)) = const.$
(bedenke: feste Phase der Einhüllenden!)

$$\Delta K \cdot -\Delta\omega \cdot t = 0$$

$$\overset{\Delta\omega \to 0}{\Rightarrow} x = \frac{d\omega}{dK} \cdot t$$

$$= v_{Gr} \cdot t$$

Ausbreitung der Modulation (oder Wellengruppe) mit $v_{Gr} = \frac{d\omega}{dK}$

$\underline{v_{Gr} \text{ Gruppengeschwindigkeit}}$

Mit v_{Gr} breiten sich Informationen (Signale) aus!

19.3.3 Phasen- vs Gruppengeschwindigkeit

$$\begin{aligned} v_{Gr} &= \frac{d\omega}{dK} = \frac{d}{dK}(v_{Ph} \cdot K) \qquad & K = \frac{2\pi}{\lambda} \quad ; \quad \lambda = \frac{2\pi}{K} \\ &= v_{Ph} + K \cdot \frac{dv_{Ph}}{dK} \qquad & \frac{d\lambda}{dK} = -\frac{2\pi}{K^2} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{dv_{Ph}}{dK} = \frac{dvPh}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dK}\right)$$

$$v_{Gr} = v_{Ph} - \frac{2\pi}{K} \cdot \frac{dv_{Ph}}{d\lambda}$$

$$\boxed{v_{Gr} = v_{Ph} - \lambda \cdot \frac{dv_{Ph}}{d\lambda}}$$

$v_{Gr} = v_{Ph}$ wenn v_{Ph} unabhängig von k , λ
wenn $v_{Ph} \neq v_{Ph}(\lambda)$: Alle Fourier-Komponenten breiten sich mit gleicher Geschwindigkeit aus! Dann heißt die Welle "dispersionsfrei"!
Sonst: $v_{Gr} \neq v_{Ph}$, dann: Wellenpaket läuft auseinander! $\underline{(\Rightarrow \text{Dispersion})}$

Experiment: Wasserwellen sind dispersionsfrei!

BILD fehlt hier noch

Beispiele
Seilwellen

BILD fehlt hier noch

Seil erfährt Spannung: $\underbrace{\tau}_{\text{Seilspannung}} = \frac{\overbrace{F_0}^{\text{Kraft}}}{\underbrace{A}_{\varnothing\text{-Fläche}}}$
Auslenkung in y-Richtung: Rückstellkraft
Wellen in x-Richtung: Transversalwelle

$$\begin{aligned} F_2 &= \tau \cdot A \cdot \sin\alpha_2 \qquad & \alpha_1 > \alpha_2 \\ F_1 &= \tau \cdot A \cdot \sin\alpha_1 \end{aligned}$$

Wenn betrachtetes Element klein ist, dann:

$$\begin{aligned} F_y &= F_1 - F_2 \quad \text{(nach einsetzen!)} \\ &= \tau \cdot A \cdot (\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2) \\ &\approx \tau \cdot A \cdot (\alpha_1 - \alpha_2) = \tau \cdot A \cdot \Delta\alpha \end{aligned}$$

$\Rightarrow \Delta M$ wird beschleunigt: $\Delta M = \Delta x \cdot A \cdot \underbrace{\rho}_{Massendichte}$ (im GG)

$F_y = \Delta M \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = \rho \cdot \cancel{A} \cdot \Delta x \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = \tau \cdot \cancel{A} \cdot \Delta\alpha$

$\Leftrightarrow \tau \cdot \frac{\Delta\alpha}{\Delta x} = \rho \cdot \frac{d^2y}{dt^2}$

$\alpha = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{d\alpha}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$ für $\Delta x \to 0$

$\Rightarrow \tau \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \rho \cdot \frac{d^2y}{dt^2}$

Wellengleichung $\boxed{\frac{\tau}{\rho} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}}$

$v_{Ph}^2 \cdot \frac{d^2\Psi}{dx^2} = \frac{d^2\Psi}{dt^2}$

$\Rightarrow v_{Ph} = \underline{\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}} = \sqrt{\frac{\tau \cdot A}{\rho \cdot A}} = \sqrt{\frac{F}{\underbrace{\mu}_{\text{lineare Massendichte}}}}$

$v_{Ph} = \frac{\omega}{K} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \cdot K$

BILD fehlt hier noch

Keine Dispersion!

Beidseitig eingespannte Seite

BILD fehlt hier noch

Lösung der Wellengleichung: Stehende Welle

$$\Psi = \Psi_0 \cdot \sin Kx \cdot \cos \omega t$$

$$\underbrace{\Psi = 0}_{\text{Knoten}} : \quad y = 0 \ ; \ \underbrace{x = L}_{\text{2. RB}} \text{ für alle } t$$

$$\Rightarrow K \cdot L = n \cdot \pi$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\lambda_n = \frac{2}{n} \cdot L}}$$

Dies definiert die Schwingungsmoden der Seite

Dispersion: $\omega_n = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \cdot K_n == \overset{2\pi\nu_n}{} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \cdot \frac{2\pi}{\lambda_n}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\nu_n = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \cdot \lambda_n^{-1} = \frac{n}{2L} \cdot \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}}}$$

Saiteninstrument:

- λ durch Geometrie bestimmt
- zugehörige Frequenz durch Spannung eingestellt!

$\Rightarrow$ Umwandlung von stehender Welle in Schallwelle
Klang: Obertöne gleichzeitig angeregt; Superposition von Grund- und Oberschwingung

$$\Psi(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Psi_{0,n} \sin(K_n x) \cdot \cos(\omega_n t)$$

$$\Rightarrow \underline{v_S = \frac{d\omega}{dK} = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} = v_{Ph}}$$

19.4 Schallwellen

(auch noch ein Beispiel) Schallwellen: in Gasen:

- Druck- und Dichtewellen
- Longitudinalwellen

In Gasen und idealen Flüssigkeiten $\nexists$ Scherkräfte, d.h. keine Kräfte $\perp$ Bewegungsrichtung!
"Momentanaufnahme" einer Druckwelle:

BILD fehlt hier noch

Schwingungsknoten $\hat{=}$ Druckband
Erinnerung: "Flammrohr", letzte L vor X-Mas 2015
Beispiel für stehende Schallwelle: Schwingungen der Luftsäule (z.B. Orgelpfeifen)

BILD fehlt hier noch

Was bestimmt v_{Ph} von Schallwellen?
$\Rightarrow$ Rücktreibende Kraft bei Druckschwankungen?
Seilwelle: $\frac{\pi}{\rho} \Rightarrow \frac{d\overset{\text{Druck}}{p}}{d\rho} = v_{Ph}^2$
Bei adiabatischer Druckänderung (kein Wärmeausgleich, schnell) folgt:

$$\frac{dp}{d\rho} = \kappa \cdot \frac{K_B \cdot T}{m} \Rightarrow \boxed{v_{Ph} = \sqrt{\kappa \cdot \frac{K_B T}{m}}}$$

$\Rightarrow$ Schallwellen sind dispersionsfrei (zum Glück)

$$\omega = Ph \cdot \kappa = \sqrt{\kappa \cdot \frac{K_B T}{m}} \cdot K$$

$v_{Ph} = v_{Ph}(\kappa, T, m)$
Erinnerung: $\kappa = 1 + \frac{2}{f}$ $\qquad f$: # Freiheitsgrade des Moleküls

v_{Ph} @ 273K:

$$\begin{aligned}
\text{Luft: } N_2 &\quad ; m = 28u; \text{2-atomig}; f = 5; \kappa = \frac{7}{5} \Rightarrow v_{Ph} = 331\,\mathrm{m\,s^{-1}} \\
H_2 &\quad ; m = 2u; \text{2-atomig}; f = 5; \kappa = \frac{7}{5} \Rightarrow v_{Ph} = 1240\,\mathrm{m\,s^{-1}} \\
\text{Helium: } He &\quad ; m = 4u; \text{1-atomig}; f = 3; \kappa = \frac{5}{3} \Rightarrow v_{Ph} = 1007\,\mathrm{m\,s^{-1}} \\
\omega = v_{Ph} \cdot K \Rightarrow \nu = \frac{v_{Ph}}{\lambda}
\end{aligned}$$

Bei gleicher Geometrie (z.B. eines Resonators) ändert sich ν bei Austausch des Gases: (Luft $\rightarrow$ He : $\nu \rightarrow \approx 3 \cdot \nu$)

19.4.1 Experiment: Helium-stimme

Beachte: $\nu = \frac{v_{Ph}(\sqrt{T})}{\lambda}$: Temperatureinfluss auf "Stimmung" von Instrumenten
Vergleiche: Ph und thermische Geschwindigkeit v_{th}

$$\begin{aligned}
v_{Ph} &= \sqrt{\kappa \frac{K_B T}{m}} & ; \sqrt{< v_{th}^2 >} &= \sqrt{3 \frac{K}{m}} \\
\Rightarrow \frac{v_{th}}{v_{Ph}} &= \sqrt{\frac{3}{\kappa}} & \Rightarrow v_{th} &\approx 1,3 \cdot v_{Ph} ... 1,4 \cdot v_{Ph} \\
v_{th} \text{ ist } &\underline{\text{nicht }} >> v_{Ph} & \Rightarrow &\text{ kein schneller thermischer Ausgleich} \\
& & \Rightarrow &\text{ Adiabatische Näherung ok!}
\end{aligned}$$

19.4.2 Longitudinal Schallwellen in Festkörpern

Wellengleichung: $v_{Ph}^2 \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$
Seilwelle: $v_{Ph} = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$

19.4.3 Experiment: Schallwelle in Metallstab

BILD fehlt hier noch

Verformung von dx auf $dx + x\Psi$
Dehnung: $\epsilon = \frac{d\Psi}{dx}$
Verallgemeinerung Hook'sches Gesetz: $\sigma = \frac{F}{A} = \underbrace{E}_{\text{Elasititätsmodul}} \cdot \epsilon$

$$\rightarrow dF = A \cdot E \cdot \frac{d\Psi}{dx}$$
$$\frac{dF}{dx} = \underline{A \cdot E \cdot \frac{d^2\Psi}{dx^2}} \qquad (*)$$

Beschleunigung auf Massenelement: $dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot A \cdot dx$

$$dF = dm \cdot \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \rho \cdot A \cdot dx \cdot \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$$
$$\frac{dF}{dx} = \rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \qquad (**)$$

$$(*)\ (**) : \boxed{\frac{E}{\rho} \cdot \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}}$$

Wellengleichung mit $\underline{\underline{v_{Phi} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}}}$; dispersionsfrei

$$\underline{\underline{\omega = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \cdot K}}$$

Typische Werte (Stahl): $E \approx 2 \times 10^{11}\,\mathrm{N/m^2}$ (200GPa)

$\rho = 8 \times 10^{3}\,\mathrm{kg/m^3}$

$$\Rightarrow v_{Ph} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \approx 5 \times 10^{3}\,\mathrm{m\,s^{-1}} >> v_{Ph}\ (\mathrm{Luft})$$

In Festkörpern sind wegen Schwerkraft auch transversal Wellen Möglich:
G : Schermodul

$$\underline{\underline{\Rightarrow v_{Ph} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}}}$$

19.4.4 Wasserwellen

(⇒ Entstehung: Handout)

Handout muss hier noch nachgetragen werden.

BILD fehlt hier noch

Geschwindigkeit auf Wellenberg: $v_{Berg} = v_W - v_K$
Geschwindigkeit im Wellental: $v_{Tal} = v_W + v_K$

Im Mittel kein Materialtransport

Zunahme an kinetischer Energie vom Berg zum Tal:

$$\Delta E^{kin} = E^{kin}_{Tal} - E^{kin}_{Berg} = \frac{1}{2} \cdot m(v^2_{Tal} - v^2_{Berg})2 \cdot m \cdot v_W \cdot v_K$$

(m : Masse der Wellenfront)
"Verlust" an potenzieller Energie:

$$\Delta E^{pot} = 2mgR$$

$$\Delta E^{pot} = \Delta E^{kin} \Leftarrow$$
$$\Rightarrow v_W = \sqrt{\frac{g \cdot \lambda_W}{2\pi}}$$

"zu Hause zeigen", muss noch gemacht werden

Schwere-wellen zeigen ausgeprägte Dispersion:

$$\lambda_w = 10\,\mathrm{m} \Rightarrow v_W = 4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$
$$\lambda_w = 1000\,\mathrm{m} \Rightarrow v_W = 40\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Für kleinere λ : Oberflächenspannung σ berücksichtigen
zusätzlich: Einfluss endlicher Wassertiefe berücksichtigen

BILD fehlt hier noch

Es gilt allgemein (Komplexe Rechnung).

$$v_{Ph} = \sqrt{\frac{g \cdot \lambda_W}{2\pi} + \underbrace{\frac{2\pi\sigma}{\rho \cdot \lambda_W}}_{\text{Oberfläche}}} \cdot \overbrace{\sqrt{\frac{1-\exp(-2 \cdot K \cdot h)}{1+\exp(-2 \cdot K \cdot h)}}}^{(A)^{1/2}}_{h\text{: Wassertiefe}}$$

Seichtwasserwellen: ab $n \leqslant \frac{\lambda_W}{4}$ muss endliche Tiefe berücksichtigt werden!

$$\text{(A)}: \frac{1-\exp(-2Kh)}{1+\exp(-2Kh)} \xrightarrow{n << \frac{2\pi}{K}} \frac{1-(1-2Kh)}{1+(1-2Kh)} = \frac{2Kh}{2-2Kh} \approx Kh$$

Beschränkung auf Nicht-Oberflächenwelle:

$$\rightarrow v_{Ph} = \sqrt{\frac{g \cdot \lambda_W}{2\pi}}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_W} \cdot h} = \sqrt{g \cdot h}$$

Keine Dispersion für Flachwasserwelle; $\underline{v_{Ph} \text{ hängt nur von } h \text{ ab!!}}$
$\Rightarrow$ Das ist der Grund für Entstehung von Brandung und Tsünamos!
Experiment: Tiefwasser $\rightarrow$ Flachwasserwelle

BILD fehlt hier noch

$$v_{Ph} = \sqrt{g \cdot h}; \lambda_1 = \frac{v_{Ph}}{\nu} = \frac{0.41\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{\nu}; \lambda_2 = \frac{0.17\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{\nu}$$

$\nu = const.$ (Erregerfrequenz)

BILD fehlt hier noch

Entstehung von Tsünamos:
$\lambda = 100\,\mathrm{km} - 500\,\mathrm{km}$ (z.B. durch Seebeben)
$\Rightarrow$ Tsünamos sind überall Flachwasserwellen (Wellenhöhe: $< 1\,\mathrm{m}$)
$v_{Ph} = \sqrt{g \cdot h}$ in Ozeanen ($h \approx 5000\,\mathrm{m}$) : $\vDash_{Ph} = 780\,\mathrm{km\,h^{-1}}$
Periodendauer: $T = 7.5\,\mathrm{min}...38\,\mathrm{min}$
In flachem Wasser ($h = 5$ –meter) reduziert sich v_{Ph} auf ca 1/30

$$v_{Ph} \approx 26\,\mathrm{km\,h^{-1}}$$

λ reduziert sich ebenfalls auf 1/30

$$\boxed{\text{Da } E_{km} \text{ erhalten bleibt, nimmt die Amplitude drastisch zu!!}}$$