בס"ד

<u>אלגוריתמיקה מקבילית תרגיל בית מספר 2 התשפ"א</u>

1. נניח שנתונים לנו $2n, n=2^k$ מספרים $\langle a_1, a_2, ..., a_{2n} \rangle$ כך שהמחציות $\langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle$ ו - $\langle a_{n+1}, a_{n+2}, ..., a_{2n} \rangle$ ממוינות וכאשר כל אחד מהמספרים $a_j = \left\langle a_j^{(m-1)}, a_j^{(m-2)}, \ldots, a_j^{(0)} \right\rangle_2$ מיוצג ב- m ביטים.
א. הגדר (בקצרה) מעגל מיזוג כאשר כל משוון הוא מעגל השוואה מקבילי אופטימאלי המבצע השוואה בזמן $O(\log_2(m))$ ועלות $O(m)$.
   א. נתח זמן ריצה כולל $T(m,n)$ ונתח עלות כוללת $C(m,n)$.
   ב. האם המעגל אופטימאלי בעלות?
   ג. האם המעגל אופטימאלי בזמן?

2. נתונים $n=2^k$ מספרים $\langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle$ למיון ברשת $\mathrm{SORTER}[n]$ כאשר כל מספר $a_j = \left\langle a_j^{(m-1)}, a_j^{(m-2)}, \ldots, a_j^{(0)} \right\rangle_2$ מיוצג ע"י m ביטים וכאשר כל משוון הוא מעגל השוואה מקבילי אופטימאלי המבצע השוואה בזמן $O(\log_2(m))$ ועלות $O(m)$.
   א. נתח זמן ריצה כולל $T(m,n)$ ונתח עלות כוללת $C(m,n)$.
   ב. האם המעגל אופטימאלי בעלות?
   ג. האם המעגל אופטימאלי בזמן?

3. הגדר מעגל מקבילי יעיל המחשב את $x \oplus y$ (שער XOR) עבור שני ביטים x, y. המעגל ישתמש באופרטורים $\{\neg, \wedge, \vee\}$ בלבד. חשב עומק וגודל המעגל.

4. הגדר מעגל מקבילי יעיל המקבל $a, b \in \{0,1,2\}$ כאשר כל מספר מיוצג בבינארי: $a = \langle a_1, a_0 \rangle_2, b = \langle b_1, b_0 \rangle_2$ ומחזיר את הסכום מודלו 3 (בייצוג בינארי) כלומר את השארית שהסכום משאיר בחלוקה ב-3: $(a+b)(\mathrm{mod}\, 3)$. המעגל ישתמש באופרטורים $\{\neg, \wedge, \vee\}$ בלבד. חשב עומק וגודל המעגל.

5. הגדר מעגל מקבילי יעיל המקבל $a, b \in \{0,1,2\}$ כאשר כל מספר מיוצג בבינארי: $a = \langle a_1, a_0 \rangle_2, b = \langle b_1, b_0 \rangle_2$ ומחזיר את הכפל מודלו 3 (בייצוג בינארי) כלומר את השארית שהכפל משאיר בחלוקה ב-3: $(a \times b)(\mathrm{mod}\, 3)$. המעגל ישתמש באופרטורים $\{\neg, \wedge, \vee\}$ בלבד. חשב עומק וגודל המעגל.

6. הגדר מעגל מקבילי יעיל המקבל $a,b \in \{0,1,2\}$ כאשר כל מספר מיוצג בבינארי: $a=\langle a_1,a_0\rangle_2, b=\langle b_1,b_0\rangle_2$ ומחשב את הפונקציה $f(a,b)$ הנתונה ע"י הטבלה הבאה הבאה:

a\b	0	1	2
0	0	0	2
1	0	1	2
2	0	2	2

המעגל ישתמש באופרטורים $\{\neg,\wedge,\vee\}$ בלבד. חשב עומק וגודל המעגל.

רמז (אפשר להתשמש ברמז אך לא חייבים): וודא שהפונקציה הנ"ל מקיימת $f(a,b)=(b((b+1)(2a+b)+1))(\mathrm{mod}\,3)$. השתמש כעת בשני התרגילים לעיל לכפל וחיבור מודולו 3. שים לב שמספרים קבועים כגון 1 ו-2 המופיעים בהגדרת הפונקציה - המעגל יכול לאתחל מעצמו (בשליפה ממקום קבוע בזיכרון).

הערה: מתוצאת תרגיל זה ובהגדרת $k=0=\langle 0,0\rangle_2, p=1=\langle 0,1\rangle_2, g=2=\langle 1,0\rangle_2$ נקבל מימוש של אופרטור ה-KPG $\otimes$ ע"י מעגל המשתמש באופרטורים $\{\neg,\wedge,\vee\}$ בלבד.

7. נסמן ע"י $\wedge$ את פונקציית המינימום לשני ארגומנטים וע"י $\overset{n}{\underset{j=1}{\wedge}}$ את פונקציית המינימום ל- n ארגומנטים. נתונים n מספרים טבעיים $\langle a_1,a_2,\ldots,a_n\rangle$ כאשר כל מספר $a_j=\langle a_j^{(m-1)},a_j^{(m-2)},\ldots,a_j^{(0)}\rangle_2$ מיוצג ע"י m ביטים.

א. הגדר (בקצרה) מעגל חומרה במודל הסטנדרטי (במודל של מעגלי חומרה המשתמשים באופרטורים $\{\neg,\wedge,\vee\}$ בלבד) המחשב את $\overset{n}{\underset{j=1}{\wedge}}(a_j)$. ללא הגבלת הכלליות ניתן להניח ש- $n=2^k$.

ב. נתח זמן ריצה כולל $T(m,n)$ ונתח עלות כוללת $C(m,n)$.

ג. האם המעגל אופטימאלי בעלות?

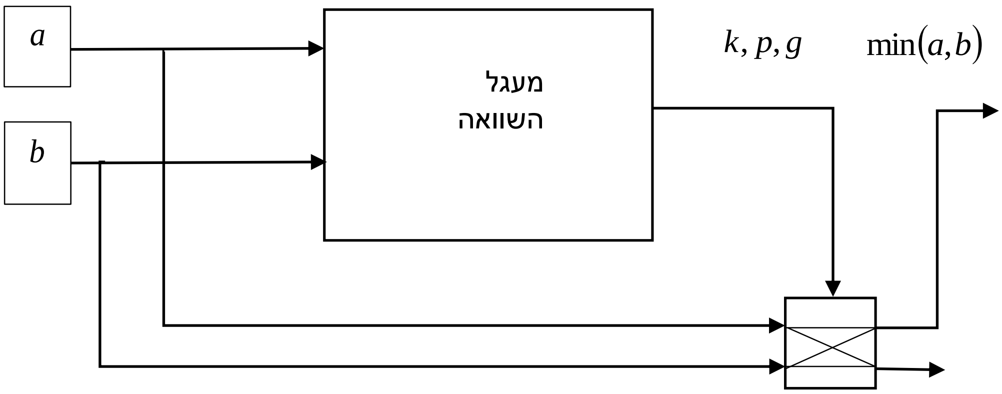
ד. האם המעגל אופטימאלי בזמן?

רמז: השתמש באסטרטגיה של עץ בינארי (מלא ושלם) לחישוב $\overset{n}{\underset{j=1}{\wedge}}(a_j)$ ע"י שימוש ב-$n-1$ פונקציות $\wedge$ (הנמצאות על קדקודי האבות של העץ הבינארי הנ"ל כאשר העלים של העץ מייצגים את הקלטים $\langle a_1,a_2,\ldots,a_n\rangle$ - כל עלה מייצג קדקוד קלט עם מספר אחד מהסדרה) כאשר כל פונקציה כזו ממומשת ע"י מעגל השוואה אופטימאלי.

הערה: תאור סכמטי של המעגל המממש את הפונקציה $a\wedge b=\min(a,b)$ באיור לקמן: המעגל מקבל שני מספרים (בייצוג בינארי בגודל m כ"א וכנ"ל). המעגל מחשב ערך k אם $a<b$, ערך p אם $a=b$ וערך g אם $a>b$. הערך מוזן לקביעת המצב של מתג מסוג מעביר-ישיר או מעביר-מחליף. אם הערך הוא k או p המתג במצב מעביר-ישיר ואז a,b נפלטים כסדרם ולכן נקבל $\min(a,b)=a$ בתיל שמעניין אותנו. אם

הערך הוא g אז המתג במצב מעביר-מחליף ואז a,b נפלטים הפוך מסדרים ולכן נקבל $\min(a,b)=b$ בתיל שמעניין אותנו.

נשים לב שזה עדיין נחשב מעגל במודל הסטנדרטי שכן המתג איננו חלק מהמעגל המבצע את החישוב אלא רק קובע מאיפה לוקחים את הפלט להצבה בזיכרון (לטובת החישובים שבהמשך וכד').



אם ממש מתעקשים על טהרת המודל הסטנדרטי אז אפשר להגדיר מעגל (קטן) המפיק ביט $s=1$ עבור k או p ומפיק ביט $s=0$ עבור g. כעת, הפלט של מעגל ההשוואה יהיה:

$$\left\langle \left(s\wedge a^{(m-1)}\right)\vee\left(\neg s\wedge b^{(m-1)}\right),\ldots,\left(s\wedge a^{(j)}\right)\vee\left(\neg s\wedge b^{(j)}\right),\ldots,\left(s\wedge a^{(0)}\right)\vee\left(\neg s\wedge b^{(0)}\right)\right\rangle$$

בתוספת שתי יחידות/דרגות עומק ו- $4m$ יחידות גודל.

<u>הערה:</u> לעתים זקוקים גם לאינדקס j עבורו התקבל $\overset{n}{\underset{j=1}{\wedge}}\left(a_j\right)$. לשם כך מזרימים בתיילי הקלט זוגות $\langle(a_1,1),(a_2,2),\ldots,(a_n,n)\rangle$ כך שלגבי ההשוואות משתמשים ברכיב הראשון מכל זוג אך כאשר מעבירים או מחליפים ערך כנ"ל מעבירים אותו עם האינדקס שלו. בהמשך נשתמש באפשרות זו אך לא נסמן זאת באופן מיוחד אלא נאמר שאנו מבצעים מינימיזציה עם העברת אינדקס או ללא העברת אינדקס. כמובן, זה לא משנה את זמן הריצה והעלות של המעגל (עד כדי גורמים זניחים או קבועים חבויים שאינם משנים את הביצועים האסימפטוטיים).

8. נתונים $2n$ מספרים טבעיים בשתי סדרות (שני ווקטורים) $a=\langle a_1,a_2,...,a_n\rangle$ ו- $b=\langle b_1,b_2,...,b_n\rangle$ כאשר כל מספר $a_j=\left\langle a_j^{(m-1)},a_j^{(m-2)},\ldots,a_j^{(0)}\right\rangle_2$ וכל מספר $b_j=\left\langle b_j^{(m-1)},b_j^{(m-2)},\ldots,b_j^{(0)}\right\rangle_2$ מיוצג ע"י m ביטים.

א. הגדר (בקצרה) מעגל חומרה המחשב את $\overset{n}{\underset{j=1}{\wedge}}\left(a_j+b_j\right)$ (כאשר המינימיזציה (בלבד!) נעשית עם העברת אינדקסים). שים לב לשינוי בגודל הייצוג כתוצאה מפעולת הסכימה!

ב. נתח זמן ריצה כולל $T(m,n)$ ונתח עלות כוללת $C(m,n)$.

ג. האם המעגל אופטימאלי בעלות?

ד. האם המעגל אופטימאלי בזמן?

<u>רמז:</u> השתמש ב- n סוכמים צופי-נשא הפועלים במקביל ומחשבים כ"א את $c_j=a_j+b_j$. לאחר מכן השתמש במעגל אופטימאלי מתאים למינימיזציה.

הערה: אם 2 מספרים x,y מיוצגים בבינארי ע"י k ביטים אז $x,y \le 2^k - 1$ שכן הערך הגבוה ביותר שניתן לייצוג ע"י k ביטים הוא $2^k - 1$. כעת: $x+y \le 2\left(2^k - 1\right) = 2^{k+1} - 2 < 2^{k+1} - 1$ ולכן $x+y$ עלול להכיל $k+1$ ביטים – אך לא יותר. כמו כן, $x \cdot y \le \left(2^k - 1\right)^2 = 2^{2k} - 2^{k+1} + 1 < 2^{2k} - 1$ ולכן $x \cdot y$ עלול להכיל $2k$ ביטים – אך לא יותר.

9. נתונות שתי מטריצות A,B מגודל $n \times n$ כ"א המכילות מספרים טבעיים. כל אחד מרכיבי המטריצות $a_{i,j} = (A)_{i,j}, b_{i,j} = (B)_{i,j}$ מיוצג ע"י m ביטים כ"א. נגדיר פעולה (פונקציה) בין מטריצות: $C = A * B$ שהתוצאה שלה היא מטריצה C מגודל $n \times n$ כאשר כל איבר $c_{i,j} = (C)_{i,j}$ במטריצה מחושב כדלקמן:

$$c_{i,j} = \bigwedge_{k=1}^{n} \left(a_{i,k} + b_{k,j}\right)$$

כלומר, לוקחים שורה מספר i במטריצה A: $\left[a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n}\right]$, עמודה j במטריצה B: $\begin{bmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{bmatrix}$ ומבצעים בין שתי סדרות מספרים אלה את הפעולה מהתרגיל הנ"ל (סכימה של איברים במקומות המתאימים ומינימום בין כל הסכומים).

א. הגדר (בקצרה) מעגל חומרה המחשב את $C = A * B$ (כאשר המינימיזציה נעשית עם העברת אינדקסים). שים לב לשינוי בגודל הייצוג כתוצאה מפעולת הסכימה!
ב. נתח זמן ריצה כולל $T(m,n)$ ונתח עלות כוללת $C(m,n)$.
ג. האם המעגל אופטימאלי בעלות?
ד. האם המעגל אופטימאלי בזמן?
ה. הוכח שהפעולה $C = A * B$ אסוציאטיבית כלומר: $A*(B*C) = (A*B)*C$ עבור 3 מטריצות כלשהן A,B,C.
המוטיבציה: אם צריך לחשב שרשרת $A*B*C*D$ ניתן לחשב זאת ע"י $(A*B)*(C*D)$ ע"י האסטרטגיה של עץ בינארי כאשר $(A*B),(C*D)$ מחושבים ברמה הראשונה של העץ במקביל ולאחר מכן $(A*B)*(C*D)$ מחושב בשורש העץ.

רמז: השתמש ב-n^2 מעגלים מתרגיל קודם הפועלים במקביל ומחשבים כ"א את $c_{i,j} = \bigwedge_{k=1}^{n} \left(a_{i,k} + b_{k,j}\right)$.

10. נתון גרף $G=(V,E)$ (מכוון או לא מכוון קשיר או לא קשיר) עם n קדקודים ופונקציית משקל $w:E\rightarrow\mathbf{N}$ על הצלעות (כאשר $\mathbf{N}$ מייצג את המספרים הטבעיים). הגרף מיוצג ע"י מטריצה $D^{(1)}$ מגודל $n\times n$ כאשר $d_{i,j}^{(1)}=\left(D^{(1)}\right)_{i,j}$ מייצג את משקל הצלע מקדקוד v_i לקדקוד v_j, כאשר כל משקל כזה הוא מספר טבעי המיוצג ע"י m_0 ביטים (בהתחלה). לצורך הבעיה הבאה ניתן להניח ללא הגבלת הכלליות ש- $n=2^k$ (וודא זאת!).

<u>דרוש:</u> מעגל חומרה המחשב את משקלו של מסלול בעל משקל מינימאלי (מסלול אופטימאלי) מקדקוד v_i לקדקוד v_j לכל i,j.

<u>הערה:</u> אם אין צלע מקדקוד v_i לקדקוד v_j אז, פורמאלית $d_{i,j}^{(1)}=+\infty$ שכידוע איננו מספר טבעי (או איננו מספר בכלל). איך אם כן נשתמש במעגלי חומרה לצורך החישוב!?

יהי $p_{i,j}$ מסלול פשוט כלשהו מקדקוד v_i לקדקוד v_j (אם קיים). אז, משקל המסלול מקיים:

$$w\left(p_{i,j}\right)\le(n-1)\left(2^{m_0}-1\right)$$

שכן המסלול מכיל לכל היותר $n-1$ צלעות ומשקל כל צלע לא עולה על

$$2^{m_0}-1=\left\langle\underbrace{1,1,\ldots,1}_{m_0}\right\rangle_2.$$

כעת:

$$(n-1)\left(2^{m_0}-1\right)=\left(2^k-1\right)\left(2^{m_0}-1\right)<2^{m_0+k}-1.$$

לכן, נגדיר $m=m_0+k=m_0+\log_2(n)$ להיות גודל הייצוג של המשקלות במטריצת הקלט (ע"י ריפוד המשקלות הנ"ל ע"י הוספת $\log_2(n)$ אפסים כביטים הגבוהים). נגדיר אם כן את האינסוף כמספר המקסימאלי הניתן לייצוג ע"י m ביטים: $2^m-1=\left\langle\underbrace{1,1,\ldots,1}_{m}\right\rangle_2$ ולכל צלע שאיננה קיימת בגרף (פורמאלית במשקל אינסוף) נגדיר משקל 2^m-1.

כעת אם נקבל משקל 2^m-1 כמשקלו של מסלול מינימאלי בין זוג קדקודים כנ"ל נדע שאין שום מסלול בגרף המקורי בין הקדקודים הנ"ל. אם יש איזה מסלול בין הקדקודים הנ"ל אז משקלו הכולל (וכל שכן משקלו של מסלול אופטימאלי) יהיה קטן ממש מ-2^m-1. לכן, שינוי הקלט כנ"ל לא הורס את הנכונות של הפתרונות ביחס לבעיה המקורית. נניח אם כן שהקלט למעגל נתון מראש באופן זה.

נפנה כעת לפתרון הבעיה ע"י מימוש בחומרה של האלגוריתם הדינאמי של פלויד-ווארשאל. יש שתי גירסאות: האחת ניתנת למימוש מקבילי יעיל והאחרת לא ניתנת למימוש מקבילי יעיל.

עבור $1\le k\le n-1$ נגדיר ע"י $d_{i,j}^{(k)}=\left(D^{(k)}\right)_{i,j}$ את משקלו של מסלול מינימאלי מקדקוד v_i לקדקוד v_j (מסלול פשוט ללא הגבלת הכליות) המכיל לכל היותר k צלעות.

נגדיר ע"י $\pi_{i,j}^{(k)}=\left(\Pi^{(k)}\right)_{i,j}$ את האינדקס של הקדקוד הקודם המיידי של v_j במסלול אופטימאלי כנ"ל.

נתבונן במסלול אופטימאלי כנ"ל ונניח ש- $\pi_{i,j}^{(k)}=\ell$. כלומר המסלול הנ"ל הולך מקדקוד v_i לקדקוד v_ℓ וממנו בצלע ישירה לקדקוד v_j.

אז, מתת מבנה אופטימאלי של הבעיה נובע שתת המסלול מקדקוד v_i לקדקוד v_ℓ הוא מסלול אופימאלי המכיל לכל היותר $k-1$ צלעות ולכן עפ"י הגדרה משקלו: $d_{i,\ell}^{(k-1)}=\left(D^{(k-1)}\right)_{i,\ell}$. תת המסלול (המכיל צלע אחת בלבד) מקדקוד v_ℓ לקדקוד v_j אופטימאלי ומשקלו $d_{\ell,j}^{(1)}=\left(D^{(1)}\right)_{\ell,j}$ (נובע מאיברי מטריצת הקלט כנ"ל). לפיכך: $d_{i,j}^{(k)}=d_{i,\ell}^{(k-1)}+d_{\ell,j}^{(1)}$.

אך, מאחר ו- ℓ לא ידוע לנו (כרגע), הרי ש- $d_{i,j}^{(k)} = \bigwedge_{\ell=1}^{n}\left(d_{i,\ell}^{(k-1)} + d_{\ell,j}^{(1)}\right)$ (נוסחת התכנון הדינאמי).

כעת, אם המינימום התקבל עבור אינדקס ℓ_* אז $\pi_{i,j}^{(k)} = \left(\Pi^{(k)}\right)_{i,j} = \ell_*$.

ללא הגבלת הכלליות ניתן להניח שהמינימיזציה מתבצעת עם גרירת אינדקס ולכן לא נדון בנפרד בחישוב המטריצות $\Pi^{(k)}$ אלא נניח שהמטריצות $D^{(k)}$ מכילות ביחד עם כל איבר גם את האינדקס הנ"ל עבורו התקבל המינימום.

במונחים של מטריצות נקבל: $D^{(k)} = D^{(k-1)} * D^{(1)}$ עם הפעולה (האופרטור) $*$ שהוגדרה בתרגיל קודם.

נציב $D^{(k-1)} = D^{(k-2)} * D^{(1)}$ ונקבל: $D^{(k)} = D^{(k-2)} * D^{(1)} * D^{(1)}$. נמשיך כך ונקבל:

$$D^{(k)} = \underbrace{D^{(1)} * D^{(1)} * \cdots * D^{(1)}}_{k}$$

הפתרון לבעיה הוא אם כן החישוב של:

$$D^{(n-1)} = \underbrace{D^{(1)} * D^{(1)} * \cdots * D^{(1)}}_{n-1}$$

שכן מסלולים אופטימאליים כלליים בגרף כנ"ל הם מסלולים פשוטים (ללא הגבלת הכלליות) ולכן מכילים לא יותר מ- $n-1$ צלעות.

נשים לב ש- $D^{(n)} = \underbrace{D^{(1)} * D^{(1)} * \cdots * D^{(1)}}_{n} = D^{(n-1)}$ שיותר נוח לנו לחשב שכן הנחנו ש- $n = 2^k$.

כעת, לחישוב השרשרת $\underbrace{D^{(1)} * D^{(1)} * \cdots * D^{(1)}}_{n}$ נשתמש באסוציאיביות של האופרטור $*$ ובאסרטגיה של עץ בינארי לחישוב:

$$\underbrace{D^{(1)} * D^{(1)} * \cdots * D^{(1)}}_{n} = \underbrace{\left(D^{(1)} * D^{(1)}\right) * \left(D^{(1)} * D^{(1)}\right) * \cdots * \left(D^{(1)} * D^{(1)}\right)}_{\frac{n}{2}} =$$

$$= \underbrace{\left(D^{(2)}\right) * \left(D^{(2)}\right) * \cdots * \left(D^{(2)}\right)}_{\frac{n}{2}}$$

ברמה הראשונה של העץ.

ברמה השנייה של העץ נחשב:

$$\underbrace{D^{(2)} * D^{(2)} * \cdots * D^{(2)}}_{\frac{n}{2}} = \underbrace{\left(D^{(2)} * D^{(2)}\right) * \left(D^{(2)} * D^{(2)}\right) * \cdots * \left(D^{(2)} * D^{(2)}\right)}_{\frac{n}{2^2}} =$$

$$= \underbrace{\left(D^{(2^2)}\right) * \left(D^{(2^2)}\right) * \cdots * \left(D^{(2^2)}\right)}_{\frac{n}{2^2}}$$

וכו'

ברמה כללית j של העץ נחשב:

$$\underbrace{D^{(2^{j-1})} * D^{(2^{j-1})} * \cdots * D^{(2^{j-1})}}_{\frac{n}{2^{j-1}}} = \underbrace{\left(D^{(2^{j-1})} * D^{(2^{j-1})}\right) * \left(D^{(2^{j-1})} * D^{(2^{j-1})}\right) * \cdots * \left(D^{(2^{j-1})} * D^{(2^{j-1})}\right)}_{\frac{n}{2^j}} =$$

$$= \underbrace{\left(D^{(2^j)}\right) * \left(D^{(2^j)}\right) * \cdots * \left(D^{(2^j)}\right)}_{\frac{n}{2^j}}$$

וכו'

וברמה ה- $k=\log_2(n)$ של העץ נחשב:

$D^{(2^{k-1})} * D^{(2^{k-1})} = D^{(2^k)} = D^{(n)}$.

עד כאן תאור המעגל הנדרש.

א. נתח (בקצרה) זמן ריצה כולל $T(m,n)$ ונתח עלות כוללת $C(m,n)$ לחישוב $D^{(n)}$ במעגל הנ"ל. השתמש בתוצאת תרגיל לעיל. שים לב שכאן $m=m_0+\log_2(n)$.

ב. בהנחה שזמן הריצה הסדרתי הטוב ביותר הוא: $T_S^*(m,n)=\Theta(m\cdot n^3)$ האם המעגל אופטימאלי בעלות?

ג. האם המעגל אופטימאלי בזמן?
דון בשני מקרים: כאשר n קבוע ו- m_0 משתנה או כאשר n משתנה ו- m_0 קבוע.

<u>הערה:</u>

במימוש סדרתי לחשב את $d_{i,j}^{(k)} = \bigwedge_{\ell=1}^{n}\left(d_{i,\ell}^{(k-1)}+d_{\ell,j}^{(1)}\right)$

ע"י 4 לולאות מקוננות: $k=1,\ldots,n, i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,n, \ell=1,\ldots,n$ לוקח $\Theta(n^4)$

גירסה זו ניתנת לשיפור ל- $\Theta(n^3\log_2(n))$ ע"י חישוב חזקות המטריצות הנ"ל בשיטת העלאה חוזרת בריבוע (בדומה לעץ הבינארי הנ"ל אלא שכל אופרטור * כעת מחושב סדרתית).

גירסה אחרת של פלויד-וארשאל מוגדרת כדלקמן:

עבור $0\le k\le n$ וע"י $d_{i,j}^{(k)}$ נגדיר את משקלו של מסלול מינימאלי מקדקוד v_i לקדקוד v_j (מסלול פשוט ללא הגבלת הכליות) המכיל קדקודי ביניים כקדקודים עם אינדקסים מתוך הקבוצה $\{1,\ldots,k\}$ (עבור $k=0$ קבוצה זו ריקה).

נגדיר ע"י $\pi_{i,j}^{(k)}=\left(\Pi^{(k)}\right)_{i,j}$ את האינדקס של הקדקוד הקודם המיידי של v_j במסלול אופטימאלי כנ"ל.

כעת, נוסחת התכנון הדינאמי היא: $d_{i,j}^{(k)}=\min\left\{d_{i,j}^{(k-1)}, d_{i,k}^{(k-1)}+d_{k,j}^{(k-1)}\right\}$ (תלוי אם קדקוד מספר k מופיע או לא מופיע במסלול הנ"ל). הקלט הוא מטריצה עם איברים $d_{i,j}^{(0)}$. בגירסה זו המינימום הוא בין שני ערכים בלבד ולכן דרושות 3 לולאות מקוננות לחישוב סדרתי: $k=0,1,\ldots,n, i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,n$ ובסה"כ $\Theta(n^3)$.

זו הגירסה הסדרתית הכי יעילה הידועה לפתרון הבעיה.
אך גירסה זו לא ניתנת למימוש מקבילי יעיל כ"כ (וודא זאת!) ודווקא הגירסה הנ"ל הפחות יעילה סדרתית ניתנת למימוש מקבילי יעיל יותר.

<u>מסקנה:</u> באלגוריתמיקה מקבילית לא זורקים שום אלגוריתם לפח ולעתים דווקא אלגוריתם פחות יעיל סדרתית מאפשר מימוש יותר יעיל מקבילית.

11. נתונה סדרה של n מספרים טבעיים $\langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle$ כאשר כל מספר $a_j = \left\langle a_j^{(m-1)}, a_j^{(m-2)}, \ldots, a_j^{(0)} \right\rangle_2$ מיוצג ע"י m ביטים.

<u>דרוש:</u> מעגל חומרה מקבילי יעיל לחישוב הסכום: $\sum_{j=1}^{n} a_j$. ללא הגבלת הכלליות ניתן להניח ש- $n = 2^k$ (וודא זאת!). בתרגיל הבא תדרש להשוות בין שתי האסטרטגיות הבאות לפתרון:

<u>אסטרטגיה א:</u> שימוש בעץ בינארי (מלא ושלם) כאשר כל אופרטור בעץ הוא מעגל מסוג סוכם צופה-נשא.

<u>אסטרטגיה ב:</u> שימוש בעץ וואלאס (Wallas Tree) לביצוע רדוקציה של הסכום $\sum_{j=1}^{n} a_j$ לסכום של שני מספרים ושימוש בסוכם צופה-נשא לחישוב הסכום הסופי. נזכיר שכל אופרטור בעץ וולאס הוא סוכם שומר-נשא כאשר כל סוכם שומר-נשא מבצע רדוקציה של סכימת שלושה מספרים $x+y+z$ (בגודל ייצוג זהה) לשני מספרים u,v בעלי סכום זהה $x+y+z=u+v$ (על חשבון הגדלת הייצוג של v בביט אחד נוסף).

א. נתח זמן ריצה $C_א(m,n)$ ועלות $T_א(m,n)$ של אסטרטגיה א.
ב. נתח זמן ריצה $C_ב(m,n)$ ועלות $T_ב(m,n)$ של אסטרטגיה ב.
ג. איזו אסטרטגיה עדיפה מבחינת העלות?
ד. איזו אסטרטגיה עדיפה מבחינת זמן ריצה?
ה. האם האסטרטגיה העדיפה מבחינת העלות אופטימאלית בעלות?
ו. האם האסטרטגיה העדיפה מבחינת זמן הריצה אופטימאלית בזמן?

<u>הערה:</u> מאחר וכל פעולת סכימה עלולה להגדיל את גודל הייצוג ומאחר ויהיה זה מסורבל לדון בשיטות הנ"ל ולנתח אותן כאשר מתחשבים בשינויי גודל הייצוג בכל רמה בעץ (בעץ הבינארי או בעץ וולאס) נוקטים בשיטה הבאה: מחשבים את גודל הייצוג של הפלט (כמובן, בהנחה שזה הגודל הדומיננטי בכל שלב בחישוב) ולוקחים כל מעגל ביניים ומתאימים אותו לפי גודל זה. איך נדע ש-"לא הגזמנו" בניתוח ואולי פסלנו בשל כך שיטה טובה בגלל עודף "הנחות מקלות"!?

1. אם המעגל אופטימאלי בעלות נדע שהגורמים שהתווספו לעלות אינם דומיננטיים. כמו כן אם המעגל משיג את זמן הריצה המקבילי התאורטי הטוב ביותר האפשרי לפתרון הבעיה - נדע שהגורמים שהתווספו לזמן אינם דומיננטיים.
2. אפשר לעקוב אחר תוספת העלות ותוספת הזמן כתוצאה מהגדלת גודל הייצוג כנ"ל ולוודא שהגורמים שהתווספו אינם דומיננטיים.

כעת, מאחר וכל מספר a_j בסדרה הנ"ל מיוצג ע"י m ביטים הרי ש- $a_j \le 2^m - 1 < 2^m$.

לפיכך, $\sum_{j=1}^{n} a_j \le n \cdot (2^m - 1) < n \cdot 2^m = 2^{m+\log_2(n)} \le 2^{m+\lceil \log_2(n) \rceil}$. כלומר, גודל הייצוג של פלט המעגל $\sum_{j=1}^{n} a_j$ לא עולה על $m + \lceil \log_2(n) \rceil$ (כאן $m + \lceil \log_2(n) \rceil = m + \log_2(n) = m + k$ עפ"י ההנחה ש- $n = 2^k$).

לפיכך, נתאים כל מעגל ביניים למספרים בגודל ייצוג $m + \log_2(n)$. כעת, אפשר לעקוב אחרי הגורם $\log_2(n)$ שהתווסף לגודל הייצוג ולעקוב אחר הגורמים הנוספים שהוא גורר עבור זמן הריצה והעלות ולראות שגורמים אלה פחות דומיננטיים ביחס לאחרים.

12. נתונות שתי מטריצות A, B מגודל $n \times n$ כ"א המכילות מספרים טבעיים. כל אחד מרכיבי המטריצות $a_{i,j} = (A)_{i,j}, b_{i,j} = (B)_{i,j}$ מיוצג ע"י m ביטים כ"א.

<u>דרוש:</u> מעגל חומרה מקבילי יעיל לחישוב המכפלה $C = A \cdot B$.

<u>תזכורת:</u> יהי $c_{i,j} = (C)_{i,j}$. אז, מכפלה (רגילה) של מטריצות מוגדרת ע"י $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \cdot b_{k,j}$.

א. הגדר מעגל מקבילי יעיל לחישוב $C = A \cdot B$.
ב. נתח זמן ריצה $T(m,n)$ ועלות $C(m,n)$. שים לב לשינויים בגודל הייצוג הן בעקבות פעולות הכפל והן בעקבות פעולות הסכימה.
ג. האם המעגל אופטימאלי בעלות? (ביחס לזמן הריצה הסדרתי הטוב ביותר <u>הידוע</u> כיום עבור כפל מטריצות).
ד. האם המעגל משיג את זמן הריצה התאורטי הטוב ביותר האפשרי? האם המעגל אופטימאלי בזמן?

<u>רמז:</u> השתמש ב- n^3 כופלי עץ וולאס לחישוב כל המכפלות $\hat{c}_{i,k,j} = a_{i,k} \cdot b_{k,j}$ במקביל עבור כל $1 \le i, k, j \le n$. לאחר מכן לחישוב הסכומים $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \hat{c}_{i,k,j}$ לכל $1 \le i, j \le n$ במקביל - השתמש ב- n^2 מעגלים מתרגיל הקודם.

בהצלחה!