

גרפים 1.5

מה נלמד היום

- נראה הרחבות לגרף הסטנדרטי שאנו מכירים
- נתעסק ב:
- גרפים מכוונים
- הוספת פונקציית משקל $w : E \rightarrow ??$

חזרה על השיעור הקודם

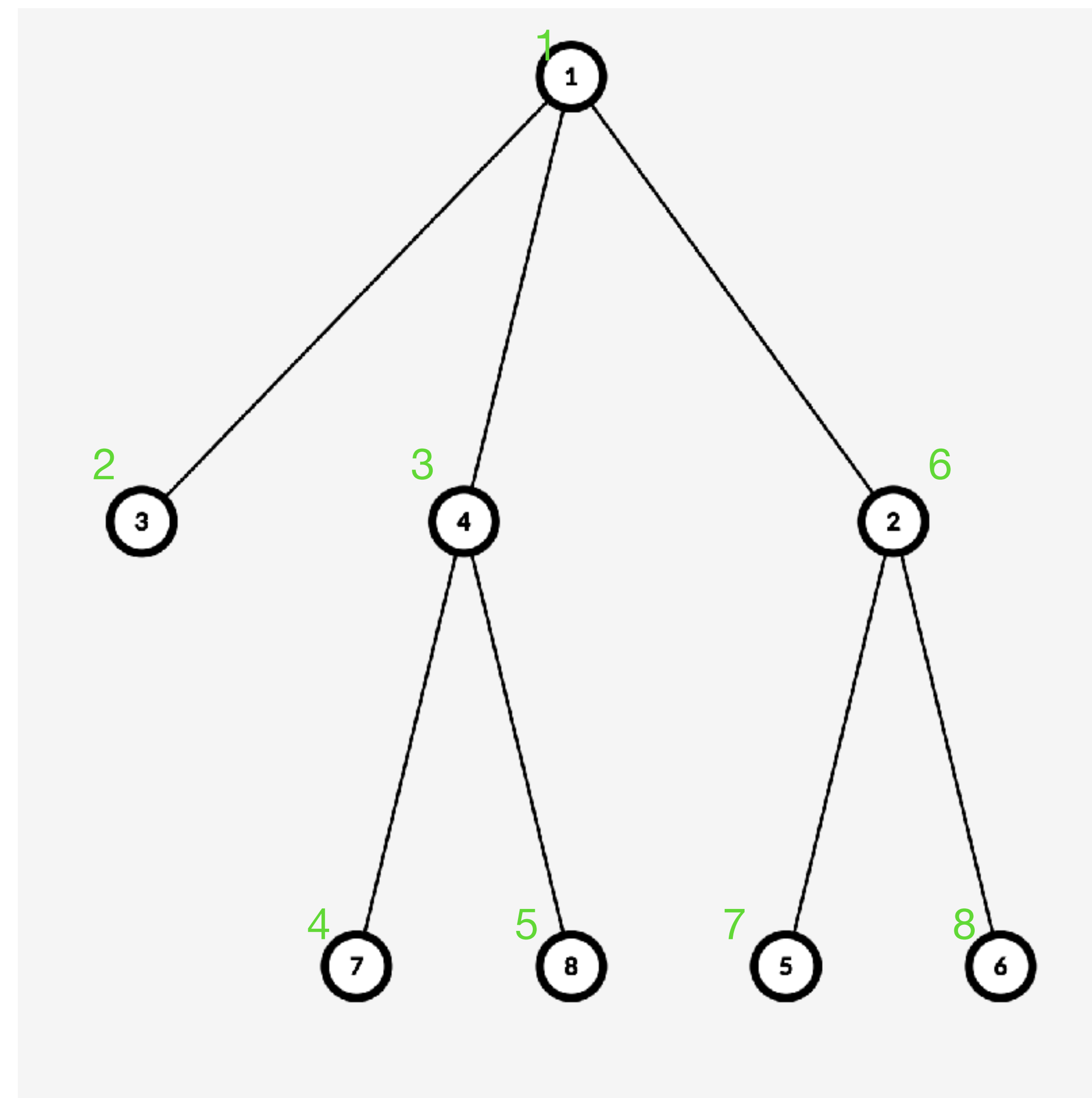
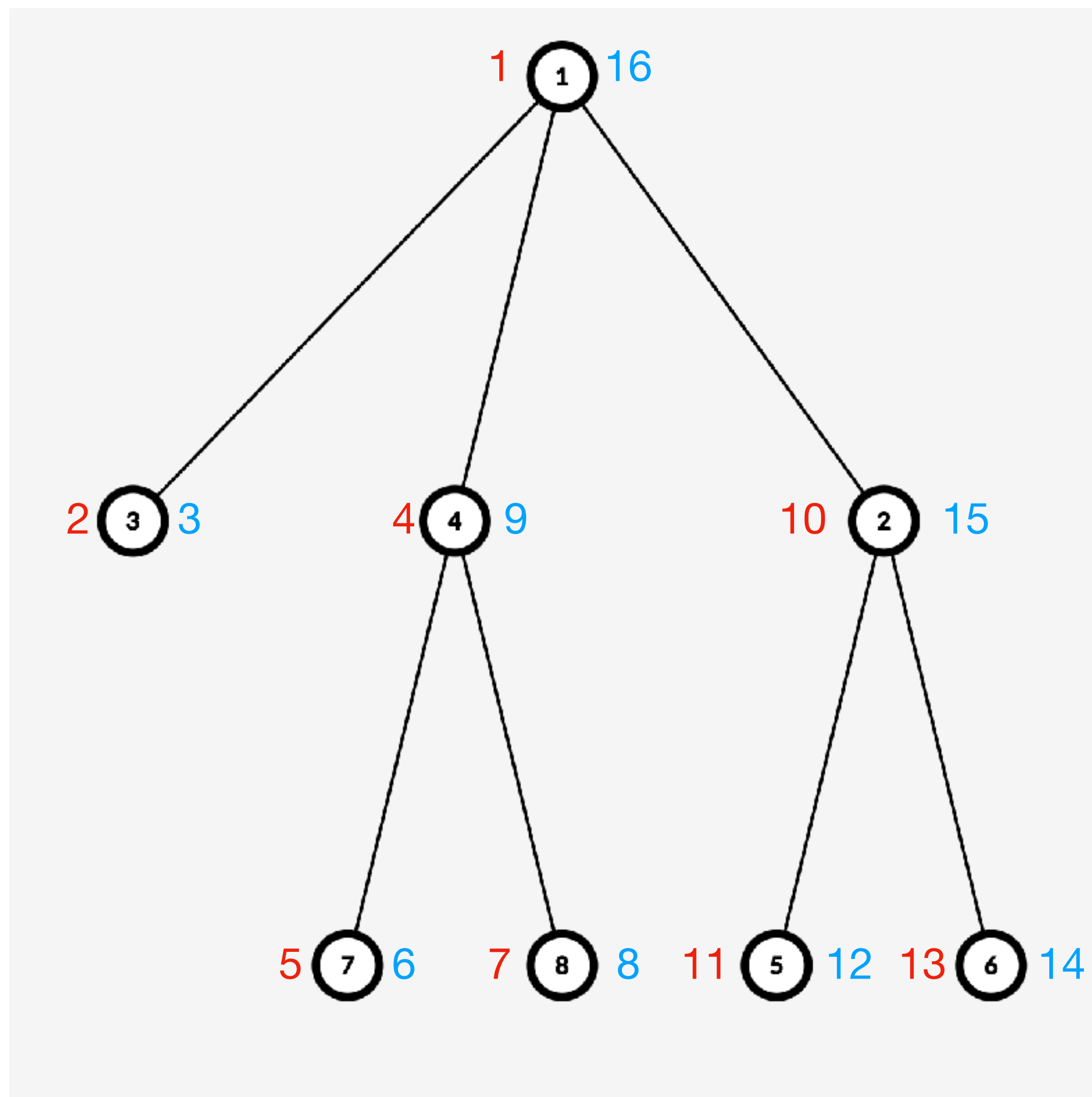
גרפים, ייצוג בקוד, וכו'

- גרף הוא זוג של קבוצות: $G = (V, E)$ כאשר V קבוצת הקודקודים (לרוב אצלנו $V = [1, n]$), ו- E קבוצת הקשתות (וקשת מכוונת הינה הזוג (u, v)).
- ישנן 2 שיטות (פופולאריות) לייצוג גרפים בקוד: **רשימת שכנויות** ו-**מטריצת שכנויות**. לרוב נשתמש ברשימת שכנויות מכיוון שלא צריך הרבה זכרון כדי להחזיק גרף.
- ברשימת שכנויות נשמור מערך בגודל n , וכל כניסה בו תהיה רשימה (או מערך דינאמי). כקוד, נשמור `vector<vector<int>>` (או לפעמים `vector<int>[maxn]`).
- לדוגמה, הכניסה $g[v]$ תהיה הרשימה של כל הקודקודים השכנים ל- v (כלומר, קיימת קשת (v, x) כאשר $x \in g[v]$).

אלגוריתמי חיפוש: DFS ו-BFS

- חיפוש לעומק ולרוחב בגרף. זמן הפעולה של אלגוריתמים אלו הינו ליניארי ולכן לרוב ניתן להריץ אותם על גרפים מספר קבוע של פעמים.
- אלגוריתם ה-BFS מאפשר לנו לדעת מרחקים של כל הצמתים מצומת קבועה, בעוד ש-DFS מאפשר לנו לדעת דברים על מבנה הגרף, לדוגמה: רכיבי קשירות, איבר בתת עץ, דו-צדדיות ועוד.
- נזכר בריצה ובמימוש של האלגוריתמים:

DFS



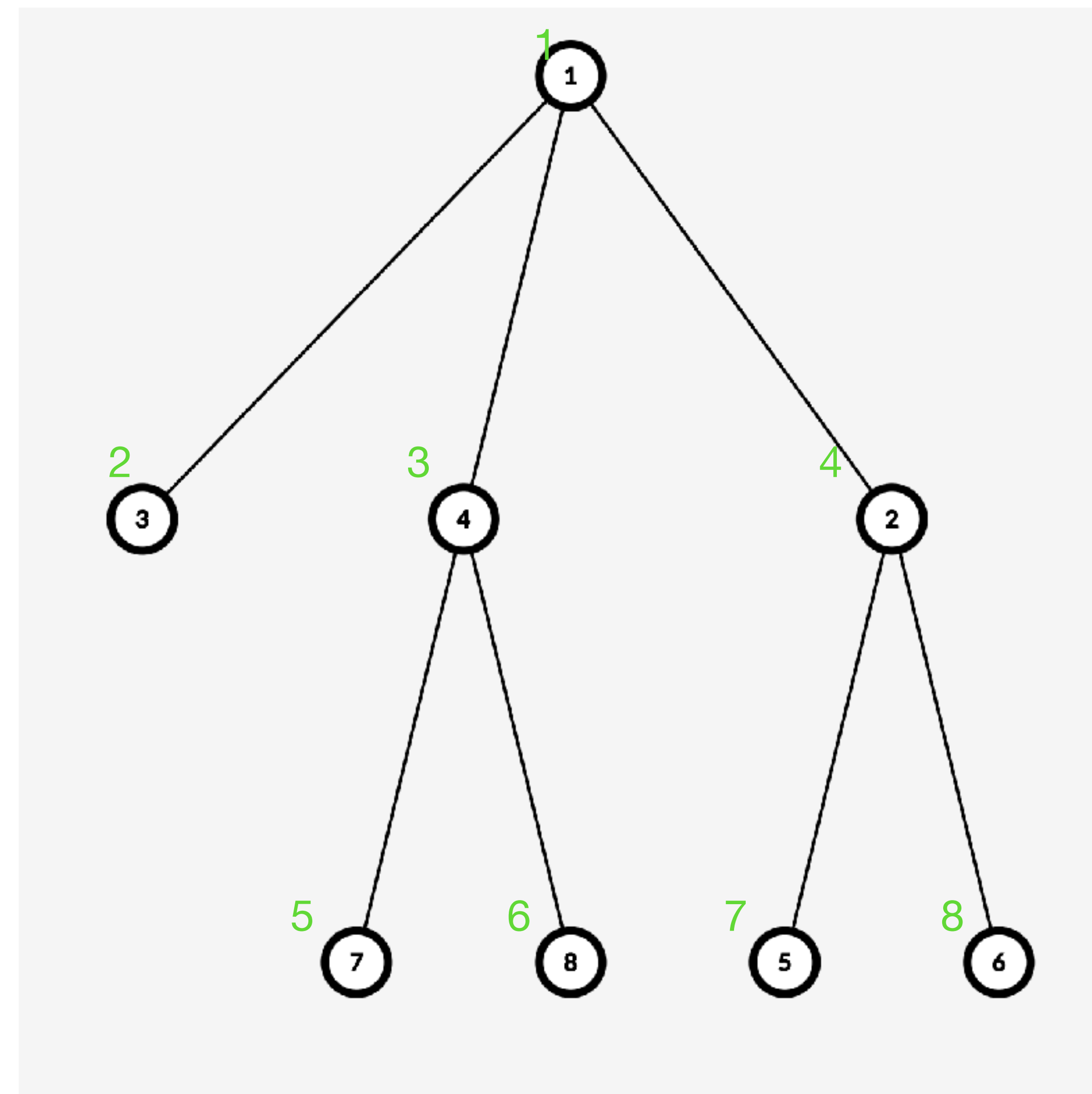
DFS

```
vector<vector<int>> graph;
int time = 1;
int in_time[maxn] = {0};
int out_time[maxn] = {0};

void DFS(int u) {
    if(in_time[u]) return; // already visited u

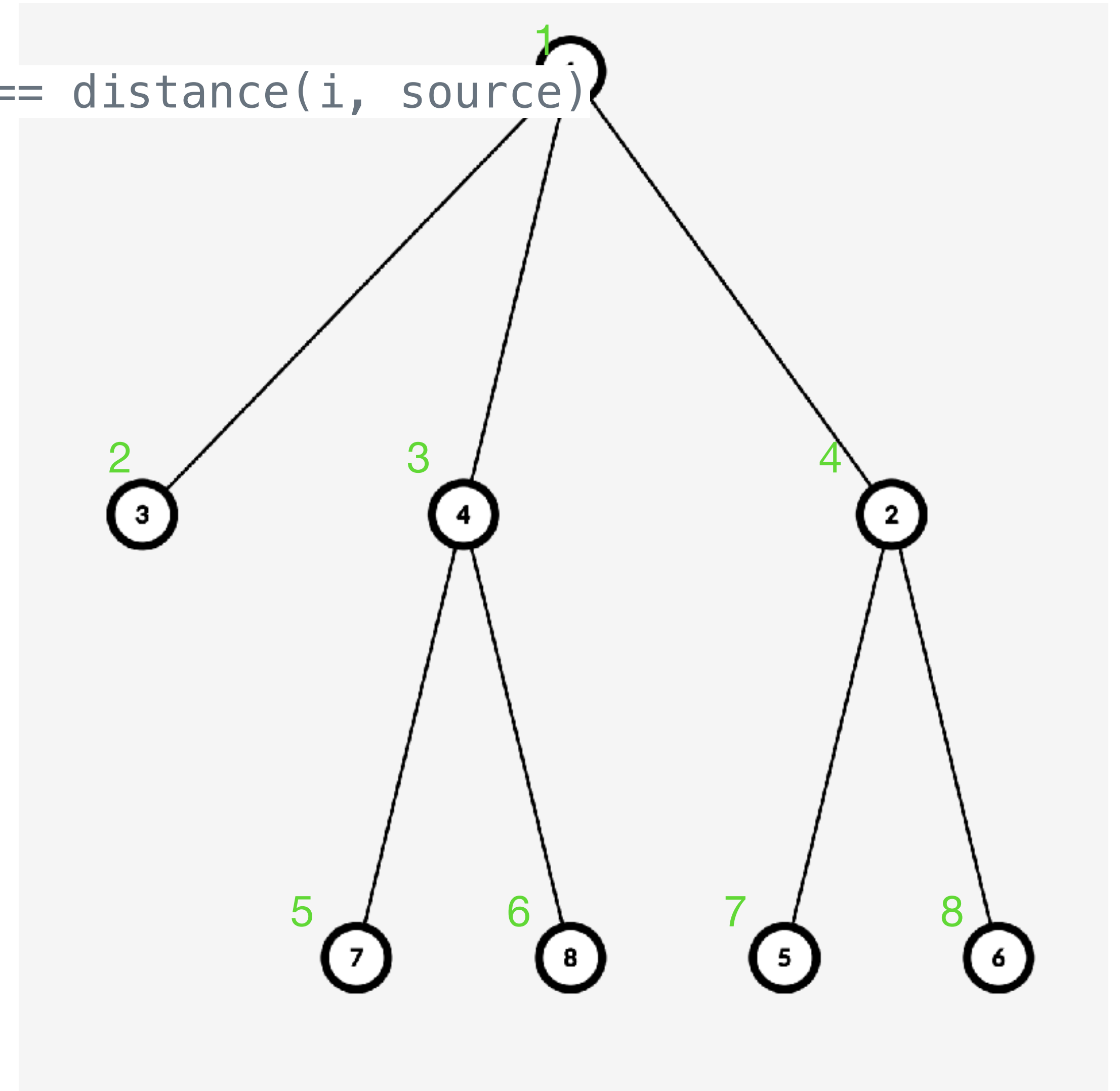
    in_time[u] = time++;
    for(auto &v : graph[u]) DFS(v);
    out_time[u] = time++;
}
```

BFS



BFS

```
vector<int> bfs(int source) {  
    queue<int> q;  
    vector<int> distances(n, 0); // distances[i] == distance(i, source)  
    vector<bool> visited(n, false);  
    q.push(source);  
    visited[source] = true;  
  
    while(!q.empty()) {  
        int u = q.front();  
        q.pop();  
        for(auto v : graph[u]) {  
            if(!visited[v]) {  
                visited[v] = true;  
                distances[v] = distances[u] + 1;  
                q.push(v);  
            }  
        }  
    }  
  
    return distances;  
}
```



גרף מכון

גרף מכוון

- נזכר, גרף מוגדר כזוג $G = (V, E)$. במקרה והגרף מכוון אז הקבוצה E תראה כך:

$$E = \{(u, v) \mid \text{edge from } u \text{ to } v\}$$

- כאשר הדגש הוא על כך שקשת היא זוג סדור ולא קבוצה בגודל 2.
- בגלל שעכשיו היחס $\hookrightarrow \equiv$ "exists path between u, v " אינו סימטרי אזי יש משמעות נוספת ל"קיים מסלול בין u ל" v "

גרף מכוון: רכיבי קשירות

- נגדיר כעת יחס חדש:

$$\mapsto = \{(u, v) \mid u \hookrightarrow v \wedge v \hookrightarrow u\} \subseteq E^2$$

- היחס \mapsto הוא יחס שקילות ולכן נתעניין במחלקות שקילות שלו. כפי שאפשר לנחש, לכל מחלקה כזו קוראים **רכיב קשירות**, ולפי ההגדרה של מחלקת שקילות לכל שני צמתים u, v אשר נמצאים באותה מחלקה קיים מסלול ביניהם.
- שימו לב שאם קיים מסלול בין u ל- v אז לא בהכרח הצמתים באותו רכיב/מחלקה.

מציאת רכיבי קשירות - האלגוריתם של Kosaraju

- האלגוריתם מאפשר לנו למצוא רכיבי קשירות בזמן ליניארי
- ע"י שני קריאות ל-DFS נוכל לגלות את רכיבי הקשירות של הגרף
- אומנם קיים אלגוריתם יעיל יותר (Tarjan), אבל נלמד את האלגוריתם הנ"ל מכיוון שיותר קל להבין את המימוש שלו.

מציאת רכיבי קשירות - האלגוריתם של Kosaraju

- הכנה: נצטרך לשמור את המשתנים הבאים:

```
vector<int> g[maxn], gt[maxn];  
vector<vector<int>> scc{{{}}};  
int sc = 0;  
vector<bool> visited(maxn, false);  
vector<int> order;
```

- כאשר gt מחזיק את הגרף ההופכי $(v, u) \in E(G_T) \iff (u, v) \in E(G)$, scc יחזיק את רכיבי הקשירות (בכל כניסה נקבל לראות אילו צמתים ברכיב הזה)

- $order$ -ו נגלה בהמשך:

מציאת רכיבי קשירות - האלגוריתם של Kosaraju

- האלגוריתם סורק את הגרף ע"י שני הרצות של DFS. בהרצה הראשונה נשמור את הסדר בו יצאנו מהצמתים, ולאחר מכן נעבור בצורה הפוכה על סדר הביקור ונסרוק את הגרף ההופכי.
- כך, לאחר ההרצה השנייה נקבל את רכיבי הקשירות.

מציאת רכיבי קשירות - האלגוריתם של Kosaraju

```
void dfs1(int u) {  
    if(visited[u]) return;  
  
    visited[u] = true;  
    for(auto &v : g[u]) dfs1(v);  
  
    order.push_back(u);  
}
```

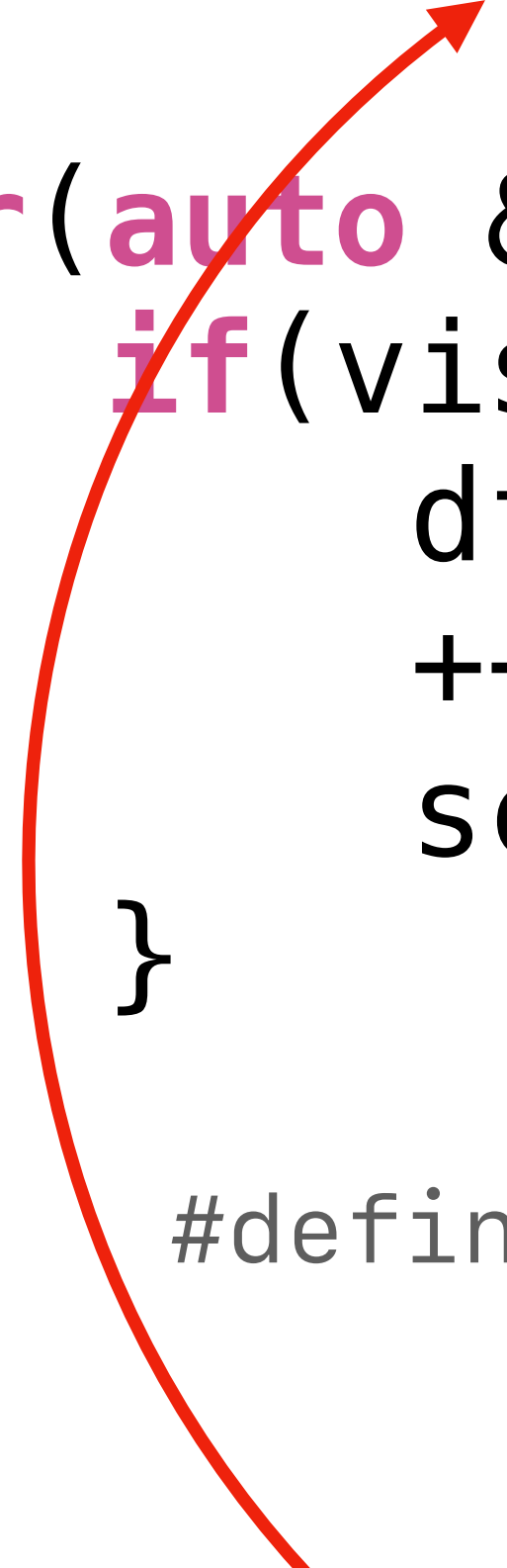

מציאת רכיבי קשירות - האלגוריתם של Kosaraju

```
reverse(all(order));  
  
for(auto &u : order)  
    if(visited[u]) {  
        dfs2(u);  
        ++sc;  
        scc.push_back({});  
    }
```



```
void dfs2(int u) {  
    if(!visited[u]) return;  
  
    visited[u] = false;  
    scc[sc].push_back(u);  
  
    for(auto &v : gt[u]) dfs2(v);  
}
```

מציאת רכיבי קשירות - האלגוריתם של Kosaraju

```
reverse(all(order));  
for(auto &u : order)  
    if(visited[u]) {  
        dfs2(u);  
        ++sc;  
        scc.push_back({});  
    }  
}  
  
#define all(X) X.begin(), X.end()
```



```
void dfs2(int u) {  
    if(!visited[u]) return;  
  
    visited[u] = false;  
    scc[sc].push_back(u);  
  
    for(auto &v : gt[u]) dfs2(v);  
}
```



דג (גמל)

- גרף מכוון $G = (V, E)$ ייקרא DAG (directed acyclic graph) אם אין בו מעגלים מכוונים.
- כלומר $\mapsto = \emptyset$.
- כלומר אין רכיבי קשירות.
- או: גרף יהיה DAG אם ניתן לעשות לו **מיון טופולוגי**.

מיון טופולוגי

- בהינתן DAG, נרצה לסדר את הצמתים לקבוצות כך שבתוך כל קבוצה אין קשתות, ובין קבוצות יש קשתות.
- בהנחה שהגרף שלנו הוא כבר DAG, אז מערך ה-order יהיה בדיוק המיון הטופולוגי שלנו.
- אחרת, נצטרך גם לבדוק שהגרף לא מכיל מעגלים (ניתן לעשות זאת במקביל להרצת ה-DFS הראשון)

פונקציית משקל

פונקציית משקל ◀ מסלולים

מסלולים

• יהי $G = (V, E)$ גרף, $u, v \in V$ צמתים ו- $(e_n)_n$ סדרה (סופית) של קשתות $(e_i \in E)$ כך ש:

$$e_1 = (u, \cdot) \text{ או } \{u, \cdot\}$$

$$e_n = (\cdot, v) \text{ או } \{\cdot, v\}$$

$$\text{אם } e_i = (x, y) \text{ אז } e_{i+1} = (y, \cdot) \text{ (וכן אם הגרף לא מכוון)}$$

מסלולים

- יהי $G = (V, E)$ גרף, $u, v \in V$ צמתים ו- $(e_n)_n$ סדרה (סופית) של קשתות $(e_i \in E)$ כך ש:
[snip]

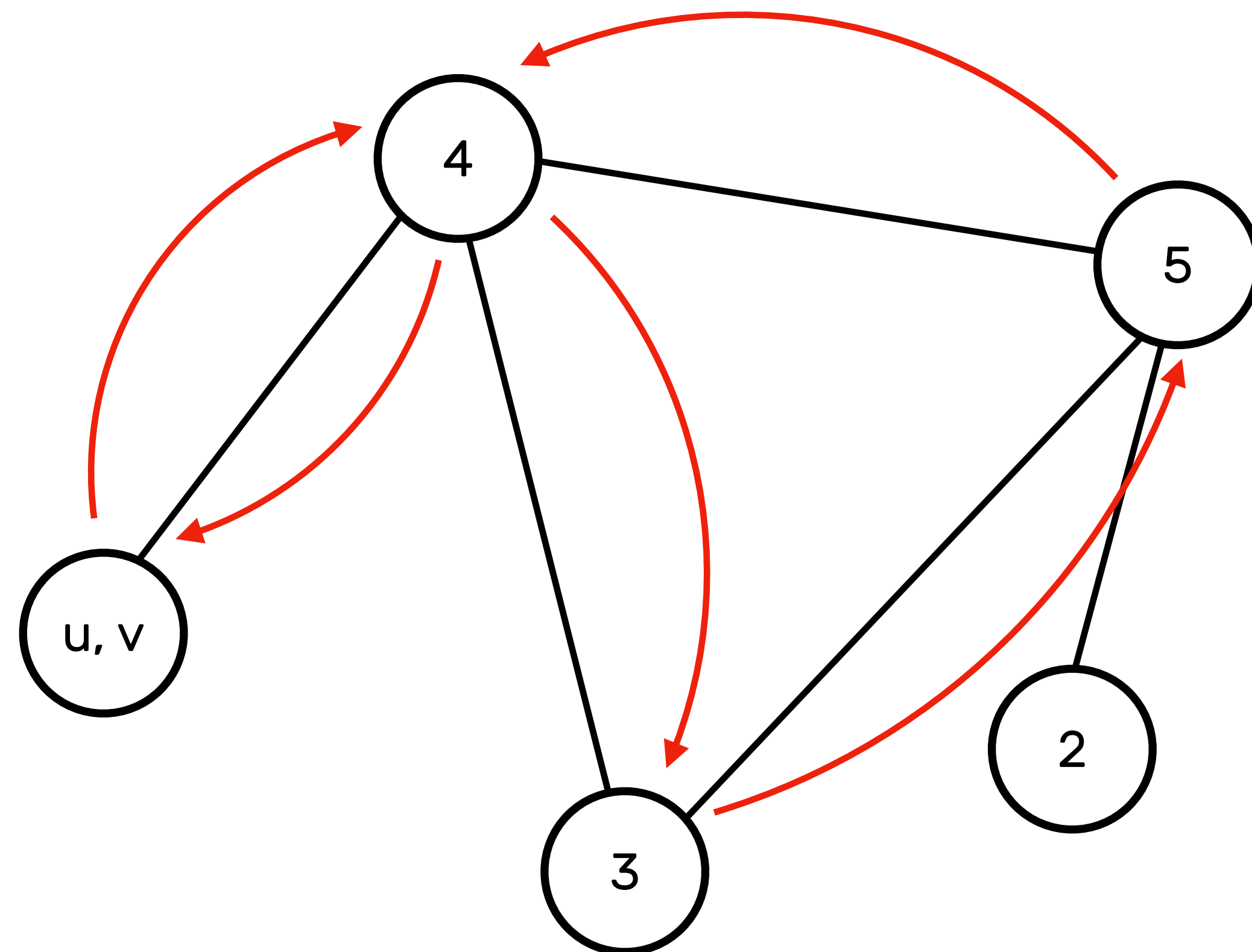
- אז:

- הסדרה (e_n) נקראת **הליכה** בגרף

- אם כל צומת מופיע לכל היותר פעם אחת ב- (e_n) אז הסדרה נקראת **מסלול פשוט**

- אם $u = v$ אז הסדרה נקראת **מעגל**

- אם $\bigcup \{e_i\} = E$ אז הסדרה נקראת **מעגל אוילרי**

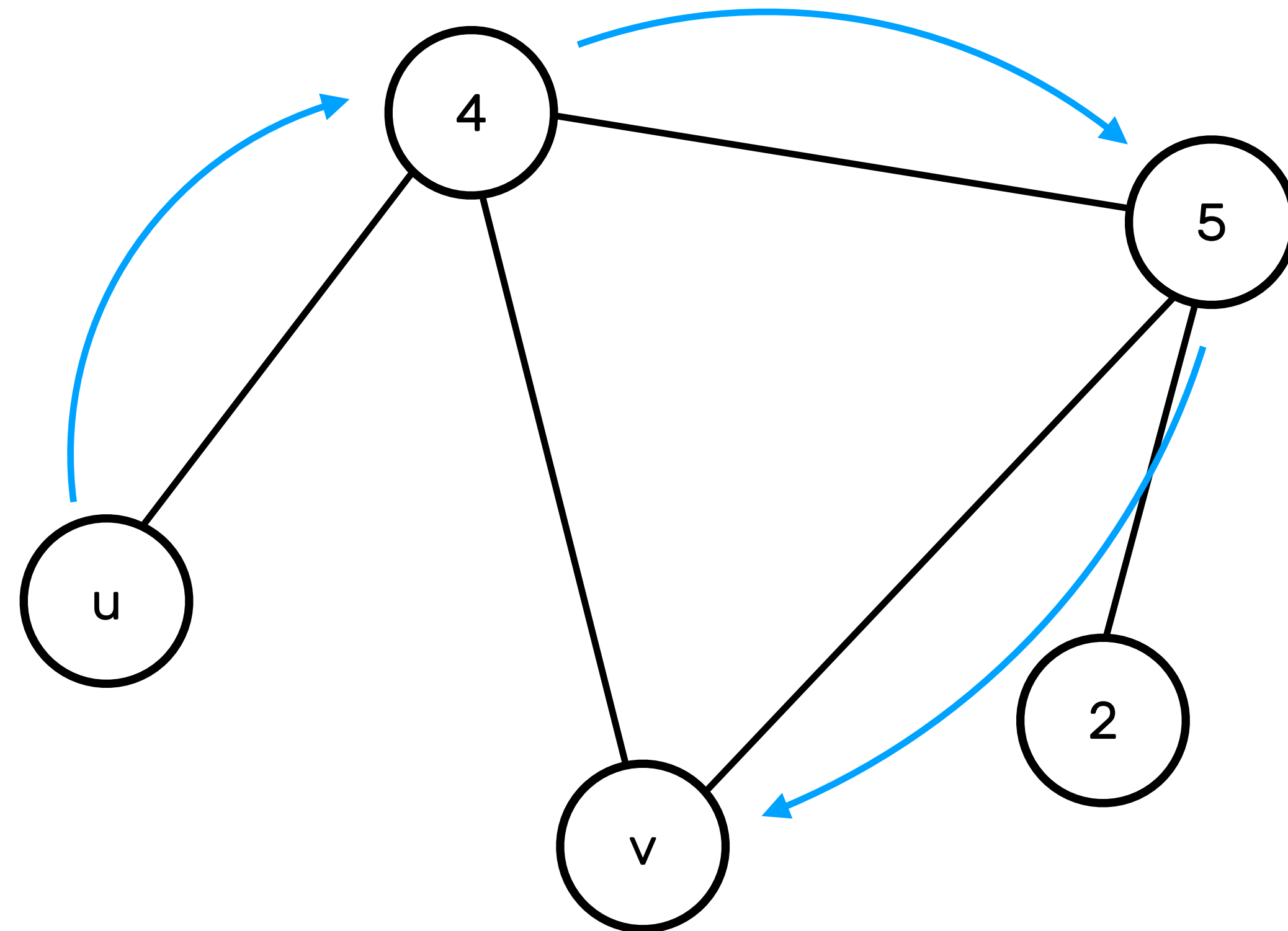


מעגל אוילרי

מעגל

מסלול פשוט

הליכה

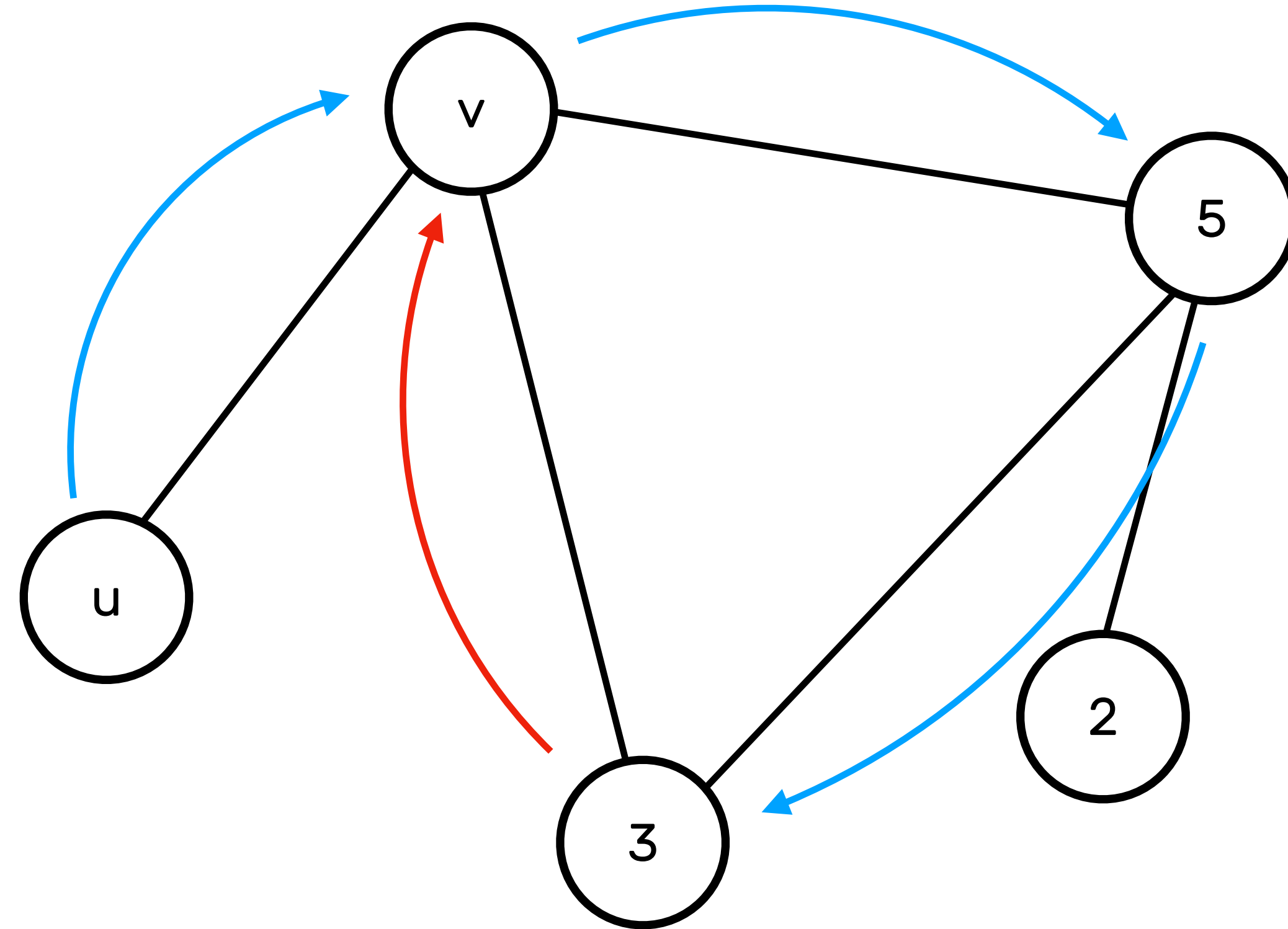


מעגל אוילרי

מעגל

מסלול פשוט

הליכה

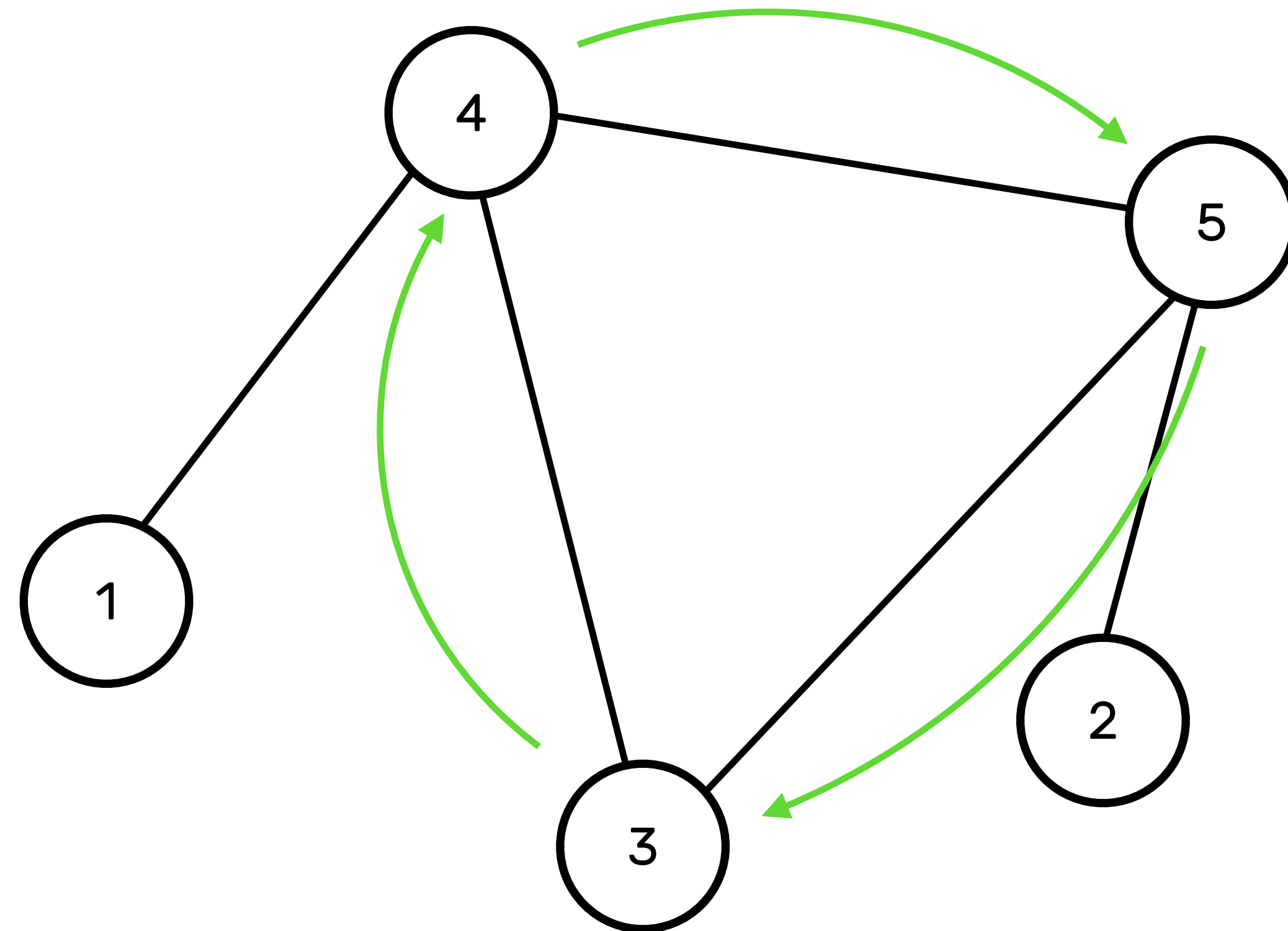


מעגל אוילרי

מעגל

~~מסלול פשוט~~

הליכה

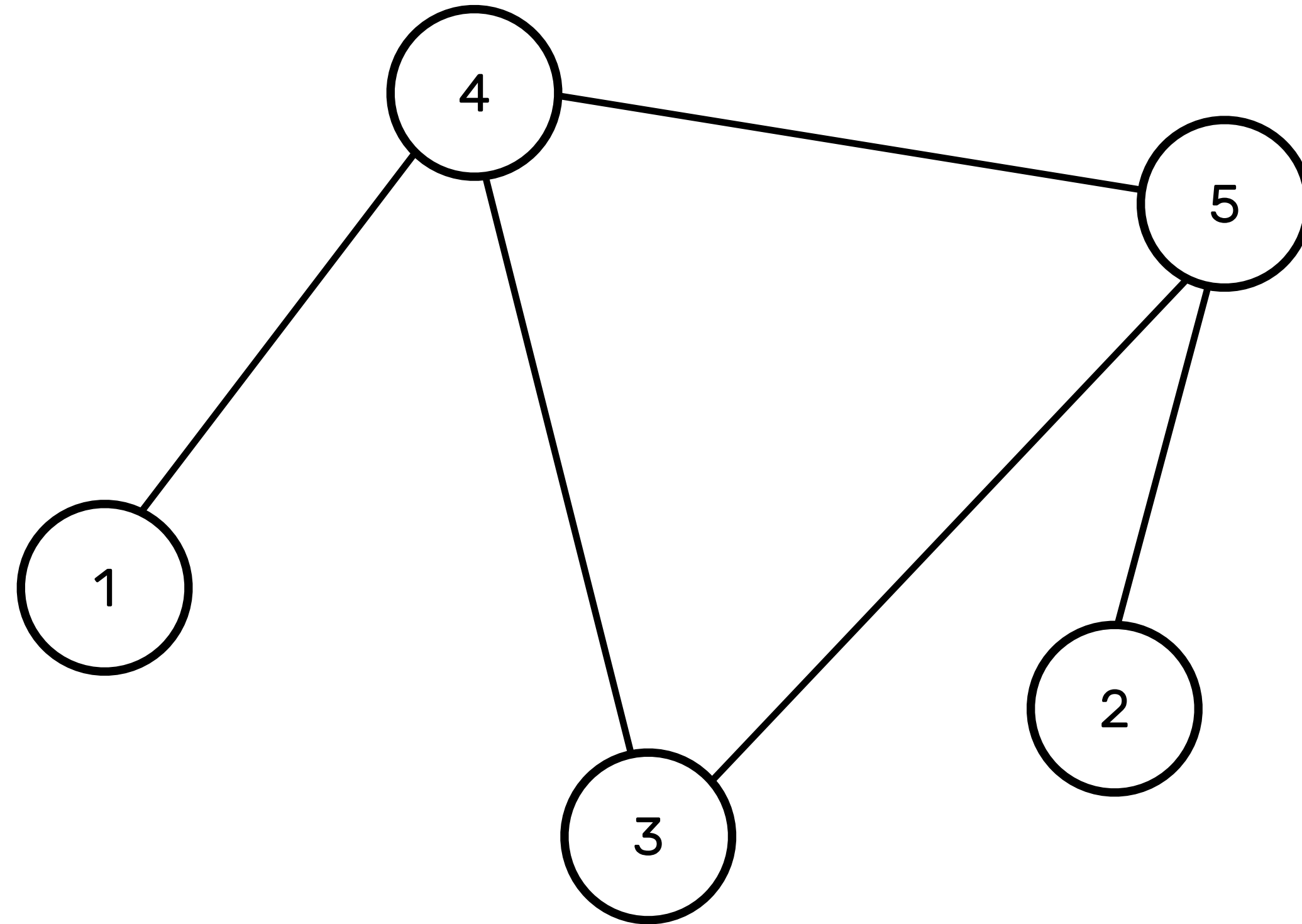


מעגל אוילרי

מעגל

מסלול פשוט

הליכה

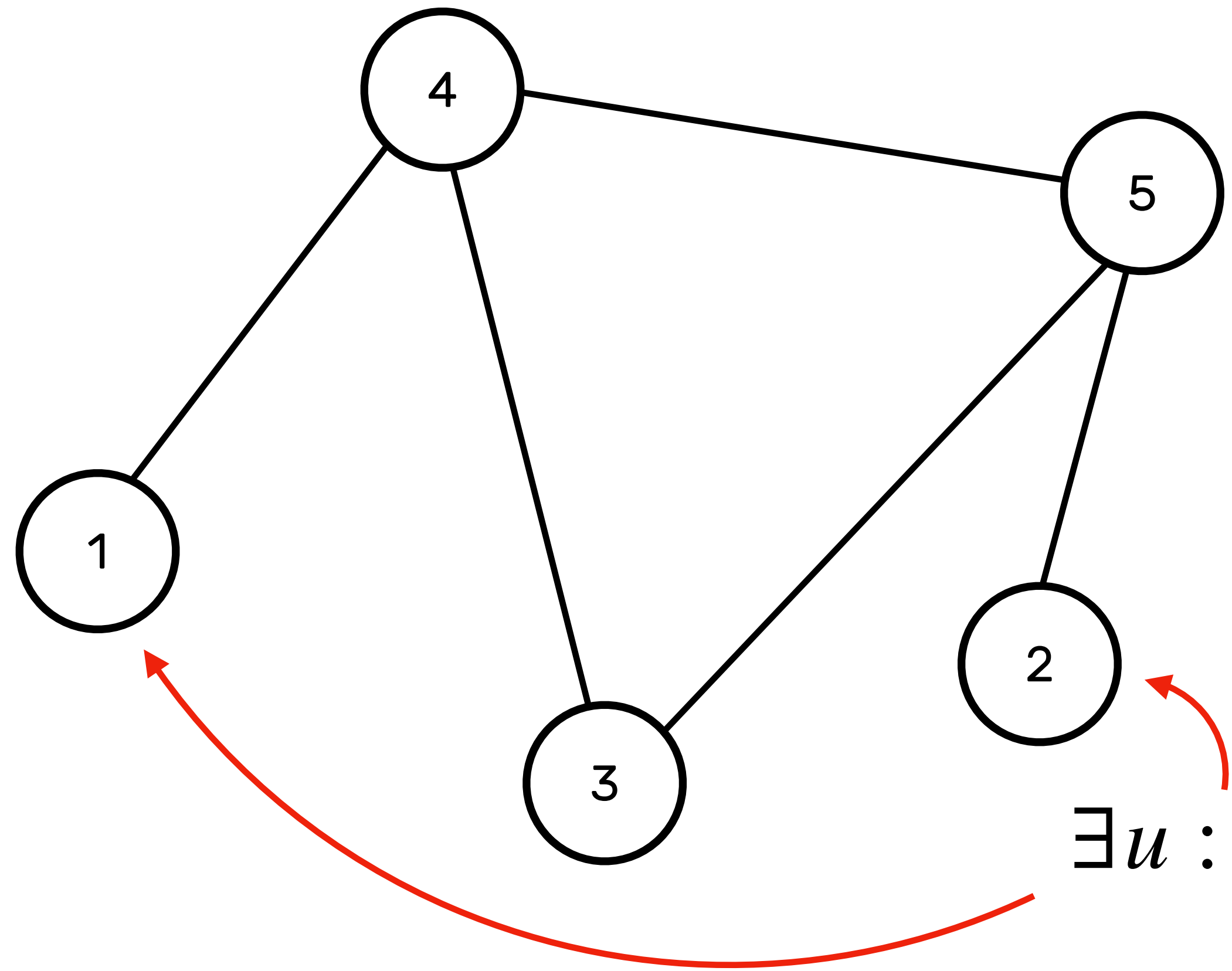


מעגל אוילרי

מעגל

מסלול פשוט

הליכה



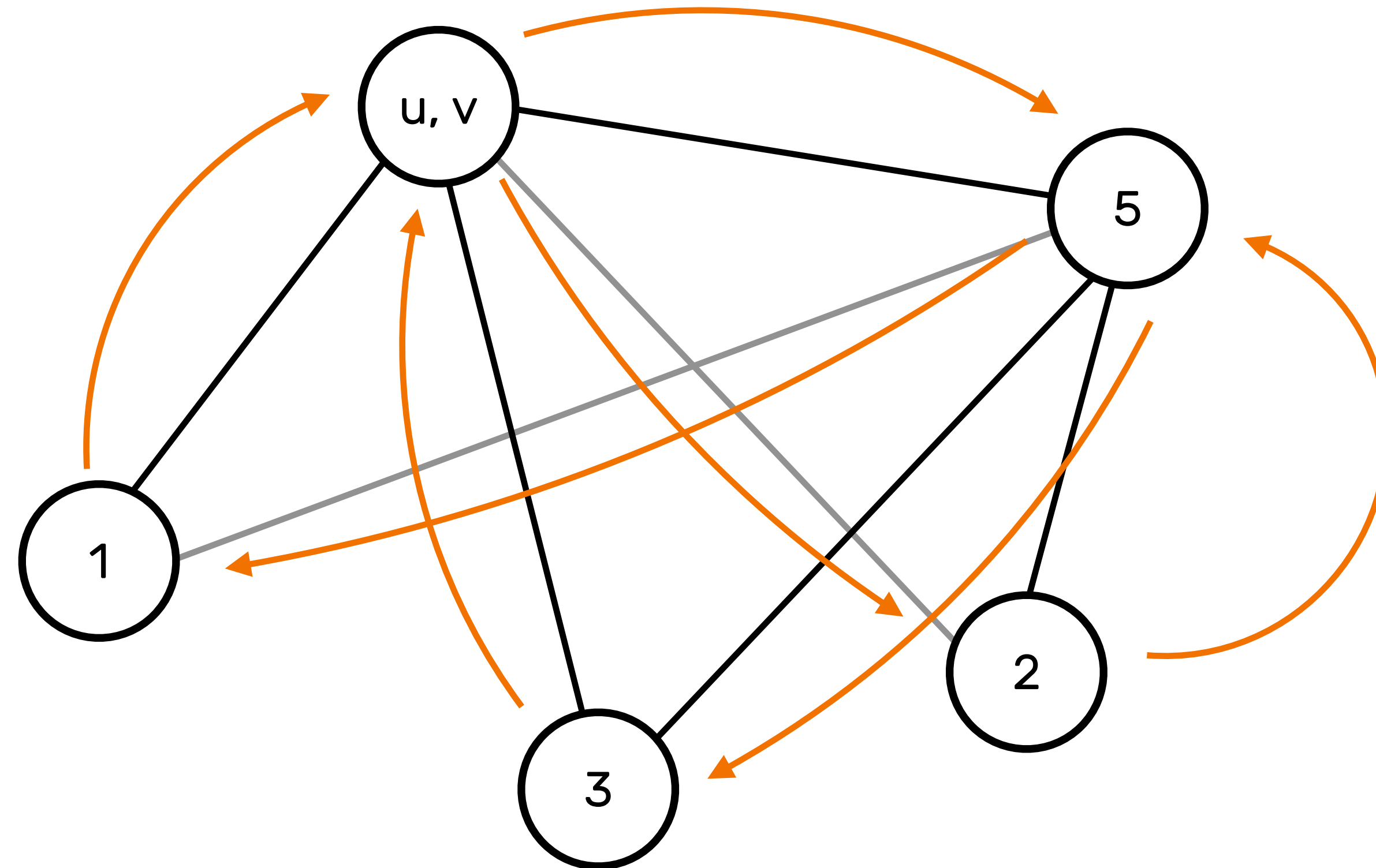
$\exists u : \deg(u) \text{ not even}$

מעגל אוילרי

מעגל

מסלול פשוט

הליכה



מעגל אוילרי

מעגל

מסלול פשוט

הליכה

פונקציית משקל

- נתעניין בפונקציות משקל $w : E \rightarrow A$. בפשטות, הפונקציה מעניקה מחיר לכל קשת.
- נגדיר מחיר/משקל מסלול כסכום הקשתות במסלול, כלומר:

$$w(e_n) = \sum_i w(e_i)$$

פונקציית משקל

- נתעניין בפונקציות משקל $w : E \rightarrow A$. בפשטות, הפונקציה מעניקה מחיר לכל קשת.
- עבור A -ים שונים נראה כי צריך אלגוריתמים אחרים.
- נסתכל על ה- A -ים הבאים:

$$A = \{1\} \cdot$$

$$A = \mathbb{R}^+ \cdot$$

$$A = \mathbb{R} \cdot$$

$$w : E \rightarrow \{1\}$$

- כבר ראינו פונקציית משקל כזאת!
- נשים לב שכעת מחיר מסלול שווה למספר הקשתות במסלול.
- אלגוריתם: נריץ BFS. (ראינו כבר)

$$w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$$

- משקלים ממשיים חיוביים
- אלגוריתם: Dijkstra. בעצם BFS אבל עם תכנות דינאמי

$$w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$$

- משקלים ממשיים חיוביים
- אלגוריתם: Dijkstra. בעצם BFS אבל עם תכנות דינאמי
- מימוש:

1. ניקח את המימוש של BFS

2. נחליף את queue בset (פורמאלית, בpriority_queue)

3. כאשר נבקר צומת v נבדוק האם $d[v] > d[u] + w(u, v)$ - אם כן נעדכן את המרחק אל v

```

vector<int> dijkstra(int source) {
    set<pair<int,int>> s; // set of {dist_to_source, vertex}
    vector<int> distances(n, inf); // equiv. use double
                                    // or any other big number

    distances[source] = 0;
    s.insert({0,source});
    while(!s.empty()) {
        auto [du,u] = *s.begin();
        s.erase(s.begin());

        if(du > distances[u]) continue;

        for(auto& [v, w] : w_graph[u]) {
            if(distances[v] > distances[u] + w) {
                distances[v] = distances[u] + w;
                s.insert({distances[v],v});
            }
        }
    }

    return distances;
}

```

```

vector<int> dijkstra(int source) {
    set<pair<int,int>> s; // set of {dist_to_source, vertex}
    vector<int> distances(n, inf); // equiv. use double
                                   // or any other big number

    distances[source] = 0;
    s.insert({0,source});
    while(!s.empty()) {
        auto [du,u] = *s.begin();
        s.erase(s.begin());

        if(du > distances[u]) continue;

        for(auto& [v, w] : w_graph[u]) {
            if(distances[v] > distances[u] + w) {
                distances[v] = distances[u] + w;
                s.insert({distances[v],v});
            }
        }
    }

    return distances;
}

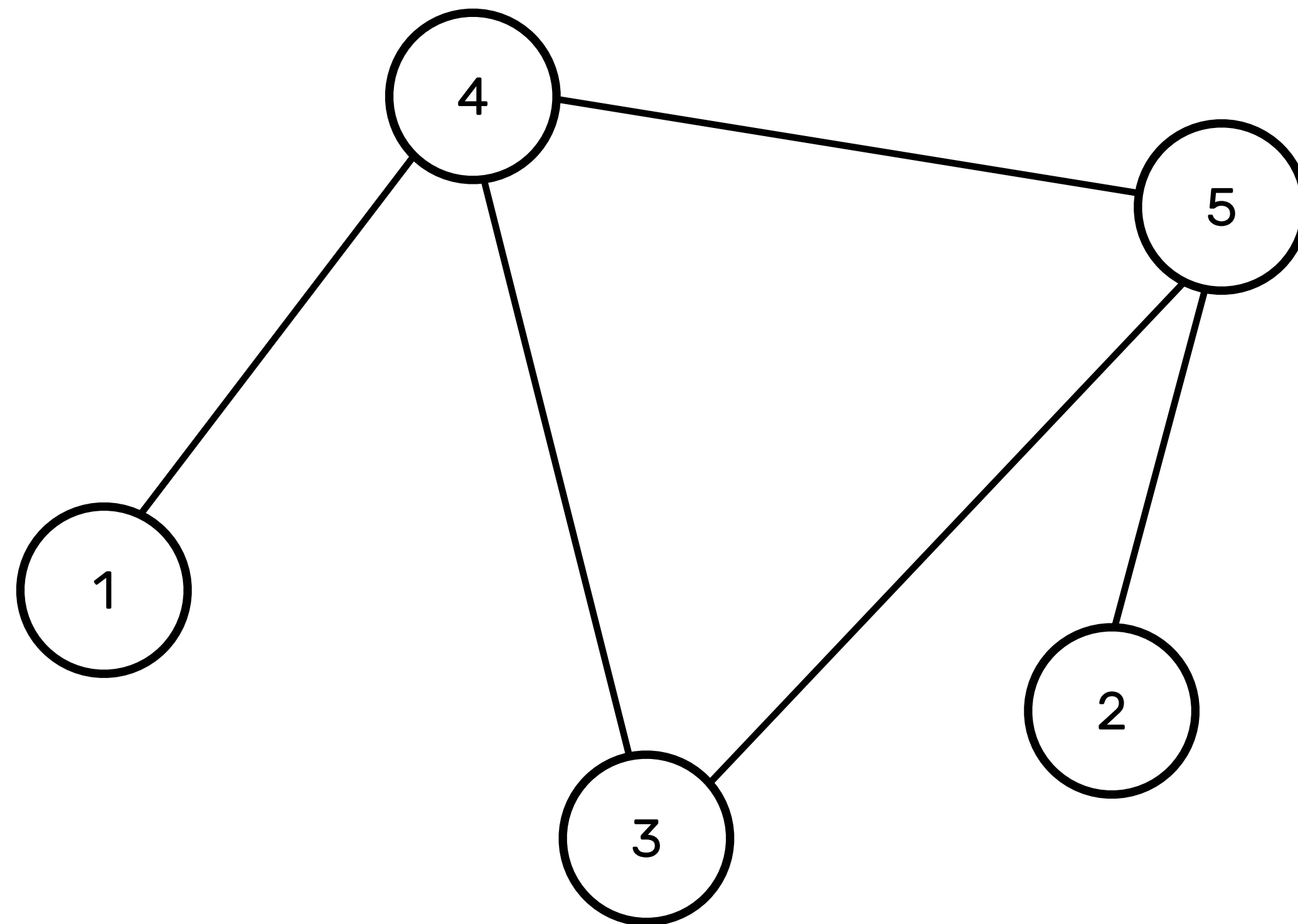
```

העניין המרכזי:

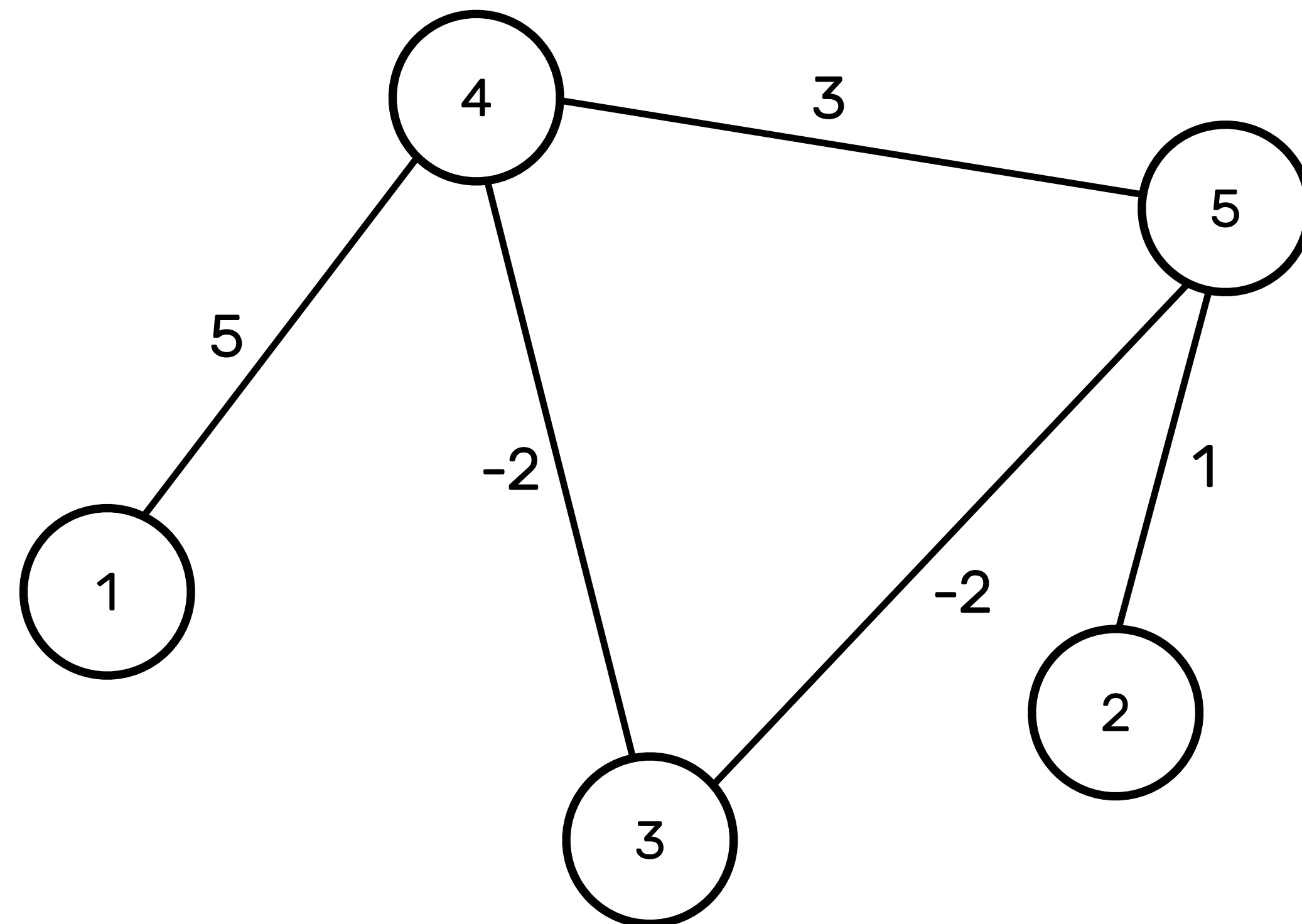
באופן איטרטיבי נמצא את
המרחק הקצר ביותר
מsource אל כל צומת v.

מכיוון שהמשקלים חיוביים
אז בהכרח אפשר להבטיח
שקיים מספר כזה
(האם תמיד אפשר?)

$$w : E \rightarrow \mathbb{R}$$

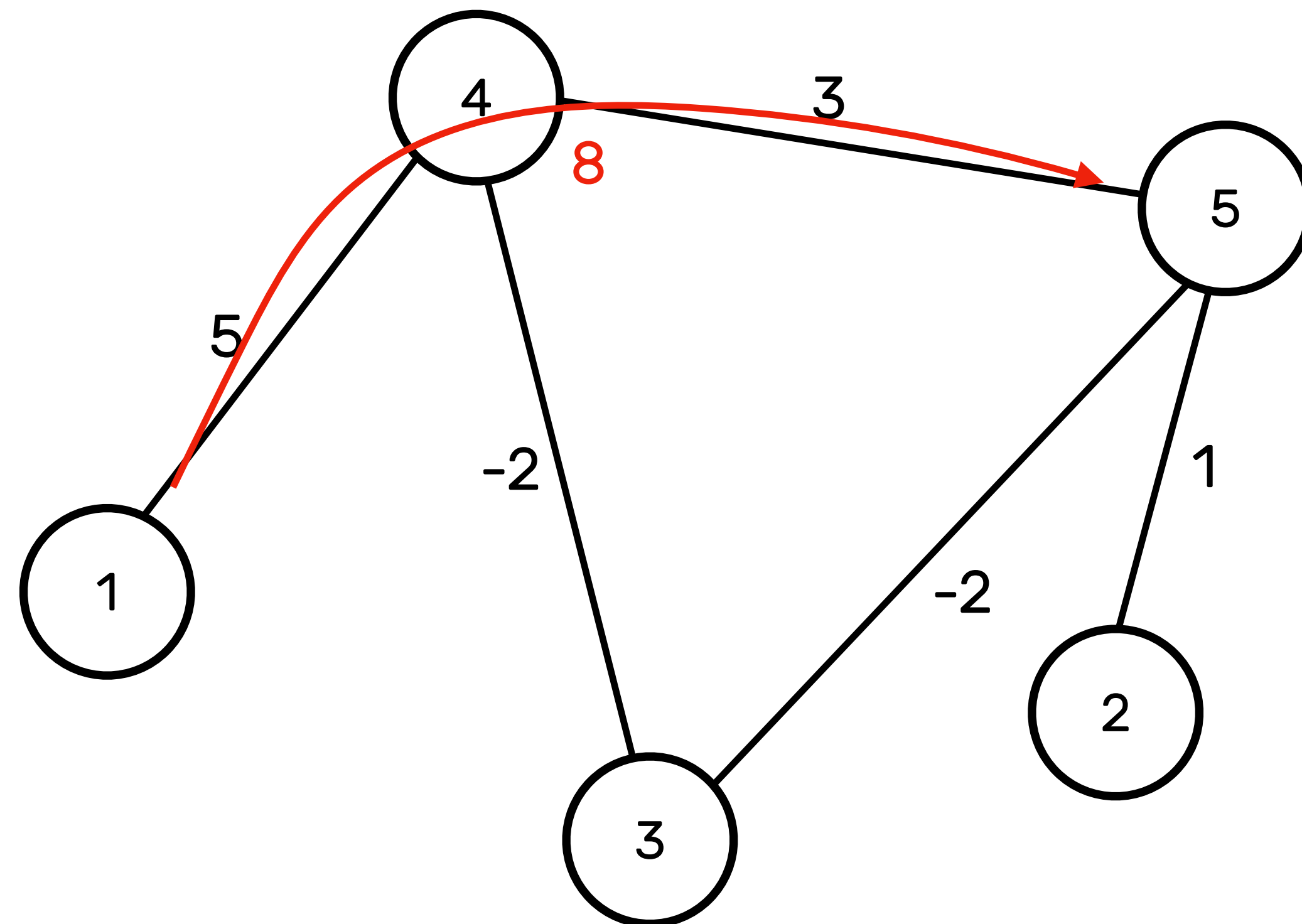


$$w : E \rightarrow \mathbb{R}$$



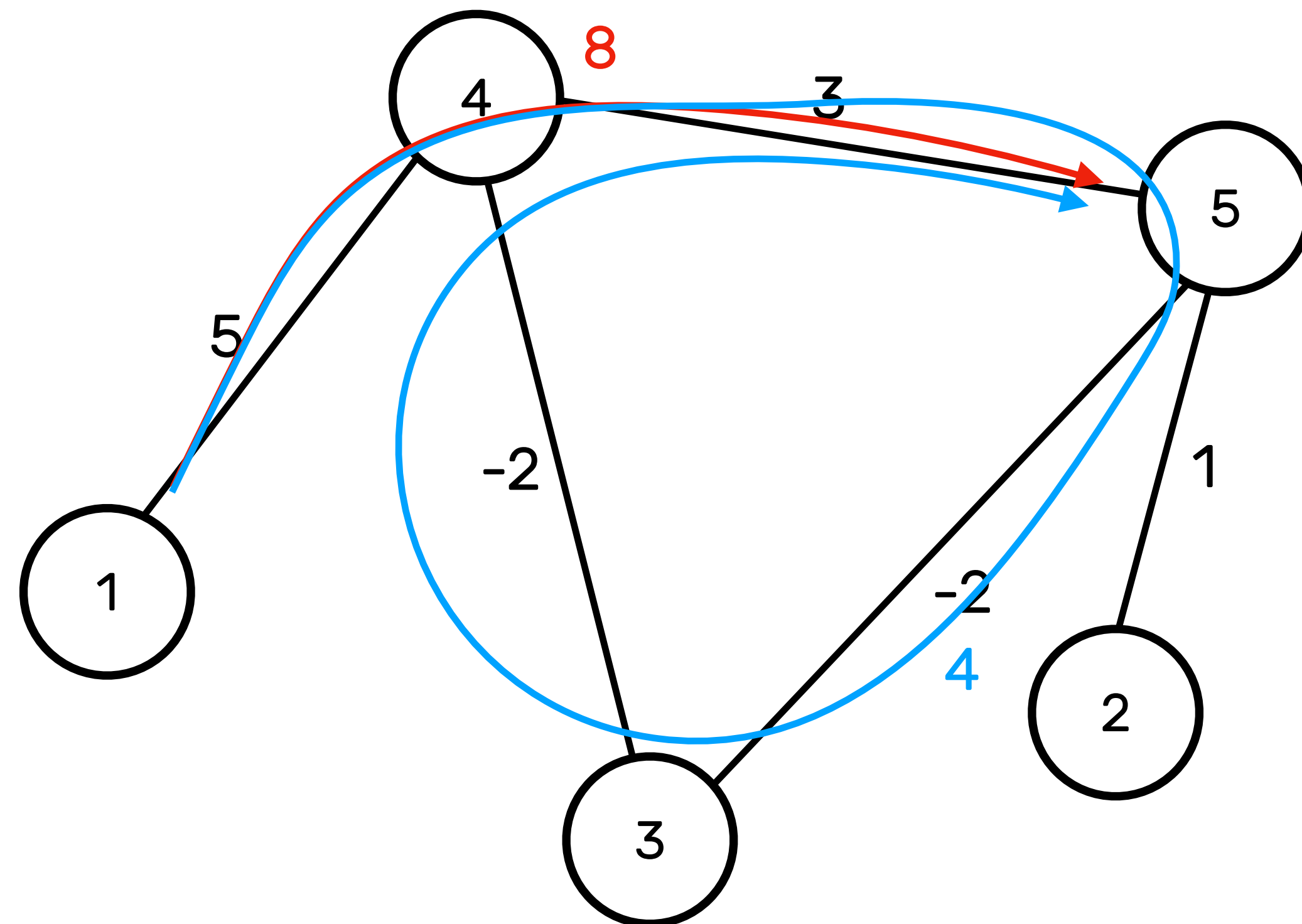
$$d[1,5] = ?$$

$$w : E \rightarrow \mathbb{R}$$



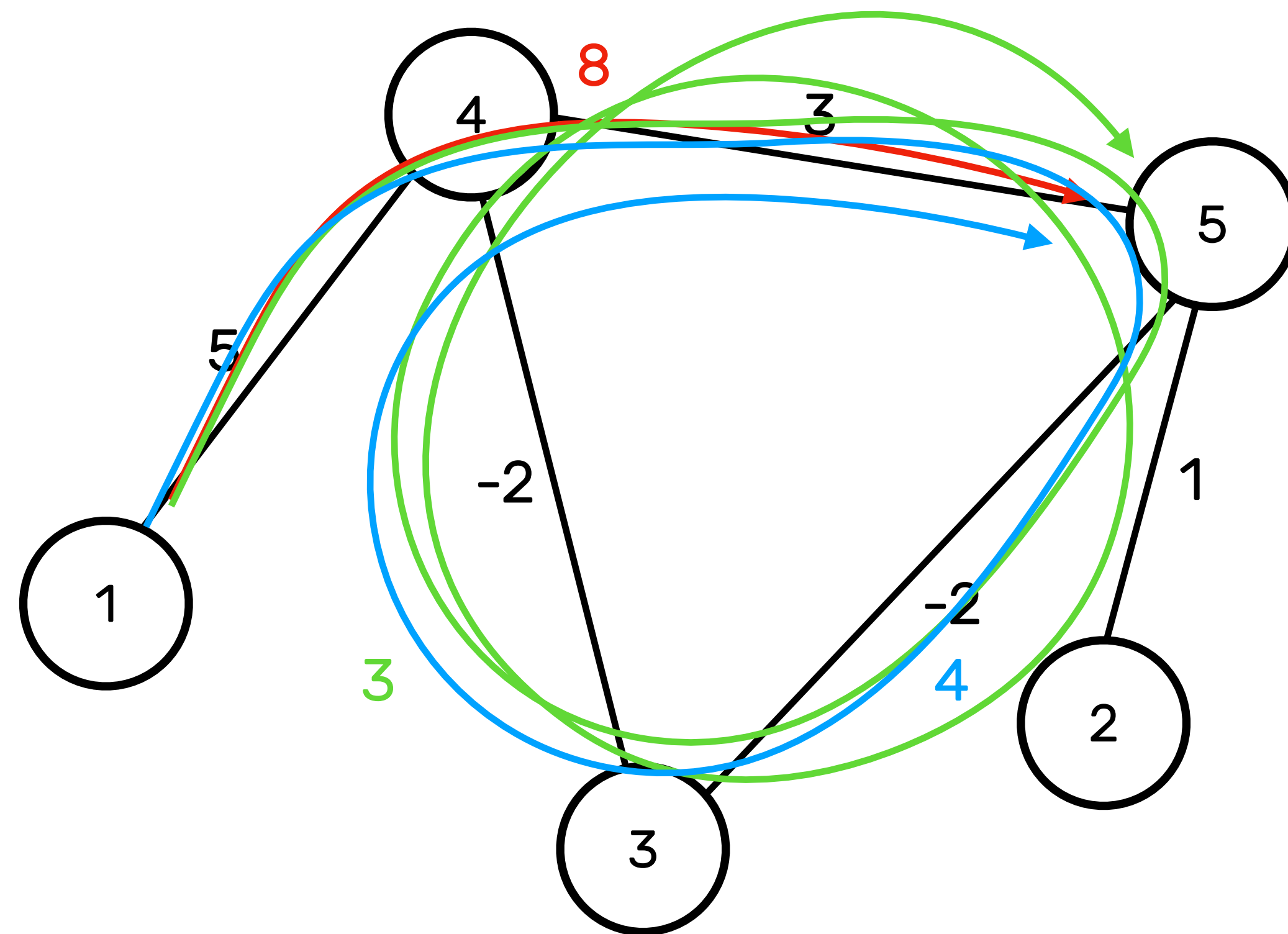
$$d[1,5] = ?$$

$$w : E \rightarrow \mathbb{R}$$



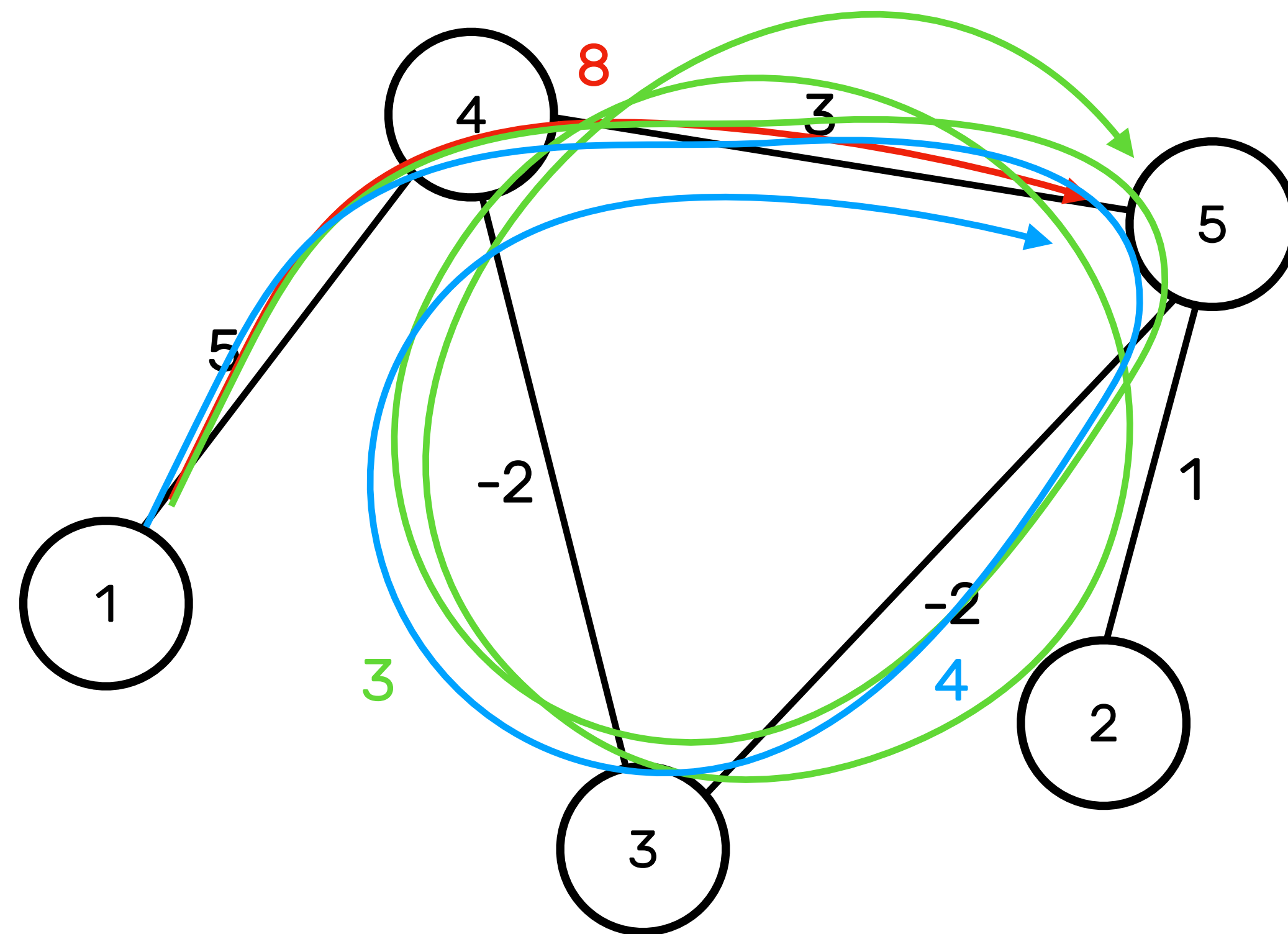
$$d[1,5] = ?$$

$$w : E \rightarrow \mathbb{R}$$



$$d[1,5] = ?$$

$$w : E \rightarrow \mathbb{R}$$



$$d[1,5] = -\infty$$

פתרון: Bellman-Ford

- בשיעור הבא (: