**עבודה 3**

**שאלה 1**

1. התחום שלנו הוא וזהו תחום קמור. נשים לב כי פונקציה זו גזירה אינסוף פעמים.

נתבונן בנגזרת השנייה של הפונקציה:

קיבלנו כי לכל הפונקציה תהיה קמורה, ועבור נקבל כי פונקציה קבועה ולא קמורה.

1. תחום הגדרה של f הוא זהו תחום קמור, שכן לכל שתי נק' x,y בתחום מתקיים

מאחר והתחום שלנו מוגדר להיות , אזי גזירה לכל .   
סה"כ קיבלנו כי הפונקציה קמורה בכל תחום הגדרתה.

1. תחום הגדרה של f הוא זהו תחום קמור, שכן לכל שתי נק' x,y בתחום מתקיים

מאחר והתחום שלנו מוגדר להיות , אזי גזירה לכל .   
סה"כ קיבלנו כי הפונקציה קעורה בכל תחום הגדרתה.

תחום ההגדרה של הפונקציה הינו וכן זהו תחום קמור.

*נוכיח עבור באמצעות ההגדרה האלטרנטיבית הראשונה כי f פונקציה קמורה.*

*תחילה נראה כי היא גזירה: קל לראות כי הנקודה הבעיייתית היחידה היא ב וכן לכל היא בהכרח גזירה לפי כללי גזירה ידועים. נראה כי f גזירה בנק' לפי הגדרה:*

*קיבלנו כי ולכן f גזירה בנק .*

*לכן הנגזרת של f הינה:   
כעת נוכיח כי לכל מתקיים : כלומר נרצה להוכיח כי  
 . נחקור את פונקציה*

* *אם : וכן זה יהיה שלילי כאשר x<y. כמו כן נשים לב כי הפונקציה מתאפסת בנק' וכן כאשר x>y הפונקציה עולה. קיבלנו כי יש לנו נק' מינימום כאשר ולכן לכל x.*
* *אם :  
   וכן זה יהיה שלילי כאשר . כמו כן נשים לב כי הפונקציה מתאפסת בנק' וכן כאשר x>y הפונקציה עולה. קיבלנו כי יש לנו נק' מינימום כאשר ולכן לכל x.*
* *אם : כלומר במקרה זה הפונקציה תמיד יורדת. בנק הפונקציה מתאפסת, ומאחר ובמקרה זה נקבל כי .*
* *אם : כלומר במקרה זה הפונקציה תמיד עולה. בנק' הפונקציה מתאפסת ומאחר ובמקרה זה נקבל כי .*

*במקרה ש-: נוכיח לפי ההגדרה של קמירות:  
יהיו .*

1. *.*

*פונקציה זו לא קמורה ולא קעורה.*

*עבור הנק' נקבל כי עבור נקבל כי .*

1. *.נשים לב כי התחום של הפונקציה הינו וזהו תחום קמור כפי שנלמד בכיתה.  
   כמו כן, הפונקציה גזירה פעמיים:*

*לפי המשפט השני בהגדרה האלטרניטיבית, f תהיה קמורה אם יתקיים כי וזה יתקיים אמ"מ A SPD.*

1. *: נניח כי f קמורה. יהיו . f קמורה ולכן מתקיים כי לכל מתקיים*

*נשים לב, כאשר אזי גם ואז נקבל מטור טיילור כי   
. נציב במשוואה הראשונה ונקבל כי   
נחסר משני האגפים ונקבל מאחר ן נוכל לחלק ב- מבלי לשנות את הכיוון של אי השוויון ונקבל: כלומר   
 כנדרש.*

*: יהיו וכן*

*מאי השוויון הנתון נקבל כי : , .*

*נכפול את אי השוויון הראשון ב ואת אי השוויון השני ב, נחבר ביניהם, ונקבל:*

*כעת נציב את t ונקבל כנדרש.*

**שאלה 2**

1. ניסינו עבור עם

lam = 100

GTG = np.transpose(G) @ G

M = np.eye(n) + lam/2 \* GTG

x\_min = LA.inv(M) @ y

plt.figure(); plt.plot(x,x\_min, label = r'recover using ${{\scrl}\_2 } norm,\lambda=100$'); plt.plot(x,f, label = "clean"); plt.legend() ;plt.show()

lam = 80

GTG = np.transpose(G) @ G

M = np.eye(n) + lam/2 \* GTG

x\_min = LA.inv(M) @ y

plt.figure(); plt.plot(x,x\_min, label = r'recover using ${{\scrl}\_2 } norm,\lambda=80$'); plt.plot(x,f, label = "clean"); plt.legend() ;plt.show()

*הגרפים שקיבלנו הם:*

Chart, line chart

Description automatically generated

1. Chart, line chart

   Description automatically generated*הקוד:*

*def IRLS( y, w, G , epsilon, lamda, maxIter):*

*for i in range(maxIter):*

*x = LA.inv(np.eye(n) + lamda/2 \* (np.transpose(G) @ w @ G)) @ y*

*for j in range (len(w)):*

*w[j][j] = 1/ (abs(G[j] @ x)+ epsilon)*

*return x*

*x\_IRLS = IRLS( y, np.eye(n-1), G, 0.001, 1, 10)*

*plt.figure(); plt.plot(x,x\_IRLS, label = "recover using IRLS"); plt.plot(x,f, label = "clean"); plt.legend() ;plt.show()*

Chart, line chart

Description automatically generated