1. א. נתון:  ממ"פ מעל .  בסיס אורתונורמלי של .

טענה:  בסיס אורתונורמלי של 

הוכחה:

נגדיר 

נראה כי נורמת כל וקטור ב שווה ל-1 ומכפלת שני וקטורים שונים ב שווה לאפס:

ראשית, נראה כי הוקטורים שהוחלפו מנורמלים:



מן הנתון  מנורמלים, ולכן כלל הוקטורים ב-A מנורמלים.

כעת נראה כי הם אורתוגונלים:

יהי .



נותר להראות כי 



הראנו כי נורמת כל וקטור ב שווה ל-1 ומכפלת שני וקטורים שונים ב שווה לאפס, כלומר – ע"פ הגדרה,  היא מערכת אורתונורמלית.

נותר להראות כי זהו בסיס. נניח כי:

 מכיוון ש  בת"ל, אז בהכרח



ולכן  בת"ל. מכמות האיברים ב היא  (כמימד ) ומכיוון שהיא גם מערכת אורתונורמלית -  מהווה בסיס אורתונורמלי של  ∎

ב. נתון:  מ"ו מעל ,  ה"ל, 



טענה: 

הוכחה:

ומכיוון שהגענו לאותו ביטוי, מתקיים .

כמו כן,



ולכן מתקיים גם  ∎

1.  מ"ו ממימד סופי מעל .  ה"ל נורמלית.

טענה: קיים ל- שורש.

הוכחה:

מכיוון ש נורמלית ו מ"ו ממימד סופי מעל , קיים ל בסיס אורתונורמלי של ו"ע של . נניח  בסיס זה, ולכל  מתקיים .

נגדיר את  להיות ה"ל המקיימת לכל  . (אנו יודעים מהמשפט היסודי של האלגברה כי השורשים הללו קיימים (אם קיימים שניים, נקח אחד מהם).

נסתכל על המטריצות המייצגות של שתי ההעתקות הללו לפי בסיס :



וניתן לראות כי 

ומהקורלציה בין מטריצות להעתקות ניתן להסיק כי .

ולכן הוכחנו כי ל- קיים שורש. ∎

1.  ממ"פ מעל  ממימד אי-זוגי.  העתקה אורתוגונלית.

טענה: קיים  כך ש-

הוכחה:

מכיוון ש ממ"פ ממימד אי-זוגי, קיים ל- ע"ע , ומכיוון ש- אורתוגונלית, מתקיים . כלומר, קיים  כך ש- .

נשים לב כי –



ומצאנו  כנדרש. ∎

1. א. . נוודא ש- מטריצה חיובית, ונמצא לה שורש חיובי:

נמצא תחילה את הע"ע של :

.

מכיוון שהע"ע של המטריצה הם שורשי הפולינום האופייני שלה, הע"ע של  הם . מכיוון שע"ע אלו גדולים או שווים לאפס,  היא מטריצה חיובית.

נמצא מטריצה אלכסונית  ומטריצה אוניטרית  כך ש-.

לשם כך נמצא את המרחבים העצמיים של הע"ע:



מכיוון ש- , נגדיר , ונגדיר את  להיות מטריצה שעמודותיה הן , כלומר - .

נקבל כי:



נגדיר כעת , וכן נגדיר



ראשית, נראה כי :



יהי .



כלומר, לכל  מתקיים .

כמו כן,  צמודה לעצמה.

לכן, ע"פ הגדרה  היא מטריצה חיובית, ומצאנו שורש חיובי ל-, כנדרש. ∎

ב. . נוודא ש- מטריצה חיובית, ונמצא לה שורש חיובי:

נמצא תחילה את הע"ע של :



מכיוון שהע"ע של מטריצה הם שורשי הפולינום האופייני שלה, הע"ע  הם 

מכיוון שהע"ע הללו חיוביים, אנו יודעים כי  מטריצה חיובית.

נמצא מטריצה אלכסונית  ומטריצה אוניטרית  כך ש-.

לשם כך נמצא את המרחבים העצמיים של הע"ע:



מכיוון שמימדי המרחבים העצמיים שווים ל-1, ננרמל כל אחד מהבסיסים, ונקבל בסיס אורתונורמלי של ע"ע.



נגדיר את  להיות המטריצה שעמודותיה הן וקטורי הבסיס הנ"ל. כלומר –

.

נקבל כי :



נגדיר , וכן נגדיר:



ראשית נראה כי :



מכיוון ו- הן מטריצות דומות, יש להן אותם ערכים עצמיים, ולכן הע"ע של  הם , וכולם גדולים מאפס. בנוסף,  סימטרית ולכן צמודה לעצמה. לכן,  מטריצה חיובית ע"פ הגדרה.

1. א.  משולשית עליונה,  פולינום,  ע"ע של .

טענה: קיים  ע"ע של  המקיים .

הוכחה:

כפי שהוכחנו בתרגול, הע"ע של מטריצה משולשית הם בדיוק איברי האלכסון.

נניח כי , כאשר  הע"ע של 

כפי שהראנו בתרגול, , כאשר  ע"ע הם הע"ע של .

לכן, מכיוון ש- ע"ע של , קיים  ע"ע של  המקיים . ∎

ב.  מ"ו ממימד סופי מעל שדה סגור אלגברית .  ה"ל.  פולינום.  ע"ע של . טענה: קיים  ע"ע של  המקיים .

מכיוון ש סגור אלגברית, קיים בסיס  של  כך ש-

 ו-  הע"ע של . (למטריצות מייצגות ולהעתקות אותן הן מייצגות אותם ע"ע).

מכיוון שזו מטריצה משולשית עליונה, ומכיוון ש- ע"ע של , אז ע"פ סעיף א' קיים  ע"ע של  המקיים . ∎

ג. נראה שהנתון ש- סגור אלגברית הוא הכרחי:

נגדיר , . . .

ניתן לראות כי  ולכן ל אין ע"ע.

כעת נסתכל על .

זוהי מטריצה סקלרית, ולכן יש לה ע"ע (-1).

כלומר – להעתקה המיוצגת ע"י  ישנו ע"ע (-1) ולהעתקה המיוצגת ע"י  אין ע"ע כלל, לכן אם נבחר נקגבל כי הטענה מהסעיף הקודם אינה נכונה.

מכיוון שהתנאי היחדי שהיה תקף בסעיף הקודם אך אינו תקף בדוגמא הזו הינו בחירת השדה ( אינו שדה סגור אלגברית), אנו יודעית כי זהו תנאי הכרחי.

1. א.  ממ"פ מרוכב,  ה"ל.

טענה: קיים בסיס אורתונורמלי ל לפיו מטריצת הייצוג של  היא משולשית עליונה.

הוכחה:

כפי שהראנו בכתה, קיים בסיס  שלפיו מטריצת הייצוג של  היא משולשית עליונה.

נבצע על בסיס זה תהליך גרם-שמידט, ונקבל בסיס אורתונורמלי של  - 

מכיוון שלכל  מתקיים  (ע"פ גרם שמידט), גם מטריצת הייצוג של  לפי בסיס  היא משולשית עליונה.

כלומר – מצאנו בסיס אורתונומלי אשר מטריצת הייצוג של  לפיו היא משולשית עליונה. ∎

ב.  מטריצה נורמלית משולשית עליונה. טענה:  בהכרח אלכסונית.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה שלמה על , דרגת המטריצה.

בסיס: . זוהי מטריצה בעלת תא בודד, וכמובן שהיא אלכסונית.

הנחה: נניח כי הטענה נכונה עבור כל , כלומר עבור כל מטריצה נורמלית משולשית עליונה שמספר השורות שלה קטן מ.

צעד האינדוקציה: נראה כי הטענה נכונה גם עבור :

תהי מטריצה  נורמלית משולשית עליונה.

מכיוון ש משולשית עליונה, היא בפרט מהצורה , וכפי שהוכח בשיעור – מכיוון שהיא נורמלית היא מהצורה , כאשר  גם כן נורמליות.

מכיוון ש משולשית עליונה, אנו יודעים גם כי  ו- משולשיות עליונות, ומכיוון שדרגתן קטנה מדרגת  אז ע"פ הנחת האינדוקציה הן אלכסוניות.

אם כך, אז ברור כי גם  אלכסונית.

לכן, ע"פ הוכחת האינדוקציה, מטריצה משולשית עליונה ונורמלית היא בהכרח אלכסונית ∎

ג.  ממ"פ מרוכב,  ה"ל נורמלית  
טענה: קיים ל בסיס אורתונורמלי של ו"ע של .

הוכחה:

מסעיף א' אנו יודעים כי קיים ל בסיס אורתונורמלי  כך ש- , ו-  ע"ע של .

מסעיף ב' אנו יודעים כי מכיוון ש- נורמלית (זאת מכיוון ש נורמלית), אז , כלומר זו מטריצה אלכסונית.

ניתן לראות כי לכל  מתקיים , ולכן  הוא בסיס אורתונורמלי של ו"ע של .

ומצאנו בסיס כנדרש. ∎

אלגברה ליניארית 2 – תרגיל 9

טל הרמתי, ת.ז 30097680

מתרגל – יתיר הלוי, יום ג', 12:00-14:00