1.

נתונים: 

נמצא את :



2.

א.

ב.נתון:  בסיס ל. נמצא את המטריצות המייצגות של  ו-  לפי בסיס A:





ג.נתון  בסיס ל. נמצא את המטריצות המייצגות של  ו-  לפי בסיס B:





ד. מכיוון ש-A הוא בסיס אורתונורמלי, ו-B לא.

3.

ראשית, נראה כי :



נגדיר את  להיות בסיס אורתונורמלי של 

ואת  להיות בסיס אורתונורמלי של .

יהי .

ע"פ טענה שהוכחה בתרגול, ומכך ש , ניתן להצג את v כך:



מכיוון ש , קיים  כך ש .

כמו כן, , ולכן .

כלומר - , וזוהי בדיוק ההגדרה של ההטלה האורתוגונלית של v על , ולכן P היא ההטלה האורתוגונלית  ∎

4.

נפריך את הטענה ע"י מתן דוגמא נגדית:

נסתכל על המטריצה , המייצגת העתקה ליניארית T.

נמצא את הע"ע של A:



לכן,  (ע"ע של מטריצה הם בדיוק שורשי הפולינום האופייני שלה)

נמצא את המרחבים העצמיים:



אם היה בסיס אורתונורמלי ל-, אז הוא היה מהצורה , כך ש  ו-  (ללא הגבלת הכלליות), שכן אחרת הם היו שייכים לאותו מרחב עצמי, בסתירה להיותם בסיס (ולכן – בת"ל).

אם כך,  היה צריך להיות מכפלה של קבוע עם  ובנוסך לקיים , ולכן בהכרח הוא היה צריך להיות הווקטור .

באותו אופן,  בהכרח צריך היה להיות הווקטור .

אך  הוא אינו בסיס אורתונורמלי מכיוון ש , ולכן לא קיים בסיס אורתונורמלי ל- אשר כל אחד מאיבריו הוא ו"ע של T.

5.

נוכיח כי  הינו מרחב וקטורי מעל :

נגדיר: , , 

נניח: 

נוכיח את 10 אקסיומות המרחב הוקטורי:

1. קשירות החיבור
2. קומוטטיביות



1. אסוציאטיביות



1. קיום איבר נייטרלי לחיבור

נגדיר את העתקת האפס -  לכל 

כלומר,  נייטרלית ללחיבור

1. קיום איבר נגדי לחיבור

נגדיר עבור כל  את  כך:  , נראה כי סכום שתי ההעתקות שווה ל-



1. סגירות לכפל בסקלר:



1. אסוציאטיביות של כפל סקלרים בווקטור:



1. דיסטריביטיביות של סקלרים:



1. דיסטריביטיביות של וקטורים:



1. נייטרליות איבר היחידה לכפל בסקלר:



לכן, מהוכחת 10 אקסיומות המרחב הוקטורי, הוכחנו כי  הינו מרחב וקטורי מעל  ∎

ג.

נמצא בסיס של העתקות ל-Hom(V,W):

נגדיר כי  בסיס של V,  בסיס של W.

נגדיר גם את  להיות העתה המקיימת  ושולחת את שאר איברי הבסיס ל-0.

תהא .

נניח כי עבור  מתקיים .

נסתכל כעת כיצד T מתנהגת על איברי הבסיס של V



()

כלומר קיבלנו כי T הינה צירוף ליניארי של הקבוצה , ולכן .

מכיוון ש  ע"פ הגדרה, ומסגירות  לחיבור וכפל בסקלר, גם .

מהכלה דו כיוונית, .

נותר להראות כי A בת"ל-

נשים לב כי כל  ניתן להציג ע"י מטריצה מייצגת מהצורה 

כלומר, מטריצה בה  וכל שאר האיברים שווים 0.

מכיוון שכל אלו הן מטריצות סטנדרטיות, ולא קיימת בA מטריצה כפולה, A בת"ל ומהווה בסיס ל-, ע"פ הגדרת הבסיס.

בנוסף, ע"פ הגדרה המימד,



6.

נסמן U = אוסף כל ההעתקות ב אשר צמודות לעצמן.

נוכיח כי U הוא תת מרחב:

נגדיר .

ראשית, נראה סגירות לחיבור:



לכן, , כלומר -  צמודה לעצמה, והראנו סגירות לחיבור.

כעת נראה כפל בסקלר:



לכן, , והראנו סגירות לכפל בסקלר.

בנוסף, U אינ קבוצה ריקה, לא חשוב מאיזה מימד V, מכיוון שתמיד נוכל להסתכל על העתקת הזהות, שהינה צמודה לעצמה.

לכן, ע"י הוכחת 3 הדרישות, הוכחנו כי U כפי שהוגדר הינו תת מרחב וקטורי של  ∎

המימד של U תלוי כמובן במימד של n.

אם נגדיר את  להיות n, אז המימד של U יהיה שווה לגודל של משולש שלם של מטריצה מייצגת בגודל nXn, כלומר -

