1.

עבור כל מטריצה  נמצא מטריצות  כך ש אלכסונית,  אוניטרית, ו.

1. 

נמצא את הע"ע של :



לכן, הע"ע של , שהם שורשי הפולינום האופייני של , הם . נמצא את המרחבים העצמיים של :





כעת נמצא בסיס אורתונורמלי לכל אחד מהמרחבים הללו, ע"י תהליך גרם שמידט:

נגדיר את  להיות מטריצה שעמודותיה הן , כלומר –



כפי שהוכח בתרגול,  הנ"ל אוניטרית,

ומצאנו  כנדרש. ∎

1. 

נמצא את הע"ע העצמיים של :



לכן, הע"ע  שהם בדיוק שורשי הפולינום האופייני של , הם .

נמצא את בסיסי המרחבים העצמיים של :



כעת נמצא בסיס אורתונורמלי לכל אחד מהמרחבים הללו, ע"י תהליך גרם שמידט:



נגדיר את  להיות מטריצה שעמודותיה הן , כלומר –



כפי שהוכח בתרגול,  הנ"ל אוניטרית.

ומצאנו  כנדרש. ∎

, הפולינום האופייני של  הוא  (נתון).

לכן, הע"ע של , שהם בדיוק שורשי הפולינום שהאופייני שלה, הם .

נמצא את בסיסי המרחבים העצמיים של :





נמצא בסיסים אורונורמלים למרחבים העצמיים, ע"י תהליך גרם שמידט:



נגדיר את  להיות מטריצה שעמודותיה הן , כלומר –



כפי שהוכח בתרגול,  הנ"ל אוניטרית.

ומצאנו  כנדרש. ∎

2. א. נתונים: ה"ל מתחלפות

טענה:  הם T-אינווריאנטים

הוכחה:

ראשית, נראה כי  היא T-אינווריאנטית:

יהי   קיים  כך ש.

ע"פ הגדרה,  היא T-אינווריאנטית  ∎

כעת נראה כי  היא T-אינווריאנטית:

יהי   

ע"פ הגדרה,  היא T-אינווריאנטיץ  ∎

ב. נתונים: ,  ה"ל

טענה:  ו- הן T-אינווריאנטיות

הוכחה:

נניח . ע"פ הגדרה, .



כלומר,  ו- מתחלפות.

לכן, ע"פ סעיף א',  ו- הן T-אינווריאנטיות. ∎

1. נתונים:  ה"ל,  ע"ע של ,  המרחב העצמי של .

טענה:  הוא T-אינווריאנטי

הוכחה:

יהי . ע"פ הגדרה, .

נסתכל על :



לכן, ע"פ הגדרה, .

כלומר – ע"פ הגדרה,  הוא T-אינווריאנטי ∎

3.

א. ,  תת"מ T-אינווריאנטי.

נראה ע"י דוגמא נגדית כי הטענה ש הוא גם בהכרח T-אינווריאנטי, שגוייה.

נגדיר , , 

ע"פ הגדרת המרחב הניצב, ניתן לראות כי .

ראשית, נראה כי  הוא T-אינווריאנטי:

יהי . ע"פ הגדרה, קיים  כך ש.

, כלומר -  הוא T-אינווריאנטי.

כעת נראה כי  אינו T-אינווריאנטי:

יהי . ע"פ הגדרה קיים  כך ש .

. לכל  , ולכן  אינו T-אינווריאנטי

לכן, הטענה אינה נכונה. ∎

ב.  ה"ל, בסיס א"נ של , לכל  מתקיים 

נראה כי הטענה כי  אוניטרית אינה נכונה, ע"י דוגמא נגדית:

נגדיר , .  בסיס אורתונורמלי סטנדרטי של .

      

, ולכן T אינה אוניטרית, ולכן הטענה אינה נכונה.

1. נוכיח ע"י דוגמא נגדית כי הרכבה של שתי ה"ל צמודות לעצמן אינה בהכרח ה"ל צמודה לעצמה:

נגדיר:  מטריצות מייצגות של ה"ל ו-.

ניתן לראות כי  ו- הן העתקות צמודות לעצמן, מכיוון שהמטריצות המייצגות אותן סימטריות.

עם זאת, המטריצה המייצגת את ההרכבה של  על  הינה



שאינה מטריצה סימטרית, ולכן ההרכבה הנ"ל אינה צמודה לעצמה, והטענה הופרכה.

1. נראה כי לא קיימת ה"ל  המקיימת :

נניח בשלילה שכן קיימת העתה כזו.

ראשית, נראה כי  הנ" צמודה לעצמה:



ולכן  צמודה לעצמה, כלומר - . לכן, .

כמו כן, כפי שהוכח בכתה, קיים בסיס א"נ ל-, אשר המטריצה המייצגת את  היא מהצורה  , כאשר  הוא ע"ע של  (הערכים לאו דווקא שונים כמובן).

אם כך, נציג את המשוואה  ע"יהמטריצות המייצגות (לפי בסיס א"נ זה) :



כלומר, לכל  מתקיים .

למשוואה זו אין פתרונות מעל הממשיים.

אך הוכח בכתה שערכים עצמיים של העתקה צמודה לעצמה הם בהכרח ממשיים.

לכן מתקיים סתירה, ולכן לא קיימת העתקה  כזו.

1. נוכיח כי אוסף ההעתקות הצמודות לעצמן אינו מהווה תת מרחב וקטורי של  מעל . ( מרחב מכפלה פנימית מרוכב)

נראה כי אוסף ההעתקות הצמודות לעצמן במקרה זה אינן סגורות לכפל בסקלר:

נניח  העתקה צמודה לעצמה מעל . ויהי .



עבור כל  שהחלקו המדומה אינו שווה לאפס, שני הביטויים הללו אינם מתקיים, ולכן שני הביטויים הללו לא מתקיים עבור כל סקלר.

כלומר – מרחב ההעתקות הצמודות לעצמן אינו סגור לכפל בסקלר, ולכן ע"פ הגדרה אינו מהווה מרחב וקטורי.

1. נוכיח כי גם הטענה שאוסף ההעתקות הנורמליות הן תת מרחב וקטורי אינה נכונה, ע"י דוגמא נגדית:

נגדיר :  מטריצות מייצגות של ה"ל  ו-.

 נורמלית, מכיוון ש- 

גם  נורמלית, מכיוון ש -  (כלומר, היא צמודה לעצמה, ובפרט נורמלית).

כעת נסתכל על החיבור שלהן:



ע"פ הגדרה



ולכן,  אינה נורמלית, והטענה הופרכה.

1. נפריך את הטענה כי קיימת העתה צמודה לעצמה , המקיימת 

נגדיר 

נניח בשלילה כי  צמודה לעצמה

אם כך, אז ע"פ הגדרה לכל  מתקיים .

בפרט, טענה זו נכונה ל- ו-, כלומר - .

נחשב את שני הביטויים הללו (ע"פ המכפלה הסטנדרטית) –



בסתירה לכך ש צמודה לעצמה.

לכן, לא קיימת העתקה צמודה לעצמה הפועלת כך.

4. נתון:  ה"ל נורמלית ( מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי)

א. טענה: 

הוכחה:



כלומר,  שקול ל- , כלומר  ∎

ב. טענה: 

הוכחה:

ע"פ תרגיל 5 שאלה 6 סעיף א', מתקיים , ובפרט ל.

כמו כן , טענה זו נכונה בפרט גם ל - 

בנוסף, הוכח בשיעור כי תת מרחב ותת מרחב הניצב לו מהווים סכום ישר של המרחב.

ולכן, 

לכן, בהכרח  ∎

5.  מרחב מכפלה פנימים ממימד סופי.

א. טענה: לכל ה"ל  מתקיים 

הוכחה: נוכיח ע" הכלה דו כיוונית.

ראשית, יהי      

ולכן .

שנית, יהי 

ולכן . וע"י הכלה דו כיוונית הוכחנו כי  ∎

ב.  ה"ל נורמלית

טענה: 

הוכחה: נוכיח ע"י הכלה דו כיוונית –

, ולכן .

כמו כן,



ולכן .

וע"י הכלה דו כיוונית הראינו כי 

 ה"ל נורמלית

טענה: 

הוכחה:



כמו כן, בסעיף 4 ב' הראינו כי .

ולכן,  ∎

אלגברה ליניארית 2 – תרגיל 7

טל הרמתי, ת.ז 30097680

מתרגל: יתיר הלוי, יום ג', 12:00-14:00