1. נתון: 
2. נראה ש-A נורמלית:

ע"פ הגדרה - 

נחשב את שני הביטויים –



ניתן לראות ש-, כלומר – ע"פ הגדרה,  נורמלית.

1. נמצא מטריצה אוניטרית  ומטריצה אלכסונית  כך ש.

נעשה זאת ע"פ האלגוריתם שנלמד בתרגול.

ראשית, נמצא את הע"ע של A:



לכן, הע"ע של , שהם שורשי הפולינום האופייני, הם .

נמצא את המרחבים העצמיים של הע"ע הללו:



ולכן,  .

כפי שהוכח בתרגול, ניתן להסיק מכך כי 

נבצע על כל אחד מבסיסי המרחבים תהליך גרם שמידט (מכיוון שמימדיהם אחד, פשוט ננרמל):

, 

כעת נגדיר את  להיות המטריצה שעמודותיה הן , כלומר



נבדוק:



ומצאנו  ן- כנדרש.

אנו יודעים כי .

נגדיר .

נגדיר את  להיות מטריצה המורכבת מהוקטורים הללו ומהוקטור המנורמל המהווה בסיס ל



כעת נבדוק :



ומצאנו  ו- כנדרש.

1. נתונים:  מ"ו מעל שדה  בעל  מימדים.  ה"ל.  תמ"ו ממימד .

טענה:  הוא T-אינווריאנטי אמ"ם קיים בסיס  ל כך ש- בסיס של . והמטריצה המייצגת של  לפי בסיס זה היא מהצורה  כאשר



הוכחה:

נגדיר את  להיות בסיס של . נשלים את בסיס זה לבסיס של  ע"י  וקטורים נוספים - .

 הוא T-אינווריאנטי **אמ"ם** לכל  ניתן להציג את  כך:



כמו כן, מכיוון ש, עבור כל  ניתן להציג את  כך:



כעת נבנה את המטריצה המייצגת של  עם הבסיס :



ומצאנו בסיס של  העומד בתנאים, והמטריצה המייצגת של  לפי בסיס זה היא מהצורה הנדרשת.

כלומר – הכוחנו כי  הוא T-אינווריאנטי אמ"ם קיים בסיס  ל כך ש- בסיס של . והמטריצה המייצגת של  לפי בסיס זה היא מהצורה  כאשר

 ∎

ב. נתונים:  מרחב מ"פ.  ה"ל נורמלית.  תת"מ T-אינווריאנטי.

טענה:  הוא גם -אינווריאנטי.

הוכחה:

נגדיר את  להיות בסיס של . נשלים את בסיס זה לבסיס של  ע"י  וקטורים נוספים - .

כפי שהוכח בתרגול, המטריצה המייצגת של  לפי בסיס זה נראית כך:

, כאשר .

אם כך, אז גם את המטריצה המייצגת את  לפי אותו בסיס, שהיא המטריצה הצמודה של , היא מהצורה  (זאת מכיוון ש- ו- הן ריבועיות).

אם כך, אז ע"פ ההוכחה מסעיף א',  הוא  - אינווריאנטי, כנדרש. ∎

1. טענה:  הוא T-אינווריאנטי.

הוכחה:

נגדיר את  להיות בסיס של . נשלים את בסיס זה לבסיס של  ע"י  וקטורים נוספים - .

מכיוון ש , אז  הוא בסיס של .

כפי שראינו בסעיף קודם, . ( ריבועית בגודל המימד של  ו- ריבועית בגודל המימד של ).

כלומר – עבור כל  ניתן להציג את  (כלומר – כל איבר בבסיס של ) כך:

, כלומר – ניתן להציג את  (כל איבר בבסיס של ) כצירוף ליניארי של , כלומר , ולכן ע"פ הגדרה  הוא T-אינווריאנטי

1.  סימטרית. קיים  כך ש-.

טענה: .

הוכחה: מכיוון ש סימטרית, היא ניתנת לליכסון.

כלומר – קיימת  הפיכה ו- אלכסונית, כך ש-.

אם כך, אז , וכפי שהוכחנו בעבר, .

נתון כי , ולכן , ולכן .

נניח כי . אם כך אז 

ולכן 

אם כך, אז  ∎

1. א. נתונים: ,  סימטרית.

טענה:  מ"פ פנימים אמ"ם  חיובית ממש

הוכחה:

נגדיר את  להיות המכפלה שהוגדרה לצורך השאלה, ו להיות המכפלה הסטנדרטית ב- . ע"פ הגדרה, .

יהי , .

הגדרת 

את שאר התכונות כבר הוכחנו בתרגיל 4

A סימטרית

כלומר, אם זה נכון לכל v

 חיובית ממש  מכפלה פנימית

ולכן  מ"פ פנימית אמ"ם  חיובית ממש

ב. נתונים:  ממ"פ,  בסיס של . נמצא מטריצה  חיובית ממש כך ש-

נגדיר .

נניח כי , כלומר - 

ע"פ הגדרה, 

כלומר – קיבלנו כי  היא המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

לכן, ע"פ החיוביות של המ"פ הסטנדרטית, מתקיים לכל  .

כמו כן, מטריצת הזהות הינה סימטרית, ולכן צמודה לעצמה, והראנו כי  היא חיובית ממש ביחס למכפלה הפנימית  ∎

מכיוון שהמכפלה הסטנדרטית היא מכפלה פנימית, מתקיים  לכל , ושוויון מתקבל אמ"ם .

1. נתונים: , ,  חיובית ממש

טענה: 

הוכחה:

ראשית, נראה כי כל הע"ע של  חיוביים.

יהי  ע"ע של  (מכיוון ש- צמודה לעצמה, הע"ע שלה ממשיים).

לכל  ו"ע עם ע"ע  מתקיים 

מכיוון ש מתקבל כי .

כיוון ש צמודה לעצמה, קיימת מטריצה  אלכסונית, הדומה ל, כאשר הע"ע של  נמצאים על באלכסון.

מכיוון שדטרמיננטה של מטריצה אלכסונית היא מכפלת איברי האלכסון, ואיברי האלכסון של  חיוביים ממש, .

מכיוון שלמטריצות דומות דטרמיננטה זהה, . ∎

אלגברה ליניארית 2 – תרגיל 8

טל הרמתי, ת.ז 30097680

מתרגל – יתיר הלוי, יום ג', 12:00-14:00