

# 2023-2024 学年芙蓉区八年级上学期期末考试

## 数学试卷

### 一、选择题（共 10 小题）

1. 现实世界中，对称现象无处不在，中国的方块字中有些也具有对称性，下列美术字是轴对称图形的是（ ）

- A. 诚                      B. 信                      C. 友                      D. 善

2. 要使分式  $\frac{x}{x-2}$  有意义，则  $x$  的取值应满足（ ）

- A.  $x \neq 2$                       B.  $x \neq -2$                       C.  $x = 2$                       D.  $x = -2$

3. 点  $(3, -5)$  关于  $y$  轴对称的点的坐标是（ ）

- A.  $(-3, 5)$                       B.  $(5, -3)$                       C.  $(-3, -5)$                       D.  $(3, 5)$

4. 下列各式由左边到右边的变形中，是因式分解的是（ ）

- A.  $a(x-y) = ax - ay$                       B.  $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

- C.  $x^2 - 4x + 3 = x(x-4) + 3$                       D.  $a^2 + 1 = a\left(a + \frac{1}{a}\right)$

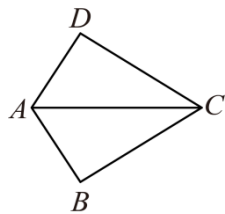
5. 下列计算正确的是（ ）

- A.  $a^8 \div a^2 = a^4$                       B.  $a^3 \cdot a^4 = a^7$                       C.  $(2a^2)^3 = 6a^6$                       D.  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{4}$

6. 下列各式中，正确的是（ ）

- A.  $\frac{b}{a+2b} = \frac{1}{a+2}$                       B.  $\frac{b}{a} = \frac{b+2}{a+2}$
- C.  $-\frac{-a+b}{c} = -\frac{a+b}{c}$                       D.  $\frac{a+2}{a-2} = \frac{a^2-4}{(a-2)^2}$

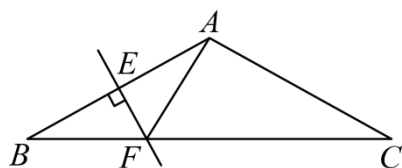
7. 如图，已知  $AB = AD$ ，那么添加下列一个条件后，仍然不能判定  $\triangle ABC \cong \triangle ADC$  的是（ ）



- A.  $CB = CD$                       B.  $\angle B = \angle D = 90^\circ$
- C.  $\angle BAC = \angle DAC$                       D.  $\angle BCA = \angle DCA$

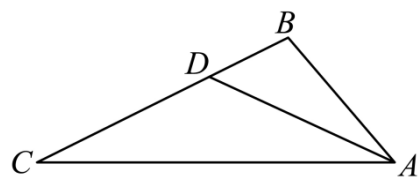
8. 如图，在  $\triangle ABC$  中， $AB = AC$ ， $AB$  的垂直平分线交  $AB$  于点  $E$ ，交  $BC$  于点  $F$ ，连接

$AF$ ，若  $\angle FAC = \frac{21}{5} \angle B$ ，则  $\angle FAB$  的度数为 ( )



- A.  $25^\circ$                       B.  $30^\circ$                       C.  $35^\circ$                       D.  $50^\circ$

9. 如图，在  $\triangle ABC$  中， $AD$  平分  $\angle BAC$ ， $\angle B = 2\angle ADB$ ， $AB = 4, CD = 7$ ，则  $AC$  的长为 ( )



- A. 3                      B. 11                      C. 15                      D. 9

10. 关于  $x$  的方程  $x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a}$  的两个解为  $x_1 = a, x_2 = \frac{1}{a}$ ； $x + \frac{2}{x} = a + \frac{2}{a}$  的两个解为

$x_1 = a, x_2 = \frac{2}{a}$ ； $x + \frac{3}{x} = a + \frac{3}{a}$  的两个解为  $x_1 = a, x_2 = \frac{3}{a}$ ，则关于  $x$  的方程  $x + \frac{10}{x-1} = a + \frac{10}{a-1}$  的两个解为 ( )

- A.  $x_1 = a, x_2 = \frac{10}{a}$                       B.  $x_1 = a, x_2 = \frac{a+8}{a-1}$   
C.  $x_1 = a, x_2 = \frac{10}{a-1}$                       D.  $x_1 = a, x_2 = \frac{a+9}{a-1}$

## 二、填空题（共 6 小题）

11. 计算： $(-3)^0 = \underline{\hspace{2cm}}$ .

12. 数 0.0000046 用科学记数法表示为：\_\_\_\_\_.

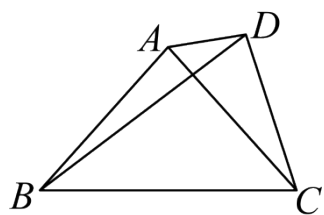
13. 已知  $(x+4)(x-9) = x^2 + mx - 36$ ，则  $m$  的值为\_\_\_\_\_.

14. 我国古代著作《增删算法统宗》中记载了一首古算诗：“林下牧童闹如簇，不知人数不知竹每人六竿多十四，每人八竿恰齐足”其大意是：“牧童们在树下拿着竹竿高兴地玩耍，不知与多少人和竹竿每人 6 竿，多 14 竿；每人 8 竿，恰好用完”若设有牧童  $x$  人，根据题意，可列方程为\_\_\_\_\_.

15. 已知  $a+b=5$ ， $ab=3$ ， $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

16. 如图，在  $\triangle ABC$  中， $AB = AC$ ，点  $D$  和点  $A$  在直线  $BC$  的同侧，

$BD = BC$ ,  $\angle BAC = 82^\circ$ ,  $\angle DBC = 38^\circ$ , 连接  $AD, CD$ , 则  $\angle ADB$  的度数为\_\_\_\_\_.



### 三、解答题（共 9 小题）

17. 计算  $(\frac{1}{2})^{-1} - (\pi - \sqrt{3})^0 + |1 - \sqrt{2}|$

18. 分解因式:

(1)  $16 - b^2$

(2)  $3ax^2 - 6axy + 3ay^2$

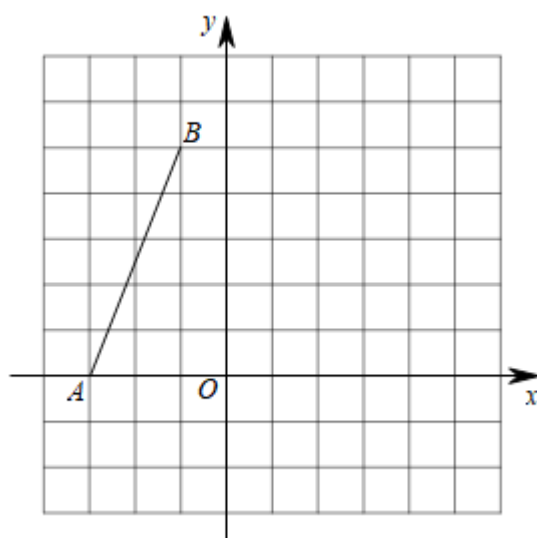
19. 先化简, 再求值:  $(a-2)(a+2) - (a+2)^2$ , 其中  $a = -\frac{3}{2}$ .

20. 解分式方程

(1)  $\frac{3}{x-1} + 2 = \frac{x}{x-1}$

(2)  $\frac{x}{x-2} - 1 = \frac{8}{x^2 - 4}$ .

21. 如图，在平面直角坐标系中，点  $A(-3, 0)$ ，点  $B(-1, 5)$ 。



(1) ①画出线段  $AB$  关于  $y$  轴对称的线段  $CD$ ;

②在  $y$  轴上找一点  $P$  使  $PA+PB$  的值最小 (保留作图痕迹);

(2)按下列步骤，用不带刻度的直尺在线段  $CD$  找一点  $Q$  使  $\angle BAQ=45^\circ$ .

①在图中取点  $E$ ，使得  $BE=BA$ ，且  $BE\perp BA$ ，则点  $E$  的坐标为\_\_\_\_\_；

②连接  $AE$  交  $CD$  于点  $Q$ ，则点  $Q$  即为所求.

22. 已知，在  $\triangle ABC$  中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $AC=BC$ ， $AD\perp CE$ ， $BE\perp CE$ ，垂足分别为点  $D$ ， $E$  .

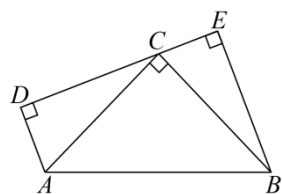


图1

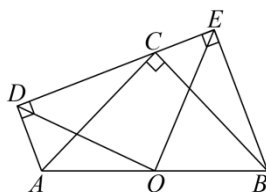


图2

(1)如图1，求证： $DE=AD+BE$ ；

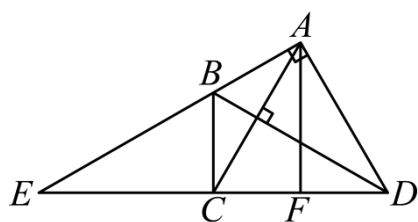
(2)如图2，点  $O$  为  $AB$  的中点，连接  $OD$ ， $OE$ .请判断  $\triangle ODE$  的形状？并说明理由.

23. “军运会”期间，某纪念品店老板用 5000 元购进一批纪念品，由于深受顾客喜爱，很快售完，老板又用 6000 元购进同样数目的这种纪念品，但第二次每个进价比第一次每个进价多了 2 元.

(1) 求该纪念品第一次每个进价是多少元？

(2) 老板以每个 15 元的价格销售该纪念品，当第二次纪念品售出  $\frac{3}{5}$  时，出现了滞销，于是决定降价促销，若要使第二次的销售利润不低于 900 元，剩余的纪念品每个售价至少要多少元？

24. 如图，在四边形  $ABCD$  中， $BD$  所在的直线垂直平分线段  $AC$ ，过点  $A$  作  $AF \parallel BC$  交  $CD$  于  $F$ ，延长  $AB$ 、 $DC$  交于点  $E$ 。



(1) 求证：  $AC$  平分  $\angle EAF$ ；

(2) 求证：  $\angle FAD = \angle E$ ；

(3) 若  $\angle EAD = 90^\circ$ ，  $AE = 5$ ，  $\triangle AEC$  的面积为  $\frac{15}{4}$ ，求  $CF$  的长。

25. 阅读下面材料并解决有关问题:

(一) 由于  $(a-b)^2 \geq 0$ , 所以  $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ , 即  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ , 并且当  $a = b$  时,

$a^2 + b^2 = 2ab$ ; 对于两个非负实数  $a, b$ , 由于  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ , 所以  $(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \geq 0$ ,

即  $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$ , 所以  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ , 并且当  $a = b$  时,  $a + b = 2\sqrt{ab}$ ;

(二) 分式和分数有着很多的相似点, 如类比分数的基本性质, 我们得到了分式的基本性质. 小学里, 把分子比分母小的数叫做真分数, 类似的, 我们把分子的次数小于分母的次数的分式称为真分式, 反之, 称为假分式. 对于任何一个假分式都可以化成整式与真分式的和

的形式, 如:  $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$ ;

(1) 在①  $\frac{2x+3}{x+1}$ 、②  $\frac{x^2+1}{x}$ 、③  $\frac{x}{x^2+1}$ 、④  $\frac{x^4+1}{x^2}$  这些分式中, 属于假分式的是\_\_\_\_\_ (填序号);

(2) 已知:  $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{3}$ , 求代数式  $\frac{x^2}{x^4+1}$  的值;

(3) 当  $x$  为何值时,  $\frac{x+3\sqrt{x+2}+5}{\sqrt{x+2}+1}$  有最小值? 并求出最小值. (写出解答过程)





1. D

【分析】根据轴对称图形的概念逐一进行分析即可得.

【详解】A.不是轴对称图形，故不符合题意；

B.不是轴对称图形，故不符合题意；

C.不是轴对称图形，故不符合题意；

D.是轴对称图形，符合题意，

故选 D.

【点睛】本题考查了轴对称图形的识别，熟知“平面内，一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够完全重合的图形是轴对称图形”是解题的关键.

2. A

【分析】根据分式的分母不为 0 可得关于  $x$  的不等式，解不等式即得答案.

【详解】解：要使分式  $\frac{x}{x-2}$  有意义，则  $x-2 \neq 0$ ，所以  $x \neq 2$ .

故选：A.

【点睛】本题考查了分式有意义的条件，属于应知应会题型，熟知分式的分母不为 0 是解题的关键.

3. C

【分析】根据关于  $y$  轴对称的点的坐标特点：横坐标互为相反数，纵坐标不变，即可完成解答.

【详解】解：点  $(3, -5)$  关于  $y$  轴对称的点的坐标是  $(-3, -5)$ ；

故选：C.

【点睛】本题考查了点关于坐标轴对称的问题，熟悉点关于坐标轴对称的特点是关键.

4. B

【分析】根据因式分解的定义逐个判断即可.

【详解】解：A 右边不是几个整式的积的形式，不是因式分解，故本选项不符合题意；

B. 是因式分解，故本选项符合题意；

C. 右边不是几个整式的积的形式，不是因式分解，故本选项不符合题意；

D. 右边不是几个整式的积的形式，不是因式分解，故本选项不符合题意；

故选：B.

【点睛】本题考查了因式分解的定义，能熟记因式分解的定义的内容是解此题的关键，注意：

把一个多项式化成几个整式的积的形式，叫因式分解.

5. B

【分析】分别根据同底数幂的乘除法法则，幂的乘方与积的乘方运算法则以及负整数指数幂的运算法则逐一判断即可.

【详解】解：A.  $a^8 \div a^2 = a^6$ ，故本选项不合题意；

B.  $a^3 \cdot a^4 = a^7$ ，正确；

C.  $(2a^2)^3 = 8a^6$ ，故本选项不合题意；

D.  $(\frac{1}{2})^{-2} = 4$ ，故本选项不合题意.

故选：B.

【点睛】本题主要考查了同底数幂的乘除法，幂的乘方与积的乘方以及负整数指数幂，熟记幂的运算法则是解答本题的关键.

6. D

【分析】本题考查了分式的性质，根据分式的性质逐项判断即可求解.

【详解】解：A、等号右边  $\frac{1}{a+2}$  分子分母同时乘以  $b$ ，得  $\frac{b}{ab+2b} \neq$  左边，故 A 错误，不合题意；

B、分式的分子分母同时加一个非零的数，得到的分式值与原分式不一定相等，故 B 错误，不合题意；

C、 $-\frac{-a+b}{c} = -\frac{b-a}{c} \neq -\frac{a+b}{c}$ ，故 C 错误，不合题意；

D、分子分母同时乘以  $(a-2)$ ，即  $\frac{a+2}{a-2} = \frac{(a+2)(a-2)}{(a-2)^2} = \frac{a^2-4}{(a-2)^2}$ ，故 D 正确，符合题意.

故选：D

7. D

【分析】本题考查三角形全等的判定方法，要判定  $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ ，已知  $AB = AD$ ， $AC$  是公共边，具备了两组边对应相等，结合判定全等的方法添加条件即可. 解题的关键是掌握：判定两个三角形全等的一般方法有：SSS、SAS、ASA、AAS、HL. 注意：AAA、SSA 不能判定两个三角形全等，判定两个三角形全等时，必须有边的参与，若有两边一角对应相等时，角必须是两边的夹角.

【详解】解：A. 添加  $CB = CD$ ，根据 SSS，能判定  $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ ，故此选项不符合题意；

B. 添加  $\angle B = \angle D = 90^\circ$ ，根据 HL，能判定  $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ ，故此选项不符合题意；

C. 添加  $\angle BAC = \angle DAC$ ，根据 SAS，能判定  $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ ，故此选项不符合题意；

D. 添加  $\angle BCA = \angle DCA$ ，不能判定  $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ ，故此选项符合题意.

故选：D.

8. A

【分析】根据等腰三角形的性质和线段垂直平分线的性质可得  $\angle B = \angle C = \angle BAF$ ，设  $\angle B = x$ ，则  $\triangle ABC$  的三个内角都可用含  $x$  的代数式表示，然后根据三角形的内角和定理可得关于  $x$  的方程，解方程即得答案.

【详解】解：  $\because AB = AC$ ，  $\therefore \angle B = \angle C$ ，

$\because EF$  垂直平分  $AB$ ，  $\therefore FA = FB$ ，  $\therefore \angle B = \angle BAF$ ，

设  $\angle B = x$ ，则  $\angle BAF = \angle C = x$ ，  $\angle FAC = \frac{21}{5}x$ ，

根据三角形的内角和定理，得：  $3x + \frac{21}{5}x = 180^\circ$ ，解得：  $x = 25^\circ$ ，即  $\angle FAB = 25^\circ$ .

故选：A.

【点睛】本题考查了等腰三角形的性质、线段垂直平分线的性质和三角形的内角和定理，属于常见题型，熟练掌握上述基本知识是解题的关键.

9. B

【分析】在  $AC$  上截取  $AE = AB$ ，连接  $DE$ ，如图，先根据 SAS 证明  $\triangle ABD \cong \triangle AED$ ，然后根据全等三角形的性质和已知条件可得  $\angle BDE = \angle AED$ ，进而可得  $CD = EC$ ，再代入数值计算即可.

【详解】解：在  $AC$  上截取  $AE = AB$ ，连接  $DE$ ，如图，

$\because AD$  平分  $\angle BAC$ ，  $\therefore \angle BAD = \angle DAC$ ，又  $\because AD = AD$ ，

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle AED$  (SAS)，

$\therefore \angle B = \angle AED$ ，  $\angle ADB = \angle ADE$ ，

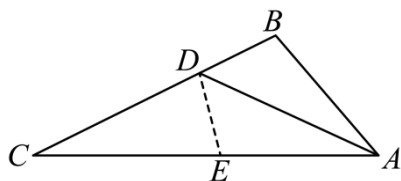
$\therefore \angle B = 2\angle ADB$ ，  $\therefore \angle AED = 2\angle ADB$ ，

而  $\angle BDE = \angle ADB + \angle ADE = 2\angle ADB$ ，

$\therefore \angle BDE = \angle AED$ ，  $\therefore \angle CED = \angle EDC$ ，  $\therefore CD = CE$ ，

$\therefore AC = AE + CE = AB + CD = 4 + 7 = 11$ .

故选：B.



【点睛】本题考查了全等三角形的判定和性质、等腰三角形的判定、角平分线的性质，正确作出辅助线、构造全等三角形是解题的关键。

10. D

【分析】根据题意可得： $x + \frac{n}{x} = a + \frac{n}{a}$ 的两个解为 $x_1 = n, x_2 = \frac{n}{a}$ ，然后把所求的方程变形为：

$x - 1 + \frac{10}{x-1} = a - 1 + \frac{10}{a-1}$ 的形式，再根据上述规律求解即可。

【详解】解：根据题意，得： $x + \frac{n}{x} = a + \frac{n}{a}$ 的两个解为 $x_1 = n, x_2 = \frac{n}{a}$ ，

$\therefore$ 方程 $x + \frac{10}{x-1} = a + \frac{10}{a-1}$ 即为： $x - 1 + \frac{10}{x-1} = a - 1 + \frac{10}{a-1}$ ，

$\therefore x + \frac{10}{x-1} = a + \frac{10}{a-1}$ 的解为： $x - 1 = a - 1$ 或 $x - 1 = \frac{10}{a-1}$ ，

解得： $x_1 = a, x_2 = \frac{a+9}{a-1}$ 。

故选：D。

【点睛】本题考查了分式方程的解法，解题时要注意给出的例子中的方程与解的规律，还要注意套用例子中的规律时，要保证所求方程与例子中的方程的形式一致。

11. 1

【分析】根据零指数幂公式可得答案。

【详解】解： $(-3)^0 = 1$ ；

故答案为：1。

【点睛】本题主要考查了零指数幂，任何非0数的0次幂等于1。

12.  $4.6 \times 10^{-6}$

【分析】根据科学记数法的表示方法解答即可。

【详解】解： $0.0000046 = 4.6 \times 10^{-6}$ 。

故答案为： $4.6 \times 10^{-6}$ 。

【点睛】此题考查了科学记数法的表示方法，科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， $n$ 为整数，表示时关键要正确确定 $a$ 的值以及 $n$ 的值。

13. -5

【分析】等式左边根据多项式的乘法法则计算，合并后对比两边系数即得答案.

【详解】解： $\because (x+4)(x-9) = x^2 - 9x + 4x - 36 = x^2 - 5x - 36$ ， $(x+4)(x-9) = x^2 + mx - 36$ ，

$\therefore x^2 - 5x - 36 = x^2 + mx - 36$ ， $\therefore m = -5$ .

故答案为：-5.

【点睛】本题考查了多项式乘多项式的运算法则，属于基础题型，熟练掌握多项式乘法的运算法则是解题关键.

14.  $6x+14=8x$

【分析】设有牧童  $x$  人，根据“每人 6 竿，多 14 竿；每人 8 竿，恰好用完”，竹竿的总数不变，列出方程，即可.

【详解】解：设有牧童  $x$  人，

根据题意得： $6x+14=8x$ ，

故答案是： $6x+14=8x$ .

【点睛】本题主要考查一元一次方程的实际应用，根据等量关系，列出方程，是解题的关键.

15.  $\frac{19}{3}$ .

【分析】将  $a+b=5$ 、 $ab=3$  代入原式  $= \frac{b^2+a^2}{ab} = \frac{(a+b)^2-2ab}{ab}$ ，计算可得.

【详解】当  $a+b=5$ 、 $ab=3$  时，

$$\text{原式} = \frac{b^2+a^2}{ab}$$

$$= \frac{(a+b)^2-2ab}{ab}$$

$$= \frac{5^2-2 \times 3}{3}$$

$$= \frac{19}{3}.$$

故答案为  $\frac{19}{3}$ .

【点睛】本题主要考查分式的加减法，解题的关键是熟练掌握分式的加减运算法则和完全平方公式.

16.  $30^\circ$

【分析】先根据等腰三角形的性质和三角形的内角和定理以及角的和差求出  $\angle ABD$  的度数，然后作点  $D$  关于直线  $AB$  的对称点  $E$ ，连接  $BE$ 、 $CE$ 、 $AE$ ，如图，则  $BE=BD$ ， $\angle EBA=\angle DBA$ ，

$\angle BEA = \angle BDA$ ，进而可得  $\angle EBC = 60^\circ$ ，由于  $BD = BC$ ，从而可证  $\triangle EBC$  是等边三角形，可得  $\angle BEC = 60^\circ$ ， $EB = EC$ ，进一步即可根据 SSS 证明  $\triangle AEB \cong \triangle AEC$ ，可得  $\angle BEA$  的度数，问题即得解决。

【详解】解： $\because AB = AC$ ， $\angle BAC = 82^\circ$ ， $\therefore \angle ABC = \frac{180^\circ - \angle BAC}{2} = 49^\circ$ ，

$\because \angle DBC = 38^\circ$ ， $\therefore \angle ABD = 49^\circ - 38^\circ = 11^\circ$ ，

作点  $D$  关于直线  $AB$  的对称点  $E$ ，连接  $BE$ 、 $CE$ 、 $AE$ ，如图，则  $BE = BD$ ，

$\angle EBA = \angle DBA = 11^\circ$ ， $\angle BEA = \angle BDA$ ，

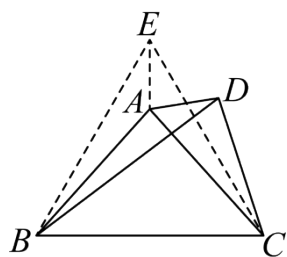
$\therefore \angle EBC = 11^\circ + 11^\circ + 38^\circ = 60^\circ$ ，

$\because BD = BC$ ， $\therefore BE = BC$ ， $\therefore \triangle EBC$  是等边三角形， $\therefore \angle BEC = 60^\circ$ ， $EB = EC$ ，

又  $\because AB = AC$ ， $EA = EA$ ，

$\therefore \triangle AEB \cong \triangle AEC$  (SSS)， $\therefore \angle BEA = \angle CEA = \frac{1}{2} \angle BEC = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle ADB = 30^\circ$ 。



【点睛】本题考查了等腰三角形的性质、三角形的内角和定理、等边三角形的判定和性质、全等三角形的判定和性质以及轴对称的性质等知识，涉及的知识点多、综合性强，难度较大，作点  $D$  关于直线  $AB$  的对称点  $E$ ，构造等边三角形和全等三角形的模型是解题的关键。

17.  $\sqrt{2}$

【分析】先按照负整数指数幂、零次幂、绝对值的概念计算，再进一步合并即可。

【详解】 $(\frac{1}{2})^{-1} - (\pi - \sqrt{3})^0 + |1 - \sqrt{2}|$

$= 2 - 1 + \sqrt{2} - 1$

$= \sqrt{2}$ 。

【点睛】本题考查了负整数指数幂、零指数幂、绝对值的运算，解答本题的关键是明确它们各自的运算法则。

18. (1)  $(4+b)(4-b)$

$$(2) 3a(x-y)^2$$

【分析】本题考查了因式分解，解题的关键是正确找出公因式，以及熟练掌握平方差公式

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \text{ 和完全平方公式 } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

(1) 用平方差公式进行因式分解即可；

(2) 先提取公因式  $3a$ ，再根据完全平方公式进行因式分解即可.

$$\text{【详解】(1) 解: } 16 - b^2 = (4+b)(4-b);$$

$$(2) \text{ 解: } 3ax^2 - 6axy + 3ay^2$$

$$= 3a(x^2 - 2xy + y^2)$$

$$= 3a(x-y)^2.$$

$$19. -4a-8; -2$$

【分析】先用平方差公式、完全平方公式展开，再去括号、合并同类项进行化简，最后代入求值.

$$\text{【详解】} (a-2)(a+2) - (a+2)^2$$

$$= (a^2 - 4) - (a^2 + 4a + 4)$$

$$= a^2 - 4 - a^2 - 4a - 4$$

$$= -4a - 8$$

$$\text{当 } a = -\frac{3}{2} \text{ 时}$$

$$\text{原式} = -4a - 8$$

$$= -4 \times \left(-\frac{3}{2}\right) - 8$$

$$= -2$$

【点睛】本题考查平方差公式、完全平方公式、整式的化简求值，熟练进行整式的化简是解题的关键.

$$20. (1) x = -1$$

(2) 无解

【分析】本题考查了分式方程的解法.

(1) 方程两边同乘 $(x-1)$ 化为整式方程 $3+2(x-1)=x$ ，解得 $x=-1$ ，经检验 $x=-1$ 是原方程的解；

(2) 方程两边同乘 $(x+2)(x-2)$ ，得 $x(x+2)-(x+2)(x-2)=8$ ，解得 $x=2$ ，经检验 $x=2$ 不是原分式方程的解，即可得到原分式方程无解。

**【详解】**(1) 解：方程两边同乘 $(x-1)$ ，得  $3+2(x-1)=x$ ，

解得  $x=-1$ ，

检验：当 $x=-1$ 时， $x-1\neq 0$ ，

$\therefore x=-1$ 是原方程的解；

(2) 解：方程两边同乘 $(x+2)(x-2)$ ，得  $x(x+2)-(x+2)(x-2)=8$ ，

解得  $x=2$ ，

检验：当 $x=2$ 时， $(x+2)(x-2)=0$ ，

$\therefore x=2$ 不是原分式方程的解，

$\therefore$ 原分式方程无解。

21. (1)见解析

(2)①图见解析，E (4, 3)；②见解析

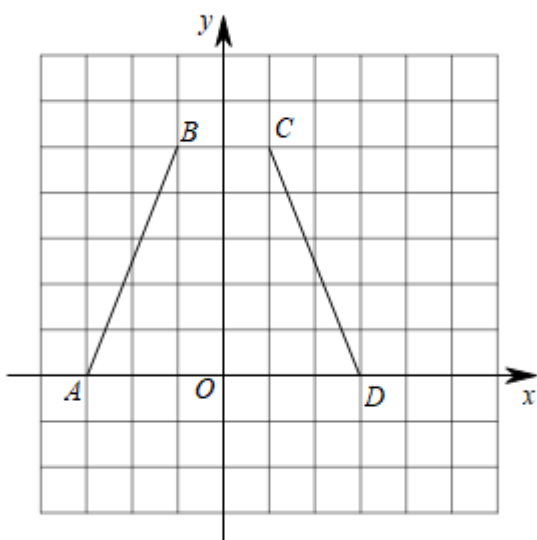
**【分析】**(1) 由轴对称的性质可作出线段 $CD$ ，连结 $AC$ 交 $y$ 轴于点 $P$ ；

(2) ①由垂直的定义可作出线段 $BE$ ，可写出点 $E$ 的坐标；

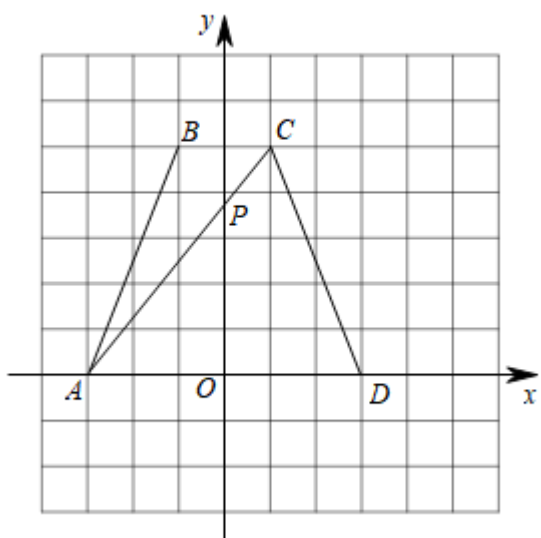
②连接 $AE$ 交 $CD$ 于点 $Q$ ，由等腰直角三角形的性质可知 $\angle BAQ=45^\circ$ ，点 $Q$ 即为所求。

**【详解】**(1) 解：①如图所示，线段 $CD$ 即为所求。



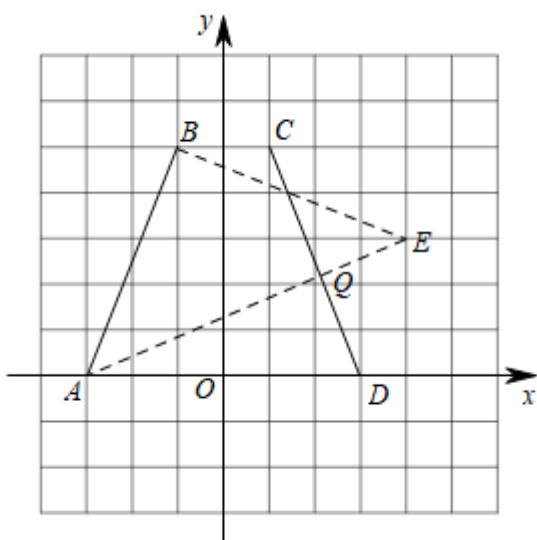


②如图所示，点  $P$  就是所求的点；



(2) 解：①由垂直的定义可作出线段  $BE$ ，点  $E$  坐标为  $(4, 3)$ ，  
故答案为： $(4, 3)$ ；

②如图所示，点  $Q$  即为所求。



【点睛】本题考查了轴对称的性质，等腰直角三角形的性质等，解题关键是灵活运用等腰直角三角形的性质．

22. (1)见解析；

(2) $\triangle ODE$  是等腰直角三角形，理由见解析．

【分析】(1)根据垂直的定义及直角三角形中两个锐角互余得出角相等，再由全等三角形的判定和性质即可证明；

(2)连接  $OC$ ，根据等腰直角三角形的性质及斜边上的中线的性质得出  $AO = BO = CO$ ， $\angle CAB = \angle CBA = 45^\circ$ ， $CO \perp AB$ ，再由全等三角形的判定得出  $\triangle DCO \cong \triangle EBO$  (SAS)， $\triangle ADO \cong \triangle CEO$  (SSS)，最后结合图形证明即可．

【详解】(1) 解：证明： $\because BE \perp CE$ ， $AD \perp CE$ ，

$$\therefore \angle E = \angle D = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EBC + \angle BCE = 90^\circ.$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCE + \angle ACD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EBC = \angle DCA.$$

在  $\triangle CEB$  和  $\triangle ADC$  中，

$$\therefore \begin{cases} \angle E = \angle D, \\ \angle EBC = \angle DCA, \\ BC = AC, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle CEB \cong \triangle ADC (\text{AAS}),$$

$$\therefore BE = DC, \quad AD = CE,$$

$$\therefore DE = DC + CE = AD + BE,$$

即  $DE = AD + BE$ ;

(2)  $\triangle ODE$  是等腰直角三角形.

理由: 如图 2, 连接  $OC$ .

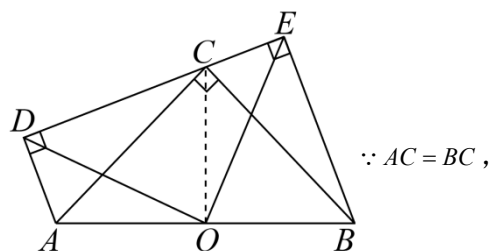


图2

$$\angle ACB = 90^\circ,$$

点  $O$  是  $AB$  中点,

$$\therefore AO = BO = CO,$$

$$\angle CAB = \angle CBA = 45^\circ,$$

$$CO \perp AB,$$

$$\therefore \angle AOC = \angle BOC = \angle ADC = \angle BEC = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle BOC + \angle BEC + \angle ECO + \angle EBO = 360^\circ,$$

$$\therefore \angle EBO + \angle ECO = 180^\circ,$$

$$\text{且 } \angle DCO + \angle ECO = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle DCO = \angle EBO.$$

在  $\triangle DCO$  和  $\triangle EBO$  中,

$$\therefore \begin{cases} CO = BO, \\ \angle DCO = \angle EBO, \\ DC = BE, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DCO \cong \triangle EBO (\text{SAS})$$

$$\therefore EO = DO, \quad \angle EOB = \angle DOC.$$

在  $\triangle ADO$  和  $\triangle CEO$  中,

$$\therefore \begin{cases} AD = CE, \\ AO = CO, \\ DO = EO, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADO \cong \triangle CEO (SSS)$$

$$\therefore \angle AOD = \angle COE.$$

$$\therefore \angle AOD + \angle DOC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DOC + \angle COE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DOE = 90^\circ, \text{ 且 } DO = OE,$$

$\therefore \triangle ODE$  是等腰直角三角形.

【点睛】题目主要考查全等三角形的判定和性质，等腰三角形的判定和性质，直角三角形斜边上的中线的性质等，理解题意，综合运用这些知识点是解题关键.

23. (1) 10 元; (2) 至少要 12 元.

【分析】(1) 设该纪念品第一次每个进价是  $x$  元，则第二次每个进价是  $(x+2)$  元，再根据等量关系：第二次进的个数 = 第一次进的个数即可列出方程，解方程即得结果；

(2) 设剩余的纪念品每个售价  $y$  元，由利润 = 售价 - 进价，根据第二批的销售利润不低于 900 元即可列出关于  $y$  的不等式，解不等式即得结果.

【详解】解：(1) 设该纪念品第一次每个进价是  $x$  元，由题意得：

$$\frac{5000}{x} = \frac{6000}{x+2}, \text{ 解得： } x=10,$$

经检验  $x=10$  是分式方程的解，

答：该纪念品第一次每个进价是 10 元；

(2) 设剩余的纪念品每个售价  $y$  元，由 (1) 知，第二批购进  $\frac{6000}{12} = 500$  (个)，

根据题意，得： $15 \times 500 \times \frac{3}{5} + y \times 500 \times \frac{2}{5} - 6000 \geq 900$ ，解得： $y \geq 12$ .

答：剩余的纪念品每个售价至少要 12 元.

【点睛】本题考查了分式方程的应用和不等式的应用，属于常考题型，正确理解题意、找准相等关系是解题关键.

24. (1) 见解析

(2) 见解析

$$(3) \frac{3}{2}$$

【分析】(1) 根据线段垂直平分线性质的得到  $BA = BC$ ，进而得到  $\angle BAC = \angle BCA$ ，根据

$BC \parallel AF$ ，得到  $\angle CAF = \angle BCA$ ，即可得到  $\angle CAF = \angle BAC$ ，问题得证；

(2) 根据线段垂直平分线性质得到  $DA = DC$ ，进而得到  $\angle DAC = \angle DCA$ ，即可得到  $\angle E + \angle EAC = \angle FAD + \angle CAF$ ，根据  $\angle CAF = \angle EAC$  即可证明  $\angle FAD = \angle E$ ；

(3) 先证明  $CF \perp AF$ ，过点  $C$  作  $CM \perp AE$ ，垂足为  $M$ ，根据  $\triangle AEC$  的面积为  $\frac{15}{4}$  求出  $CM = \frac{3}{2}$ ，根据  $AC$  平分  $\angle EAF$ ， $CM \perp AE$ ， $CF \perp AF$ ，即可求出  $CF = \frac{3}{2}$ 。

【详解】(1) 证明： $\because BD$  所在的直线垂直平分线段  $AC$ ，

$$\therefore BA = BC,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle BCA,$$

$$\because BC \parallel AF,$$

$$\therefore \angle CAF = \angle BCA,$$

$$\therefore \angle CAF = \angle BAC,$$

即  $AC$  平分  $\angle EAF$ ；

(2) 证明： $\because BD$  所在的直线垂直平分线段  $AC$ ，

$$\therefore DA = DC,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle DCA,$$

$\because \angle DCA$  是  $\triangle ACE$  的一个外角，

$$\therefore \angle DCA = \angle E + \angle EAC,$$

$$\therefore \angle E + \angle EAC = \angle FAD + \angle CAF,$$

$$\because \angle CAF = \angle EAC,$$

$$\therefore \angle FAD = \angle E;$$

(3) 解： $\because \angle EAD = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle E + \angle ADE = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle FAD = \angle E,$$

$$\therefore \angle FAD + \angle ADE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFD = 90^\circ,$$

$$\therefore CF \perp AF.$$

过点  $C$  作  $CM \perp AE$ ，垂足为  $M$ ，

$$\because \triangle AEC \text{ 的面积为 } \frac{15}{4},$$

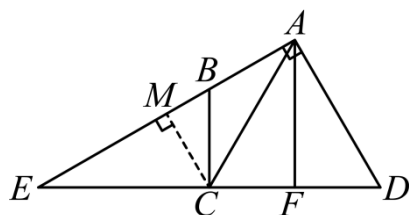
$$\therefore \frac{1}{2} AE \cdot CM = \frac{15}{4},$$

$$\text{又} \because AE = 5,$$

$$\therefore CM = \frac{3}{2},$$

$$\because AC \text{ 平分 } \angle EAF, CM \perp AE, CF \perp AF,$$

$$CF = CM = \frac{3}{2}.$$



【点睛】本题考查了线段垂直平分线的性质，平行线的性质，等腰三角形的性质与判定，直角三角形两锐角互余，角平分线的性质等知识，熟知相关知识并根据图形特点灵活应用是解题关键.

25. (1)①②④

$$(2) \frac{1}{7}$$

(3)  $x = -2$  时,  $\frac{x+3\sqrt{x+2}+5}{\sqrt{x+2}+1}$  有最小值, 最小值为 3

【分析】本题为新定义问题, 创新题, 考查了分式的计算, 二次根式的变形, 完全平方公式的应用等知识, 理解题目中的相关材料, 并根据题意灵活应用是解题关键.

(1) 根据真分式、假分式的定义逐项判断即可求解;

(2) 先根据  $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{3}$ , 得到  $\frac{x^2+1}{x} = 3$ , 进而得到  $x + \frac{1}{x} = 3$ , 即可得到

$$\frac{x^4+1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 7, \text{ 利用倒数的定义即可求出 } \frac{x^2}{x^4+1} = \frac{1}{7};$$

(3) 先求出  $x \geq -2$ , 再将  $\frac{x+3\sqrt{x+2}+5}{\sqrt{x+2}+1}$  变形为  $\sqrt{x+2}+1+1+\frac{1}{\sqrt{x+2}+1}$  根据 (一) 结论得到

$$= \sqrt{x+2}+1+1+\frac{1}{\sqrt{x+2}+1} \geq 2 \times \sqrt{(\sqrt{x+2}+1) \times \frac{1}{\sqrt{x+2}+1}} + 1 \geq 2+1=3, \text{ 即可求出当且仅当}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}+1} = \sqrt{x+2}+1, \text{ 即 } x = -2 \text{ 时, } \frac{x+3\sqrt{x+2}+5}{\sqrt{x+2}+1} \text{ 有最小值, 最小值为 3.}$$

【详解】(1) 解: ①是假分式, 符合题意;

②是假分式，符合题意；

③是真分式，不合题意；

④是假分式，符合题意.

故答案为：①②④.

$$(2) \text{ 解: } \because \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{x^2+1}{x} = 3,$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = 3,$$

$$\therefore \frac{x^4+1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 7,$$

$$\therefore \frac{x^2}{x^4+1} = \frac{1}{7};$$

(3) 解: 由题意,  $x+2 \geq 0$ ,

$$\therefore x \geq -2.$$

$$\text{原式} = \frac{x+2+3\sqrt{x+2}+3}{\sqrt{x+2}+1} = \frac{(\sqrt{x+2}+1)^2 + \sqrt{x+2}+1+1}{\sqrt{x+2}+1}$$

$$= \sqrt{x+2}+1+1 + \frac{1}{\sqrt{x+2}+1} \geq 2 \times \sqrt{(\sqrt{x+2}+1) \times \frac{1}{\sqrt{x+2}+1}} + 1$$

$$\geq 2+1=3.$$

当且仅当  $\frac{1}{\sqrt{x+2}+1} = \sqrt{x+2}+1$ , 即  $x=-2$  时, 等号成立.

$\therefore$  原式的最小值为 3.