专题 12 分式培优题型

考点 1. 分式有无意义的条件

【例 1】(1)对于代数式：$\frac{x+1}{x+2}\div\frac{x+3}{x+4}$。当 x 为何值时，代数式有意义？当 x 为何值时，代数式无意义？

解：当 $x\neq-2且x\neq-3且x\neq-4$ 时，代数式有意义；

当 $x=-2或x=-3或x=-4$ 时，代数式无意义。

【要点总结】

(2)若分式 $\frac{(m-1)(m-3)}{m^2-3m+2}=0$，求 m；

解：由题可知：$(m-1)(m-3)=0$，$\therefore m=1或m=3$

1° 当 $m=1$ 时，$m^2-3m+2=0$，舍去；
2° 当 $m=3$ 时，$m^2-3m+2\neq0$，符合题意.
$\therefore m=3$

(3)若分式 $\frac{1}{x^2-2x+m}$ 不论 x 取何实数总有意义，求 m 的取值范围。

解：$\because x^2-2x+m=(x-1)^2+m-1$ 且不论 x 取何实数总有意义

$\therefore m-1>0$

$\therefore m>1$

【命题规律】

【练 1】若分式 $\frac{1}{x^2-4x+3-n}$ 不论 x 取何实数都有意义，求 n 的取值范围。

解：$\because x^2-4x+3-n=(x-2)^2-1-n$ 且不论 x 取何实数都有意义

$\therefore -1-n>0$

$\therefore n<-1$

【**练 2**】求代数式$\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}$有意义的条件，无意义的条件。

解：①当$1-x\neq 0$且$1-\dfrac{1}{1-x}\neq 0$，即$x\neq 1$且$x\neq 0$时，代数式$\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}$有意义；

②当$1-x=0$或$1-\dfrac{1}{1-x}=0$，即$x=1$或$x=0$时，代数式$\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}$无意义。

考点 2. 与乘法公式的综合应用

【**例 2**】(1)已知$a+\dfrac{1}{a}=4$，求值：①$a^2+\dfrac{1}{a^2}$；②$a^4+\dfrac{1}{a^4}$；③$a^2-\dfrac{1}{a^2}$；④$\dfrac{2a^4+a^2+2}{a^2}$；⑤$\dfrac{a^2}{a^4+a^2+1}$；

⑥$a^3+\dfrac{1}{a^3}$；⑦$\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^3$；⑧$a^3-\dfrac{1}{a^3}$。

解：①$a^2+\dfrac{1}{a^2}=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2-2=4^2-2=14$；

②$a^4+\dfrac{1}{a^4}=\left(a^2+a^2\right)^2-2=14^2-2=194$；

③$\because\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2-4=4^2-4=12$

$\therefore a-\dfrac{1}{a}=\pm 2\sqrt{3}$

$\therefore a^2-\dfrac{1}{a^2}=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(a-\dfrac{1}{a}\right)=4\times\left(\pm 2\sqrt{3}\right)=\pm 8\sqrt{3}$；

④$\dfrac{2a^4+a^2+2}{a^2}=2a^2+1+\dfrac{2}{a^2}=2\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)+1=2\times 14+1=29$；

⑤$\because\dfrac{a^4+a^2+1}{a^2}=a^2+1+\dfrac{1}{a^2}=14+1=15$

$\therefore\dfrac{a^2}{a^4+a^2+1}=\dfrac{1}{15}$

⑥$a^3+\dfrac{1}{a^3}=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(a^2-1+\dfrac{1}{a^2}\right)=4\times(14-1)=52$；

⑦$\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^3=4^3=64$；

⑧ $a^3-\frac{1}{a^3}=\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(a^2+1+\frac{1}{a^2}\right)=\left(\pm 2\sqrt{3}\right)\times(14+1)=\pm 30\sqrt{3}$.

(2)已知 $a^2-4a+1=0$，求值：① $a^2+\frac{1}{a^2}$；② $a^4+\frac{1}{a^4}$；③ $a^2-\frac{1}{a^2}$；④ $\frac{2a^4+a^2+2}{a^2}$；⑤ $\frac{a^2}{a^4+a^2+1}$；

⑥ $a^3+\frac{1}{a^3}$；⑦ $\left(a+\frac{1}{a}\right)^3$；⑧ $a^3-\frac{1}{a^3}$。

解：显然 $a\neq 0$，由 $a^2-4a+1=0$ 两边同时除以 a 得：$a-4+\frac{1}{a}=0$

即 $a+\frac{1}{a}=4$.

其他同（1）.

(3)已知 $\frac{a^2+1}{a}=4$，求值：① $a^2+\frac{1}{a^2}$；② $a^4+\frac{1}{a^4}$；③ $a^2-\frac{1}{a^2}$；④ $\frac{2a^4+a^2+2}{a^2}$；⑤ $\frac{a^2}{a^4+a^2+1}$；

⑥ $a^3+\frac{1}{a^3}$；⑦ $\left(a+\frac{1}{a}\right)^3$；⑧ $a^3-\frac{1}{a^3}$。

解：由 $\frac{a^2+1}{a}=4$ 得：$a+\frac{1}{a}=4$

其他同（1）.

(4)已知 $a+a^{-1}=4$，求值：① a^2+a^{-2}；② a^3-a^{-3}；③ $\left(a+a^{-1}\right)^3$；

解：由 $a+a^{-1}=4$ 得：$a+\frac{1}{a}=4$

① $a^2+a^{-2}=a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2=4^2-2=14$;

② $a^3-a^{-3}=a^3-\frac{1}{a^3}=\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(a^2+1+\frac{1}{a^2}\right)=\left(\pm 2\sqrt{3}\right)\times(14+1)=\pm 30\sqrt{3}$;

③ $\left(a+a^{-1}\right)^3=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3=4^3=64$.

【练 1】已知 $x+\frac{1}{x}=3$，求值：① $x^2+\frac{1}{x^2}$； ② $x^4-\frac{1}{x^4}$。

解：① $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$；

② $\because \left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=3^2-4=5$

$\therefore x-\frac{1}{x}=\pm\sqrt{5}$

$\therefore x^2-\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)=3\times\left(\pm\sqrt{5}\right)=\pm3\sqrt{5}$

$\therefore x^4-\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)=7\times\left(\pm3\sqrt{5}\right)=\pm21\sqrt{5}$.

【练 2】已知 $a^2-3a+1=0$。求值：① $a-\frac{1}{a}$ ； ② $a^3-\frac{1}{a^3}$。

解：由 $a^2-3a+1=0$ 得： $a+\frac{1}{a}=3$

① $\because \left(a-\frac{1}{a}\right)^2=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4=3^2-4=5$

$\therefore a-\frac{1}{a}=\pm\sqrt{5}$

② $\because a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2=3^2-2=7$

$\therefore a^3-\frac{1}{a^3}=\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(a^2+1+\frac{1}{a^2}\right)=\left(\pm\sqrt{5}\right)\times(7+1)=\pm8\sqrt{5}$

【练 3】若 $\frac{x^2+1}{x}=3$，求值：① $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$； ② $\frac{x^2}{2x^4+2x^2+2}$； ③ $\frac{x^2}{x^4+x^2-1}$。

解：由 $\frac{x^2+1}{x}=3$ 得： $x+\frac{1}{x}=3$

① $\because \frac{x^4+x^2+1}{x^2}=x^2+1+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1=3^2-1=8$

$\therefore \frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{8}$；

②$\dfrac{x^2}{2x^4+2x^2+2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{16}$；

③$\because\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4=3^2-2=5$

$\therefore x-\dfrac{1}{x}=\pm\sqrt{5}$

$\because\dfrac{x^4+x^2-1}{x^2}=x^2+1-\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+1=3\times\left(\pm\sqrt{5}\right)+1=\pm3\sqrt{5}+1$

$\therefore\dfrac{x^2}{x^4+x^2-1}=\dfrac{1}{\pm3\sqrt{5}+1}=\dfrac{\pm3\sqrt{5}-1}{44}$

【练 4】若$a+a^{-1}=3$，求值：①a^2-a^{-2}；② a^3-a^{-3}。

解：由$a+a^{-1}=3$得：$a+\dfrac{1}{a}=3$

①$\because\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2-4=3^2-4=5$

$\therefore a-\dfrac{1}{a}=\pm\sqrt{5}$

$\therefore a^2-a^{-2}=a^2-\dfrac{1}{a^2}=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(a-\dfrac{1}{a}\right)=3\times\left(\pm\sqrt{5}\right)=\pm3\sqrt{5}$

②$\because a^2+\dfrac{1}{a^2}=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2-2=3^2-2=7$

$\therefore a^3-a^{-3}=a^3-\dfrac{1}{a^3}=\left(a-\dfrac{1}{a}\right)\left(a^2+1+\dfrac{1}{a^2}\right)=\left(\pm\sqrt{5}\right)\times(7+1)=\pm8\sqrt{5}$

考点 3. 整体代入求值

【例 3】已知$\dfrac{a}{b}=2$，求分式$\dfrac{a^2-ab+b^2}{a^2+b^2}$的值。

解：由$\dfrac{a}{b}=2$得：$a=2b$

$\therefore$原式$=\dfrac{4b^2-2b^2+b^2}{4b^2+b^2}=\dfrac{3b^2}{5b^2}=\dfrac{3}{5}$

【变式一】已知$\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{1}{2}$，求分式$\dfrac{3a^2-5ab+2b^2}{2a^2+3ab-5b^2}$的值。

解：由$\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{1}{2}$得：$a=\dfrac{3}{2}b$

$\therefore$ 原式$=\dfrac{(3a-2b)(a-b)}{(2a+5b)(a-b)}=\dfrac{3a-2b}{2a+5b}=\dfrac{\frac{9}{2}b-2b}{3b+5b}=\dfrac{\frac{5}{2}b}{8b}=\dfrac{5}{16}$

【变式二】已知$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=4$，求$\dfrac{a-2ab-b}{2a-2b+7ab}$的值。

解：由$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=4$得：$b-a=4ab$

$\therefore$ 原式$=\dfrac{a-b-2ab}{2(a-b)+7ab}=\dfrac{-4ab-2ab}{-8ab+7ab}=\dfrac{-6ab}{-ab}=6$

【变式三】已知$x-y=4xy$，求$\dfrac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}$的值。

解：原式$=\dfrac{2(x-y)+3xy}{x-y-2xy}=\dfrac{8xy+3xy}{4xy-2xy}=\dfrac{11xy}{2xy}=\dfrac{11}{2}$

【变式四】已知$2a^2+5ab+3b^2=0$，且$ab\neq 0$，求代数式$\dfrac{2a}{b}+\dfrac{3b}{a}$、$\dfrac{4a^2}{b^2}+\dfrac{9b^2}{a^2}$的值

解：由$2a^2+5ab+3b^2=0$得：$2a^2+3b^2=-5ab$

$\therefore \dfrac{2a}{b}+\dfrac{3b}{a}=\dfrac{2a^2+3b^2}{ab}=\dfrac{-5ab}{ab}=-5$

$\dfrac{4a^2}{b^2}+\dfrac{9b^2}{a^2}=\dfrac{4a^4+9b^4}{a^2b^2}=\dfrac{(2a^2+3b^2)^2-12a^2b^2}{a^2b^2}=\dfrac{(-5ab)^2-12a^2b^2}{a^2b^2}=\dfrac{25a^2b^2-12a^2b^2}{a^2b^2}=\dfrac{13a^2b^2}{a^2b^2}=13$

【命题规律】

【练 1】已知$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5$，则分式$\dfrac{2x-3xy+2y}{x+2xy+y}$的值为__1__.

【练 2】若 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$,则 $\frac{b}{a}-\frac{a}{b}-3$ 的值是__-2____.

【练 3】已知 $\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}=3$，则代数式 $\frac{2a-5ab+4b}{4ab-3a-6b}=$__$-\frac{1}{2}$____.

考点 4. 利用换元法求分式的值

【例 4】(1)若 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}\neq 0$，求 $\frac{x-y-z}{3x+2y-z}$ 的值。

解：设 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=k\left(k\neq 0\right)$，则 $x=2k.y=3k,z=4k$

$\therefore$ 原式 $=\frac{2k-3k-4k}{6k+6k-4k}=\frac{-5k}{8k}=-\frac{5}{8}$

(2)已知 $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{a+c}=\frac{c}{a+b}=k$，求 k 的值。

解：由 $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{a+c}=\frac{c}{a+b}=k$ 得：$\begin{cases}a=k\left(b+c\right)\\b=k\left(a+c\right)\\c=k\left(a+b\right)\end{cases}$

三式相加得：$a+b+c=2k\left(a+b+c\right)$

即 $\left(a+b+c\right)\left(2k-1\right)=0$

$\therefore a+b+c=0$ 或 $2k-1=0$

1° 若 $a+b+c=0$, 则 $b+c=-a$

$\therefore k=\frac{a}{b+c}=\frac{a}{-a}=-1$

2° 若 $2k-1=0$, 即 $k=\frac{1}{2}$

综上，$k=-1$ 或 $\frac{1}{2}$

(3) a,b,c 为非零实数，且 $a+c+b\neq 0$ ，若 $\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{c+b-a}{a}$ ，求代数式 $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ 的值。

解：设 $\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{c+b-a}{a}=k$,则 $\begin{cases}a+b=(k+1)c\\a+c=(k+1)b\\b+c=(k+1)a\end{cases}$

三式相加得：$2(a+b+c)=(k+1)(a+b+c)$

即 $(a+b+c)(k-1)=0$

$\because a+b+c\neq 0$

$\therefore k=1$

$\therefore a+b=2c,b+c=2a,c+a=2b$

$\therefore$ 原式 $=\frac{2c\times 2a\times 2b}{abc}=8$

【练 1】已知 $\frac{x}{3}=y=\frac{z}{2}\neq 0$, 则 $\frac{2x^2-2y^2+5z^2}{xy+yz+zx}=$ ___$\frac{36}{11}$___.

【练 2】若 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}$，且 $3x+2y-z=14$,求 x,y,z 的值。

解：设 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}=k$ ，则 $x=2k,y=3k,z=5k$

$\because 3x+2y-z=14$

$\therefore 6k+6k-5k=14$

解得：$k=2$

$\therefore x=4,y=6,z=10$

【练 3】若 $xyz\neq 0$，且满足 $\frac{y+z}{x}=\frac{x+z}{y}=\frac{x+y}{z}$，求 $\frac{(y+z)(x+z)(x+y)}{xyz}$ 的值。

解：设 $\frac{y+z}{x}=\frac{x+z}{y}=\frac{x+y}{z}$，则 $\begin{cases} y+z=kx \\ x+z=ky \\ x+y=kz \end{cases}$

三式相加得：$2(x+y+z)=k(x+y+z)$

即：$(x+y+z)(k-2)=0$

$\therefore x+y+z=0$ 或 $k=2$

1° 当 $x+y+z=0$ 时，$y+z=-x, x+z=-y, x+y=-z$

$\therefore$ 原式 $=\frac{(-x)\cdot(-y)\cdot(-z)}{xyz}=-1$

2° 当 $k=2$ 时，$y+z=2x, x+z=2y, x+y=2z$

$\therefore$ 原式 $=\frac{2x\times 2y\times 2z}{xyz}=8$

综上，原式 $=-1$ 或 8

考点 5. 裂项相消

【例 6】已知数列 a_n 满足 $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$，即 $a_1=\frac{1}{1\times(1+1)}=\frac{1}{2}$，$a_2=\frac{1}{2\times(2+1)}=\frac{1}{6}$，$a_3=\frac{1}{3\times(3+1)}=\frac{1}{12}\cdots$，依此类推。根据以上规律，回答下列问题。

(1)求 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8$ 的值；

解：$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{5\times 6}+\frac{1}{6\times 7}+\frac{1}{7\times 8}+\frac{1}{8\times 9}$

$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

(2)求 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n$ 的值（用含 n 的代数式表示）。

解：$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}$

$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$

【例 7】根据分式的减法法则，可以得到：$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{(n+1)-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}$，反过来，可以得到：

$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，这样就把一项分裂成了两项，利用这种裂项的方法可以解决很多数学问题。

(1) 比较大小：$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}(n\geq100)$ _<_1（填“>”，“=”或“<”）；

(2)解方程：$\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-5x+6}+\frac{1}{x^2-7x+12}=\frac{1}{2x-8}$；

解：$\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}+\frac{1}{(x-3)(x-4)}=\frac{1}{2x-8}$

$$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-3}=\frac{1}{2x-8}$$

$$\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2x-8}$$

$$2(x-1)-2(x-4)=x-1$$

$$x=7$$

检验：当 $x=7$ 时，$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\neq0$

$\therefore$ $x=7$ 是原分式方程得解.

(3)化简求值：$-\frac{4}{3}+\frac{8}{3\times5}-\frac{12}{5\times7}+\frac{16}{7\times9}-\cdots+(-1)^n\frac{4n}{(2n+1)(2n-1)}$。

解：原式 $=-\left(1+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)-\cdots+(-1)^n\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n-1}\right)$

1° 当 n 为奇数时，原式 $=-1-\frac{1}{2n+1}=\frac{-2n-2}{2n+1}$；

2° 当 n 为偶数时，原式 $=-1+\frac{1}{2n+1}=\frac{-2n}{2n+1}$.

1. $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=$ ___$\frac{n-1}{n}$___。

2. $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\frac{1}{7\times9}+\frac{1}{9\times11}=$___$\frac{5}{11}$___。

3. $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=$___$\frac{n}{2n+1}$___。

【巩固练习】

1、求使代数式$\frac{x-2}{x+4}\div\frac{x-3}{x+3}$有意义的条件、无意义的条件。

解：当$x\neq3且x\neq-3且x\neq-4$时，代数式有意义；

当$x=3或x=-3或x=-4$时，代数式无意义。

2、(1)已知$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$，则$\frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}=$___$\frac{3}{5}$___.

(2)已知$\frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}=\frac{3}{5}$，则$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=$___$3$___.

(3)已知$\frac{x}{x^2-3x+1}=1$，则$\frac{x^2}{x^4-9x^2+1}=$___$\frac{1}{5}$___.

(4)已知$a+\frac{1}{a}=5$，求$\frac{a^2}{a^4+a^2+1}$的值。

解：$\because\frac{a^4+a^2+1}{a^2}=a^2+1+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-1=5^2-1=24$

$\therefore 原式=\frac{1}{24}$

(5)已知$\frac{2a-5ab+4b}{4ab-3a-6b}=5$，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}=$___$\frac{25}{34}$___，$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=$___$\frac{25}{17}$___。

⑹若 $4x-3y-6z=0$， $x+2y-7z=0\left(xyz\neq 0\right)$，求 $\dfrac{5x^2+2y^2-z^2}{2x^2-3y^2-10z^2}$ 的值.

解：由 $4x-3y-6z=0$， $x+2y-7z=0\left(xyz\neq 0\right)$ 得： $x=3z,y=2z$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{45z^2+8z^2-z^2}{18z^2-12z^2-10z^2}=\dfrac{52z^2}{-4z^2}=-13$

3、若分式 $\dfrac{1}{x^2-4x+n-2}$ 不论 x 取何实数都有意义，求 n 的取值范围。

解：$\because x^2-4x+n-2=\left(x-2\right)^2+n-6$ 且不论 x 取何实数都有意义

$\therefore n-6>0$

$\therefore n>6$

4、化简求值：$\dfrac{4}{3}-\dfrac{8}{3\times 5}+\dfrac{12}{5\times 7}-\dfrac{16}{7\times 9}+\cdots+\left(-1\right)^{n+1}\dfrac{4n}{\left(2n+1\right)\left(2n-1\right)}$。

解：原式 $=\left(1+\dfrac{1}{3}\right)-\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}\right)-\left(\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}\right)+\cdots+\left(-1\right)^n\left(\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{2n-1}\right)$

1° 当 n 为奇数时，原式 $=1+\dfrac{1}{2n+1}=\dfrac{2n+2}{2n+1}$；

2° 当 n 为偶数时，原式 $=1-\dfrac{1}{2n+1}=\dfrac{2n}{2n+1}$.