2023年秋季八年级期末限时检测试卷

数学

注意事项：

1.答题前，请考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，并认真核对条形码上的姓名、准考证号、考室和座位号；

2.必须在答题卡上答题，在草稿纸、试题卷上答题无效；

3.答题时，请考生注意各大题题号后面的答题提示；

4.请勿折叠答题卡，保持字体工整、笔迹清晰、卡面清洁；

5.答题卡上不得使用涂改液、涂改胶和贴纸；

6.本学科试卷共25个小题，考试时量120分钟，满分120分.

一、选择题（本大题共10个小题，每小题3分，共30分，在下列各题的四个选项中，只有一项是符合题意的，请在答题卡中填涂符合题意的选项）

1．在以下绿色食品、回收、节能、节水四个标志中，是轴对称图形的是（　　）

A.　　　　B.　　　　C.　　　　D.

2．下列计算正确的是（　）

A．$b^3 \cdot b^3 = 2b^3$　　B．$\left(ab^2\right)^3 = a^3b^6$　　C．$a^{10} \div a^2 = a^5$　　D．$a^2 + a^3 = a^5$

3．根据携程发布的《2024年元旦跨年旅游报告》显示：星城长沙上榜2024年元旦跨年热门旅游目的地．元旦假期，长沙市接待游客超过6000000人次．6000000用科学记数法表示应为（　）

A．0.6×10^7　　B．6×10^7

C．6×10^6　　D．6×10^5

4．下列属于最简二次根式的是（　）

A．$\sqrt{9}$　　B．$\sqrt{10}$　　C．$\sqrt{0.5}$　　D．$\sqrt{4a}$

5．如果x^2+6x+m是一个完全平方式，则m的值是（　）

A．3　　B．9　　C．6　　D．-9

6．把分式$\dfrac{xy}{x+y}$中的x和y都扩大10倍，则分式的值（　）

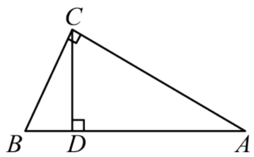
A．扩大10倍　　　　B．扩大100倍

C．缩小为$\dfrac{1}{10}$　　　　D．不变

7．等腰三角形的周长是13cm，其中一边长是3cm，则该等腰三角形的腰长为（）

A．3cm　　B．7cm　　C．5cm　　D．3cm或5cm

8．在△ABC中，∠ACB为直角，∠A=30°，CD⊥AB于D，若BD=1，则AB的长度是（　　）

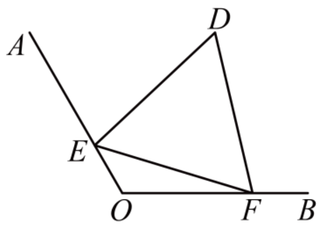


A．4　　B．3　　C．2　　D．1

9．某地开展建设绿色家园活动，活动期间，计划每天种植相同数量的树木，该活动开始后、实际每天比原计划每天多植树50棵，实际植树400棵所需时间与原计划植树300棵所需时间相同．设实际每天植树x棵．则下列方程正确的是（　）

A．$\dfrac{400}{x-50}=\dfrac{300}{x}$　　B．$\dfrac{300}{x-50}=\dfrac{400}{x}$　　C．$\dfrac{400}{x+50}=\dfrac{300}{x}$　　D．$\dfrac{300}{x+50}=\dfrac{400}{x}$

10．如图，已知$\angle AOB=120^\circ$，点D是$\angle AOB$的平分线上的一个定点，点E，F分别在射线OA和射线OB上，且$\angle EDF=60^\circ$．下列结论：①$\triangle DEF$是等边三角形；②四边形$DEOF$的面积是一个定值；③当$DE\perp OA$时，$\triangle DEF$的周长最小；④当$DE \parallel OB$时，DF也平行于OA．其中正确的个数是（　　）



A．1个　　B．2个　　C．3个　　D．4个

二、填空题（本题共6个小题，每小题3分，共18分）

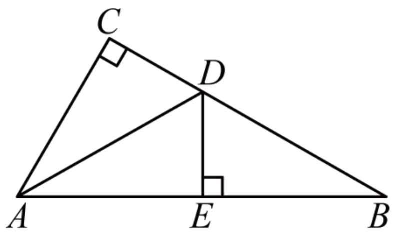
11．化简：$\sqrt{50}-\sqrt{8}=$______.

12．若二次根式$\sqrt{2x-3}$在实数范围内有意义，则x的取值范围是__________.

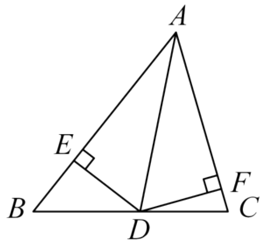
13．在平面直角坐标系中，点$A(3,-6)$关于x轴对称的点的坐标是_____.

14．如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，$\angle B=30^\circ$，DE垂直平分AB，分别交BC，AB于点

D，E，若 $AD=2$，则 $BC=$______.



15．如图，在$\triangle ABC$中，AD为$\triangle ABC$的角平分线，$DE\perp AB$，垂足为E，$DF\perp AC$，垂足为F，若$AB=5$，$AC=3$，$DF=1$，则$\triangle ABC$的面积为______.



16．若代数式 $2a^2+3a+1$ 的值是 6，则代数式 $6a^2+9a+5$ 的值为______.

三、解答题（本题共 9 个小题，共 72 分）

17．分解因式：①x^2-4y^2；　　②$3a^2+6ab+3b^2$

18．计算下列各式：

(1)$\dfrac{1}{a-2}-\dfrac{4}{a^2-4}$；

(2)$\left(\dfrac{x}{x+1}-1\right)\div\dfrac{1}{x^2+x}$.

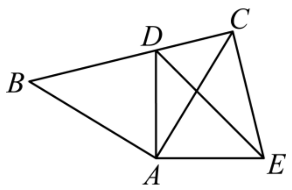
19．解分式方程

(1) $\frac{1}{x-2}=\frac{1-x}{2-x}-3$

(2) $\frac{x}{x-1}-\frac{2x-1}{x^2-1}=1$

20．先化简，再求值：$\frac{x}{x^2-2x+1}\div\left(\frac{x+1}{x^2-1}+1\right)$，其中 $x=\sqrt{2}+1$.

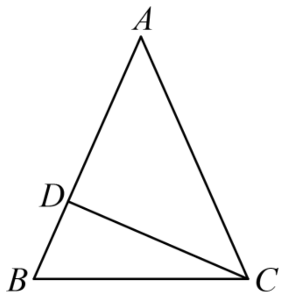
21．如图，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 中，$AB=AC$，$AD=AE$，$\angle BAC=\angle DAE=90°$，且点 D 在线段 BC 上，连 CE .



(1)求证：$\triangle ABD \cong \triangle ACE$；

(2)若$\angle EAC=60^{\circ}$，求$\angle CED$的度数.

22．如图，在$\triangle ABC$中，已知$AB=AC$，D是AB边上的一点，$CD=3$，$BC=\sqrt{10}$，$BD=1$.



(1)求证：$\triangle BCD$是直角三角形；

(2)求$\triangle ABC$的面积.

23．某商店购进A，B两种商品，购进一个A商品比购买一个B商品少10元，并且花费100元购买的A商品和花费300元购进的B商品的数量相等．

(1)求购买一个A商品和B商品各需要多少元；

(2)商店准备购进A，B两种商品共80件，若B商品的数量不少于A商品的4倍，并且购买A，B商品的总费用不低于1000且不高于1100，那么商店有几种购买方案？

24．我们规定：在最简分式中，分子、分母都是各项系数为整数的整式的情况下，如果分子的次数低于分母的次数，称这样的分式为真分式．例如，分式$\frac{4}{x+2}$，$\frac{3x^2}{x^3-4x}$是真分式．如果分子的次数不低于分母的次数，称这样的分式为假分式．例如，分式$\frac{x+1}{x-1}$，$\frac{x^2}{x+1}$是假分式．一个假分式M与一个真分式N的和为整式，则称M与N互为“和整分式”．

(1)已知：下列分式与假分式$P=\frac{2x-7}{x-3}$互为“和整分式”的是________．

①$\frac{1}{x+3}$；②$\frac{1}{x-3}$；③$\frac{7}{x-3}$．

(2)若假分式$M=\frac{2x^2-3x-4}{x-1}$，存在一个真分式N与M互为“和整分式”．

①求真分式N；②当$M+N=0$时，求M的值．

(3)若A与B均与真分式$\frac{2}{x-2}$互为“和整分式”，直接写出当整数x为何值时，分式$A+B$的值为整数．

25．如图 1，点 P 为 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle BCD$ 的平分线上一点，$PA=PB$，$PE\perp BC$ 于 E．

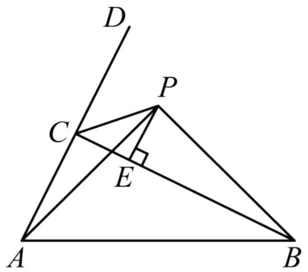


图1

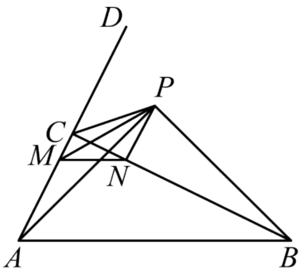


图2

(1)求证：$\angle PAC=\angle PBC$；

(2)若 $\angle APB=90^{\circ}$，连接 AE，$S_{\triangle ACP}=2S_{\triangle AEP}$，$PB=2$，求 PC 的长度；

(3)如图 2，若 M，N 分别是边 AC，BC 上的点，且 $2\angle MPN=\angle APB$，求证：$BN=AM+MN$．

1．A

【分析】根据轴对称图形的概念求解．如果一个图形沿着一条直线对折后两部分完全重合，这样的图形叫做轴对称图形，这条直线叫做对称轴．

【详解】A．是轴对称图形，故A符合题意；

B．不是轴对称图形，故B不符合题意；

C．不是轴对称图形，故C不符合题意；

D．不是轴对称图形，故D不符合题意．

故选：A．

【点睛】本题主要考查轴对称图形的知识点．确定轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合．

2．B

【分析】本题考查了整式的运算，根据同底数幂的乘法和除法，积的乘方，合并同类项的运算法则计算即可．

【详解】解：A、$b^3 \cdot b^3 = b^6$，故选项A错误，不符合题意；

B、$\left(ab^2\right)^3 = a^3b^6$，故选项B正确，符合题意；

C、$a^{10} \div a^2 = a^8$，故选项C错误，不符合题意；

D、a^2和a^3不是同类项，不能合并，故选项D错误，不符合题意；

故选：B．

3．C

【分析】本题考查用科学记数法表示较大的数．绝对值大于1的数可以用科学记数法表示，一般形式为$a \times 10^n$，n为正整数，且比原数的整数位数少1，据此可以解答．

【详解】解：6000000用科学记数法表示应为6×10^6．

故选：C

4．B

【分析】本题主要考查了最简二次根式的定义，根据最简二次根式的定义:被开方数不含分母且不含能开得尽方的因数或因式判断即可．

【详解】解：A．$\sqrt{9}$，被开方数含能开得尽方的数，故本选项不符合题意；

B．$\sqrt{10}$是最简二次根式，故本选项符合题意；

C．$\sqrt{0.5}$，被开方数是小数，故本选项不符合题意；

D．$\sqrt{4a}$，被开方数含能开得尽方的数，故本选项不符合题意；

故选：B．

5．B

【分析】根据完全平方公式可进行求解．

【详解】解：$\because\left(x+3\right)^2=x^2+6x+9$，

$\therefore$如果x^2+6x+m是一个完全平方式，则m的值是9；

故选B．

【点睛】本题主要考查完全平方式，熟练掌握完全平方式是解题的关键．

6．A

【分析】本题考查了分式的基本性质，分式的分子分母都乘以或除以同一个不为0的整式，分式的值不变．根据分式的基本性质，可得答案．

【详解】解：如果把分式$\frac{xy}{x+y}$中的x和y都扩大10倍得$\frac{10x\cdot 10y}{10x+10y}=\frac{10xy}{x+y}$，

$\therefore$新分式与原分式相比，新分式的值扩大10倍，

故选：A．

7．C

【分析】

本题考查了等腰三角形的性质和三角形的三边关系；已知没有明确腰和底边的题目一定要想到两种情况，分类进行讨论，还应验证各种情况是否能构成三角形进行解答，这点非常重要，也是解题的关键．

已知给出了其中一边长为3cm，没有明确该边的名称，所以长为3的边可能为腰，也可能为底边，故应分两种情况讨论．

【详解】解：由题意知，应分两种情况：

当腰长为3cm时，则另一腰也为3cm，底边为$13-2\times3=7\text{cm}$，

$\because 3+3<7$，

$\therefore$边长分别为$3,3,7$不能构成三角形；

当底边长为3cm时，腰的长$=(13-3)\div2=5\text{cm}$，

$\because 0<3<5+5=10$，

$\therefore$边长为$3,5,5$，能构成三角形，则该等腰三角形的一腰长是5cm．

故选 C．

8．A

【详解】∵CD⊥AB，∠ACB 是直角，∠A=30°，

∴∠BCD=30°，

∴BC=2BD，AB=2BC，

∴AB=4BD=4×1=4，

故选 A.

9．B

【分析】设实际平均每天植树 x 棵，则原计划每天植树（x-50）棵，根据：实际植树 400 棵所需时间=原计划植树 300 棵所需时间，这一等量关系列出分式方程即可.

【详解】解：设现在平均每天植树 x 棵，则原计划每天植树（x-50）棵，

根据题意，可列方程：$\frac{300}{x-50}=\frac{400}{x}$，

故选：B.

【点睛】此题考查了由实际问题列分式方程，关键在寻找相等关系，列出方程.

10．C

【分析】如图 1，连接OD，作$DM\perp OA$于M，$DN\perp OB$于N，由角平分线的性质定理可得$DM=DN$，证明$\triangle MDE\cong\triangle NDF\left(\text{ASA}\right)$，则$DE=DF$，$\triangle DEF$是等边三角形；进而可判断①的正误；由$\triangle MDE\cong\triangle NDF\left(\text{ASA}\right)$，可知

$S_{四边形DEOF}=S_{四边形DEON}+S_{\triangle DNF}=S_{四边形DEON}+S_{\triangle DME}=S_{四边形DMON}$，进而可判断②的正误；由$\triangle DEF$的周长为$3DE$，可知当$DE\perp OA$时，$DE$最短，$\triangle DEF$的周长最小，进而可判断③的正误；如图 2，当$DE'//OB$时，$\angle E'DO=\angle BOD=\frac{1}{2}\angle AOB=60^\circ=\angle AOD$，则$\triangle E'DO$是等边三角形，则$F$与$O$重合，$DF$与$OA$交于点$O$；进而可判断④的正误.

【详解】解：如图 1，连接OD，作$DM\perp OA$于M，$DN\perp OB$于N，

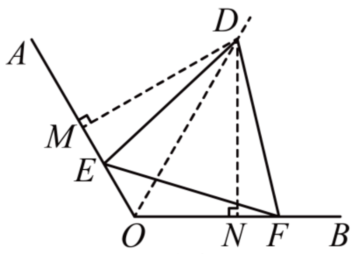


图1

∵点 D 是 $\angle AOB$ 的平分线上的一个定点，

$\therefore DM=DN$，

$\therefore \angle MDN=360^\circ-\angle DMO-\angle MON-\angle DNO=60^\circ=\angle EDF$，

$\therefore \angle MDN-\angle EDN=\angle EDF-\angle EDN$，即 $\angle MDE=\angle NDF$，

$\because \angle MDE=\angle NDF$，$DM=DN$，$\angle DME=90^\circ=\angle DNF$，

$\therefore \triangle MDE\cong\triangle NDF(\mathrm{ASA})$，

$\therefore DE=DF$，

$\therefore \triangle DEF$ 是等边三角形；①正确，故符合要求；

$\because \triangle MDE\cong\triangle NDF(\mathrm{ASA})$，

$\therefore S_{四边形DEOF}=S_{四边形DEON}+S_{\triangle DNF}=S_{四边形DEON}+S_{\triangle DME}=S_{四边形DMON}$，

∵点 D 是 $\angle AOB$ 的平分线上的一个定点，

∴四边形 $DEOF$ 的面积是一个定值；②正确，故符合要求；

$\because \triangle DEF$ 的周长为 $3DE$，

当 $DE\perp OA$ 时，DE 最短，即等边 $\triangle DEF$ 的周长最小，③正确，故符合要求；

如图 2，当 $DE'/\!/OB$ 时，

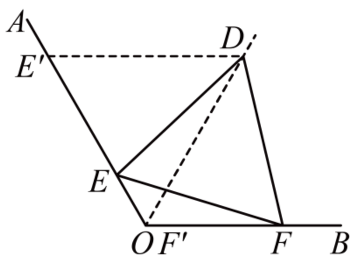


图2

$\therefore \angle E'DO=\angle BOD=\dfrac{1}{2}\angle AOB=60^\circ=\angle AOD$，

$\therefore \triangle E'DO$ 是等边三角形，

$\because \triangle DEF$ 是等边三角形，

$\therefore F$与O重合，DF与OA交于点O；④错误，故不符合要求；

故选：C．

【点睛】本题考查了角平分线的性质定理，全等三角形的判定与性质，多边形内角和定理，等边三角形的判定与性质，垂线段最短，平行线的性质等知识．熟练掌握角平分线的性质定理是解题的关键．

11．$3\sqrt{2}$

【分析】先把各二次根式化为最简二次根式，然后合并即可．

【详解】$\sqrt{50}-\sqrt{8}=5\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\ 3\sqrt{2}$．

故答案为$3\sqrt{2}$．

【点睛】本题考查二次根式的计算，在进行此类运算时，一般先把二次根式化为最简二次根式的形式后再运算．

12．$x\geq\frac{3}{2}$

【分析】根据二次根式的被开方数是非负数即可得出答案．

【详解】解：$\because 2x-3\geq0$，

$\therefore x\geq\frac{3}{2}$．

故答案为：$x\geq\frac{3}{2}$．

【点睛】本题考查了二次根式有意义的条件，掌握二次根式的被开方数是非负数是解题的关键．

13．（3，6）

【分析】根据关于x轴对称的点的横坐标相等，纵坐标互为相反数，可得答案．

【详解】$\because$点$P(3，-6)$关于x轴对称，

$\therefore$横坐标相等，纵坐标互为相反数，

$\therefore$点$P(3，-6)$关于x轴对称的点的坐标是（3，6），

故答案为：（3，6）．

【点睛】本题考查了关于x轴对称的点的坐标，利用关于x轴对称的点的横坐标相等，纵坐标互为相反数是解题关键．

14．3

【分析】本题考查的是线段的垂直平分线的性质，含$30°$的直角三角形的性质，三角形的内

角和定理的应用，本题先证明$DA=DB=2$，$\angle DAE=\angle B=30^{\circ}$，求解$\angle CAD=30^{\circ}$，可得$CD=1$，从而可得答案．

【详解】解：$\because DE$垂直平分AB，$AD=2$，

$\therefore DA=DB=2$，而$\angle B=30^{\circ}$，

$\therefore \angle DAE=\angle B=30^{\circ}$，

$\therefore \angle ADC=30^{\circ}+30^{\circ}=60^{\circ}$，

$\therefore \angle CAD=180^{\circ}-90^{\circ}-60^{\circ}=30^{\circ}$，

$\therefore CD=\frac{1}{2}AD=1$，

$\therefore BC=CD+BD=3$．

故答案为：3．

15．4

【分析】此题考查的是角平分线的性质，掌握角的平分线上的点到角的两边的距离相等是解决此题关键．根据角平分线的性质可得$DE=DF=1$的长，然后根据三角形面积公式可得答案．

【详解】解：$\because AD$为$\triangle ABC$的角平分线，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，

$\therefore DE=DF=1$，

$\because AB=5$，$AC=3$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$

$=\frac{1}{2}AB\cdot DE+\frac{1}{2}AC\cdot DF$

$=\frac{1}{2}\times 5\times 1+\frac{1}{2}\times 3\times 1$

$=4$．

故答案为：4．

16．20

【分析】由题意列出关系式，求出$2a^2+3a$的值，将所求式子变形后，把$2a^2+3a$的值代入计算即可求出值．

【详解】$\because 2a^2+3a+1=6$，即$2a^2+3a=5$，

$\therefore 6a^2+9a+5=3（2a^2+3a）+5=20$．

故答案为20．

【点睛】本题考查的知识点是代数式求值，解题关键是利用整体代入的思想进行解答．

17．①$(x+2y)(x-2y)$；②$3(a+b)^2$

【分析】本题考查提取公因式法，公式法因式分解，

①根据平方差公式进行因式分解；

②先提前公因式3，然后利用完全平方公式进行二次分解；

掌握因式分解的方法是解题的关键．

【详解】解：①x^2-4y^2

$=x^2-(2y)^2$

$=(x+2y)(x-2y)$；

②$3a^2+6ab+3b^2$

$=3(a^2+2ab+b^2)$

$=3(a+b)^2$．

18．(1)$\frac{1}{a+2}$

(2)$-x$

【分析】本题主要考查了分式的混合运算．

（1）利用平方差公式展开，然后提公因式化简即可．

（2）先算括号里面的，然后提公因式化简即可．

【详解】（1）解：$\frac{1}{a-2}-\frac{4}{a^2-4}$

$=\frac{1}{a-2}-\frac{4}{(a-2)(a+2)}$

$=\frac{1}{a-2}\left(1-\frac{4}{a+2}\right)$

$=\frac{1}{a-2}\times\frac{a-2}{a+2}$

$=\frac{1}{a+2}$；

（2）$\left(\frac{x}{x+1}-1\right)\div\frac{1}{x^2+x}$

$=\frac{x-x-1}{x+1}\cdot x(x+1)$

$=\frac{-1}{x+1}\cdot x(x+1)$

$=-x$.

19．(1)无解

(2) $x=2$

【分析】（1）先把分式方程两边同时乘以$(2-x)$，转化成整式方程，求出整式方程的解，再进行检验即可；

（2）先把分式方程两边同时乘以(x^2-1)，转化成整式方程，求出整式方程的解，再进行检验即可．

【详解】（1）解：$\frac{1}{x-2}=\frac{1-x}{2-x}-3$

$-1=1-x-3(2-x)$

$-1=1-x-6+3x$

$-2x=-4$

$x=2$

当$x=2$时，$x-2=0$，

$\therefore x=2$是原方程的增根，此方程无解．

（2）解：$\frac{x}{x-1}-\frac{2x-1}{x^2-1}=1$

$x(x+1)-(2x-1)=x^2-1$

$x^2+x-2x+1=x^2-1$

$-x=-2$

$x=2$

当$x=2$，$x-1\neq 0$，$x^2-1\neq 0$，

$\therefore x=2$是方程的解．

【点睛】本题考查了解分式方程，先将方程转化为整式方程进行计算，最后一定要检验．

20．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【分析】原式除数括号中两项通分并利用同分母分式的加法法则计算，同时利用除以一个数等于乘以这个数的倒数将除法运算化为乘法运算，约分得到最简结果，将x的值代入进行二

次根式化简．

【详解】解：原式$=\frac{x}{(x-1)^2}\div\frac{x+1+x^2-1}{x^2-1}$

$=\frac{x}{(x-1)^2}\div\frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{x}{(x-1)^2}\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{x(x+1)}$

$=\frac{1}{x-1}$

当$x=\sqrt{2}+1$时，原式$=\frac{1}{\sqrt{2}+1-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

21．(1)见解析

(2)$30°$

【分析】（1）证出$\angle BAD=\angle CAE$，由SAS证明$\triangle ABD\cong\triangle ACE$即可；

（2）先由全等三角形的性质得到$\angle ACE=\angle ABD$，再由$\triangle ABC$和$\triangle ADE$都是等腰直角三角形，得到$\angle ACE=\angle ABD=45°$且$\angle AED=45°$，利用三角形内角和定理求出$\angle AEC$的度数，即可求出$\angle CED$的度数．

【详解】（1）证明：$\because\angle BAC=\angle DAE=90°$，

$\therefore\angle BAC-\angle DAC=\angle DAE-\angle DAC$，即$\angle BAD=\angle CAE$．

在$\triangle ABD$与$\triangle ACE$中，

$$\begin{cases}AB=AC\\ \angle BAD=\angle CAE\\ AD=AE\end{cases},$$

$\therefore\triangle ABD\cong\triangle ACE$（SAS）；

（2）解：由（1）$\triangle ABD\cong\triangle ACE$得$\angle ACE=\angle ABD$，

又$\because\triangle ABC$和$\triangle ADE$都是等腰直角三角形，

$\therefore\angle ACE=\angle ABD=45°$且$\angle AED=45°$，

在$\triangle ACE$中$\because\angle EAC=60°$且$\angle ACE=45°$

$\therefore\angle AEC=180°-60°-45°=75°$，

$\therefore\angle CED=\angle AEC-\angle AED=75°-45°=30°$．

【点睛】本题主要考查了全等三角形的性质与判定，等腰三角形的性质，三角形内角和定理，熟知全等三角形的性质与判定条件是解题的关键．

22．(1)见解析

(2)$\frac{15}{2}$

【分析】本题主要考查了勾股定理和其逆定理以及等腰三角形的性质，解题关键是利用勾股定理构造方程求出腰长．

（1）根据勾股定理的逆定理证明即可；

（2）设 $AD = x$，则 $AC = x+1$，利用勾股定理列方程求得 $AD = 4$，从而求得 $AB = 5$，再利用三角形的面积公式求解即可．

【详解】（1）证明：$\because CD = 3$，$BC = \sqrt{10}$，$BD = 1$，

$\therefore$在$\triangle CBD$中，$3^2 + 1^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2$，即$BD^2 + DC^2 = BC^2$，

$\therefore \triangle BCD$是直角三角形；

（2）解：设 $AD = x$，则 $AC = x+1$，

在$\mathrm{Rt}\triangle ADC$中，$(x+1)^2 = x^2 + 3^2$，

解得：$x = 4$，

$\therefore AB = 5$，

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CD = \frac{15}{2}$．

23．(1)A 商品的单价为 5 元，B 商品的单价为 15 元．

(2)7 种方案．

【分析】本题考查了分式方程的应用、一元一次不等式组的应用等知识点，审清题意、弄清关系、根据等量关系和不等关系列出分式方程和不等式组是解题的关键．

（1）设 A 商品单价为x元，则B商品单价为$(x+10)$元，，根据等量关系“费 100 元购买的 A 商品和花费 300 元购进的B商品的数量相等”列关于的分式方程，解之经检验后即可解答；

（2）设 A 商品购买m件，B商品购买$(80-m)$件，根据不等关系“B商品的数量不少于 A 商品的 4 倍”和“购买 A，B商品的总费用不低于 1000 且不高于 1100”列关于的一元一次不等式组，解之即可得出 m 的取值范围，再结合 m 为整数即可确定购买方案数．

【详解】（1）解：设 A 商品单价为x元，则B商品单价为$(x+10)$元，

由题意可得：$\frac{100}{x}=\frac{300}{x+10}$，解得：$x=5$，

经检验$x=5$是原方程的根.

答：A 商品的单价为 5 元，B商品的单价为 15 元.

（2）解：设A商品购买m件，B商品购买$(80-m)$件.

由题意可得：$\begin{cases}80-m\geq 4m\\1000\leq 5m+15(80-m)\leq 1100\end{cases}$，解得：$10\leq m\leq 16$，

又$\because m$为正整数.

$\therefore m=10$、11、12、13、14、15、16，共 7 种方案.

24．(1)②

(2)① $N=\frac{5}{x-1}$；② $M=10$

(3)当整数x为-2或0或1或3或4或6时，分式$A+B$的值为整数

【分析】本题考查分式的加减运算，求代数式，分式为整数，

（1）根据“和整分式”的定义进行判断即可；

（2）①根据“和整分式”的定义可得N的值；②根据$M+N=0$，得到$x=\frac{1}{2}$，然后代入$M=\frac{2x^2-3x-4}{x-1}$计算即可；

（3）根据“和整分式”的定义可得出$\frac{4}{x-2}$为整数，即可求解；

掌握分式的运算法则是解题的关键.

【详解】（1）解：①$\because \frac{1}{x+3}+\frac{2x-7}{x-3}$

$=\frac{x-3+(2x-7)(x+3)}{(x+3)(x-3)}$

$=\frac{2(x^2-x-12)}{(x+3)(x-3)}$

$=\frac{2(x+3)(x-4)}{(x+3)(x-3)}$

$=\frac{2(x-4)}{x-3}$，

则该分式与假分式$P=\frac{2x-7}{x-3}$的和不是整式，

∴该分式与假分式$P=\dfrac{2x-7}{x-3}$不是互为“和整分式”；

②∵$\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{2x-7}{x-3}=\dfrac{2x-6}{x-3}=\dfrac{2\left(x-3\right)}{x-3}=2$，

则该分式与假分式$P=\dfrac{2x-7}{x-3}$的和是整式，

∴该分式与假分式$P=\dfrac{2x-7}{x-3}$互为“和整分式”；

③∵$\dfrac{7}{x-3}+\dfrac{2x-7}{x-3}=\dfrac{2x}{x-3}$，

则该分式与假分式$P=\dfrac{2x-7}{x-3}$的和不是整式，

∴该分式与假分式$P=\dfrac{2x-7}{x-3}$不是互为“和整分式”；

故答案为：②；

（2）①∵$M=\dfrac{\left(2x^2-2x\right)-\left(x-1\right)-5}{x-1}=2x-1-\dfrac{5}{x-1}$，

又∵存在一个真分式N与M互为“和整分式”，

∴$N=\dfrac{5}{x-1}$；

②∵$M+N=2x-1=0$，

∴$x=\dfrac{1}{2}$，

当$x=\dfrac{1}{2}$时，$M=2\times\dfrac{1}{2}-1-\dfrac{5}{\frac{1}{2}-1}=10$；

（3）∵A与B均与真分式$\dfrac{2}{x-2}$互为“和整分式”，

设$A+\dfrac{2}{x-2}=C$，$B+\dfrac{2}{x-2}=D$，

∴C，D都是整式，且$A+B+\dfrac{4}{x-2}=C+D$，

∵$A+B$的值为整数，

∴$\dfrac{4}{x-2}$为整数，

∴4能被$\left(x-2\right)$整除，且$x-2\neq 0$即$x\neq 2$，

∴$x-2=\pm1$或±2或±4，

解得：$x=3$或1或4或0或6或-2，

∴当整数x为-2或0或1或3或4或6时，分式$A+B$的值为整数．

25．(1)见解析

(2) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

(3)见解析

【分析】（1）过P作$PF\perp AD$交于F，根据角平分线性质得到$PF=PE$，结合$PA=PB$，得到$\mathrm{Rt}\triangle APF\cong\mathrm{Rt}\triangle BPE\left(\mathrm{HL}\right)$，即得$\angle PAC=\angle PBC$；

（2）根据全等三角形性质得到$AF=BE$，$\angle APF=\angle BPE$，得到$\angle EPF=\angle APB=90^{\circ}$，推出四边形$FCEP$是正方形，根据$S_{\triangle ACP}=2S_{\triangle AEP}$，得到$AC=2PE$，设$PE=x$，得到$AC=2x$，$BE=AF=3x$，根据勾股定理得到$x^{2}+\left(3x\right)^{2}=2^{2}$，解得$x=\frac{\sqrt{10}}{5}$，即得$PC=\frac{2\sqrt{5}}{5}$；

（3）在BC上截取$BQ=AM$，连接PQ，证明$\triangle BPQ\cong\triangle APM\left(\mathrm{SAS}\right)$，得到$PM=PQ$，$\angle APM=\angle BPQ$，得到$\angle MPQ=\angle APB$，根据$2\angle MPN=\angle APB$，得到$2\angle MPN=\angle MPQ$，得到$\angle MPN=\angle QPN$，推出$\triangle QPN\cong\triangle MPN\left(\mathrm{SAS}\right)$，得到$QN=MN$，即得$BN=AM+MN$；

本题主要考查了角平分线，全等三角形．熟练掌握角平分线的性质，全等三角形的性质与判定，是解题的关键．

【详解】（1）如图1，过P作$PF\perp AD$交于F，

$\because$点P为$\angle BCD$的平分线上一点， $PE\perp BC$于E，

$\therefore PF=PE$，

$\because PA=PB$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle APF\cong\mathrm{Rt}\triangle BPE\left(\mathrm{HL}\right)$，

$\therefore \angle PAC=\angle PBC$；

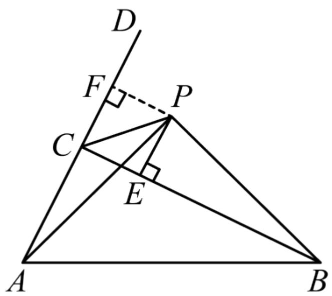


图1

（2）如图2，

$\because \triangle APF \cong \triangle BPE$，

$\therefore AF = BE$， $\angle APF = \angle BPE$，

$\therefore \angle APF + \angle APE = \angle BPE + \angle APE$，

即 $\angle EPF = \angle APB = 90°$，

$\because \angle PEC = \angle PFC = 90°$， $PE = PF$，

$\therefore$四边形 $FCEP$ 是正方形，

$\therefore PE // AC$，

$\because S_{\triangle ACP} = 2S_{\triangle AEP}$，

$\therefore \frac{1}{2} AC \cdot PF = 2 \times \frac{1}{2} PE \cdot PF$，

$\therefore AC = 2PE$，

设 $PE = x$，则 $AC = 2x$，

$\therefore BE = AF = 3x$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle BPE$ 中， $PE^2 + BE^2 = PB^2$， $PB = 2$，

$\therefore x^2 + (3x)^2 = 2^2$，

$\because x > 0$，

$\therefore x = \frac{\sqrt{10}}{5}$，

$\therefore PC = \sqrt{2}x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$；

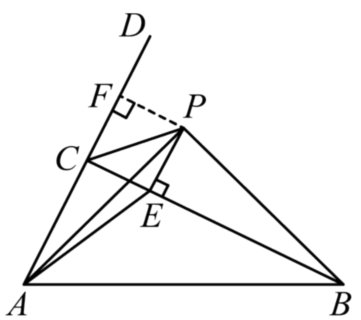


图2

（3）如图 3，在 BC 上截取 $BQ = AM$， 连接 PQ，

$\because \angle PAC = \angle PBC$， $PA = PB$，

$\therefore \triangle BPQ \cong \triangle APM (\mathrm{SAS})$，

$\therefore PM = PQ$， $\angle APM = \angle BPQ$，

$\therefore \angle APM + \angle APQ = \angle BPQ + \angle APQ$，

即$\angle MPQ=\angle APB$，

$\because 2\angle MPN=\angle APB$，

$\therefore 2\angle MPN=\angle MPQ$，

即$2\angle MPN=\angle MPN+\angle QPN$，

$\therefore \angle MPN=\angle QPN$，

$\because PN=PN$，

$\therefore \triangle QPN\cong\triangle MPN(\text{SAS})$，

$\therefore QN=MN$，

$\because BN=BQ+QN$，

$\therefore BN=AM+MN$．

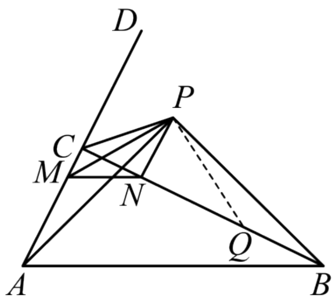


图3