湖南师大附中博才实验中学 2023-2024 学年度第一学期

八年级期末考试试题卷•数学

时量：120 分钟　　　　满分：120 分

一、选择题（本大题共 10 小题，共 30 分）

1．下列文字是轴对称图形的是（　）

A．附　　B．中　　C．博　　D．才

2．下列根式中是最简二次根式的是(　)

A．$\sqrt{\frac{2}{3}}$　　B．$\sqrt{10}$　　C．$\sqrt{9}$　　D．$\sqrt{8}$

3．某种细胞的直径是 0.000000095 米，将 0.000000095 用科学记数法表示为（　）

A．0.95×10^{-7}　　B．9.5×10^{-7}　　C．9.5×10^{-8}　　D．95×10^{-5}

4．若分式$\frac{x-1}{x^2+3}$的值为 0，则 x 的值应为（　）

A．1　　B．-1　　C．3　　D．-3

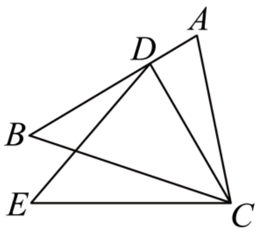
5．下列运算正确的是（　）

A．$a^2\cdot a^3=a^6$　　B．$\left(a^3\right)^3=a^6$　　C．$a^5+a^5=a^{10}$　　D．$(-a)^6\div a^2=a^4$

6．若把分式$\frac{x+y}{2023x}$的 x、y 同时扩大 10 倍，则分式的值（　）

A．扩大 10 倍　　B．缩小 10 倍　　C．不变　　D．缩小 2023 倍

7．如图，△ABC≌△DEC，∠A＝70°，∠ACB＝60°，则∠E 的度数为（　）

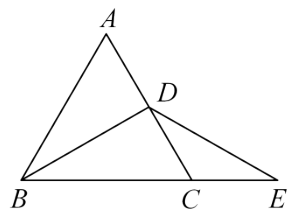


A．70°　　B．50°　　C．60°　　D．30°

8．若$\left(a+b\right)^2=49$，$ab=12$，则a^2+b^2的值为（　）

A．20　　B．25　　C．30　　D．35

9.如图,若$\triangle ABC$是等边三角形,$AB=6$,BD是$\angle ABC$的平分线,延长BC到E,使$CE=CD$,则$BE=$（　）



A．7　　B．8　　C．9　　D．10

10．若关于x的分式方程$\frac{x+m}{4-x^2}+\frac{x}{x-2}=1$无解，则$m$的值是（　　）

A．$m=2$或$m=6$　　B．$m=2$

C．$m=6$　　D．$m=2$或$m=-6$

二、填空题（本大题共 6 小题，共 18 分）

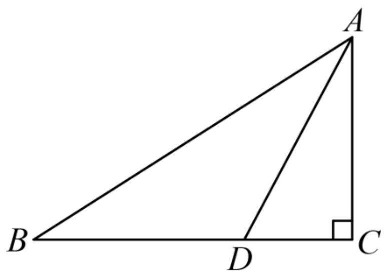
11．计算2^{-2}的结果是______.

12．若式子$\sqrt{x-2024}$在实数范围内有意义，则x的取值范围是__________.

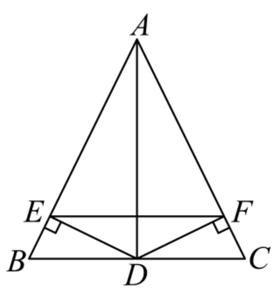
13．分解因式：$x^2y-9y=$______.

14．若x^2+6x+m是完全平方式，则$m=$_____.

15．如图，$\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，AD平分$\angle BAC$，$AB=10$，$CD=3$，则$\triangle ABD$的面积为 _________.



16．如图，在$\triangle ABC$中，$\angle B=\angle C$，D是BC的中点，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，E，F是垂足，现给出以下四个结论：①$\angle DEF=\angle DFE$；②$AE=AF$；③$AD=2DF$；④AD垂直平分EF；⑤$\angle BDE=\angle CDF$．其中正确的结论是__________．(填序号)

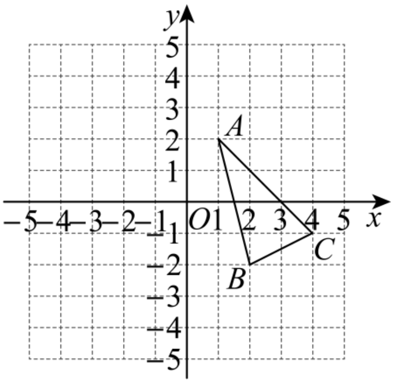


三、解答题（本大题共 9 个小题，共 72 分.）

17．计算：$\sqrt{48}\div\sqrt{3}-\sqrt{12}\times\sqrt{\frac{2}{3}}+\left|2\sqrt{2}-1\right|-2023^{0}$

18．化简求值：$(a+1)\cdot(a-1)+(a-2)^{2}-2(a^{2}-a)$，其中$a=-1$．

19．如图，在平面直角坐标系中，$A(1,2)$，$B(2,-2)$，$C(4,-1)$．



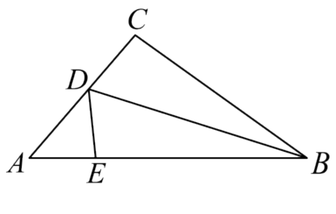
(1)作$\triangle ABC$关于y轴对称的图形$\triangle A_1B_1C_1$；

(2)$\triangle A_1B_1C_1$各顶点的坐标为A_1______，B_1______，C_1______．

(3) $\triangle A_1B_1C_1$ 的面积为______.

20．先化简，再求值：$(\frac{1}{x+2}+1)\div\frac{x^2+6x+9}{x^2-4}$，其中 $x=0$.

21．如图，BD 为 $\triangle ABC$ 的角平分线，点 E 在边 AB 上，$BE=BC$，已知 $AC=5$，$BC=7$，$AB=9$.



(1)求证：$\triangle BED\cong\triangle BCD$

(2)求 $\triangle ADE$ 的周长.

22．“一带一路”的战略构想为国内许多企业的发展带来了新的机遇，某公司生产 A，B 两种机械设备，每台 B 种设备的成本是 A 种设备的1.5倍，公司若投入 16 万元生产 A 种设备，36 万元生产 B 种设备，则可生产两种设备共 10 台．请解答下列问题：

(1)A，B 两种设备每台的成本分别是多少万元？

(2)A，B 两种设备每台的售价分别是 6 万元，10 万元，该公司生产两种设备各 30 台，为更好地支持“一带一路”的战略构想，公司决定优惠卖给“一带一路”沿线的甲国，A 种设备按原来售价 8 折出售，B 种设备在原来售价的基础上优惠10%，若设备全部售出，该公司一共获利多少万元？

23．如图，在等腰$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^{\circ}$，$AC=BC$，F 为 AB 上一点，$BE\perp CF$ 于点 E.

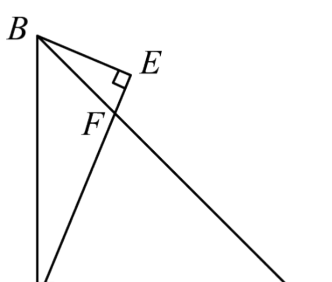


图1

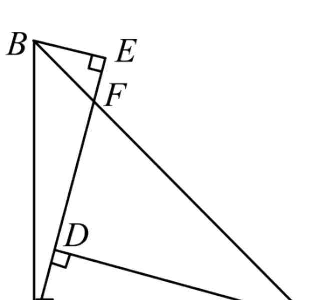


图2

(1)如图 1，若 $AF=AC$，求$\angle BCF$的度数.

(2)如图 2，过 A 作 $AD\perp CF$ 于点 D，求证：$\triangle ADC\cong\triangle CEB$.

(3)若$\angle BCE=15^{\circ}$，$BF=2$，$AF=6$，求$AD-BE$的值．

24．通过小学的学习我们知道，分数可分为“真分数”和“假分数”，而假分数都可化为带分数．如：$\frac{8}{3}=\frac{6+2}{3}=2+\frac{2}{3}=2\frac{2}{3}$．我们定义：在分式中，对于只含有一个字母的分式，当分子的次数大于或等于分母的次数时，我们称之为“假分式”；当分子的次数小于分母的次数时，我们称之为“真分式”．

如$\frac{x-1}{x+1}$，$\frac{x^2}{x-1}$这样的分式就是假分式；$\frac{3}{x+1}$，$\frac{2x}{x^2+1}$这样的分式就是真分式．类似地，假分式也可以化为带分式（即：整式与真分式的和的形式）．

如：$\frac{x-1}{x+1}=\frac{(x+1)-2}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}$；$\frac{x^2}{x-1}=\frac{x(x-1)+(x-1)+1}{x-1}=x+1+\frac{1}{x-1}$．

解决下列问题：

(1)分式$\frac{2024}{x}$是_____分式（填“真”或“假”）；

(2)将假分式$\frac{x+3}{x+2}$化为带分式；

(3)求所有符合条件的整数x的值，使得$\frac{3x+7}{x+1}-\frac{x-1}{x}\div\frac{x^2-1}{x^2+3x}$的值为整数．

25．如图，在平面直角坐标系xoy中，点$A(2,2\sqrt{3})$，$AH\perp x$轴，点P为y轴上一点，点B在x轴上，且$\triangle OAB$为等边三角形．

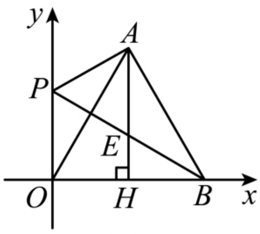


图1

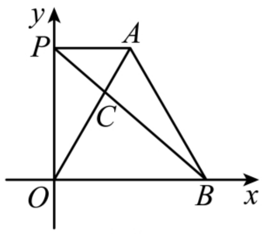


图2

(1)如图1，求OB的长度．

(2)如图1，PB与AH交于点E，若$\triangle APE$是等边三角形，求证：$PB=PA+PO$．

(3)如图2，线段PB与线段AO交于点C，记四边形$APOB$、$\triangle ACP$、$\triangle BCO$的面积依次为s，S_1，S_2．且$\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}$．

①Q为y轴上一动点，求$\triangle AQB$周长的最小值．

② 当$\triangle AQB$周长最小时，求线段PQ的长度．

1．B

【分析】本题考查了轴对称图形，将一个图形沿着某条直线翻折，直线两侧能完全重合的图形叫轴对称图形，掌握轴对称图形的概念是解题关键．

【详解】

根据题意，得  是轴对称图形，

故选：B．

2．B

【分析】直接利用最简二次根式的定义分析得出答案．

【详解】A、$\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，故此选项错误；

B、$\sqrt{10}$是最简二次根式，故此选项正确；

C、$\sqrt{9}=3$，故此选项错误；

D、$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，故此选项错误；

故选：B．

【点睛】本题主要考查了最简二次根式，正确把握定义是解题关键．

3．C

【分析】本题考查用科学记数法表示较小的数，一般形式为$a\times10^{-n}$，其中$1 \le |a| < 10$，n为由原数左边起第一个不为零的数字前面的0的个数所决定；

据此解答即可．

【详解】解：$0.000000095=9.5\times10^{-8}$，

故选：C．

4．A

【分析】本题考查分式的值为零的相关知识，根据分子为零，分母不为零求解即可．

【详解】解：$\because$分式$\frac{x-1}{x^2+3}$的值为0，

$\therefore\begin{cases}x-1=0\\x^2+3\neq0\end{cases}$，

解得：$x=1$，

故选：A．

5．D

【分析】直接利用同底数幂的乘除运算法则以及幂的乘方运算法则和合并同类项法则分别计算得出答案．

【详解】A．$a^2 \cdot a^3 = a^5$，故此选项错误；

B．$\left(a^3\right)^3 = a^9$，故此选项错误；

C．$a^5 + a^5 = 2a^5$，故此选项错误；

D．$(-a)^6 \div a^2 = a^4$，故此选项正确；

故选：D．

【点睛】本题主要考查了同底数幂的乘除运算以及幂的乘方运算和合并同类项，正确掌握运算法则是解题关键．

6．C

【分析】本题主要考查分式的基本性质：分式的分子与分母同乘(或除以)一个不等于 0 的整式，分式的值不变．解题的关键是抓住分子、分母变化的倍数，解此类题首先把字母变化后的值代入式子中，然后约分，再与原式比较，最终得出结论．把分式$\frac{2xy}{x+3y}$的 x，y 同时扩大 10 倍，与原式比较即可．

【详解】解：把分式$\frac{x+y}{2023x}$的 x，y 同时扩大 10 倍，得

而$\frac{10x+10y}{2023\times10x}=\frac{x+y}{2023x}$，

∴分式的值不变．

故选 C．

7．B

【分析】根据三角形内角和定理求出∠B 的度数，根据全等三角形的性质得到答案．

【详解】∵∠A=70°，∠ACB=60°，

∴∠B=50°，

∵△ABC≌△DEC，

∴∠E=∠B=50°，

故选 B．

【点睛】考查的是全等三角形的性质，掌握全等三角形的对应角相等是解题的关键．

8．B

【分析】本题主要考查完全平方公式的应用，利用完全平方公式展开，将$\left(a+b\right)^2=49$和$ab=12$的值代入计算即可求出a^2+b^2的值．

【详解】解：$\because\left(a+b\right)^2=a^2+b^2+2ab$，

$\therefore a^2+b^2=\left(a+b\right)^2-2ab$

$\because\left(a+b\right)^2=49$，$ab=12$，

$\therefore a^2+b^2=\left(a+b\right)^2-2ab$

$=49-2\times12$

$=49-24$

$=25$，

故选：B．

9．C

【分析】本题考查了等边三角形的性质；根据等边三角形三线合一的性质可得$CD=AD=3$，由$CE=CD$及$BE=BC+CE$即可求得BE的长．

【详解】证明：∵$\triangle ABC$是等边三角形，

∴$\angle ABC=\angle ACB=60^\circ$，$BC=AB=AC=6$，

∵BD是$\angle ABC$的平分线，

∴$AD=CD=\frac{1}{2}AC=3$，

∵$CE=CD$，

∴$CE=\frac{1}{2}AC=3$

∴$BE=BC+CE=6+3=9$．

故选：C．

10．A

【分析】分式方程去分母转化为整式方程为$-x+m=4$，由分式方程无解可得$4-x^2=0$或$x-2=0$，求出x的值，再代入整式方程即可．

【详解】解：$\because\frac{x+m}{4-x^2}+\frac{x}{x-2}=1$，

$\therefore\frac{x+m}{\left(2-x\right)\left(2+x\right)}-\frac{x}{2-x}=1$，

去分母得：$x+m-x(2+x)=(2-x)(2+x)$，

整理得：$-x+m=4$，

$\because$关于x的分式方程$\frac{x+m}{4-x^2}+\frac{x}{x-2}=1$无解，

$\therefore 4-x^2=0$或$x-2=0$，

解得：$x=2$或$x=-2$，

当$x=2$时，$-2+m=4$，解得：$m=6$，

当$x=-2$时，$-(-2)+m=4$，解得：$m=2$，

$\therefore m$的值是$m=6$或$m=2$，

故选：A．

【点睛】本题考查了分式方程的增根，增根问题可按如下步骤进行：化分式方程为整式方程；让最简公分母为0确定增根；把增根代入整式方程即可求得相关字母的值．

11．$\frac{1}{4}$##0.25

【分析】本题考查负整数指数幂，根据运算法则计算即可．

【详解】解：$2^{-2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，

故答案为：$\frac{1}{4}$．

12．$x\geqslant 2024$

【分析】本题考查二次根式有意义的条件，解题的关键是掌握二次根式有意义的条件：二次根式里的被开方数不小于0，依此即可解答．

【详解】解：由题可知：$x-2024\geqslant 0$，

解得：$x\geqslant 2024$，

故答案为：$x\geqslant 2024$．

13．y（x+3）（x-3）

【分析】先提取公因式y，再根据平方差公式进行二次分解即可求得答案．

【详解】解：$x^2y-9y=y(x^2-9)=y(x+3)(x-3)$．

故答案为：y（x+3）（x-3）．

【点睛】本题考查了提公因式法，公式法分解因式，提取公因式后利用平方差公式进行二次分解，注意分解要彻底．

14．9

【分析】本题主要考查完全平方公式，熟练掌握完全平方公式是解题的关键；因此此题可根据完全平方公式进行求解．

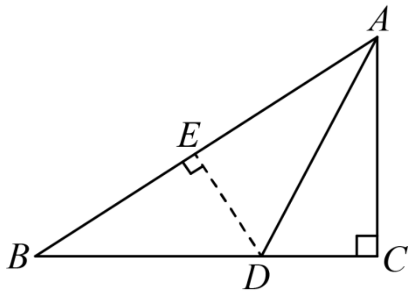
【详解】解：由 x^2+6x+m 是完全平方式，可知：$m=\left(\frac{6}{2}\right)^2=9$；

故答案为9．

15．15

【分析】本题考查角平分线的性质，三角形的面积，先作辅助线 $DE\perp AB$，然后根据角平分线的性质即可得到 $DE=DC$，再根据三角形的面积公式即可计算出 $\triangle ABD$ 的面积．解答本题的关键是作出合适的辅助线，求出 DE 的长．

【详解】解：作 $DE\perp AB$ 于点 E，如图所示，



$\because AD$ 平分 $\angle BAC$，$\angle C=90^\circ$，

$\therefore DE=DC$，

$\because CD=3$，

$\therefore DE=3$，

$\because AB=10$，

$\therefore S_{\triangle ABD}=\frac{AB\cdot DE}{2}=\frac{10\times 3}{2}=15$，

故答案为：15．

16．①②④⑤

【分析】此题主要考查等腰三角形的性质，全等三角形的判定与性质及角平分线性质的综合运用．根据等腰三角形的性质，角平分线的性质及全等三角形的判定与性质对各个选项进行分析判断即可．掌握角平分线和等腰三角形的性质是解题的关键．

【详解】解：$\because \angle B=\angle C$，

$\therefore AB=AC$，

$\because D$ 是 BC 的中点，

$\therefore AD$平分$\angle BAC$，

$\because DE\perp AB$，$DF\perp AC$，

$\therefore DE=DF$，

$\therefore \angle DEF=\angle DFE$，故①正确；

$\because DE\perp AB$，$DF\perp AC$

$\therefore \angle DEA=\angle DFA=90°$，

$\because DE=DF$，$AD=AD$，

$\therefore \triangle ADE\cong\triangle ADF(\text{HL})$

$\therefore AE=AF$，故②正确，

无法证明$\angle CAD=30°$，因此不能推出$AD=2DF$，

故③错误，

$\because ED=FD, AE=AF$，

$\therefore$点A、D在EF的垂直平分线上，

$\therefore AD$垂直平分EF，故④正确，

$\because DE\perp AB$，$DF\perp AC$，

$\therefore \angle DEB=\angle DFC=90°$，

又$\because \angle B=\angle C$，且$\angle B+\angle DEB+\angle EDB=180°$，$\angle C+\angle DFC+\angle FDC=180°$，

$\therefore \angle BDE=180°-\angle B-\angle DEB$，$\angle FDC=180°-\angle C-\angle DFC$，

$\therefore \angle BDE=\angle CDF$，故⑤正确.

故答案为：①②④⑤.

17．2

【分析】本题考查了实数的运算，利用二次根式、绝对值的性质，零指数幂公式先化简，再进行加减运算即可得到结果，掌握实数的运算法则是解题的关键.

【详解】解：原式$=\sqrt{16}-\sqrt{8}+2\sqrt{2}-1-1$，

$=4-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}-1-1$，

$=2$.

18．$-2a+3$；5.

【分析】本题考查了整式的化简求值，运用平方差公式，完全平方公式等化简是解题的关键.

【详解】解：原式$=a^2-1+a^2-4a+4-2a^2+2a$

$=-2a+3$;

当$a=-1$时，原式$=-2\times(-1)+3=5$.

19．(1)图形见解析

(2)$(-1,2)$，$(-2,-2)$，$(-4,-1)$

(3)4.5

【分析】本题考查了坐标的对称问题，分割法计算三角形的面积，勾股定理，熟练掌握对称点坐标的计算，正确作图是解题的关键.

（1）根据纵坐标不变，横坐标相反，计算坐标，并画图即可.

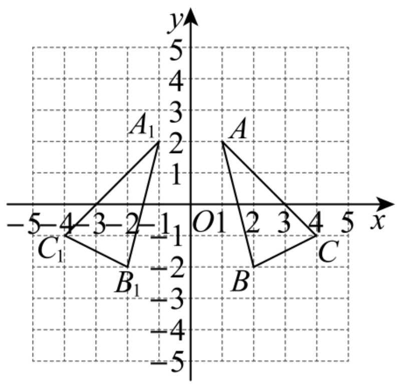
（2）根据（1）的解答，直接写出坐标即可.

（3）利用分割法计算即可.

【详解】（1）$\because \triangle A_1B_1C_1$与$\triangle ABC$关于$y$轴对称，

$A(1,2)$，$B(2,-2)$，$C(4,-1)$，

$\therefore A_1(-1,2), B_1(-2,-2), C_1(-4,-1)$，画图如下：



则$\triangle A_1B_1C_1$即为所求.

（2）根据题意，得$A_1(-1,2), B_1(-2,-2), C_1(-4,-1)$，

故答案为：$(-1,2)$，$(-2,-2)$，$(-4,-1)$.

（3）根据题意，得$S_{\triangle A_1B_1C_1}=4\times3-\frac{1}{2}\times4\times1-\frac{1}{2}\times1\times2-\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}=4.5$.

故答案为：4.5.

20．$\frac{x-2}{x+3}$；$-\frac{2}{3}$.

【分析】本题考查分式的混合运算，先将括号里的加法运算进行通分计算，再将分式的除法运算里的分子分母分解因式，然后根据分式的乘除运算进行约分化简即可，再代入求值.

【详解】解：原式$=\frac{x+3}{x+2}\cdot\frac{(x+2)(x-2)}{(x+3)^2}$

$=\frac{x-2}{x+3}$，

当$x=0$时，

原式$=\frac{0-2}{0+3}=-\frac{2}{3}$．

21．(1)证明见解析；

(2)7．

【分析】本题主要考查了全等三角形的判定和性质．

（1）由角平分线的定义，得到$\angle CBD=\angle EBD$，再利用“SAS”即可证明全等；

（2）由全等三角形的性质，得到$DE=DC$，进而得出$AE=2$，$AD+DE=5$，即可求出$\triangle ADE$的周长．

【详解】（1）证明：$\because BD$平分$\angle ABC$，

$\therefore\angle CBD=\angle EBD$，

在$\triangle BED$与$\triangle BCD$中，

$$\begin{cases}BE=BC\\ \angle EBD=\angle CBD\\ BD=BD\end{cases},$$

$\therefore\triangle BED\cong\triangle BCD(\mathrm{SAS})$；

（2）解：$\because\triangle BED\cong\triangle BCD$，

$\therefore DE=DC$，

$\because AC=5$，$BE=BC=7$，$AB=9$，

$\therefore AE=AB-BE=9-7=2$，$AD+DE=AD+DC=AC=5$，

$\therefore\triangle ADE$的周长$=AD+DE+AE=5+2=7$．

22．(1)A，B两种设备成本分别为4、6万元/台

(2)该公司一共获利114万元

【分析】本题主要考查了分式方程的应用以及有理数乘法运算的应用．

（1）设A种设备成本为x万元/台，则B种设备成本为$1.5x$万元/台，根据数量等于总价除以单价，即可得出关于x的分式方程，解之经检验后即可得出结论；

（2）根据总利润等于每台的利润乘以数量．每台的利润等于每台的售价减去每台的成本，

即可求出答案.

【详解】(1）设 A 种设备成本为 x 万元/台，则 B 种设备成本为$1.5x$ 万元/台

由题意得：$\frac{16}{x}+\frac{36}{1.5x}=10$

解得：$x=4$

经检验：$x=4$ 是原分式方程得解且符合题意

则：$1.5x=1.5\times4=6$

答：A，B 两种设备成本分别为 4、6 万元/台.

（2）$(6\times0.8-4)\times30+\left[10\times(1-10\%)-6\right]\times30$

$=24+90$

$=114$（万元）

答：该公司一共获利 114 万元.

23．(1) $\angle BCF=22.5°$

(2)证明见解析

(3)4

【分析】(1）根据等腰直角三角形的性质求得 $\angle CBA=\angle A=45°$，得用等腰三角形的性质与三角形内角和定理求得 $\angle ACF=67.5$，即可由 $\angle BCF=\angle ACB-\angle ACF$ 求解；

（2）利用 AAS 证明 $\triangle ADC\cong\triangle CEB$；

（3）利用 $\triangle ADC\cong\triangle CEB$ 得 $\angle CAD=\angle BCE=15°$，且 $AD=CE$， $BE=CD$，从而求得 $\angle EBF=\angle DAF=30°$，再利用含 30 度角的直角三角形的性质求解即可.

【详解】(1）解：$\because\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90°$， $AC=BC$，

$\therefore\angle CBA=\angle A=45°$，

$\because AF=AC$，

$\therefore\angle ACF=\frac{180°-\angle A}{2}=67.5°$，

$\therefore\angle BCF=\angle ACB-\angle ACF=22.5°$.

（2）解：$\because AD\perp CE$， $BE\perp CE$，

$\therefore\angle ADC=\angle CEB=\angle ACB=90°$，

$\therefore\angle CAD+\angle ACD=90°$， $\angle BCE+\angle ACD=90°$.

$\therefore\angle CAD=\angle BCE$， $\angle CDA=\angle BEC$， $AC=CB$，

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle CEB\left(\mathrm{AAS}\right)$.

（3）解：$\because \angle BCE = 15^\circ$ 且 $\triangle ADC \cong \triangle CEB$，

$\therefore \angle CAD = \angle BCE = 15^\circ$，且 $AD = CE$，$BE = CD$，

则 $\angle DAF = \angle CAB - \angle CAD = 30^\circ$，且 $AD - BE = CE - CD = DE$，

又 $AD \perp CE$，$BE \perp CE$，

$\therefore \angle EBF = \angle DAF = 30^\circ$，

$\therefore$在 $\mathrm{Rt}\triangle BEF$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle ADF$ 中，$BF = 2$，$AF = 6$，

$\therefore EF = \frac{1}{2}BF = 1$，$DF = \frac{1}{2}AF = 3$，

则 $DE = EF + DF = 4$，

即 $AD - BE = DE = 4$.

【点睛】本题考查全等三角形的判定与性质，等腰三角形的性质，三角形内角和定理，直角三角形的性质．证明 $\triangle ADC \cong \triangle CEB$ 是解题的关键．

24．(1)真；

(2)$1 + \frac{1}{x+2}$；

(3)$x = -2$.

【分析】本题主要考查了分式的化简运算，正确理解题意中的新定义、掌握分式的化简方法是解题的关键．

（1）根据“真分式”和“假分式”定义判断即可；

（2）将分子写成 $x+2+1$，然后进行变形即可解答；

（3）先将分式化为带分式，根据为整数，分式的值为整数即可得到 x 的值．

【详解】（1）解：$\because$2024 的次数为 0，x 的次数为 1，

$\therefore \frac{2024}{x}$ 是真分式．

故答案为：真．

（2）解：$\frac{x+3}{x+2} = \frac{x+2+1}{x+2} = 1 + \frac{1}{x+2}$.

（3）解：$\frac{3x+7}{x+1} - \frac{x-1}{x} \div \frac{x^2-1}{x^2+3x}$

$= \frac{3x+7}{x+1} - \frac{x-1}{x} \cdot \frac{x\left(x+3\right)}{\left(x+1\right)\left(x-1\right)}$

$=\frac{3x+7}{x+1}-\frac{x+3}{x+1}$

$=\frac{2x+4}{x+1}$

$=2+\frac{2}{x+1}$，

$\because 2+\frac{2}{x+1}$与x均为整数，

$\therefore x+1=2$或-2或1或-1，

$\therefore x=1$或-3或0或-2，

$\because$ $x+1\neq 0$，$x\neq 0$，$x+3\neq 0$，$x-1\neq 0$，

$\therefore x\neq -1$，0，-3，1.

$\therefore x=-2$.

25．(1)$OB=4$；

(2)证明见解析；

(3)①$\triangle AQB$周长最小值$=4\sqrt{3}+4$，② $PQ=\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

【分析】（1）由等边三角形的性质即可求解；

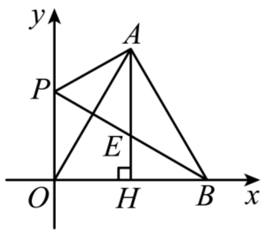
（2）由等边三角形的性质得出$AP=AE$，$AO=AB$，$\angle PAE=\angle OAB=60^\circ$，证明$\triangle PAO\cong\triangle EAB$即可求证；

（3）①作点$B(4,0)$关于y轴得对称点F，则$F\left(-4,0\right)$，连接AF与y轴的交点即为Q，此时$\triangle AQB$的周长最小；

②由四边形$APOB$、$\triangle ACP$、$\triangle BCO$的面积依次为S，S_1，S_2，$\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}$可得出$S_3=S_4$，再由$S_{\Delta APF}=S_{\Delta APQ}+S_{\Delta FPQ}$即可求解；

此题考查了等边三角形的性质，全等三角形的判定与性质，利用轴对称的性质求最短距离，解题的关键是熟练掌握以上知识点的应用.

【详解】（1）如图，



$\because AH\perp x$轴于H，且$A\left(2,2\sqrt{3}\right)$

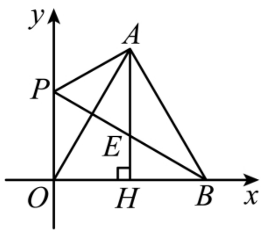
$\therefore H\left(2,0\right)$，

则 $OH=2$

$\because \triangle OAB$ 为等边三角形， $AH\perp OB$，

$\therefore AH$ 平分 OB，则 $OB=2OH=4$，

（2）如图，



$\because \triangle APE$ 与 $\triangle AOB$ 均为等边三角形，

$\therefore AP=AE$， $AO=AB$， $\angle PAE=\angle OAB=60^{\circ}$，

$\therefore \angle PAE-\angle OAE=\angle OAB-\angle OAE$，

则 $\angle PAO=\angle EAB$

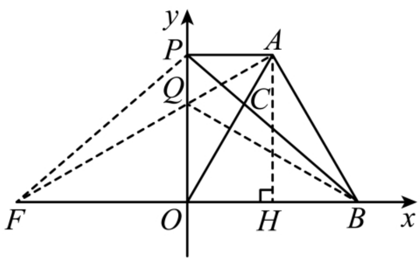
$\therefore \triangle PAO\cong\triangle EAB\left(\mathrm{SAS}\right)$，

$\therefore PO=EB$，

$\therefore PB=PE+BE=PA+PO$；

（3）① 作点$B(4,0)$关于 y 轴得对称点 F，则 $F\left(-4,0\right)$，

连接 AF 与 y 轴的交点即为Q，此时 $\triangle AQB$ 的周长最小，



由（1）知： $AB=OB=OA=4$， $\angle AOB=60^{\circ}$， $AH=2\sqrt{3}$，

又$\because OF=OB$，

$\therefore OF=OA$，

$\therefore \angle AFB=\dfrac{1}{2}\angle AOB=30^{\circ}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle AHF$ 中， $\angle AFH=30^{\circ}$，

$\therefore AF = 2AH = 4\sqrt{3}$，

$\therefore \triangle AQB$ 周长最小值 $= AQ + QB + AB = AF + AB = 4\sqrt{3} + 4$；

② 记 $\triangle PCO$ 、$\triangle ACB$ 的面积为 S_3 、S_4，

则 $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$，

$\because \dfrac{S_1}{S_3} = \dfrac{AC}{OC} = \dfrac{S_4}{S_2}$，

$\therefore S_3 S_4 = S_1 S_2$，

$\because \sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$，

$\therefore S = S_1 + 2\sqrt{S_1 S_2} + S_2$，

$\therefore S_3 + S_4 = 2\sqrt{S_3 S_4}$，

$\therefore \left(\sqrt{S_3} - \sqrt{S_4}\right)^2 = 0$，

$\therefore S_3 = S_4$，

$\therefore S_{\Delta POB} = S_{\Delta AOB}$，

$\therefore AP \parallel OB$，

则 $AP \perp y$ 轴，$AP = 2$，

由 $S_{\Delta APF} = S_{\Delta APQ} + S_{\Delta FPQ}$，

$\therefore \dfrac{1}{2} AP \cdot OP = \dfrac{1}{2} AP \cdot PQ + \dfrac{1}{2} PQ \cdot OF$，

$\therefore \dfrac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = \dfrac{1}{2} \times 2 \cdot PQ + \dfrac{1}{2} \times 4 \cdot PQ$，

$\therefore PQ = \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$.