โจทย์ข้อ ๑. จงพิจารณาว่ามีเซตจำกัด S ของจำนวนเฉพาะที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้หรือไม่: สำหรับทุกจำนวน เต็มบวก m จะมีจำนวนเต็มบวก n และจำนวนเฉพาะ p ที่ทำให้ $p^m \mid n!$ แต่ $p^{m+1} \nmid n!$

โจทย์ข้อ ๒. จงหาฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ทั้งหมดที่ทำให้

$$f^{f(m+n)}(mn) = f(m)f(n)$$

สำหรับทุกจำนวนเต็ม m, n

หมายเหตุ: $f^0(n) = n$ และสำหรับจำนวนเต็มบวก k ใดๆ $f^k(n) = f(f(\cdots(n)))$ โดยมี f ทั้งหมด k ตัว และ $f^k(n) = f^{-1}(f^{-1}(\cdots(n)))$ โดยมี f^{-1} ทั้งหมด k ตัว

โจทย์ข้อ ๓. กำหนดให้ A, B, C เป็นจุดสามจุดที่แตกต่างกันบนเส้นตรง ℓ จงแสดงว่า สำหรับแต่ละคู่ของจุด B_1 และ C_1 ที่แตกต่างกัน ซึ่ง $\overleftrightarrow{B_1C_1}$ ไม่ผ่านจุด A และ $\overleftrightarrow{B_1C}$ ไม่ขนานกับ $\overleftrightarrow{C_1B}$ จะมีจุด A_1 ที่สอดคล้องเงื่อนไขทั้งสามข้อต่อไปนี้เพียงจุดเดียว

(i) A_1 ไม่อยู่บน $\overleftrightarrow{B_1C_1}$

(ii) ภาพฉายของ A บน $\overleftrightarrow{B_1C_1}$, ของ B บน $\overleftrightarrow{C_1A_1}$ และของ C บน $\overleftrightarrow{A_1B_1}$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกันซึ่งไม่ขนานกับ ℓ

(iii) ภาพสะท้อนของ A ข้าม $\overleftrightarrow{B_1C_1}$, ของ B ข้าม $\overleftrightarrow{C_1A_1}$ และของ C ข้าม $\overleftrightarrow{A_1B_1}$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกันซึ่งไม่ขนานกับ ℓ

เวลา: 4 ชั่วโมง 30 นาที
โจทย์แต่ละข้อมีคะแนนเต็ม 7 คะแนน

โจทย์ข้อ ๔. ให้ $P \in \mathbb{Z}[x]$ เป็นพหุนามที่ไม่คงที่ และไม่มีรากเป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่ามีจำนวนเต็มบวก $m \leqslant 3 \cdot \deg P$ ที่ $P(m)$ หาร $P(m+1)$ ไม่ลงตัว

โจทย์ข้อ ๕. กำหนดจำนวนเต็ม $c_1, c_2, \ldots, c_k$ และพิจารณาลำดับ $\{a_n\}$ ของจำนวนเต็มที่สอดคล้องกับ

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} \quad \text{สำหรับทุกจำนวนเต็ม } n \geqslant k+1$$

จงพิสูจน์ว่ามีค่าเริ่มต้น $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ที่ไม่เป็นศูนย์ทั้งหมด ที่ทำให้มีจำนวนเต็ม b ซึ่ง p หาร $a_p - b$ ลงตัวสำหรับทุกจำนวนเฉพาะ p

โจทย์ข้อ ๖. แอนนามีตารางของจุดขนาด $n \times n$ บานาน่ากำหนดจำนวนเต็มบวก $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ที่มีผลรวมเท่ากับ n^2 และท้าให้แอนนาแบ่งจุดในตารางเป็นเซต $S_1, S_2, \ldots, S_k$ โดยที่สำหรับทุก $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$

(i) $|S_i| = a_i$ และ

(ii) เซต S_i มีแกนสมมาตร

จงแสดงว่าแอนนาสามารถทำตามคำท้าของบานาน่าได้เสมอ

หมายเหตุ: เส้นตรง ℓ จะเรียกว่าเป็นแกนสมมาตรของเซต S ถ้าภาพสะท้อนของเซต S ข้าม ℓ เป็นเซต S พอดี

เวลา: 4 ชั่วโมง 30 นาที
โจทย์แต่ละข้อมีคะแนนเต็ม 7 คะแนน