การแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระดับชาติ ครั้งที่ 15 วันแรก
นครราชสีมา
6 พฤษภาคม 2561

เวลา: 4.5 ชั่วโมง

1. ให้วงกลมแนบในของรูปสามเหลี่ยม ABC สัมผัส BC, CA, AB ที่จุด D, E, F ให้ P, Q เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน DF, DE ให้ PC ตัด DE ที่จุด R และ BQ ตัด DF ที่จุด S

   a) จงแสดงว่า B, C, P, Q อยู่บนวงกลมเดียวกัน

   b) จงแสดงว่า P, Q, R, S อยู่บนวงกลมเดียวกัน

2. จงแสดงว่าไม่มีฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ซึ่ง $f(x + f(y)) = f(x) + y^2$ สำหรับทุกจำนวนจริง x และ y

3. แม่หญิงการะเกดแจกแฟลชไดรฟ์ที่บันทึกข้อมูลลับทางประวัติศาสตร์ ชนิดความจุ $1, 2, 4, 8, 16$ และ 32 GB ชนิดละ 3 แท่ง ให้บ่าว 6 คน คนละ 3 แท่ง โดยแต่ละคนได้รับแฟลชไดรฟ์ชนิดความจุแตกต่างกันทั้งสามแท่ง เพื่อนำไปมอบให้แก่เจ้าเมืองนครราชสีมาเก็บรักษาไว้ในปราสาทหินต่างๆ

   จงแสดงว่า มีความจุสองชนิดซึ่งบ่าวแต่ละคนได้รับแฟลชไดรฟ์เพียงชนิดใดชนิดหนึ่งเท่านั้น หรือ ผลบวกความจุแฟลชไดรฟ์ทั้งสามแท่งของบ่าวแต่ละคนมีค่าแตกต่างกันหมด

4. ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์ โดยที่ $a + b + c = 0$ จงหาค่ามากสุดของ

$$\frac{a^2b^2c^2}{(a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ca + a^2)}$$

5. จงหาค่าน้อยสุดของ $a + b$ ซึ่ง a และ b เป็นจำนวนเต็มบวกที่หารด้วย 5 ไม่ลงตัว แต่ $a^5 + b^5$ หารด้วย 5 ลงตัว

การแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระดับชาติ ครั้งที่ 15 วันที่สอง
นครราชสีมา
7 พฤษภาคม 2561

เวลา: 4.5 ชั่วโมง

6. กำหนดให้ A เป็นเซตของสามสิ่งอันดับ (x, y, z) ของจำนวนนับที่ทำให้ $2x^2 + 3y^3 = 4z^4$
    a) ถ้า (x,y,z) เป็นสมาชิกของ A แล้วจงแสดงว่า 6 หาร x, y, z ลงตัว
    b) จงแสดงว่า A เป็นเซตอนันต์
7. มีสี 25 สี นำมาระบายสมาชิกแต่ละตัวของเซต $S = \{1, 2, ..., 61\}$ ตัวละหนึ่งสีโดยไม่จำเป็นต้องใช้ครบทุกสี ให้ m คือจำนวนสับเซตที่ไม่ใช่เซตว่างของ S ที่สมาชิกทุกตัวในสับเซตนี้มีสีเดียวกันหมด จงหาค่าน้อยสุดที่เป็นไปได้ของ m
8. สลาก $2n+1$ ใบ มีจำนวนเต็มบวกที่แตกต่างกันเขียนกำกับไว้ใบละหนึ่งจำนวน โดยผลบวกของจำนวนที่เขียนกำกับสลากทุกใบมีค่ามากกว่า 2330 แต่ผลบวกของจำนวนที่เขียนกำกับบนสลาก n ใบใดๆ มีค่าไม่เกิน 1165 จงหาค่ามากสุดที่เป็นไปได้ของ n
9. ให้วงกลมแนบในของรูปสามเหลี่ยม ABC สัมผัสด้าน AB ที่จุด D ให้ P เป็นจุดบนส่วนของเส้นตรง BC ที่ไม่ใช่จุด B และ C ให้ K, L เป็นจุดศูนย์กลางวงกลมแนบในของรูปสามเหลี่ยม ABP, ACP ตามลำดับ ถ้าวงกลมล้อมรอบรูปสามเหี่ลยม KPL ตัด AP อีกครั้งที่จุด Q จงพิสูจน์ว่า $AD = AQ$
10. ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์ จงแสดงว่าถ้าฟังก์ชัน $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ สอดคล้อง

    $$af(x + y) + bf(x - y) = cf(x) + g(y)$$

    สำหรับทุก x, y ซึ่ง $y > 2018$ แล้วจะมีฟังก์ชัน $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ซึ่ง

    $$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + h(y)$$

    สำหรับทุกจำนวนจริง x และ y

เฉลยการแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระดับชาติ ครั้งที่ 15 (อย่างไม่เป็นทางการ)

1. สามารถไล่มุมได้ไม่ยากว่า $\angle BPQ + \angle BCQ = (90 + \frac{A+B}{2}) + \frac{C}{2} = 180^\circ$ ดังนั้น B, C, P, Q อยู่บนวงกลมเดียวกัน และจาก $\angle QBP = \angle QCP$ และ $\angle BPD = \angle DQC$ ดังนั้น $\angle PSQ = \angle PRQ$ จึงได้ว่า P, Q, R, S อยู่บนวงกลมเดียวกัน

2. ให้ $P(x, y)$ แทนข้อความ $f(x + f(y)) = f(x) + y^2$ จาก $P(x, 0)$ จะได้ $f(x + f(0)) = f(x)$ จาก $P(x, 0)$ และ $P(x, f(0))$ เราได้ว่า $f(0)^2 = 0$ ดังนั้น $f(0) = 0$

   พิจารณา $P(0, x) : f(f(x)) = x^2$, $P(0, f(x)) : f(x^2) = f(x)^2$ และ $P(f(x), x) : f(2f(x)) = 2x^2$ และแทน x ด้วย $f(x)$ จะได้ว่า $f(2x^2) = 2f(x)^2$ แต่จาก $P(f(x), x)$ ดังนั้น $f(f(2f(x))) = f(2x^2)$ ทำให้

   $$4f(x)^2 = 2f(x)^2$$

   จึงได้ว่า $f(x) = 0$ สำหรับทุกจำนวนจริง x ซึ่งสามารถตรวจคำตอบได้ว่าฟังก์ชั่นดังกล่าวไม่สอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์ ดังนั้น ไม่มีฟังก์ชั่นซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าว

3. สมมติว่ามีบ่าวสองคน A และ B ที่มีผลบวกความจุแฟลชไดรฟ์เท่ากัน (มิฉะนั้นก็จะได้ว่าบ่าวทุกคนมีผลบวกความจุแฟลชไดรฟ์ต่างกัน) เห็นได้โดยง่ายว่า A และ B ได้แฟลชไดรฟ์ชุดเดียวกัน สมมติว่าเป็น $\{x, y, z\}$ จากนั้นเลือกความจุ $w \notin \{x, y, z\}$ และพิจารณาบ่าวที่ไม่มีแฟลชไดรฟ์ w และไม่ใช่ A หรือ B จะได้ว่าบ่าวคนนี้จะต้องมีแฟลชไดรฟ์ความจุ x หรือ y หรือ z อย่างน้อยหนึ่งอัน ซึ่งสมมติว่าเป็น x เราจะได้ว่าความจุ w และ x สอดคล้องเงื่อนไขที่ต้องการ

4. <u>คำตอบ:</u> $4/27$

   แทนค่า $c = -a - b$ ในเงื่อนไขโจทย์ เพียงพอที่จะหาค่ามากที่สุดของ

   $$\frac{a^2b^2(a+b)^2}{(a^2+ab+b^2)^3}$$

   จาก

   $$\begin{aligned} \frac{4}{27} - \frac{a^2b^2(a+b)^2}{(a^2+ab+b^2)^3} &= \frac{4(a^2+ab+b^2)^3 - 27a^2b^2(a+b)^2}{27(a^2+ab+b^2)^3} \\ &= \frac{(a-b)^2(2a+b)^2(2b+a)^2}{27(a^2+ab+b^2)^3} \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

   ดังนั้นค่ามากที่สุดของ $\frac{a^2b^2c^2}{(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)}$ คือ $\frac{4}{27}$ และอสมการเป็นสมการเมื่อ $(a, b, c) = (x, x, -2x)$ และการเรียงสับเปลี่ยนของสามสิ่งอันดับดังกล่าว

5. <u>คำตอบ:</u> 625

   เนื่องจาก $x^5 \equiv x \pmod 5$ ดังนั้น $5 \mid a + b$ สามารถแสดงได้ว่า $5 \mid a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4$ และ $25 \nmid a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4$ ดังนั้น $5^4 \mid a + b$ ฉะนั้นค่ามากที่สุดของ $a + b$ คือ 625 ซึ่งเป็นจริงได้เมื่อ $(a, b) = (1, 624)$

6. a) เป็นการเพียงพอที่จะแสดงว่า 2 และ 3 หาร x, y, z

ในการแสดงว่า 2 หาร x, y, z เราเริ่มต้นจาก $3y^3 = 2(2z^4 - x^2)$ ซึ่งแสดงว่า $2 \mid y$ ฉะนั้น $y = 2y_1$ สำหรับบาง $y_1 \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ จากนั้น $x^2 = 2(6y_1^3 + z^4)$ แสดงว่า $2 \mid x$ ดังนี้ $x = 2x_1$ สำหรับบาง $x' \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ สุดท้าย เราจะได้ว่า $z^4 = 2n^2 - 6m^3$ ดังนั้น $2 \mid z$.

ในการแสดงว่า 3 หาร x, y, z ให้สังเกตว่า $4z^4 \equiv 2x^2 \pmod 3$ แต่ $4z^4 \mod 3 \in \{0, 1\}$ และ $2x^2 \mod 3 \in \{0, 2\}$ ดังนั้น $2x^2 \equiv 4z^4 \equiv 0 \mod 3$ ฉะนั้น $3 \mid x, z$ สุดท้ายให้ $x = 3x_2, z = 3z_2$ โดยที่ $x_2, z_3 \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ จะได้ว่า $y^3 = 3(36z_2^4 - x_2^2)$ เพราะฉะนั้น $3 \mid y$

b) $(144t^6, 24t^3, 12t^3) \in A$ สำหรับทุกจำนวนนับ t

7. คำตอบ: 119

ให้ x_i เป็นจำนวนของสมาชิกใน S ซึ่งถูกระบายด้วยสีที่ i สังเกตได้ไม่ยากว่า $m = \sum\limits_{i=1}^{25}(2^{x_i} - 1)$

หากมี $i, j \in \{1, 2, ..., 25\}$ ซึ่งทำให้ $x_i - x_j \geqslant 2$ จาก $2^{x_i} + 2^{x_j} > 2^{x_i - 1} + 2^{x_j + 1}$ เราจะสามารถลดค่าของ m โดยการแทน x_i, x_j ด้วย x_{i-1}, x_{j+1} ดังนั้นค่าน้อยที่สุดของ m จะเกิดเมื่อ $|x_i - x_j| \leqslant 1$ สำหรับทุก i, j

ดังนั้น $(x_1, ..., x_{25})$ ซึ่งทำให้ m มีค่าน้อยที่สุดคือ $(3, 3, ..., 3, 2, 2, ..2)$ โดมี 3 11 ตัว และ 2 14 ตัว ค่าต่ำสุดของ m จึงเป็น $(2^3 - 1) \times 11 + (2^2 - 1) \times 14 = 119$

8. คำตอบ: 10

พิจารณาสลาก 21 ใบ $\{101, 102, ..., 121\}$ สามารถแสดงได้ไม่ยากว่าสลากดังกล่าวสอดคล้องเงื่อนไขโจทย์ ดังนั้น $n = 10$ เป็นไปได้ ต่อไปจะแสดงว่า $n \leqslant 10$ กำหนดให้สลากแต่ละใบถูกกำกับด้วยจำนวน $x_1 < x_2 < ... < x_{2n+1}$ จากเงื่อนไขของโจทย์ จะได้ว่า

$$x_1 + ... + x_{2n+1} > 2330 \tag{1}$$

$$x_{n+2} + ... + x_{2n+1} \leqslant 1165 \tag{2}$$

ดังนั้น $x_1 + ... + x_{n+1} > x_{n+2} + ... + x_{2n+1}$ แสดงว่า

$$x_1 > \sum_{i=1}^{n}(x_{n+1+i} - x_{i+1}) \geqslant \sum_{i=1}^{n}.$$

ฉะนั้น $x_1 \geqslant n^2 + 1$ สามารถแสดงได้ไม่ยากว่า $x_i \geqslant n^2 + i$ สำหรับทุก i

จาก (2) เราได้ว่า $1165 \geqslant \sum_{i=1}^{n} n^2 + n + 1 + i = \frac{2n^3+3n^2+3n}{2}$ ดั้งนั้น $n \leqslant 10$

9. ให้วงกลมแนบใน $\triangle ABP$ และ $\triangle ACP$ สัมผัสเส้นตรง BC ที่จุด M และ N ตามลำดับ จะเห็นได้ว่า $\angle LPK = 90^\circ$ กำหนดให้ $\angle APK = x, \angle LPA = 90^\circ - x$

ให้ O เป็นจุดกึ่งกลางส่วนของเส้นตรง KL จะได้ว่า O เป็นจุดศูนย์กลางวงกลมล้อมรอบของรูปสี่เหลี่ยม $KPLQ$ จาก Power of Point เราได้ว่า $AQ \cdot AP = AO^2 - OK^2$

โดย Law of Cosine บน $\triangle AOK$ และ $\triangle AOK$ เราได้ว่า

$$AK^2 + AL^2 = 2(AO^2 + OK^2)$$

โดย Law of Cosine บน $\triangle APK$ และ $\triangle APL$ เราได้ว่า

$$AK^2 = AP^2 + PK^2 - 2AP \cdot PK \cdot \cos x$$
$$AL^2 = AP^2 + PL^2 - 2AP \cdot PL \cdot \sin x$$

นำสมการมาบวกกัน ได้ว่า

$$AK^2 + AL^2 = 2AP^2 + PK^2 + PL^2 - 2AP(PK \cdot \cos x + PL \cdot \sin x).$$

จาก $\angle LPK = 90^\circ$ ดังนั้น $PK^2 + PL^2 = 4OK^2$ เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} 2(AO^2 + OK^2) &= 2AP^2 + 4OK^2 - 2AP(PK \cdot \cos x + PL \cdot \sin x) \\ AO^2 - OK^2 &= AP(AP - PK \cos x + PL \cdot \sin x) \\ AP \cdot AQ &= AP(AP - PK \cos x + PL \cdot \sin x) \end{aligned}$$

จาก $PK \cdot \cos x = PM = \frac{AP+PB-AB}{2}$ และ $PL \cdot \sin x = PN = \frac{AP+PC-AC}{2}$ จะได้ว่า

$$AQ = \frac{AB + AC - BP - CP}{2} = \frac{AB + AC - BC}{2} = AD.$$

10. จะแสดงว่าฟังก์ชัน $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ที่กำหนดโดย

$$h(k) = \frac{1}{c}\big(g(y_k + 2k) - 2g(y_k + k) + g(y_k)\big)$$

โดยที่ $y_k = 2019 + 2|k|$ สอดคล้องเงื่อนไขที่ต้องการ

ตรึงค่า $k \in \mathbb{R}$ และสังเกตว่า $y_k, y_k + k, y_k + 2k > 2018$ จากการแทน $(x, y) = (x, y_k)$ และ $(x + k, y_k + k)$ ในเงื่อนไขของโจทย์ แล้วนำมาลบกัน จะได้

$$a\big(f(x + y_k + 2k) - f(x + y_k)\big) = c\big(f(x + k) - f(x)\big) + g(y_k + k) - g(y_k) \qquad (3)$$

แทน $(x, y_k) \to (x - k, y_k + k)$ ใน (3) จะได้

$$a\big(f(x + y_k + 2k) - f(x + y_k)\big) = c\big(f(x) - f(x - k)\big) + g(y_k + 2k) - g(y_k + k)$$

ดังนั้น สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x + k) + f(x - k) - 2f(x) = \frac{1}{c}\big(g(y_k + 2k) - 2g(y_k + k) + g(y_k)\big) = h(k)$$

เพราะฉะนั้น h สอดคล้องเงื่อนไขที่ต้องการ