$\infty \cdot$ MO

Language: **Thai**

Day: **1**

โจทย์ข้อ ๑. มีกองไพ่อยู่กองหนึ่งประกอบด้วยไพ่จำนวน $mn \geqslant 3$ ใบ การ*สับไพ่แบบประหลาด* เป็นการสับไพ่โดยใช้ขั้นตอนต่อไปนี้

1. นำไพ่บนสุด m ใบมาตั้งเป็นกอง ทำจนกระทั่งได้ไพ่ n กอง กองละ m ใบ
2. นำไพ่บนสุดจากกองแรกวางมาไว้ด้านล่างสุด ตามด้วยใบบนสุดจากกองที่สอง กองที่สาม ไปเรื่อยๆ จนครบทั้ง n กอง จากนั้นกลับไปเริ่มที่ไพ่ใบที่สองจากกองแรก วนไปจนกระทั่งไพ่ทุกใบกลับมารวมเป็นกองเดียว

จงแสดงว่าไพ่จะกลับมาเรียงในแบบเดิมหลังจากดำเนินการสับไพ่แบบประหลาดอย่างมาก $mn - 1$ ครั้ง

โจทย์ข้อ ๒. จงหาพหุนาม f ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มทั้งหมด ที่ทำให้มีลำดับอนันต์ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ของจำนวนเต็มบวกที่มีสมบัติว่า สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ ผลบวกของจำนวน $f(n)$ พจน์ติดกันใดๆ ของลำดับนี้หารด้วย $n + 1$ ลงตัว
(หมายเหตุ: เราต้องการ $f(n) > 0$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$)

โจทย์ข้อ ๓. ให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมแหลม ที่มี O เป็นจุดศูนย์กลางวงกลมล้อมรอบ และ H เป็นจุดตัดของส่วนสูง เส้นตรงที่ผ่าน O และขนานกับ BC ตัด AB ที่ D และ AC ที่ E ถ้า X เป็นจุดกึ่งกลางของ AH จงพิสูจน์ว่าวงกลมล้อมรอบของ $\triangle BDX$ และ $\triangle CEX$ ตัดกันอีกครั้งบนเส้นตรง AO

$\infty \cdot \mathrm{MO}$

Language: **Thai**

Day: **2**

โจทย์ข้อ ๔. กำหนดสามเหลี่ยมมุมแหลม $\triangle ABC$ มีวงกลมล้อมรอบ ω ที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง เส้นซิมมีเดียนจาก A ตัด ω อีกครั้งที่ $S \neq A$ ให้ F เป็นจุดบนเส้นตรง AC ที่ $BF \perp AS$ และให้ G เป็นจุดบนรังสี BF ที่ $BF \times BG = BC^2$ ถ้า P เป็นจุดที่ทำให้ $\square BGCP$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน แล้วจงพิสูจน์ว่าเส้นตรง OS แบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรง CP
(หมายเหตุ: เส้นซิมมีเดียน คือภาพสะท้อนของเส้นมัธยฐานข้ามเส้นแบ่งครึ่งมุม)

โจทย์ข้อ ๕. สมมติว่าเราวาดเส้นตรง t เส้น ผ่านตารางขนาด $n \times n$ ทำให้สำหรับทุกช่อง U ของตารางมีเส้นตรงที่ตัดผ่านภายในของ U จงแสดงว่า $t > (2-\sqrt{2})n$

โจทย์ข้อ ๖. กำหนดพหุนาม $P \in \mathbb{R}[x]$ มีดีกรีเป็นจำนวนคี่ เราจะเรียกจำนวนจริง x ว่าอยู่ *ในวงโคจร* ถ้าลำดับ

$$x,\ P(x),\ P(P(x)),\ \ldots$$

เป็นลำดับที่มีขอบเขต จงแสดงว่าถ้าจำนวนในวงโคจรทุกจำนวนเป็นจำนวนตรรกยะ แล้วมีจำนวนในวงโคจรอยู่จำกัดจำนวน หรือไม่มีจำนวนในวงโคจรเลย