InfinityDots **MO3**

Language: **Thai**

Day: **1**

โจทย์ข้อ ๑. เราจะเรียกเซตของจำนวนเต็มบวก $\{x, y\}$ ที่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กันว่า *พีทาโกเรียน* ถ้า $x^2 + y^2$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์ จากแต่ละพีทาโกเรียน ในแต่ละตา เราสามารถ

(i) เปลี่ยนเครื่องหมายของจำนวนหนึ่งในพีทาโกเรียน หรือ

(ii) บวกทุกจำนวนในพีทาโกเรียนนั้นด้วย k โดยที่ยังคงความเป็นพีทาโกเรียนอยู่

จงแสดงว่าเริ่มจากพีทาโกเรียนหนึ่ง เราสามารถเปลี่ยนเป็นพีทาโกเรียนใดๆ ได้ในจำกัดตา

โจทย์ข้อ ๒. ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots$ เป็นลำดับไม่เพิ่มของจำนวนจริงบวกที่

$$a_n \geqslant a_{2n} + a_{2n+1} \text{ สำหรับทุก } n \geqslant 1$$

จงแสดงว่ามีจำนวนเต็มบวก m เป็นอนันต์ที่

$$2m \cdot a_m > (4m - 3) \cdot a_{2m-1}$$

โจทย์ข้อ ๓. ในสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า ABC วงกลมแนบใน ω มีจุดศูนย์กลางเป็นจุด I และสัมผัสด้าน BC ที่จุด D วงกลม Ω ผ่านจุด B และ C และมีจุดตัดกับ ω สองจุด เส้นสัมผัสร่วมของ ω และ Ω ตัดกันที่ T ให้ K และ L เป็นจุดตัดที่แตกต่างกันสองจุดของเส้นตรง AT และ Ω จงแสดงว่า KI แบ่งครึ่งมุม $\angle AKD$ หรือ LI แบ่งครึ่งมุม $\angle ALD$

เวลา: 4 ชั่วโมง 30 นาที

โจทย์แต่ละข้อมีคะแนนเต็ม 7 คะแนน

โจทย์ข้อ ๔. ตารางขนาด $n \times n$ ถูกเขียนอยู่บนแผ่นกระดาษแข็งสี่เหลี่ยมจัตุรัส มดลากเส้นทแยงมุมบางเส้นในช่องบางช่องของตาราง และใช้คัตเตอร์ตัดตามเส้นทแยงมุมที่ลากไว้ ปรากฏว่า หลังจากมดตัดเสร็จแล้ว แผ่นกระดาษแข็งนั้นยังคงเป็นแผ่นเดียวอยู่ จงแสดงว่ามีอย่างน้อย $2n-1$ ช่องตารางที่ไม่ถูกตัด

โจทย์ข้อ ๕. จงพิจารณาว่ามีเซตจำกัด S ของจุดบนระนาบ ที่ก่อให้เกิดสี่เหลี่ยมฮาร์โมนิก $|S|^2$ รูปหรือไม่
*หมายเหตุ: สี่เหลี่ยม $ABCD$ จะเรียกว่าเป็น*สี่เหลี่ยมฮาร์โมนิก *ถ้ามันมีวงกลมล้อมรอบ และ $AB \cdot CD = BC \cdot DA$*

โจทย์ข้อ ๖. จงหาฟังก์ชันต่อเนื่อง $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่ทำให้เซตของฟังก์ชัน $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ที่สอดคล้อง

$$g(a)f(b) + g(b)f(a) \leqslant (a + f(a))(b + f(b)) \text{ สำหรับทุก } a, b \in \mathbb{R}$$

เป็นเซตจำกัด แต่ไม่ใช่เซตว่าง