



โจทย์ข้อ ๑. ให้  $\mathbb{Z}_{>1}$  แทนเซตของจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 จงพิจารณาว่ามีฟังก์ชัน  $f : \mathbb{Z}_{>1} \rightarrow \mathbb{Z}_{>1}$  ที่ทำให้

$$f^{f(n)}(m) = m^n$$

สำหรับทุกจำนวนเต็ม  $m, n$  ที่มากกว่า 1 หรือไม่

หมายเหตุ: สำหรับจำนวนเต็มบวก  $k$  ใดๆ  $f^k(n) = f(f(\dots(n)))$  โดยมี  $f$  ทั้งหมด  $k$  ตัว

โจทย์ข้อ ๒. จงหาคู่อันดับ  $(a, b)$  ของจำนวนเต็มบวกทั้งหมด ที่ทำให้  $(a+1)^{b-1} + (a-1)^{b+1} = 2a^b$

โจทย์ข้อ ๓. เครื่องคิดเลขเครื่องหนึ่งมีปุ่มสองปุ่มคือ  $-1/x$  และ  $x+1$  และมีจอแสดงผลที่สามารถแสดงจำนวนตรรกยะใดๆ ได้ โดยที่ถ้าปุ่มแต่ละปุ่มถูกกด จำนวน  $x$  ที่ถูกแสดงบนจอ จะเปลี่ยนเป็นค่าของพจน์ที่เขียนอยู่บนปุ่มนั้นๆ (ปุ่ม  $-1/x$  ไม่สามารถกดได้เมื่อ  $x=0$ )

ในตอนแรก เครื่องคิดเลขเครื่องนี้แสดงผล 0 คุณทำเครื่องคิดเลขนี้ตก ทำให้ปุ่มทั้งสองปุ่มถูกกดรวมกัน  $N$  ครั้ง จงแสดงว่าคุณสามารถกดปุ่มรวมกันอย่างมาก  $3N$  ครั้ง เพื่อให้จอแสดงผลกลับมาแสดง 0

หมายเหตุ: ถ้าผู้เข้าแข่งขันสามารถพิสูจน์ข้อความข้างต้นเมื่อ  $3N$  เปลี่ยนเป็น  $cN$  สำหรับค่าคงที่  $c > 3$  จะได้รับการพิจารณาคะแนนบางส่วน



โจทย์ข้อ ๔. ลำดับของจำนวนเต็มบวก  $a_1, a_2, \dots$  สอดคล้อง

$$a_n = \sqrt{(n+1)a_{n-1} + 1} \quad \text{สำหรับทุก } n \geq 2$$

จงหาค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ  $a_1$

โจทย์ข้อ ๕. ให้  $n > 2$  เป็นจำนวนเต็มบวก เลข  $1, 2, \dots, n$  ถูกระบายด้วยสีแดงหรือน้ำเงิน จงแสดงว่าเราสามารถระบายแต่ละเซตย่อยของ  $\{1, 2, \dots, n\}$  ด้วยสีแดงหรือน้ำเงินเพื่อให้เลขสีแดงแต่ละตัวอยู่ในเซตสีแดงมากกว่าเซตสีน้ำเงิน และเลขสีน้ำเงินแต่ละตัวอยู่ในเซตสีน้ำเงินมากกว่าเซตสีแดง

โจทย์ข้อ ๖. จงหาจำนวนเต็มบวก  $r$  ทั้งหมดที่ทำให้ สำหรับสามเหลี่ยม  $ABC$  ใดๆ เราสามารถเลือกจุดสามจุด  $D, E, F$  ที่แบ่งเส้นรอบรูปของ  $\triangle ABC$  ออกเป็นสามส่วนที่มีความยาวเท่ากัน และพื้นที่ของ  $\triangle DEF$  เป็น  $r$  เท่าของ  $\triangle ABC$