The 3rd Guangxi Collegiate Programming Contest Editorial

2020 年 11 月 21 日

Overview

	Easiest											Hardest
Idea	F	J	H	A	K	C	B	I	E	G	L	D
Coding	F	J	A	H	I	K	B	C	G	D	L	E
Summary	F	J	H	A	K	C	B	I	E	G	D	L

F. Next Number

Shortest Judge Solution: 285 Bytes

Description

给定 x，找到比 x 大的最小的 y，满足 y 不是 7 的倍数且 y 十进制中不含 7。

- $x \le 100$。

Solution

- 从 $x+1$ 开始往上枚举 y，判断是否合法。
- ~~也可以针对所有可能输入的 x 手工计算答案。~~

J. Shift Fenwick Tree

Shortest Judge Solution: 446 Bytes

Description

给定树状数组练习题的实现和一组输入，对于每个 $k(0 \leq k \leq n)$ 统计将树状数组下标增加 k 后的总运算量。

- $n, q \leq 2000$。

Solution

- 阅读理解，较长的题目不一定就是难题。
- 将题面给定的代码抄下来，按题意模拟即可。
- 时间复杂度 $O(nq \log n)$。

H. Photo of Dices

Shortest Judge Solution: 571 Bytes

Description

给定骰子 1 到 6 拼成的字符画，统计上面表示的点数之和。

```
+-----+ +-----+ +-----+ +-----+ +-----+ +-----+
|.....| |....#| |....#| |##.##| |#...#| |##.##|
|..#..| |...#.| |.....| |##.##| |.....| |.....|
|.###.| |.....| |..#..| |.....| |..#..| |##.##|
|..#..| |.#...| |.....| |##.##| |.....| |.....|
|.....| |#....| |#....| |##.##| |#...#| |##.##|
+-----+ +-----+ +-----+ +-----+ +-----+ +-----+
```

Solution

- 由于每个点数的图案固定，手工输入程序之中即可用于识别。
- 也可以观察每个图案的特征进行特判，以减少代码量。

A. Channel Assignment

Shortest Judge Solution: 473 Bytes

Description

有 n 台新电脑，给第 i 台新电脑分配 c_i 个 Wifi 频道则它需要 $\frac{a_i}{c_i} + b_i$ 秒去备份数据。

给定时限 D 秒，求最少分配多少个 Wifi 频道才能在 D 秒内在 k 台新电脑上备份好数据。

- $n \leq 100000$。

Solution

- 第 i 台新电脑要在 D 秒内备份好数据需要满足 $\frac{a_i}{c_i} + b_i \leq D$。
- 解得第 i 台新电脑至少需要 $\lceil \frac{a_i}{D-b_i} \rceil$ 个频道。
- 贪心选取需要频道数最少的 k 台新电脑。
- 时间复杂度 $O(n \log n)$。

K. Subsequence

Shortest Judge Solution: 686 Bytes

Description

给定两个压缩表示的字符串 A, B，判断 A 是否是 B 的子序列。

- 压缩后的段数 ≤ 100000。

Solution

- 重复以下步骤直到两个字符串至少一个为空：
- (1) 比较 A 的第一段（假设是字符 p 出现了 x 次）和 B 的第一段（假设是字符 q 出现了 y 次）。
- (2) 若 $p \neq q$，剔除 B 的第一段，然后回到 (1)。
- (3) 若 $p = q$ 且 $x < y$，将 y 减少 x，剔除 A 的第一段，然后回到 (1)。
- (4) 若 $p = q$ 且 $x > y$，将 x 减少 y，剔除 B 的第一段，然后回到 (1)。
- (5) 若 $p = q$ 且 $x = y$，同时剔除 A 和 B 的第一段，然后回到 (1)。

Solution

- A 是 B 的子序列当且仅当 A 的所有段都被剔除。
- 每一步中至少有一段被剔除，故执行的步数不超过总段数。
- 时间复杂度 $O(n + n')$。

C. Landlord

Shortest Judge Solution: 709 Bytes

Description

给定 $n \times m$ 的矩阵，每个位置的数都是正数。
需要统计有多少连续子矩阵满足其所有数字之和不超过 k。

- $n \times m \leq 200000$。

Solution

- $O(n^2)$ 枚举子矩阵的上底边和下底边，转化为一维问题。
- 对于一维问题，可以通过双指针左右底边在 $O(m)$ 的时间内得到答案。
- 时间复杂度 $O(n^2m)$，当 n 较大时无法在时限内出解。

Solution

- 当 $n > m$ 时，将矩阵旋转 $90°$，则新矩阵满足 $n \le m$。
- $\min(n, m) \le \sqrt{nm}$。
- 时间复杂度 $O(nm \min(n, m)) = O(nm\sqrt{nm})$。

B. Function Composition

Shortest Judge Solution: 689 Bytes

Description

给定 n 个函数 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$，有三种形式：

(1) $f_i(x) = x + k$

(2) $f_i(x) = x \times k$

(3) $f_i(x) = x^k$

q 次询问，每次给定 r_i 和 x_i，求：

$$f_1\left(f_2\left(\dots\left(f_{r_i-2}\left(f_{r_i-1}\left(f_{r_i}\left(x_i\right)\right)\right)\right)\dots\right)\right) \bmod 101$$

- $n, q \leq 100000$。

Solution

- 注意到答案对 101 取模，计算过程中的 x 都可以对 101 取模，因此对于每个函数只有 101 种可能的输入。
- 对于每个函数预处理出 $f_i(0), f_i(1), \ldots, f_i(100)$ 的值。
- 设 $g_i(x)$ 表示 $f_1\left(f_2\left(\ldots\left(f_{i-2}\left(f_{i-1}\left(f_i\left(x\right)\right)\right)\right)\ldots\right)\right) \bmod 101$，则 $g_i(x) = g_{i-1}(f_i(x))$。
- 同样地对于每个 $g_i(x)$ 预处理出 $g_i(0), g_i(1), \ldots, g_i(100)$ 的值即可 $O(1)$ 回答询问。
- 时间复杂度 $O(101n + q)$。

I. Prime Partition

Shortest Judge Solution: 648 Bytes

Description

给定 n 和 m，求把 n 分解成若干个 m 以内不同的质数之和的方案数模 2。

- $n, m \leq 300000$。
- 数据组数 $T \leq 300000$。

Solution

- m 以内有 $O(\frac{m}{\log m})$ 个质数。
- 01 背包，设 $f_{i,j}$ 表示用前 i 小的质数拼出 j 的方案数模 2，则 $f_{i,j} = (f_{i-1,j} + f_{i-1,j-p_i}) \bmod 2$。
- 空间优化：将数据按照 m 从小到大排序，则第一维不需要记录。
- 时间优化：等价于 $f_{i,j} = f_{i-1,j}\ \texttt{xor}\ f_{i-1,j-p_i}$，对第二维利用 `std::bitset` 进行压位。
- 时间复杂度 $O(\frac{nm}{64 \log m} + T)$。

E. Low Power

Shortest Judge Solution: 1616 Bytes

Description

给定平面上 n 个边平行坐标轴的矩形，每个矩形覆盖了一些格子。

q 次询问，每次指定 k 个矩形，问假如删掉这 k 个矩形，还有多少格子被至少一个矩形覆盖。

- $n, q \leq 100000$。
- $k \leq 5$。
- 坐标范围 v : $[1, 1000]$。

Solution

- 令 cnt 为被至少一个矩形覆盖的格子数。
- 对于每个询问，$ans = cnt -$ 只被这次删掉的某几个矩形覆盖的格子数。
- $O(2^k)$ 枚举这次删掉的矩形的子集 S，需要统计有多少格子恰好被 S 覆盖。

Solution

- 对于矩形 i，随机一个 `unsigned long long` 范围内的数作为它的权值 w_i。
- 对于一个格子，令其权值为覆盖它的矩形的权值的异或和。
- 对于矩形子集 S，设其权值异或和为 t，则需要统计有多少格子的权值等于 t。
- 利用排序 + 二分查找或 `std::map` 可以做到 $O(\log v)$；利用 Hash 表可以做到 $O(1)$。
- 时间复杂度 $O(n + v^2 + q2^k)$。

G. Package Delivery

Shortest Judge Solution: 759 Bytes

Description

在接下来的 n 天里要取走共 m 个快递，第 i 个快递可取时间为 $[l_i, r_i]$。

每天可以去很多次邮局，每次去邮局最多可以同时取走 k 个快递。

在第 i 天去一次邮局会积累 c_i 点不高兴度，问最后至少会累积多少点不高兴度。

- $n, m \leq 4000$。
- 保证后到的快递的截止日期更靠后。

Solution

- 按日期从前到后依次考虑每一天。
- 假设考虑到了第 i 天，并决定在第 i 天再多去一次邮局，那么最优策略一定是拿走目前能拿的快递中截止日期最早的若干个快递。
- 由于后到的快递的截止日期更靠后，因此将所有快递按照 l_i 为第一关键字，r_i 为第二关键字排序后，每次一定是拿走排序后一段连续的快递。

Solution

- 对于连续的一段快递 $[l_a, r_a], [l_{a+1}, r_{a+1}], \ldots, [l_b, r_b]$，能一次性拿走它们当且仅当 $l_b \le r_a$ 且 $b - a + 1 \le k$。
- 设 $f_{i,j}$ 表示 $[i, j]$ 天中不高兴度最小的那一天的不高兴度，则一次性拿走排序后第 a 到第 b 个快递的最小代价为 f_{l_b, r_a}。
- 动态规划，设 g_i 表示拿走排序后前 i 个快递的最小代价，有 $g_i = \min(g_{j-1} + f_{l_i, r_j})$，其中 $\max(1, i - k + 1) \le j \le i$ 且 $l_i \le r_j$。
- 时间复杂度 $O(n^2 + m^2)$。

D. Longest Road

Shortest Judge Solution: 950 Bytes

Description

n 个点的无向图，公司 1 和公司 2 累计提供了 m 条双向边。

给定 k，找到一棵使用恰好 k 条公司 1 提供的边的生成树，使得用到的最长边最短。

- $n \leq 100000$。
- $m \leq 200000$。

Solution

- 二分答案，需要判断只用边长不超过 mid 的边是否可以得到一棵满足条件的生成树。
- 若仅用边长不超过 mid 的边无法将所有 n 个点连通，那么显然无解。
- 否则令 L 表示使用公司 1 的边最少的生成树使用公司 1 的边数，令 R 表示使用公司 1 的边最多的生成树使用公司 1 的边数。
- 有解当且仅当 $L \le k \le R$。
- 时间复杂度 $O(m \log m\alpha(n))$。

L. Subset Query

Shortest Judge Solution: 1444 Bytes

Description

有 n 个正整数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，已知每个数都不超过 m。

有 q 条信息，每条信息是下面两种之一：

(1) 某几个数的最小值在 $[l, r]$ 里。

(1) 某几个数的最大值在 $[l, r]$ 里。

求 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ 的最小可能值和最大可能值。

- $n \leq 8$。

Solution

- 根据 q 条信息记录：f_S 表示 S 集合的数的最小值的取值范围，g_S 表示 S 集合的数的最大值的取值范围。
- 不妨设 $x_{p_1} \le x_{p_2} \le x_{p_3} \le \cdots \le x_{p_n}$ ；
- 对于集合 S，其最小值在 p 最小的那个数处取到，最大值在 p 最大的那个数处取到。
- 由此可以得到每个数的取值范围 $[l_i, r_i]$。
- 最后根据 $x_{p_i} \le x_{p_{i+1}}$ ，有 $l_{p_{i+1}} \ge l_{p_i}$、 $r_{p_i} \le r_{p_{i+1}}$。

Solution

- 若已知 $x_{p_1} \le x_{p_2} \le x_{p_3} \le \cdots \le x_{p_n}$，则可在 $O(2^n)$ 时间内得到一组解。
- 注意到 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 构成了 1 到 n 的一个排列，$O(n!)$ 枚举所有排列即可。
- 时间复杂度 $O(n!2^n)$。

Thank you!