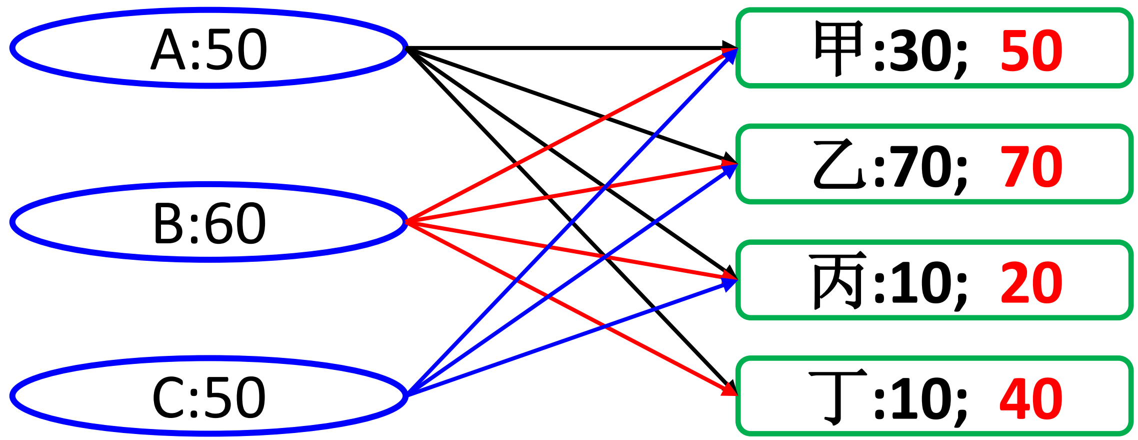
例3 自来水输送

三个水库供水量(千吨)



（以天计）

四个小区基本用水量(千吨)

四个小区额外用水量(千吨)

(引水管理费)

收入：900元/千吨

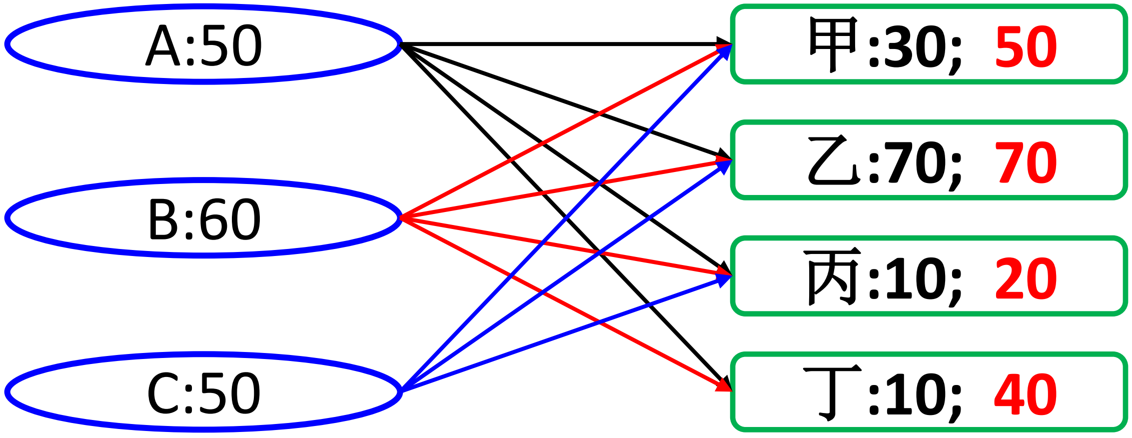
其他费用:450元/千吨

元/千吨	甲	乙	丙	丁
A	160	130	220	170
B	140	130	190	150
C	190	200	230	/

应如何分配水库供水量，公司才能获利最多？

若水库供水量都提高一倍，公司利润可增加到多少？

问题分析



总供水量：160 < 总需求量：120+180=300.

收入：900元/千吨.　　总收入: 900×160=144,000(元)

支出：(1) 引水管理费.

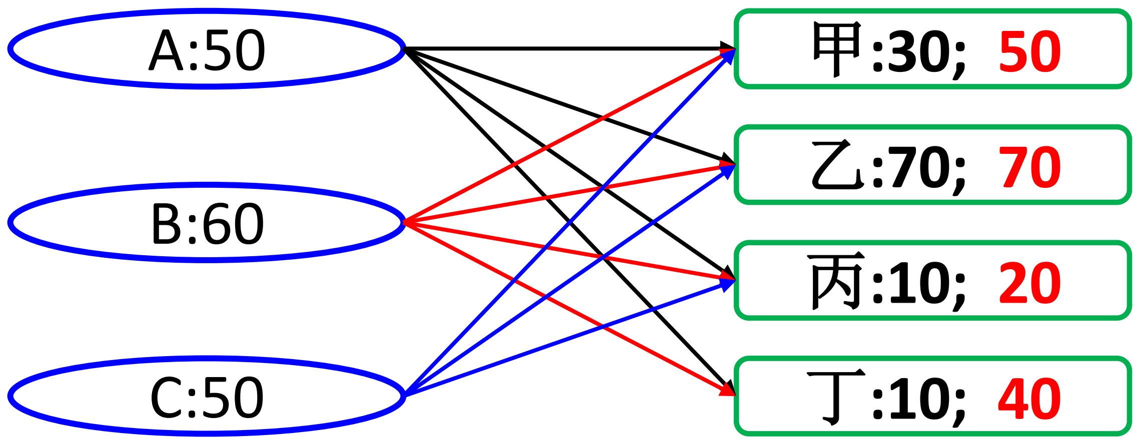
(2) 其他费用: 450元/千吨.

其他总支出: 450×160=72, 000 (元)

优化目标: 确定送水方案使利润最大.

等价于: 确定送水方案, 使引水管理费最小.

模型建立　（确定3个水库向4个小区的供水量）



决策变量： x_{ij} 为水库 i 向小区 j 的供水量.

（引水管理费）

元/千吨	甲	乙	丙	丁
A	160	130	220	170
B	140	130	190	150
C	190	200	230	/

决策变量： x_{ij} 为水库 i 向小区 j 的供水量.

（引水管理费）

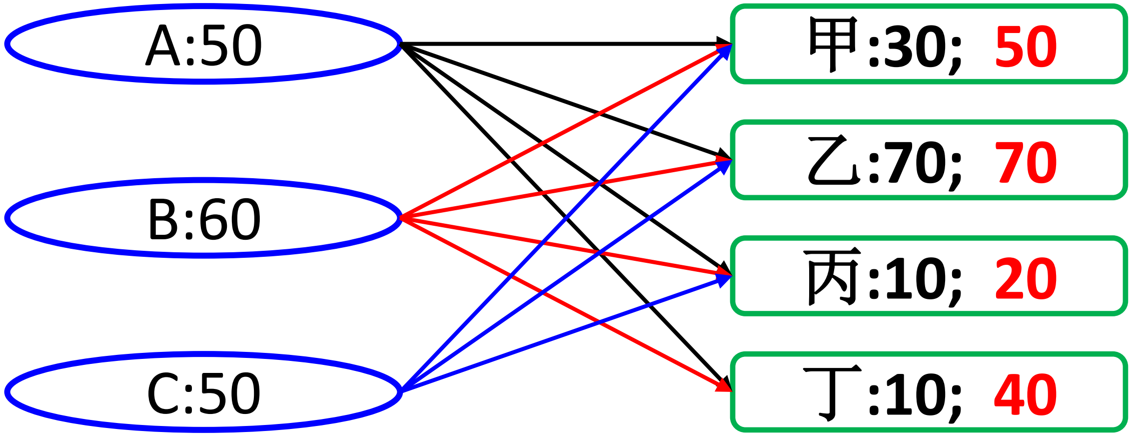
元/千吨	甲	乙	丙	丁
A	160	130	220	170
B	140	130	190	150
C	190	200	230	/

目标函数(引水管理费最小)：

$$
\begin{aligned}
Min \quad Z = & 160x_{11} + 130x_{12} + 220x_{13} + 170x_{14} \\
& + 140x_{21} + 130x_{22} + 190x_{23} + 150x_{24} \\
& + 190x_{31} + 200x_{32} + 230x_{33}
\end{aligned}
$$

决策变量： x_{ij} 为水库 i 向小区 j 的供水量.

约束条件



供应限制：

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=50$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=60$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}=50$$

需求限制：

$$30\le x_{11}+x_{21}+x_{31}\le 80$$
$$70\le x_{12}+x_{22}+x_{32}\le 140$$
$$10\le x_{13}+x_{23}+x_{33}\le 30$$
$$10\le x_{14}+x_{24}\le 50$$

模型建立(线性规划模型)

$$Min \quad Z = 160x_{11} + 130x_{12} + 220x_{13} + 170x_{14} + 140x_{21} + 130x_{22} + 190x_{23} + 150x_{24} + 190x_{31} + 200x_{32} + 230x_{33}$$

$$s.t. \quad \begin{aligned} & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 50 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 60 \\ & x_{31} + x_{32} + x_{33} = 50 \\ & 30 \le x_{11} + x_{21} + x_{31} \le 80 \\ & 70 \le x_{12} + x_{22} + x_{32} \le 140 \\ & 10 \le x_{13} + x_{23} + x_{33} \le 30 \\ & 10 \le x_{14} + x_{24} \le 50 \end{aligned}$$

决策变量: x_{ij} 为水库 i 向小区 j 的供水量(二维变量).

可否直接用求解命令求解:

```
[x,fval]=linprog（c， A1， b1， A2,b2,v1,v2,x0)
```

线性规划模型的一般形式:

$$Min \quad z = Cx \qquad \text{(目标函数)}$$

$$s.t. \quad A_1 x \le b_1 \qquad \text{(不等式条件约束)}$$

$$A_2 x = b_2 \qquad \text{(等式条件约束)}$$

$$v_1 \le x \le v_2 \qquad \text{(决策变量上下限约束)}$$

其中: $x = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$. (决策变量一维变量)

$C = [c_1, c_2, \cdots, c_n]$ (n维向量)

A_1, A_2 (具有n列的矩阵)

二维变量模型降维:

当模型用二维变量的形式表示, 应转化为一维变量的形式.

二维变量模型的降维

(1) 当目标函数变量用二维变量表示

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

可将二维变量表示为一维变量的形式

$$[x_{11}, \cdots, x_{1m}, x_{21}, x_{22}, \cdots x_{2m}, x_{31}, \cdots, x_{nm}] = [x_1, \cdots x_m, x_{m+1}, \cdots x_{2m}, x_{2m+1}, \cdots, x_{n\times m}]$$

相应的目标向量为

$$C = [c_{11}, \cdots, c_{1m}, c_{21}, \cdots, c_{2m}, c_{2m+1}, \cdots, c_{nm}]$$

Matlab算法： 取

$$A_0 = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} \end{pmatrix}$$

```
A0;          %输入A0
A0=A0';      %将A0转置
c=A0(:);     %构造目标向量
```

(2) 当条件为

$$\begin{cases} a_{11}x_{11}+a_{12}x_{12}+\cdots+a_{1m}x_{1m}\le b_1 \\ a_{21}x_{21}+a_{22}x_{22}+\cdots+a_{2m}x_{2m}\le b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_{n1}+a_{n2}x_{n2}+\cdots+a_{nm}x_{nm}\le b_n \end{cases}$$

(按行下标排列)

相应的条件矩阵为

$$\begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \cdots\ a_{1m} & & \\ & a_{21}\ a_{22}\ \cdots\ a_{2m} & \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ & & a_{n1}\ a_{n2}\ \cdots\ a_{nm} \end{bmatrix}$$

Matlab算法：取

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

编写matlab函数，调用即可：

```
A;          %输入A
[n,m]=size(A);
M=[]
for i=1:n
     M(i,(i-1)*m+1:i*m)=A(i,1:m);
end
A=M;
```

注：按行下标排列时，行要完整，缺失要补0.

(3) 当条件为 $\begin{cases} a_{11}x_{11}+a_{21}x_{21}+\cdots+a_{n1}x_{n1}\le b_1 \\ a_{12}x_{12}+a_{22}x_{22}+\cdots+a_{n2}x_{n2}\le b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1m}x_{1m}+a_{2m}x_{2m}+\cdots+a_{nm}x_{nm}\le b_m \end{cases}$ （按列下标排列）

相应的条件矩阵为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{21} & & \cdots & & a_{n1} & & \\ & a_{12} & & a_{22} & & \cdots & & a_{n2} & \\ & & & & \cdots\cdots\cdots\cdots & & & & \\ & & a_{1m} & & a_{2m} & & \cdots & & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Matlab算法：取

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

编写matlab函数，调用即可：

```
A;            %输入A
[n,m]=size(A);
M=[];
for i=1:m;
    M=[M,diag(A(:,i))];
end
A=M;
```

注：按列下标排列时，列要完整，缺失要补0，变换后删掉纯0行。

(4) 求解结果还原为二维形式

将上面的矩阵及向量用以下命令求解：

```
[x,fval]=linprog（c，A1，b1，A2,b2,v1,v2,x0)
```

x为一维形式(向量).

已知目标函数矩阵为：

$$A_0=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} \end{pmatrix}$$

将x还原为二维形式matlab程序：

```
xx=ones(m,n);    %也可以用0矩阵
xx(:)=x;
xx=xx'  %xx为x的二维形式
```

matlab求解模型

$$
\begin{aligned}
Min \quad Z = & 160x_{11} + 130x_{12} + 220x_{13} + 170x_{14} \\
& + 140x_{21} + 130x_{22} + 190x_{23} + 150x_{24} \\
& + 190x_{31} + 200x_{32} + 230x_{33}
\end{aligned}
$$

$$
s.t. \quad
\begin{cases}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 50 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 60 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} = 50 \\
30 \le x_{11} + x_{21} + x_{31} \le 80 \\
70 \le x_{12} + x_{22} + x_{32} \le 140 \\
10 \le x_{13} + x_{23} + x_{33} \le 30 \\
10 \le x_{14} + x_{24} \le 50
\end{cases}
$$

决策变量： x_{ij} 为水库 i 向小区 j 的供水量（二维变量）.

(1) 构造目标函数向量

$$
\begin{aligned}
Min\quad Z = & 160x_{11} + 130x_{12} + 220x_{13} + 170x_{14} \\
& + 140x_{21} + 130x_{22} + 190x_{23} + 150x_{24} \\
& + 190x_{31} + 200x_{32} + 230x_{33}
\end{aligned}
$$

```
clc,clear  %自来水输送(供水小于用水时)

%构造目标向量
A0=[160,130,220,170;140,130,190,150;190,200,230,100000];
A0=A0';
c=A0(:);
```

(2) 构造不等约束矩阵及向量

$$30 \le x_{11} + x_{21} + x_{31} \le 80$$
$$70 \le x_{12} + x_{22} + x_{32} \le 140$$
$$10 \le x_{13} + x_{23} + x_{33} \le 30$$
$$10 \le x_{14} + x_{24} \le 50$$

```
A1=[1,1,1;1,1,1;1,1,1;1,1,0];
[n,m]=size(A1);
M=[];
[n,m]=size(A1);
M=[];
for i=1:m;
   M=[M,diag(A1(:,i))];
end
A1=M;
A1=[A1;-A1];    %不等约束条件矩阵
b1=[80,140,30,50,-30,-70,-10,-10];
```

(3) 构造等约束条件矩阵及向量

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 50 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 60 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} &= 50
\end{aligned}
$$

```
A2=[1,1,1,1;1,1,1,1;1,1,1,0];
[n,m]=size(A2);
M=[];
for i=1:n
    M(i,(i-1)*m+1:i*m)=A2(i,1:m);
end
A2=M;
b2=[50,60,50];
```

(4) 求解线性模型

```
[x,fval]=linprog(c,A1,b1,A2,b2,zeros(1,12));
```

(5) 将一维解x化为二维形式

```
xx=ones(4,3);
xx(:)=x;
xx=xx';
```

运行结果:

```
xx =
     0    50     0     0
     0    50     0    10
    40     0    10     0
```

```
fval =
      24400
```

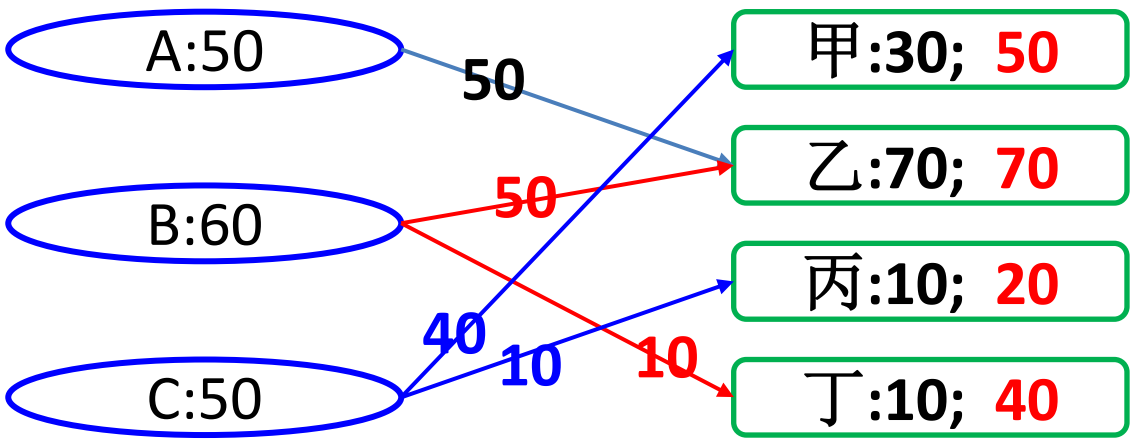
运行结果:

xx =

0	50	0	0
0	50	0	10
40	0	10	0

fval =

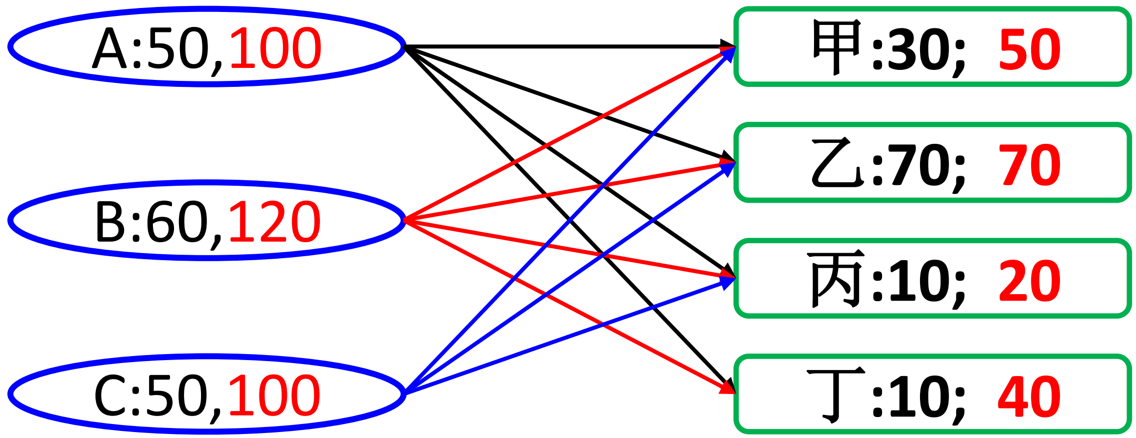
24400



```
clc,clear  %自来水输送(供水小于用水时)

%构造目标向量
A0=[160,130,220,170;140,130,190,150;190,200,230,100000];
A0=A0';
c=A0(:);

%构造不等约束条件矩阵及限制向量(按列下标排列)
A1=[1,1,1;1,1,1;1,1,1;1,1,0];
[n,m]=size(A1);
M=[];
[n,m]=size(A1);
M=[];
for i=1:m;
   M=[M,diag(A1(:,i))];
end
A1=M;

A1=[A1;-A1];    %不等约束条件矩阵
b1=[80,140,30,50,-30,-70,-10,-10];
```

```
%构造等约束矩阵及限制向量(按列下标排列)
A2=[1,1,1,1;1,1,1,1;1,1,1,0];
[n,m]=size(A2);
M=[];
for i=1:n
   M(i,(i-1)*m+1:i*m)=A2(i,1:m);
end
A2=M;
b2=[50,60,50];

[x,fval]=linprog(c,A1,b1,A2,b2,zeros(1,12));   %求解线性规划

%还原为二维形式
xx=ones(4,3);
xx(:)=x;
xx=xx';
```

问题讨论： 若每个水库最大供水量都提高一倍，如何配送水？



与原模型的区别： 总供水量(320) > 总需求量(300)

目标函数要做出什么样的改变？

约束条件要做出什么样的改变？

目标函数：

利润= 收入(900) – 其它费用(450) – 引水管理费

目标函数:

利润= 收入(900) - 其它费用(450) - 引水管理费

利润元/千吨	甲	乙	丙	丁
A	290	320	230	280
B	310	320	260	300
C	260	250	220	/

目标函数: $Max \quad Z = 290x_{11} + 320x_{12} + 230x_{13} + 280x_{14}$

$+ 310x_{21} + 320x_{22} + 260x_{23} + 300x_{24} + 260x_{31} + 250x_{32} + 220x_{33}$

供应限制:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} < 2 \times 50$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} < 2 \times 60$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} < 2 \times 50$$

需求限制不变.

模型建立(线性规划模型)

$$Max \quad Z = 290x_{11} + 320x_{12} + 230x_{13} + 280x_{14}$$
$$+310x_{21} + 320x_{22} + 260x_{23} + 300x_{24} + 260x_{31} + 250x_{32} + 220x_{33}$$

$$s.t. \quad x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} < 2 \times 50$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} < 2 \times 60$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} < 2 \times 50$$
$$30 \le x_{11} + x_{21} + x_{31} \le 80$$
$$70 \le x_{12} + x_{22} + x_{32} \le 140$$
$$10 \le x_{13} + x_{23} + x_{33} \le 30$$
$$10 \le x_{14} + x_{24} \le 50$$

$$
\begin{aligned}
Min \quad Z = {} & 160x_{11} + 130x_{12} + 220x_{13} + 170x_{14} \\
& + 140x_{21} + 130x_{22} + 190x_{23} + 150x_{24} \\
& + 190x_{31} + 200x_{32} + 230x_{33}
\end{aligned}
$$

```
clc,clear  %自来水输送（每个水库水量提高一倍时)

%构造目标向量
A0=[160,130,220,170;140,130,190,150;190,200,230,100000];
A00=900-450-A0;   A00=-A00;
A00=A00';
c=A00(:);
```

$$30 \le x_{11} + x_{21} + x_{31} \le 80$$
$$70 \le x_{12} + x_{22} + x_{32} \le 140$$
$$10 \le x_{13} + x_{23} + x_{33} \le 30$$
$$10 \le x_{14} + x_{24} \le 50$$

```
%构造不等约束条件矩阵及限制向量(按列下标排列)
A1=[1,1,1;1,1,1;1,1,1;1,1,0];
[n,m]=size(A1);
M=[];
for i=1:m;
   M=[M,diag(A1(:,i))];
end
A1=M;
A1=[A1;-A1];    %不等约束条件矩阵
b1=[80,140,30,50,-30,-70,-10,-10];
```

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} < 2 \times 50$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} < 2 \times 60$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} < 2 \times 50$$

```
%构造等约束矩阵及限制向量(按行下标排列)
A2=[1,1,1,1;1,1,1,1;1,1,1,0];
[n,m]=size(A2);
M=[];
for i=1:n
   M(i,(i-1)*m+1:i*m)=A2(i,1:m);
end
A2=M;
b2=2*[50,60,50];
```

```
%将两个不等约束条件合并
A=[A1;A2];
b=[b1,b2];
[x,fval]=linprog(c,A,b,[],[],zeros(1,12));  %求解线性规划

%还原为二维形式
xx=ones(4,3);
xx(:)=x;
xx=xx';
```

```
clc,clear %自来水输送（每个水库水量提高一倍时)

%构造目标向量
A0=[160,130,220,170;140,130,190,150;190,200,230,100000];
A00=900-450-A0;   A00=-A00;
A00=A00';
c=A00(:);

%构造不等约束条件矩阵及限制向量(按列下标排列)
A1=[1,1,1;1,1,1;1,1,1;1,1,0];
[n,m]=size(A1);
M=[];
for i=1:m;
   M=[M,diag(A1(:,i))];
end
A1=M;
A1=[A1;-A1];    %不等约束条件矩阵
b1=[80,140,30,50,-30,-70,-10,-10];
```

```
%构造等约束矩阵及限制向量(按行下标排列)
A2=[1,1,1,1;1,1,1,1;1,1,1,0];
[n,m]=size(A2);
M=[];
for i=1:n
   M(i,(i-1)*m+1:i*m)=A2(i,1:m);
end
A2=M;
b2=2*[50,60,50];

%将两个不等约束条件合并
A=[A1;A2];
b=[b1,b2];

[x,fval]=linprog(c,A,b,[],[],zeros(1,12));  %求解线性规划

%还原为二维形式
xx=ones(4,3);
xx(:)=x;
xx=xx';
```

运行结果:

xx =

0	100	0	0
30	40	0	50
50	0	30	0

fval =

-88700