

微积分 1 期末复习模拟题

一、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 数列 $\left\{\frac{n^2-1}{n^2}\right\}$ 的极限是（ A ）。

(A) 1 (B) 0 (C) -1 (D) 2

2. 设 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$ ，则点 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（ C ）。

(A) 连续点 (B) 可去间断点 (C) 跳跃间断点 (D) 振荡间断点

3. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = k$ ，利用拉格朗日中值定理，极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+a) - f(x)] =$ （ C ）。

(A) $a-k$ (B) $k-a$ (C) ka (D) $k+a$

4. 若 $f(x)$ 可导，则 $\int f'(x)dx =$ （ C ）。

(A) $f(x)$ (B) $f'(x)$ (C) $f(x) + C$ (D) $f'(x) + C$

5. 以下关系中正确的是（ A ）。

(A) $\int_0^1 x^2 dx > \int_0^1 x^3 dx$ (B) $\int_1^2 x^2 dx > \int_1^2 x^3 dx$

(C) $\int_1^2 \ln x dx < \int_1^2 (\ln x)^2 dx$ (D) $\int_0^1 x dx < \int_0^1 \ln(x+1) dx$

二、填空题（每题 4 分，共 24 分）

1. 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0, 1)$ ，则 $f(\lg x)$ 的定义域为_____。

2. 设 $f(x)$ 在 $x_0 = 0$ 的某领域内有直到 $n+1$ 阶的导数，则 $f(x)$ 的 n 阶麦克劳林展开式为 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + R_n(x)$ ，其中 $a_n =$ _____。

3. 若在 (a, b) 内，函数 $f(x)$ 的一阶导数 $f'(x) > 0$ ，二阶导数 $f''(x) < 0$ ，则函数 $f(x)$ 在此区间内单调_____（填“增加”或“减少”），相应曲线是_____（填“凹”或“凸”）的，_____拐点（填“有”、“无”或“无法确定”）。

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \cos^2 t dt}{x} =$ _____。

5. 反常积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} =$ _____。

6. 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续是函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可积的_____条件（填充分、必要或充分必要）。

三、计算题（每题 6 分，共 48 分）

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}$

3. 设 $y = (x+10)^6$, 求 y' 与 $y''|_{x=2}$ 。

4. 求由参数方程 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$ 所确定的函数的一阶导数 $\frac{dy}{dx}$ 。

5. 设 $y = \sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[3]{x^2+2}}}$, 求 dy 。

6. 计算不定积分: $\int x e^{-2x} dx$

7. 计算不定积分: $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$

8. 计算定积分: $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx$

四、应用题（共 2 题，第 1 题 6 分，第 2 题 7 分，共 13 分）

1.（6 分）要造一圆柱形油罐，体积为 V ，问底半径 r 和高 h 等于多少时，才能使表面积最小？这时底直径与高的比是多少？

2.（7 分）利用定积分的元素法求由两条抛物线： $y^2 = x, y = x^2$ 所围成的图形的面积。