

2022 年 11 月初赛试题及解答(非数学类)

第十四届全国大学生数学竞赛初赛试题 及参考解答

(非数学类, 2022 年 11 月 12 日)

一、 填空题(本题满分 30 分, 每小题 6 分)

(1) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2} \cos x}{1 + x^2 - \cos^2 x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解】 利用洛必达法则, 得

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} \sin x + \frac{x \cos x}{\sqrt{1-x^2}}}{2x + 2 \cos x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} \cdot \frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}}{2 + 2 \frac{\sin x}{x} \cdot \cos x} = \frac{1}{2}.$$

(2) 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x-1 & x \geq 1, \\ 1-x, & x < 1, \end{cases}$ 则复合函数 $f[g(x)]$ 的间断点为 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解】 显然, 复合函数 $f[g(x)] = \begin{cases} 1, & g(x) > 0, \\ 0, & g(x) \leq 0, \end{cases} = \begin{cases} 1 & x \neq 1, \\ 0, & x = 1, \end{cases}$ 所以 $f[g(x)]$ 的惟一间断点为 $x = 1$.

(3) 极限 $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^3 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解】 易知, $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ 的和函数为: $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x^2 + x}{(1-x)^3}, |x| < 1$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^3 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x) = 2.$$

(4) 微分方程 $\frac{dy}{dx} x \ln x \sin y + \cos y (1 - x \cos y) = 0$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【解】 原方程等价于 $\frac{dy}{dx} \sin y + \frac{1}{x \ln x} \cos y = \frac{1}{\ln x} \cos^2 y$. 令 $u = \cos y$, 则方程可化为 $\frac{du}{dx} - \frac{1}{x \ln x} u = -\frac{1}{\ln x} u^2$. 再令 $w = \frac{1}{u}$, 则方程可进一步化为 $\frac{dw}{dx} + \frac{1}{x \ln x} w = \frac{1}{\ln x}$. 这是一阶线性微分方程, 利用求解公式得

$$w = e^{-\int \frac{dx}{x \ln x}} \left(\int \frac{1}{\ln x} e^{\int \frac{dx}{x \ln x}} dx + C \right) = \frac{1}{\ln x} (x + C).$$

将变量 $w = \frac{1}{u} = \frac{1}{\cos y}$ 代回, 得

$$(x + C) \cos y = \ln x.$$

2022 年 11 月初赛试题及解答(非数学类)

(5) 记 $D = \left\{ (x, y) \left| 0 \leq x + y \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq x - y \leq \frac{\pi}{2} \right. \right\}$, 则

$$\iint_D y \sin(x+y) dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【解】 (方法 1) 利用三角公式: $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$, 并根据重积分的对称性, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} y \sin y dy \int_y^{\frac{\pi}{2}-y} \cos x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} y \sin y (\cos y - \sin y) dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} y \sin 2y dy + \int_0^{\frac{\pi}{4}} y \cos 2y dy - \int_0^{\frac{\pi}{4}} y dy \\ &= \frac{1}{4} + \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) - \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi^2}{32}. \end{aligned}$$

(方法 2) 利用二元变量代换, 令 $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$, 则 $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v) \\ y = \frac{1}{2}(u-v) \end{cases}$. 因为

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2},$$

所以

$$\begin{aligned} \text{原式} &= |J| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (u-v) \sin u du dv = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv \int_0^{\frac{\pi}{2}} u \sin u du - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} v dv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u du \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{\pi}{2} \times 1 - \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{8} \times 1 = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi^2}{32}. \end{aligned}$$

二、(本题满分 14 分) 记向量 \overrightarrow{OA} 与 \overrightarrow{OB} 的夹角为 α , $|\overrightarrow{OA}| = 1$, $|\overrightarrow{OB}| = 2$, $\overrightarrow{OP} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OQ} = \lambda\overrightarrow{OB}$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

(1) 问当 λ 为何值时, $|\overrightarrow{PQ}|$ 取得最小值;

(2) 设 (1) 中的 λ 满足 $0 < \lambda < \frac{1}{5}$, 求夹角 α 的取值范围.

【解】 (1) 根据余弦定理, 并注意到 $0 \leq \alpha \leq \pi$, 得

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= |\overrightarrow{PQ}|^2 = (1-\lambda)^2 + 4\lambda^2 - 4\lambda(1-\lambda)\cos\alpha \\ &= (5+4\cos\alpha)\lambda^2 - 2(1+2\cos\alpha)\lambda + 1 \end{aligned}$$

2022 年 11 月初赛试题及解答(非数学类)

$$= (5+4\cos\alpha)\left(\lambda - \frac{1+2\cos\alpha}{5+4\cos\alpha}\right)^2 + 1 - \frac{(1+2\cos\alpha)^2}{5+4\cos\alpha},$$

因此, 当 $\lambda = \frac{1+2\cos\alpha}{5+4\cos\alpha}$ 时, $0 \leq \lambda \leq 1$, $|\overrightarrow{PQ}|$ 取得最小值. ----- 6 分

(2) 令 $y = \cos\alpha$, 则 $\lambda = \frac{1+2y}{5+4y}$ 的反函数为 $g(\lambda) = -\frac{1}{2} \times \frac{5\lambda-1}{2\lambda-1}$. 易知 $g(\lambda)$ 在

$\left(0, \frac{1}{5}\right)$ 单调增加, 其值域为 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, 所以 $-\frac{1}{2} < \cos\alpha < 0$, 注意到 $\cos\alpha$ 在 $[0, \pi]$

上单调减, 解得 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$, 即夹角 α 的取值范围为 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$. ----- 8 分

三、(本题满分 14 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上二阶可导, $f(0)=1$, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$, $f'(x) \leq 0$, $f''(x) \leq f(x)$, 证明: $f'(0) \geq -\sqrt{2}$.

【证】 任取 $x \in (0, 1)$, 对 $f(x)$ 在 $[0, x]$ 上利用 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(x) - f(0) = xf'(\xi)$. 因为 $f(0)=1$, $f(x) \geq 0$ ($x > 0$), 所以

$$-\frac{1}{x} \leq f'(\xi) \leq 0. \quad \text{----- 5 分}$$

令 $F(x) = [f'(x)]^2 - [f(x)]^2$, 则 $F(x)$ 在 $(0, 1)$ 内可导, 且

$$F'(x) = 2f'(x)[f''(x) - f(x)].$$

根据题设条件, 当 $x \geq 0$ 时, $f'(x) \leq 0$, $f''(x) \leq f(x)$, 所以 $F'(x) \geq 0$. 这表明 $F(x)$ 在 $[0, 1)$ 上单调增加, 从而有 $F(\xi) \geq F(0)$, 可得

$$[f'(\xi)]^2 - [f'(\xi)]^2 \geq [f(\xi)]^2 - [f(0)]^2 \geq -1,$$

因此 $[f'(0)]^2 \leq [f'(\xi)]^2 + 1 \leq 1 + \frac{1}{x^2}$. ----- 7 分

由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 2$, 所以 $[f'(0)]^2 \leq 2$, 从而有 $f'(0) \geq -\sqrt{2}$. ----- 2 分

四、(本题满分 14 分) 证明: 对任意正整数 n , 恒有:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(\frac{\sin nx}{\sin x} \right)^4 dx \leq \left(\frac{n^2}{4} - \frac{1}{8} \right) \pi^2.$$

【证】 首先, 利用归纳法易证: 对 $n \geq 1$, $|\sin nx| \leq n \sin x$ $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

----- 2 分

2022 年 11 月初赛试题及解答(非数学类)

又由于 $|\sin nx| \leq 1$, 及 $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$, ----- 2 分

所以当 $n > 1$ 时, 得

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(\frac{\sin nx}{\sin x} \right)^4 dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2n}} x \left(\frac{\sin nx}{\sin x} \right)^4 dx + \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} x \left(\frac{\sin nx}{\sin x} \right)^4 dx \\ &\leq n^4 \int_0^{\frac{\pi}{2n}} x dx + \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} x \left(\frac{1}{2x/\pi} \right)^4 dx = \frac{n^4}{2} \left(\frac{\pi}{2n} \right)^2 + \frac{\pi^4}{16} \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x^3} \\ &= \frac{n^2 \pi^2}{8} + \frac{\pi^4}{16} \cdot \frac{1}{(-2x^2)} \Big|_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{n^2 \pi^2}{8} - \frac{\pi^4}{16} \left(\frac{2}{\pi^2} - \frac{2n^2}{\pi^2} \right) = \left(\frac{n^2}{4} - \frac{1}{8} \right) \pi^2. \end{aligned}$$

----- 8 分

当 $n=1$ 时, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx = \frac{\pi^2}{8}$, 等号成立. ----- 2 分

五、(本题满分 14 分) 设 $z = f(x, y)$ 是区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ 上的

可微函数, $f(0, 0) = 0$, 且 $dz|_{(0,0)} = 3dx + 2dy$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} dt \int_x^{\sqrt{t}} f(t, u) du}{1 - \sqrt[4]{1 - x^4}}$.

【解】 交换二次积分的次序, 得 $\int_0^{x^2} dt \int_x^{\sqrt{t}} f(t, u) du = -\int_0^x du \int_0^{u^2} f(t, u) dt$.

----- 3 分

由于 $f(x, y)$ 在 D 上可微, 所以 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的半径为 1 的扇形域内连续,

从而 $\varphi(u) = \int_0^{u^2} f(t, u) dt$ 在 $u = 0$ 的某邻域内连续, 因此

$$I = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} dt \int_x^{\sqrt{t}} f(t, u) du}{1 - \sqrt[4]{1 - x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\int_0^x \varphi(u) du}{\frac{x^4}{4}} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x)}{x^3} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} f(t, x) dt}{x^3}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(\xi, x)x^2}{x^3} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(\xi, x)}{x}, \quad 0 < \xi < x^2. \quad \text{----- 6 分}$$

因为 $dz|_{(0,0)} = 3dx + 2dy$, 所以 $f_x(0, 0) = 3$, $f_y(0, 0) = 2$. 又 $f(0, 0) = 0$, 于是

$$f(\xi, x) = f(0, 0) + f_x(0, 0)\xi + f_y(0, 0)x + o(\sqrt{\xi^2 + x^2}) = 3\xi + 2x + o(\sqrt{\xi^2 + x^2}).$$

注意到 $0 < \frac{\xi}{x} < x$, 故由夹逼准则知 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\xi}{x} = 0$, 从而

2022 年 11 月初赛试题及解答(非数学类)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{o(\sqrt{\xi^2 + x^2})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{o(\sqrt{\xi^2 + x^2})}{\sqrt{\xi^2 + x^2}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\xi}{x}\right)^2} = 0.$$

所以

$$I = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(\xi, x)}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3\xi + 2x + o(\sqrt{\xi^2 + x^2})}{x} = -2. \quad \text{----- 5 分}$$

六、(本题满分 14 分) 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明: 存在收敛的正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \text{ 使得 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

【证】 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 所以 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbf{N}$, 使得当 $n > N$ 时 $\sum_{k=n}^{\infty} a_k < \varepsilon$.

特别, 对 $k=1, 2, \dots$, 取 $\varepsilon = \frac{1}{3^k}$, 则存在 $1 < n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1} < n_k$, 使得 $\sum_{l=n_k}^{\infty} a_l < \frac{1}{3^k}$.

----- 4 分

构造 $\{b_n\}$ 如下: 当 $1 \leq n < n_1$ 时, $b_n = a_n$; 当 $n_k \leq n < n_{k+1}$ 时, $b_n = 2^k a_n$, $k=1, 2, \dots$.

----- 5 分

显然, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $k \rightarrow \infty$, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2^k a_n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2^k} = 0.$$

此时, 有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \sum_{n=1}^{n_1-1} a_n + \sum_{l=n_1}^{n_2-1} 2a_l + \sum_{l=n_2}^{n_3-1} 2^2 a_l + \dots \\ &\leq \sum_{n=1}^{n_1-1} a_n + 2 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{n_1-1} a_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{3^k} = \sum_{n=1}^{n_1-1} a_n + 2 < +\infty \end{aligned}$$

因此, 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

----- 5 分