二 线性0-1规划模型

例1 混合泳接力队的选拔

5名候选人的百米成绩：

	甲	乙	丙	丁	戊
蝶泳	1’06”8	57”2	1’18”	1’10”	1’07”4
仰泳	1’16”6	1’06”	1’07”8	1’14”2	1’11”
蛙泳	1’27”	1’06”4	1’24”6	1’09”6	1’23”8
自由泳	58”6	53”	59”4	57”2	1’02”4

1. 如何选拔队员组成4×100米混合泳接力队?

2. 丁的蛙泳成绩退步到1’15”2;戊的自由泳成绩进步到57”5,组成接力队的方案是否应该调整?

分派问题

若干项任务分给一些候选人来完成，每人的专长不同，完成每项任务取得的效益或需要的资源就不同，如何分派任务使获得的总效益最大，或付出的总资源最少.

若干种策略供选择，不同的策略得到的收益或付出的成本不同，各个策略之间有相互制约关系，如何在满足一定条件下作出决择，使得收益最大或成本最小.

c_{ij}:队员 i 第 j 种泳姿的百米成绩(秒):

c_{ij}	i=1	i=2	i=3	i=3	i=5
蝶泳j=1	66.8	57.2	78	70	67.4
仰泳j=2	75.6	66	67.8	74.2	71
蛙泳j=3	87	66.4	84.6	69.6	83.8
自由泳j=4	58.6	53	59.4	57.2	62.4

c_{ij}:队员 i 第 j 种泳姿的百米成绩(秒):

c_{ij}	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5
蝶泳j=1	66.8	57.2	78	70	67.4
仰泳j=2	75.6	66	67.8	74.2	71
蛙泳j=3	87	66.4	84.6	69.6	83.8
自由泳j=4	58.6	53	59.4	57.2	62.4

穷举法:(组成接力队的方案共有5!=120种.)

(1) 求5个队员取4个的组合;

(2) 求每一种组合按4种泳姿所有不同排列的成绩;

(3) 求出最优组合.

```
C = nchoosek(v, k)    %从向量v取出k项的组合
P = perms(v)          %向量v的全排列
```

```
v=1:5
nk=nchoosek(v,3)
nk(1,:)
nk(3,:)
perms([1,2,3])
perms(nk(1,:))
perms(nk(3,:))
```

```
clc,clear   %混合泳接力队的选拔
c=xlsread('yydjb.xlsx');  %读入数据
nk=nchoosek(1:5,4);       %队员组合
n1=size(nk,1);    %求组合数
for i=1:n1;
   pk=perms(nk(i,:));   %每一种组合的排列
   n2=size(pk,1);         %排列个数
   for j=1:n2;
      N=pk(j,:);
      cj((i-1)*n2+j)=c(1,N(1))+c(2,N(2))+c(3,N(3))+c(4,N(4));
                                        %计算每一种组合的成绩
      dy((i-1)*n2+j,:)=N;      %记录每一种泳姿的队员
   end
end
n3=find(cj==min(cj));   %确定最优成绩的位置
dy(n3,:)     %求出每一种泳姿的队员
cj(n3)
```

结果:

ans =

2 3 4 1

min(cj)

ans =

253.2000

c_{ij}	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$
蝶泳$j=1$	66.8	**57.2**	78	70	67.4
仰泳$j=2$	75.6	66	**67.8**	74.2	71
蛙泳$j=3$	87	66.4	84.6	**69.6**	83.8
自由泳$j=4$	**58.6**	53	59.4	57.2	62.4

1(蝶泳),2(仰泳),3(蛙泳),4(自由泳)应派给2,3,4,1号选手.

成绩为:253.2(秒).

2. 丁的蛙泳成绩退步到1’15”2;戊的自由泳成绩进步到57”5,组成接力队的方案是否应该调整?

```
clc,clear   %混合泳接力队的选拔
c=xlsread('yydjb.xlsx');  %读入数据
c(3,4)=75.03;  c(4,5)=57.08
nk=nchoosek(1:5,4);      %队员组合
n1=size(nk,1);    %求组合数
for i=1:n1;
   pk=perms(nk(i,:));   %每一种组合的排列
   n2=size(pk,1);
   for j=1:n2;
      N=pk(j,:);
      cj((i-1)*n2+j)=c(1,N(1))+c(2,N(2))+c(3,N(3))+c(4,N(4));
                                          %计算每一种组合的成绩
      dy((i-1)*n2+j,:)=N;      %记录每一种泳姿的队员
   end
end
n3=find(cj==min(cj));   %确定最优成绩的位置
dy(n3,:)     %求出每一种泳姿的队员
cj(n3)
```

0-1规划模型

若队员*i*参加泳姿*j* 的比赛, 记x_{ij}=1， 否则记x_{ij}=0.

目标函数

$$Min \quad Z=\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{5}c_{ij}x_{ij}$$

约束条件

每人最多入选一种泳姿：

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}\le 1$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}\le 1$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}\le 1$$
$$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}\le 1$$
$$x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}\le 1$$

可精简表述为： $\sum_{j=1}^{4}x_{ij}\le 1,\ i=1,\cdots 5$

0-1规划模型

若队员*i*参加泳姿*j*的比赛，记x_{ij}=1，否则记x_{ij}=0.

目标函数 $$Min \quad Z=\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{5}c_{ij}x_{ij}$$

约束条件

每种泳姿有且只有1人：

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51}=1$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+x_{52}=1$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}+x_{53}=1$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}+x_{54}=1$$

可精简表述为： $$\sum_{i=1}^{5}x_{ij}=1,\ \ j=1,\cdots 4$$

模型建立

$$Min \quad Z = \sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{5} c_{ij} x_{ij}$$

$s.t.$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le 1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \le 1$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} \le 1$$
$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} \le 1$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 1$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 1$$

(1)构造目标函数向量

$$Min \quad Z=\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{5}c_{ij}x_{ij}$$

c_{ij}	*i=1*	*i=2*	*i=3*	*i=4*	*i=5*
j=1	66.8	**57.2**	78	70	67.4
j=2	75.6	66	**67.8**	74.2	71
j=3	87	66.4	84.6	**69.6**	83.8
j=4	**58.6**	53	59.4	57.2	62.4

```
clc,clear   %混合泳接力队的选拔(0-1规划)
A0=xlsread('yydjb.xlsx');  %读入数据
c=A0(:);   %因为A0本身就是按列下标排列，所以不用转置
```

(2) 构造不等约束矩阵及向量

$$
\begin{aligned}
x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} &\le 1\\
x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} &\le 1\\
x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} &\le 1\\
x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44} &\le 1\\
x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54} &\le 1
\end{aligned}
$$

```
%构造不等约束条件矩阵及限制向量(按行下标排列)
A1=ones(5,4);
[n,m]=size(A1);
M=[];
for i=1:n
   M(i,(i-1)*m+1:i*m)=A1(i,1:m);
end
A1=M;
b1=ones(5,1);
```

(3) 构造等约束矩阵及向量

$$
\begin{aligned}
x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51} &= 1\\
x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+x_{52} &= 1\\
x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}+x_{53} &= 1\\
x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}+x_{54} &= 1
\end{aligned}
$$

```
%构造等约束条件矩阵及向量(按列下标排列)
A2=ones(4,5);
[n,m]=size(A2);
M=[];
[n,m]=size(A2);
M=[];
for i=1:m;
   M=[M,diag(A2(:,i))];
end
A2=M;
b2=ones(4,1);
```

(4) 求解线性整数模型

格式：

[x,fval = intlinprog(c,intcon,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0)

c~目标向量

intcon~整数解的变量编号

A~不等约束条件矩阵

b~不等约束条件向量

Aeq~等约束条件矩阵

Aeb~等约束条件向量

lb~决策变量下限

ub~决策变量上限

x0~决策变量初值

```
[x,fval]=intlinprog(c,[1:20],A1,b1,A2,b2,zeros(20,1),ones(20,1));
```

(4) 求解线性整数模型

```
%模型求解（线性整数规划）
[x,fval]=intlinprog(c,[1:20],A1,b1,A2,b2,zeros(20,1),ones(20,1));
```

(5) 将一维解x化为二维形式

```
%还原为二维形式
xx=ones(4,5);
xx(:)=x;
```

```
xx =
     0     1     0     0     0
     0     0     1     0     0
     0     0     0     1     0
     1     0     0     0     0

fval =

  253.2000
```

1(蝶泳),2(仰泳),3(蛙泳),4(自由泳)应派给2,3,4,1号选手.

成绩为:253.2(秒).

2. 丁的蛙泳成绩退步到1’15”2; 戊的自由泳成绩进步到57”5, 组成接力队的方案是否应该调整?

```
clc,clear   %混合泳接力队的选拔(0-1规划)
A0=xlsread('yydjb.xlsx');  %读入数据
c=A0(:);  %因为A0本身就是按列下标排列，所以不用转置
%构造不等约束条件矩阵及限制向量(按行下标排列)
A1=ones(5,4);
[n,m]=size(A1);
M=[];
for i=1:n
   M(i,(i-1)*m+1:i*m)=A1(i,1:m);
end
A1=M;
b1=ones(5,1);
%构造等约束条件矩阵及向量(按列下标排列)
A2=ones(4,5);
[n,m]=size(A2);
M=[];
[n,m]=size(A2);
M=[];
for i=1:m;
   M=[M,diag(A2(:,i))];
end
A2=M;
b2=ones(4,1);
[x,fval]=intlinprog(c,[1:20],A1,b1,A2,b2,zeros(20,1),ones(20,1));
%还原为二维形式
xx=ones(4,5);
xx(:)=x;
```

```
xx =
     0     1     0     0     0
     0     0     1     0     0
     0     0     0     1     0
     1     0     0     0     0
```

```
fval =

  253.2000
```

1(蝶泳),2(仰泳),3(蛙泳),4(自由泳)应派给2,3,4,1号选手.

成绩为:253.2(秒).

2. 丁的蛙泳成绩退步到1’15”2;戊的自由泳成绩进步到57”5,组成接力队的方案是否应该调整?

(课堂练习)

指派(Assignment)问题:

每项任务有且只有一人承担,每人只能承担一项,效益不同,怎样分派使总效益最大.

例2 选课策略

课号	课名	学分	所属类别	先修课要求
1	微积分	5	数学	
2	线性代数	4	数学	
3	最优化方法	4	数学;运筹学	微积分;线性代数
4	数据结构	3	数学;计算机	计算机编程
5	应用统计	4	数学;运筹学	微积分;线性代数
6	计算机模拟	3	计算机;运筹学	计算机编程
7	计算机编程	2	计算机	
8	预测理论	2	运筹学	应用统计
9	数学实验	3	运筹学;计算机	微积分;线性代数

要求:至少选两门数学课、三门运筹学课和两门计算机课

为了选修课程门数最少,应学习哪些课程?

选修课程最少,且学分尽量多,应学习哪些课程 ?

课号	课名	学分	所属类别	先修课要求
1	微积分	5	数学	
2	线性代数	4	数学	
3	最优化方法	4	数学;运筹学	微积分;线性代数
4	数据结构	3	数学;计算机	计算机编程
5	应用统计	4	数学;运筹学	微积分;线性代数
6	计算机模拟	3	计算机;运筹学	计算机编程
7	计算机编程	2	计算机	
8	预测理论	2	运筹学	应用统计
9	数学实验	3	运筹学;计算机	微积分;线性代数

决策变量：x_i=1, 选修课号为 i 的课程(x_i=0不选)

目标函数：

$$Min \quad Z = \sum_{i=1}^{9} x_i$$

约束条件：

最少2门数学课：$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 2$

3门运筹学课：$x_3 + x_5 + x_6 + x_8 + x_9 \geq 3$

2门计算机课：$x_4 + x_6 + x_7 + x_9 \geq 2$

课号	课名	学分	所属类别	先修课要求
1	微积分	5	数学	
2	线性代数	4	数学	
3	最优化方法	4	数学;运筹学	微积分;线性代数
4	数据结构	3	数学;计算机	计算机编程
5	应用统计	4	数学;运筹学	微积分;线性代数
6	计算机模拟	3	计算机;运筹学	计算机编程
7	计算机编程	2	计算机	
8	预测理论	2	运筹学	应用统计
9	数学实验	3	运筹学;计算机	微积分;线性代数

决策变量：x_i=1, 选修课号为 i 的课程(x_i=0不选)

目标函数：

$$Min \quad Z=\sum_{i=1}^{9} x_i$$

约束条件：（先修要求）

$x_3=1$, 则 $x_1=x_2=1$. 因此 $x_3 \le x_1, x_3 \le x_2$, 即

$$2x_3-x_1-x_2 \le 0$$

同理

$$2x_5-x_1-x_2 \le 0$$

$$2x_9-x_1-x_2 \le 0$$

课号	课名	学分	所属类别	先修课要求
1	微积分	5	数学	
2	线性代数	4	数学	
3	最优化方法	4	数学;运筹学	微积分;线性代数
4	数据结构	3	数学;计算机	计算机编程
5	应用统计	4	数学;运筹学	微积分;线性代数
6	计算机模拟	3	计算机;运筹学	计算机编程
7	计算机编程	2	计算机	
8	预测理论	2	运筹学	应用统计
9	数学实验	3	运筹学;计算机	微积分;线性代数

决策变量：$x_i=1$, 选修课号为 i 的课程($x_i=0$不选)

目标函数：

$$Min \quad Z=\sum_{i=1}^{9} x_i$$

约束条件：（先修要求）

$$x_4 \le x_7,\quad x_4 - x_7 \le 0$$

$$x_6 - x_7 \le 0$$

$$x_8 - x_5 \le 0$$

建立0-1线性规划模型：

$$Min \quad Z=\sum_{i=1}^{9} x_i$$

选课要求：

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \ge 2$$

$$x_3+x_5+x_6+x_8+x_9 \ge 3$$

$$x_4+x_6+x_7+x_9 \ge 2$$

先修要求：

$$2x_3-x_1-x_2 \le 0$$

$$2x_5-x_1-x_2 \le 0$$

$$2x_9-x_1-x_2 \le 0$$

$$x_4-x_7 \le 0$$

$$x_6-x_7 \le 0$$

$$x_8-x_5 \le 0$$

编程求解

```
clc,clear  %选课策略（1）
c=[1,1,1,1,1,1,1,1,1];     %目标向量
A1=[-1,-1,-1,-1,-1,0,0,0,0;
    0,0,-1,0,-1,-1,0,-1,-1;
    0,0,0,-1,0,-1,-1,0,-1;
    -1,-1,2,0,0,0,0,0,0;
    -1,-1,0,0,2,0,0,0,0;
    -1,-1,0,0,0,0,0,0,2;
    0,0,0,1,0,0,-1,0,0;
    0,0,0,0,0,1,-1,0,0;
    0,0,0,0,-1,0,0,1,0];
b1=[-2;-3;-2;0;0;0;0;0;0]; %不等约束向量
```

$$Min \quad Z=\sum_{i=1}^{9} x_i$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \geq 2$$

$$x_3+x_5+x_6+x_8+x_9 \geq 3$$

$$x_4+x_6+x_7+x_9 \geq 2$$

$$2x_3-x_1-x_2 \leq 0$$

$$2x_5-x_1-x_2 \leq 0$$

$$2x_9-x_1-x_2 \leq 0$$

$$x_4-x_7 \leq 0$$

$$x_6-x_7 \leq 0$$

$$x_8-x_5 \leq 0$$

```
clc,clear  %选课策略（1）
c=[1,1,1,1,1,1,1,1,1];     %目标向量
A1=[-1,-1,-1,-1,-1,0,0,0,0;  %不等约束条件矩阵
   0,0,-1,0,-1,-1,0,-1,-1;
   0,0,0,-1,0,-1,-1,0,-1;
   -1,-1,2,0,0,0,0,0,0;
   -1,-1,0,0,2,0,0,0,0;
   -1,-1,0,0,0,0,0,0,2;
   0,0,0,1,0,0,-1,0,0;
   0,0,0,0,0,1,-1,0,0;
   0,0,0,0,-1,0,0,1,0];
b1=[-2;-3;-2;0;0;0;0;0;0];  %不等约束向量
[x,fval]=intlinprog(c,[1:9],A1,b1,[],[],zeros(9,1),ones(9,1)); %模型求解
xf=[5,4,4,3,4,3,2,2,3];    %每门课学分
xf=xf*x;                   %总学分
```

```
x'
ans =
   1   1   0   0   1   1   1   0   1
xf =
   21
```

问题2：选修课程最少，学分尽量多，应学习哪些课程？

课程最少： $Min \quad Z = \sum_{i=1}^{9} x_i$

学分最多： $Max \quad W = 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 3x_6 + 2x_7 + 2x_8 + 3x_9$

多目标规划： $Min\ \{Z, -W\}$

多目标规划的处理方式

(1) 逐次优化

a. 以课程最少为目标(不管学分多少)做规划.

b. 以学分最多为目标做规划.

约束条件增加条件：所学课门数为6，即

$$\sum_{i=1}^{9} x_i = 6.$$

编程求解： x' = 1 1 1 0 1 0 1 0 1

xf = 22

```
clc,clear  %选课策略（2）多目标规划,逐次规划
%c=[1,1,1,1,1,1,1,1,1];      %目标向量
c=-[5,4,4,3,4,3,2,2,3];
A1=[-1,-1,-1,-1,-1,0,0,0,0;  %不等约束条件矩阵
   0,0,-1,0,-1,-1,0,-1,-1;
   0,0,0,-1,0,-1,-1,0,-1;
   -1,-1,2,0,0,0,0,0,0;
   -1,-1,0,0,2,0,0,0,0;
   -1,-1,0,0,0,0,0,0,2;
   0,0,0,1,0,0,-1,0,0;
   0,0,0,0,0,1,-1,0,0;
   0,0,0,0,-1,0,0,1,0];
b1=[-2;-3;-2;0;0;0;0;0;0];  %不等约束向量

A2=ones(1,9);     %等约束条件矩阵
b2=6;             %等约束向量

[x,fval]=intlinprog(c,[1:9],A1,b1,A2,b2,zeros(9,1),ones(9,1)); %模型求解

xf=[5,4,4,3,4,3,2,2,3];    %每门课学分
xf=xf*x;                   %总学分
```

(2) 将各目标赋予权重化为单目标规划

多目标规划: $$Min\,\{Z, -W\}$$

赋予 Z 的权重为 $\lambda(0<\lambda<1)$, 则 $-W$的权重为$1-\lambda$.

化为单目标规划:

$$Min\ \lambda Z+(1-\lambda)(-W).$$

试分别取 $\lambda=0.7, \lambda=0.8$ 进行优化.

编程求解.

```
clc,clear  %选课策略（2）多目标规划,各目标赋予一定的权重
c1=[1,1,1,1,1,1,1,1,1];      %课程最少的目标向量
c2=-[5,4,4,3,4,3,2,2,3];     %学分最多的目标向量
L=0.8
c=L*c1+(1-L)*c2;          %将c1,c2赋予一定权重的目标向量

A1=[-1,-1,-1,-1,-1,0,0,0,0; %不等约束条件矩阵
   0,0,-1,0,-1,-1,0,-1,-1;
   0,0,0,-1,0,-1,-1,0,-1;
   -1,-1,2,0,0,0,0,0,0;
   -1,-1,0,0,2,0,0,0,0;
   -1,-1,0,0,0,0,0,0,2;
   0,0,0,1,0,0,-1,0,0;
   0,0,0,0,0,1,-1,0,0;
   0,0,0,0,-1,0,0,1,0];
b1=[-2;-3;-2;0;0;0;0;0;0]; %不等约束向量

[x,fval]=intlinprog(c,[1:9],A1,b1,[],[],zeros(9,1),ones(9,1)); %模型求解
xf=[5,4,4,3,4,3,2,2,3];    %每门课学分
xf=xf*x;                %总学分
```

运行结果:

$\lambda = 0.7$ 时: x' = 1 1 1 1 1 1 1 0 1

xf = 28

$\lambda = 0.8$ 时: x' = 1 1 1 0 1 1 1 0 0

xf = 22