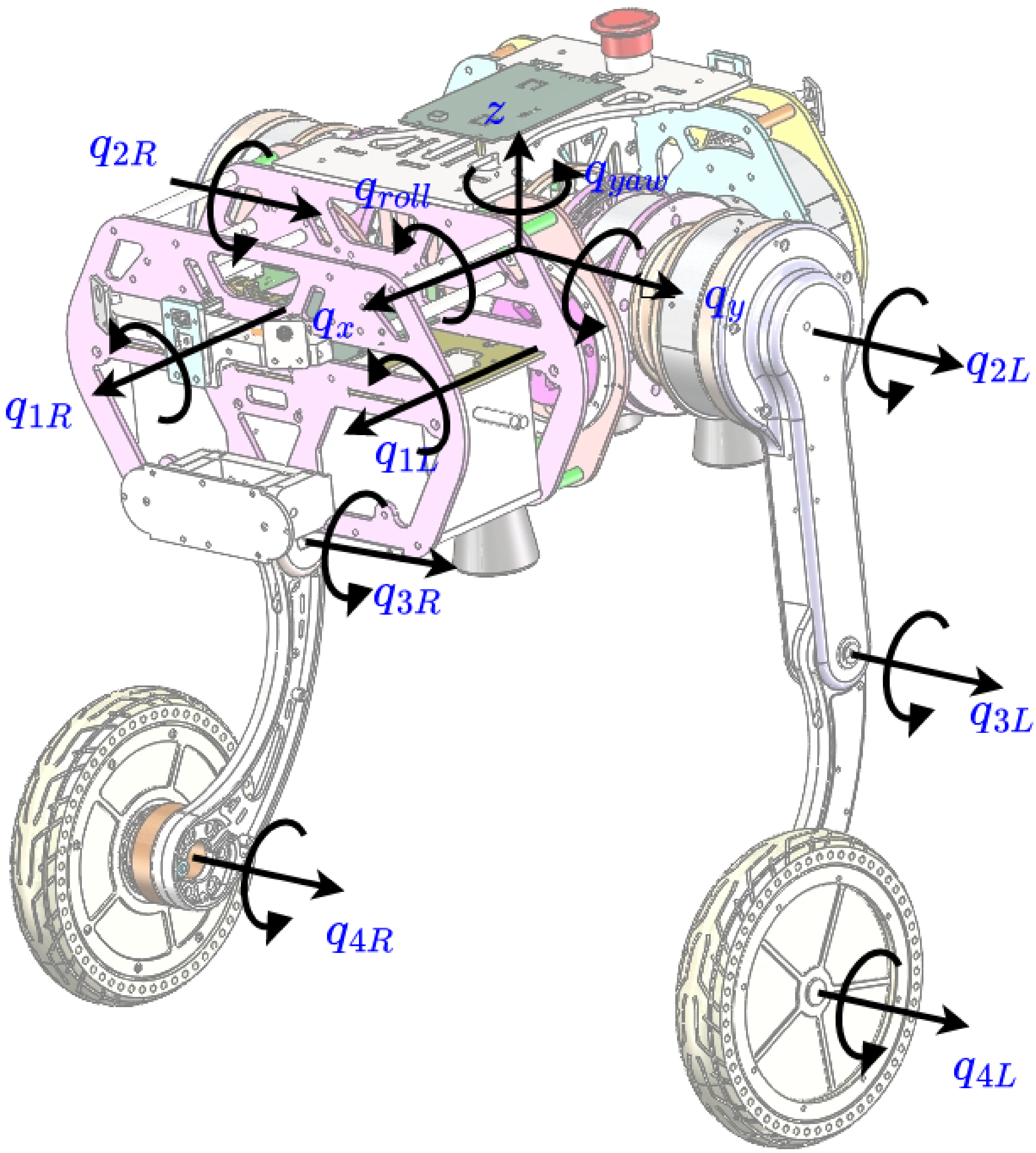
hxt--A2 系列运动学及动力学模型推导

机器人坐标系定义

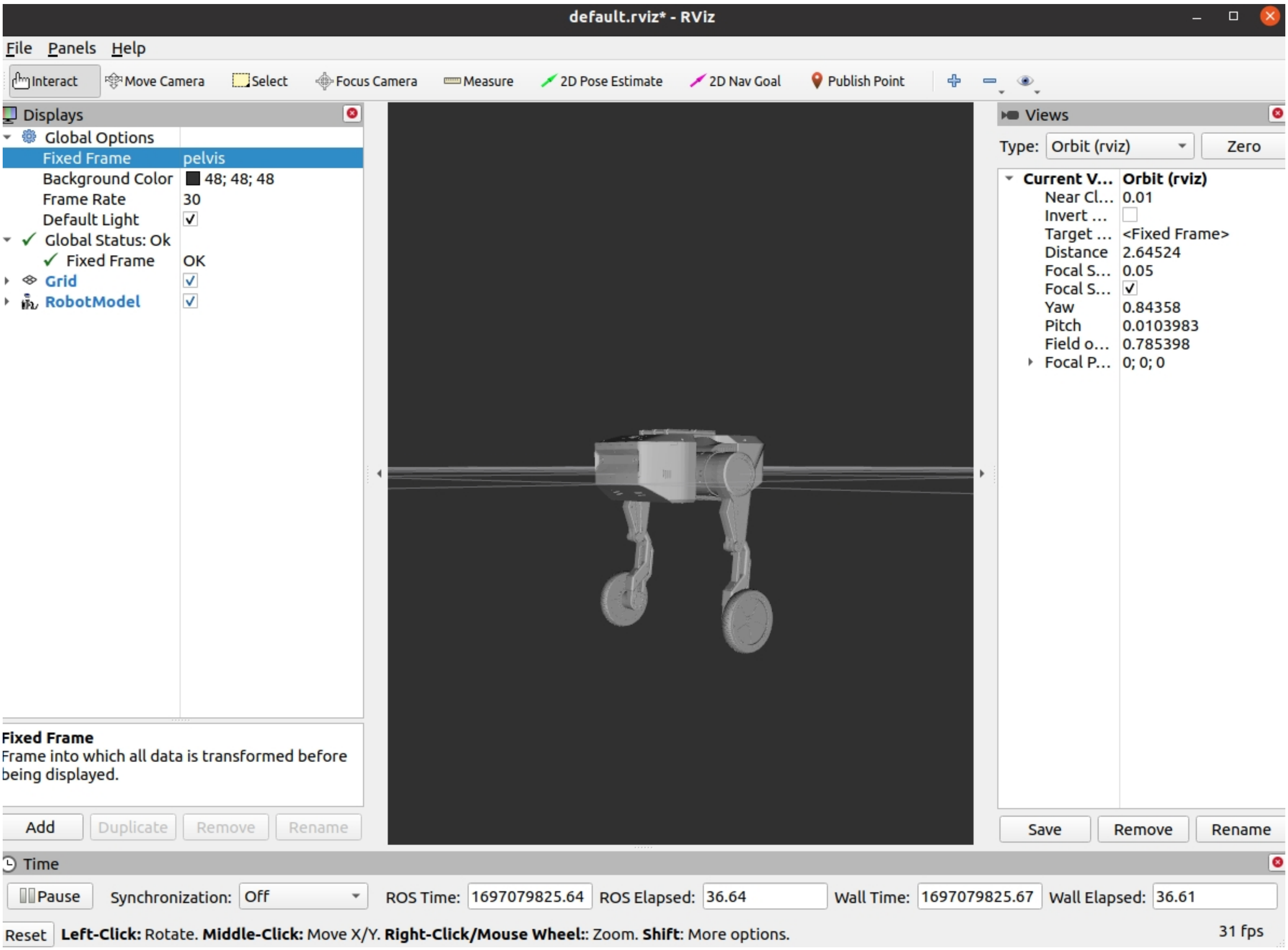
对于A2机器人共有8个驱动关节。对应左腿采用下标为 q_{iL}，$i = 1, ..., 4$，依次为**侧摆关节**、**髋关节**、**膝关节**、**轮关节**；右腿采用下标为 q_{iR}，$i = 1, ..., 4$，依次为**侧摆关节**、**髋关节**、**膝关节**、**轮关节**；如下图所示。关节 z 轴方向为箭头方向。对应关节旋转**正**方向采用右手定则判断，即：大拇指沿着 z 轴方向，四指所指方向为对应关节旋转**正**方向，如下图所示：



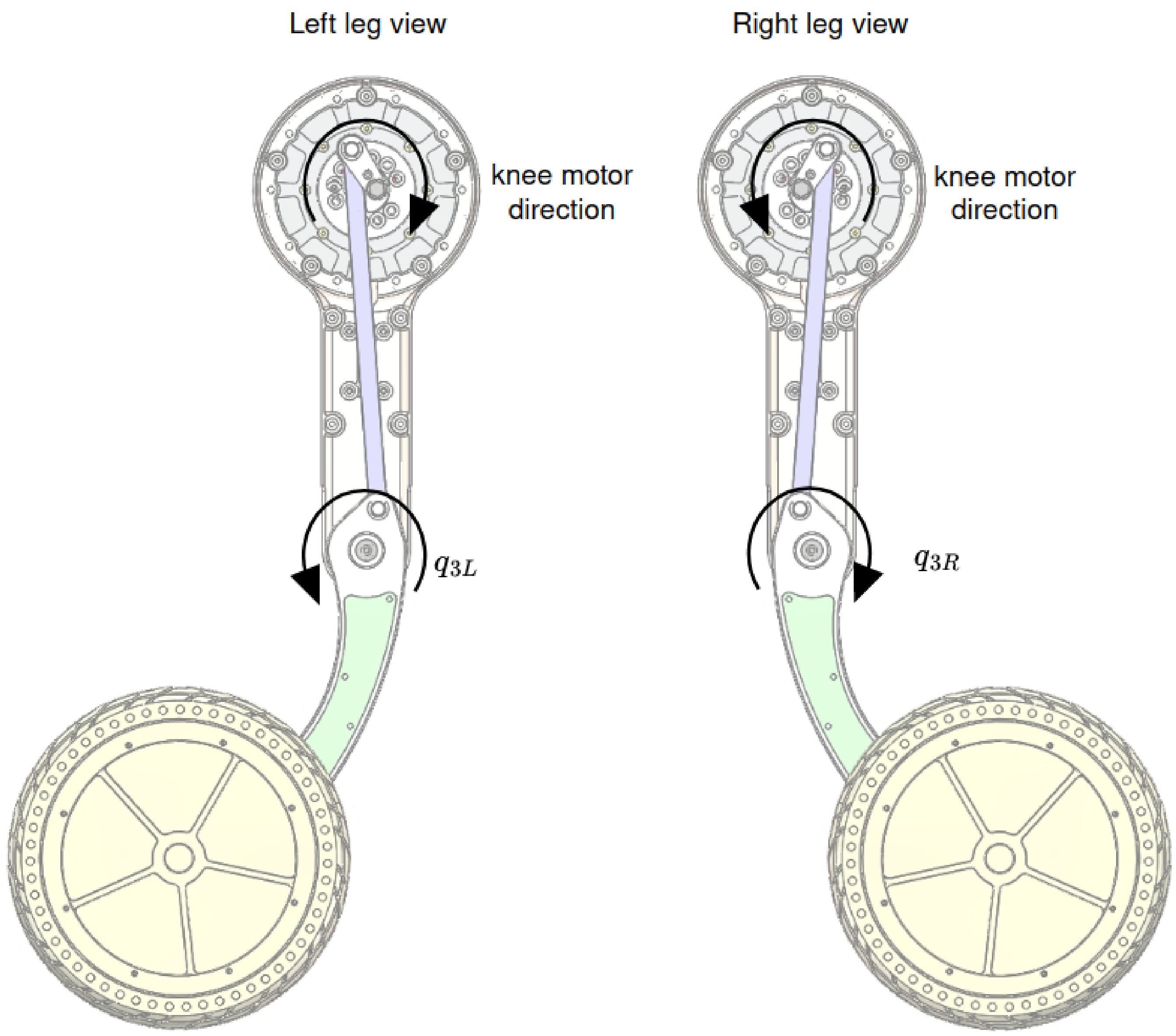
注意：由于 q_3 ，也就是**膝关节**的力矩输入是由四连杆传动机构来传递的。当前A2样机四连杆机构为**交叉四连杆**，如下图所示。为了保证**膝关节** q_3 有如上图所示的旋转方向，对于**膝关节电机**定义旋转方向示意如下：

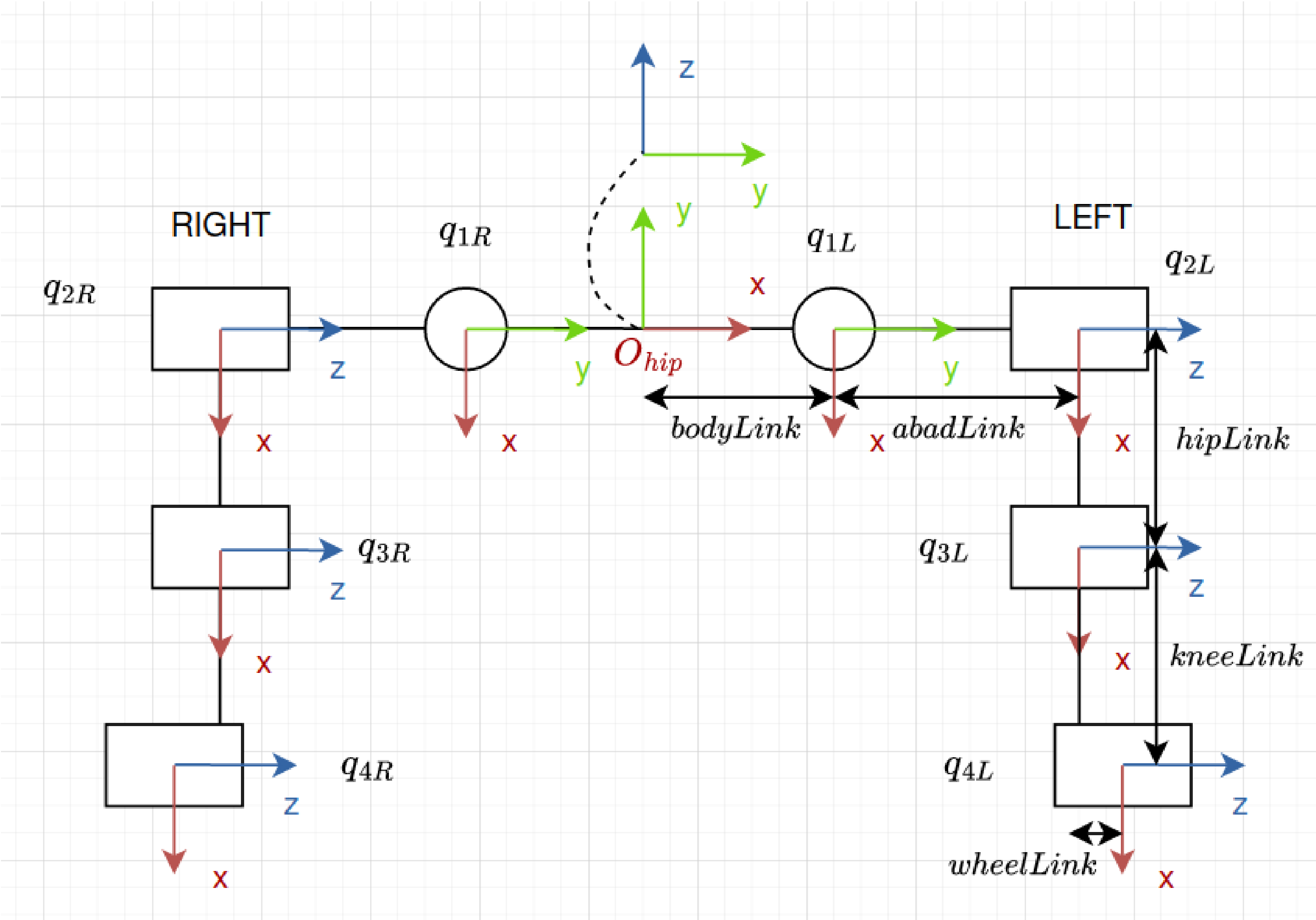
而对于其他**关节**，**电机转向**和坐标系定义**关节转向**相同即可。

机器人的零位导入在rviz中显示如下



运动学模型的建立


Left leg view
Right leg view
knee motor direction
knee motor direction
q_{3L}
q_{3R}



单腿运动学分析

对单腿运动学进行分析，由于DH参数法的限制，此处在建模过程中从机器人基坐标系 O_0 到坐标系 O_{hip} 之间只存在坐标系旋向的问题，即：

$$^{b}R_0 \ = \ Rotz(90^\circ) * Rotx(90^\circ)$$

对于后续mDH坐标系建立均给予坐标系 O_{hip} 建立，如上图所示的坐标系建立如下的mDH参数表：

	frame	q_i	关节限位	d_i	α_{i-1}	a_{i-1}	备注
left_leg	$^0T_1$	$q_{1L} \ = -\frac{\pi}{2}$	$(-120^\circ, 0^\circ)$	0	0	bodylink=94.5mm	
	$^1T_2$	$q_{2L} \ = 0$	$(-90^\circ, 90^\circ)$	adabLink = 122.8mm	-pi/2	0	
	$^2T_3$	$q_{3L} \ = -0.547$	$(-31.35^\circ, 145.86^\circ)$	0	0	hipLink=200mm	
	$^3T_4$	q_{4L}		d4 = 50.2mm	0	kneeLink=200mm	

right_leg	${}^{0}T_1$	$q1L = -\frac{\pi}{2}$	$(-120^{\circ}, 0^{\circ})$	0	0	bodylink=-94.5mm	
	${}^{1}T_2$	$q2L = 0$	$(-90^{\circ}, 90^{\circ})$	adabLink = -122.8mm	-pi/2	0	
	${}^{2}T_3$	$q3L = -0.547$	$(-31.35^{\circ}, 145.86^{\circ})$	0	0	hipLink=200mm	
	${}^{3}T_4$	$q4L$		d4 = -50.2mm	0	kneeLink=200mm	

💡 电机关节定义：abad-hip-knee-wheel

feat:展会样机结构有部分修改，修改后的DH参数如下：

	frame	qi	关节限位	di	$\alpha i-1$	$ai-1$	备注
left_leg	${}^{0}T_1$	$q1L = -\frac{\pi}{2}$	$(-120^{\circ}, 0^{\circ})$	0	0	bodylink=89.5mm	
	${}^{1}T_2$	$q2L = 0$	$(-90^{\circ}, 90^{\circ})$	adabLink = 126.3mm	-pi/2	0	
	${}^{2}T_3$	$q3L = -0.547$	$(-31.35^{\circ}, 145.86^{\circ})$	0	0	hipLink=200mm	
	${}^{3}T_4$	$q4L$		d4 = 57.95mm	0	kneeLink=200mm	
right_leg	${}^{0}T_1$	$q1L = -\frac{\pi}{2}$	$(-120^{\circ}, 0^{\circ})$	0	0	bodylink=-89.5mm	
	${}^{1}T_2$	$q2L = 0$	$(-90^{\circ}, 90^{\circ})$	adabLink = -126.3mm	-pi/2	0	
	${}^{2}T_3$	$q3L = -0.547$	$(-31.35^{\circ}, 145.86^{\circ})$	0	0	hipLink=200mm	
	${}^{3}T_4$	$q4L$		d4 = -57.95mm	0	kneeLink=200mm	

正运动学

以左腿为例，由DH表，可以得到各个坐标系之间的转换关系为：

$$
{}^{0}T_{1}=\begin{pmatrix}\cos\left(q_{1}\right) & -\sin\left(q_{1}\right) & 0 & a_{1}\\ \sin\left(q_{1}\right) & \cos\left(q_{1}\right) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}
$$

$$
{}^{1}T_{2}=\begin{pmatrix}\cos\left(q_{2}\right) & -\sin\left(q_{2}\right) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & d_{2}\\ -\sin\left(q_{2}\right) & -\cos\left(q_{2}\right) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}
$$

$$
{}^{2}T_{3}=\begin{pmatrix}\cos\left(q_{3}\right) & -\sin\left(q_{3}\right) & 0 & a_{3}\\ \sin\left(q_{3}\right) & \cos\left(q_{3}\right) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}
$$

$$
{}^{3}T_{4}=\begin{pmatrix}\cos\left(q_{4}\right) & -\sin\left(q_{4}\right) & 0 & a_{4}\\ \sin\left(q_{4}\right) & \cos\left(q_{4}\right) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & d_{4}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}
$$

有从基坐标系到轮子坐标系之间的坐标变换为：

$$
{}^{b}T_{4}={}^{b}T_{0}\ {}^{0}T_{1}\ {}^{1}T_{2}\ {}^{2}T_{3}\ {}^{3}T_{4}
$$

计算的齐次变换矩阵为：

$$
{}^{b}T_{4}=\begin{pmatrix}-s_{234} & -c_{234} & 0 & -a_{3}s_{2}-a_{4}s_{23}\\ c_{1}c_{234} & -c_{1}s_{234} & -s_{1} & a_{3}c_{1}c_{2}+a_{4}c_{1}c_{23}-(d_{2}+d_{4})s_{1}+a_{1}\\ s_{1}c_{234} & -s_{1}s_{234} & c_{1} & a_{3}s_{1}c_{2}+a_{4}s_{1}c_{23}+(d_{2}+d_{4})c_{1}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}
$$

此式子中：

$s_i=\sin(q_i),\ c_i=\cos(q_i),\ i=1,2,3,4,\quad s_{ij}=\sin(q_i+q_j),\ c_{ij}=\cos(q_i+q_j)$，依此类推。

其中旋转矩阵对应左上角3x3矩阵，平移变换对应右上角3x1向量，即：

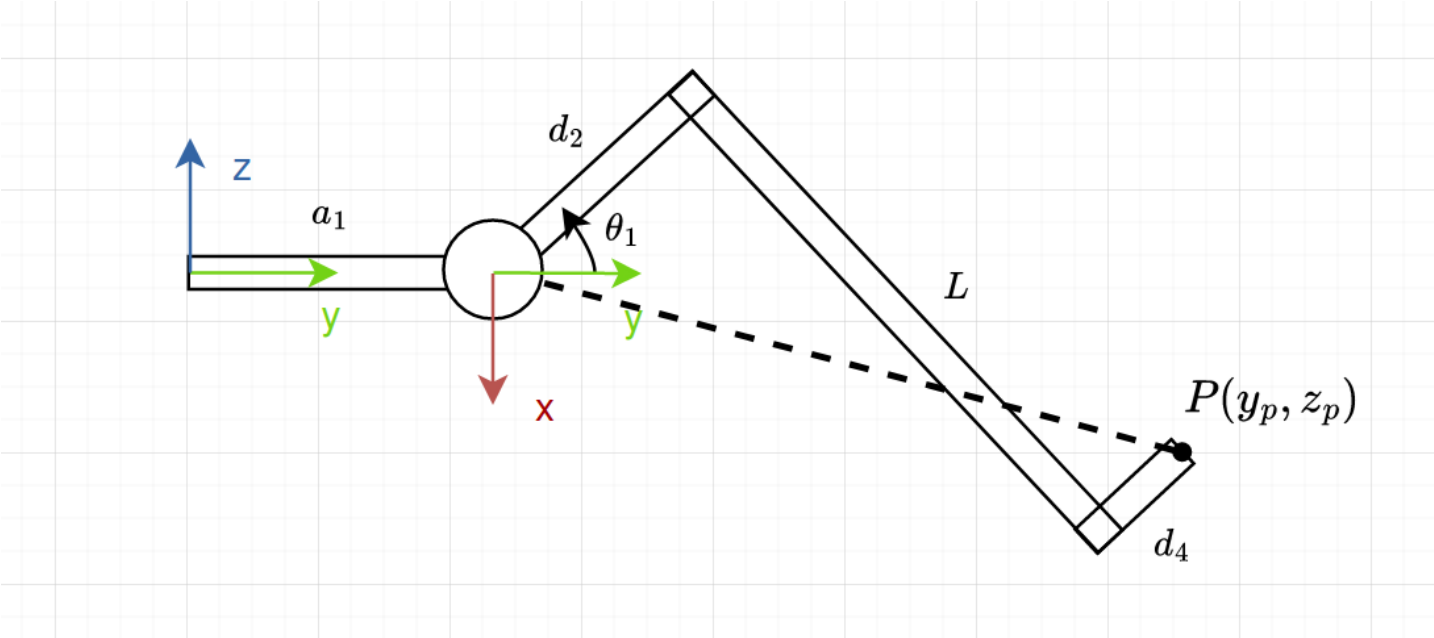
$$
{}^{b}T_{4}=\begin{pmatrix}R_{3\times3} & P_{3\times1}\\ 0_{1\times3} & 1\end{pmatrix}
$$

至此完成了单腿的正向运动学求解，也就是给定任意的关节角度后，可以得到机器人足端在机器人空间中的坐标。

逆运动学

下述为用几何法来计算逆运动学，参照：

1. 求解q1



当机身旋转角 θ_1 ，末端 P 在 yz 平面内投影为 (y_p, z_p) ，根据几何关系可以得到:

$y_p - a_1 = (d_2 + d_4)\cos(\theta_1) + L\sin(\theta_1)$

$z_p = (d_2 + d_4)\sin(\theta_1) - L\cos(\theta_1)$

式子中L表示机器人大腿小腿连杆在yz平面上的投影长度，根据勾股定理得:

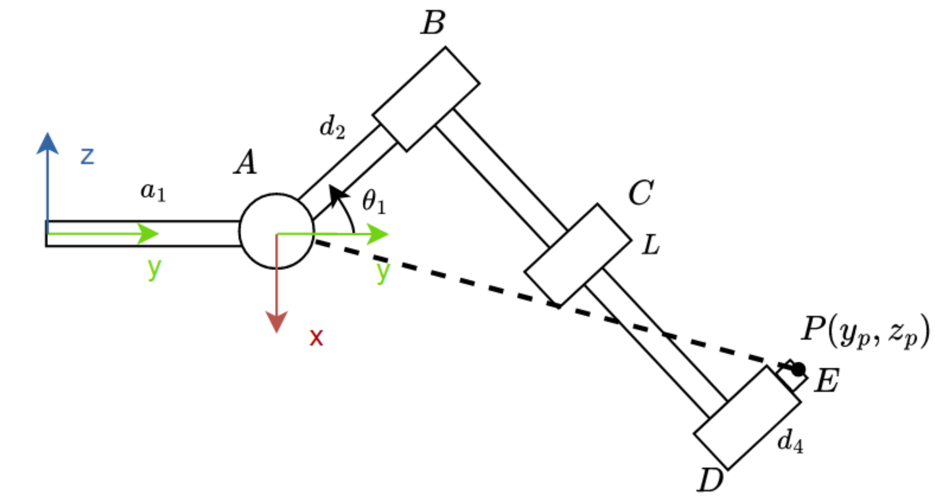
$$L = \sqrt{(y_p - a_1)^2 + z_p^2 - (d_2 + d_4)^2}$$

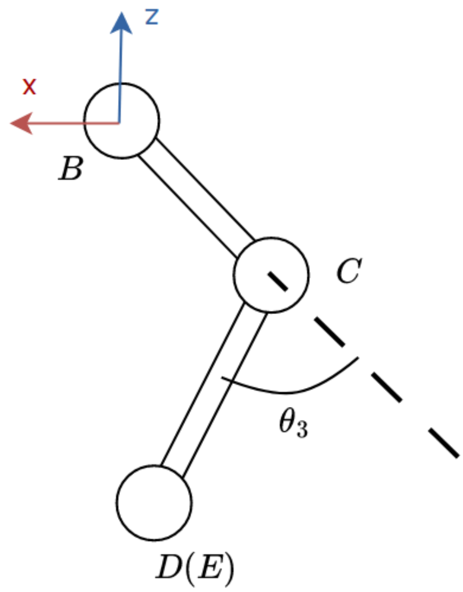
所以可以求得

$$\tan\theta_1 = \frac{z_p(d_2 + d_4) + (y_p - a_1)L}{(y_p - a_1)(d_2 + d_4) - z_p L}$$

使用C++中的反正切函数 atan2 来求解 θ_1 ，要注意，在坐标系定义图示中，初始状态下的关节角 $q_1 = -\frac{\pi}{2}$ ，因此关节角度 $q_1 = \theta_1 - \frac{\pi}{2}$

2. 求解q3





利用余弦定理，可以得到 $\angle BCD = cos^{-}1(\frac{BC^2+CD^2-BD^2}{2BC\cdot CD})$，其中 BC、CD 分别为大腿，小腿长度 a_3、a_4 。下面则是要计算 BD 。

由于 $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE}$，即 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DE}$

$\overrightarrow{OE} = (x_p, y_p, z_p)^T$ 、$\overrightarrow{OA} = (0, a_1, 0)^T$ 、$\overrightarrow{AB} = (0，d_2 \sin\theta_1, d_2\cos\theta_1)^T$ 、
$\overrightarrow{DE} = (0，d_4 \sin\theta_1, d_4\cos\theta_1)^T$ ；

几何关系得到 $BD = \sqrt{AE^2 - (AB+DE)^2}$ ，即:
$BD = \sqrt{x_p^2 + (y_p - a_1)^2 + z_p^2 - (d_2+d_4)^2}$

因此可以得到 $\angle BCD$ ，而关节角度 $q_3 = -\pi + \angle BCD$.

3. 求解q2

q2的求解相对复杂，由正向运动学可以得到末端关节位置：

$$x_p = -a_3 s_2 - a_4 s_{23}$$

$$y_p = a_3 c_1 c_2 + a_4 c_1 c_{23} - (d_2+d_4)s_1 + a_1$$

$$x_p = a_3 s_1 c_2 + a_4 s_1 c_{23} + (d_2+d_4)c_1$$

可以得到

$$y_p c_1 + z_p s_1 - a_1 c_1 = a_4 c_{23} + a_3 c_2 \qquad (1)$$

我们由于已经求得 q_1, q_3 ，因此令

$$-x_p = A$$

$$y_p c_1 + z_p s_1 - a_1 c_1 = B$$

可有：

$$A = a_3 s_2 + a_4 s_{23}$$

$B=a_3c_2+a_4c_{23}$

于是：

$s_2A+c_2B=a_3+\ a_4c_3\ =C$

$-c_2A+s_2B=-\ a_4s_3=D$

所以可以得到：$q_2\ =atan2\dfrac{AC+BD}{BC-AD}$

雅克比矩阵

由于 $\dot{x}\ =\ J\dot{q}$，x 为末端位置在基坐标系下的表达，J 为雅克比矩阵，q 为各关节角度。根据上述正向运动学中已知末端位置在基坐标系下的表达，因此，直接对 x 求导后，分离系数 q 即可得到雅克比矩阵：

$$J=\begin{pmatrix} 0 & -a_3c_2-a_4c_{23} & -a_4c_{23} \\ -a_4s_1c_{23}-a_3s_1c_2-(d_2+d_4)c_1 & -c_1(a_3s_2+a_4s_{23}) & -a_4c_1s_{23} \\ a_4c_1c_{23}+a_3c_1c_2-(d_2+d_4)s_1 & -s_1(a_3s_2+a_4s_{23}) & -a_4s_1s_{23} \end{pmatrix}$$

微分逆运动学

直接由 $\dot{x}\ =\ J\dot{q}$，可以得到 $\dot{q}\ =\ J^{-1}\dot{x}$

交叉杆和平行杆结构分析

交叉杆和平行杆差异性分析

动力学模型建立

浮动基座分析

浮动基座的动力学是建立在将机器人基座上叠加6-DOF关节来进行处理的，在固定基座的机器人动力学分析中，设置基座为0号，根据连杆顺序依次为1号，2号...。而至于浮动基座建模，是在固定基座的基础上增加6-DOF关节后来进行迭代牛顿-欧拉法计算，并且这6个关节应设置为无质量属性来进行迭代计算；此时设置地面为0号基座，新增的6-DOF是在0号基座上进行坐标转换，按照：x，y，z，yaw，pitch，roll的顺序来进行坐标转换，到roll后转化到了机器人的基座上，接着依次是机器人1号连杆，2号连杆... 接下来直接套用迭代牛顿-欧拉法或拉格朗日法来进行计算动力学即可。

因此，定义运动学状态量：

$$\boldsymbol{q}:=[q_x,q_y,q_z,q_{yaw},q_{pitch},q_{roll},q_{1L},q_{2L},q_{3L},q_{4L},q_{1R},q_{2R},q_{3R},q_{4R}]^T$$

其中：

$$\boldsymbol{q}_f:=[q_x,q_y,q_z,q_{yaw},q_{pitch},q_{roll}]^\top$$

$$\boldsymbol{q}_b := [q_{1L}, \dots, q_{4L}, q_{1R}, \dots, q_{4R}]^\top$$

有动力学方程为

$$\boldsymbol{M}\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_f \\ \boldsymbol{q}_b\end{bmatrix} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_6 \\ \boldsymbol{\tau}\end{bmatrix} + \boldsymbol{J}_c^\top \boldsymbol{f}_{ext}$$

其中 $\boldsymbol{J}_c$ 为接触雅克比矩阵，根据不同的运动状态来决定，大小为14*6，

迭代牛顿-欧拉法计算动力学

基于递推牛顿欧拉法来计算浮动基座的动力学方程，参考文章如下：

https://blog.csdn.net/rouyu308/article/details/125205057

(8.1)基于牛顿-欧拉公式的动力学方程_欧拉动力学方程_公子文刀的博客-CSDN博客

目录1、坐标系的建立:2、为什么要递推:3、前向递推与反向递推:1、速度和加速度的前向递推:1.1、旋转关节的速度传递: 1.2、平移关节的速度传递: 1.3、速度变换到质心:1.4、加速度传递: 1.5、转化为递归形式: 2、力与力矩的方向递推:4、总结:连杆坐标系…

核心算法如下：

Outward iterations: $i : 0 \to 5$

$$^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\, {}^{i}\omega_i + \dot{\theta}_{i+1}\, {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}, \tag{6.45}$$

$$^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\, {}^{i}\dot{\omega}_i + {}^{i+1}_{i}R\, {}^{i}\omega_i \times \dot{\theta}_{i+1}\, {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1}\, {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}, \tag{6.46}$$

$$^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R({}^{i}\dot{\omega}_i \times {}^{i}P_{i+1} + {}^{i}\omega_i \times ({}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{i+1}) + {}^{i}\dot{v}_i), \tag{6.47}$$

$$\begin{aligned} ^{i+1}\dot{v}_{C_{i+1}} = {} & {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} \times {}^{i+1}P_{C_{i+1}} \\ & + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times ({}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{i+1}P_{C_{i+1}}) + {}^{i+1}\dot{v}_{i+1}, \end{aligned} \tag{6.48}$$

$$^{i+1}F_{i+1} = m_{i+1}\, {}^{i+1}\dot{v}_{C_{i+1}}, \tag{6.49}$$

$$^{i+1}N_{i+1} = {}^{C_{i+1}}I_{i+1}\, {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{C_{i+1}}I_{i+1}\, {}^{i+1}\omega_{i+1}. \tag{6.50}$$

Inward iterations: $i : 6 \to 1$

$$^{i}f_i = {}^{i}_{i+1}R\, {}^{i+1}f_{i+1} + {}^{i}F_i, \tag{6.51}$$

$$\begin{aligned} ^{i}n_i = {} & {}^{i}N_i + {}^{i}_{i+1}R\, {}^{i+1}n_{i+1} + {}^{i}P_{C_i} \times {}^{i}F_i \\ & + {}^{i}P_{i+1} \times {}^{i}_{i+1}R\, {}^{i+1}f_{i+1}, \end{aligned} \tag{6.52}$$

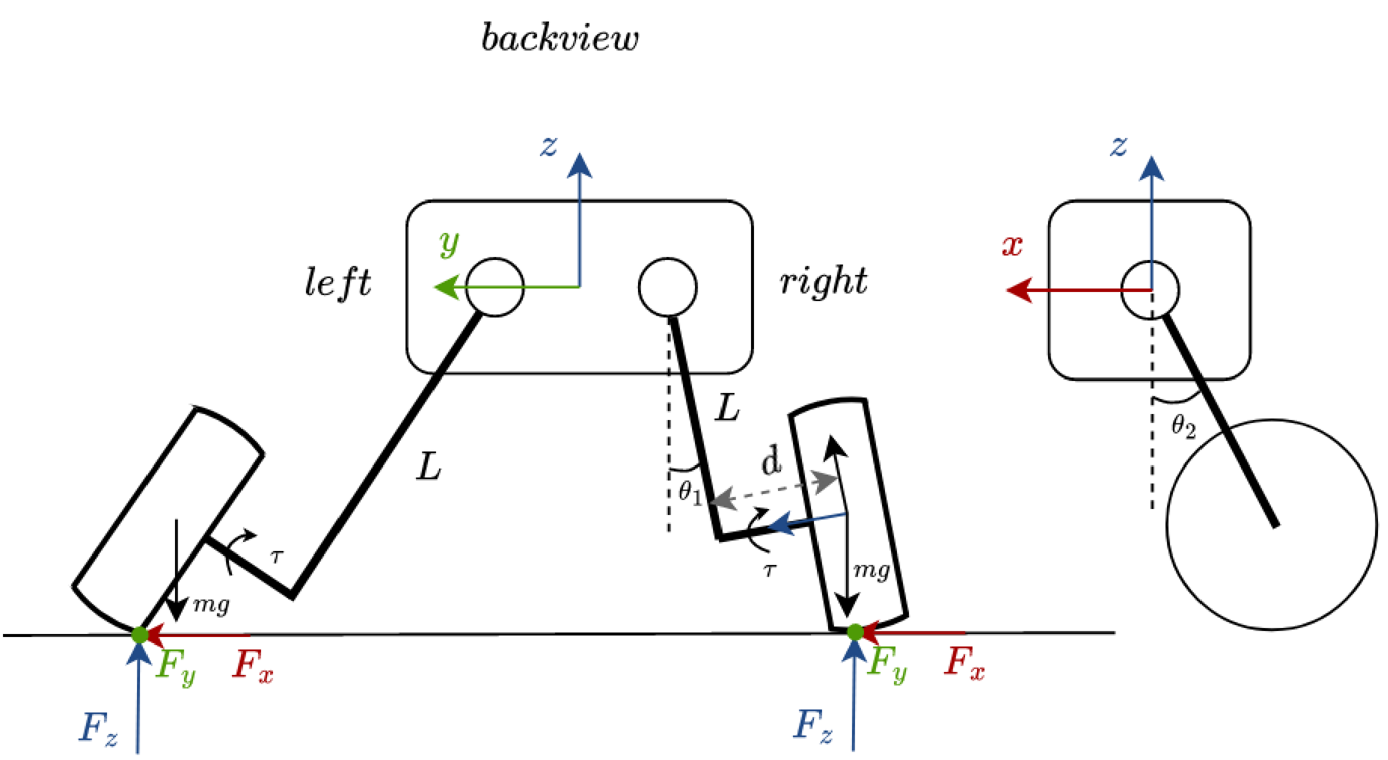
$$\tau_i = {}^{i}n_i^T\, {}^{i}\hat{Z}_i. \tag{6.53}$$

经典迭代的牛顿欧拉是在一条链式连接关节的基础上进行分析的，也就是说，一个连杆只有一个子连杆和一个父连杆。而对于双足机器人而言，他是一种非一条链式的连接，所以在共同连接的地方需要特殊处理（目前代码具有此类特殊性、后续看是否能优化）。

根据迭代牛顿-欧拉计算在6-DOF关节处也有力产生。可以认为这些力是为了维持机器人在这个方向（坐标）下所需要的外力。这个得到的外力可以均分给两个轮子（End of Effector）作为外力输入。

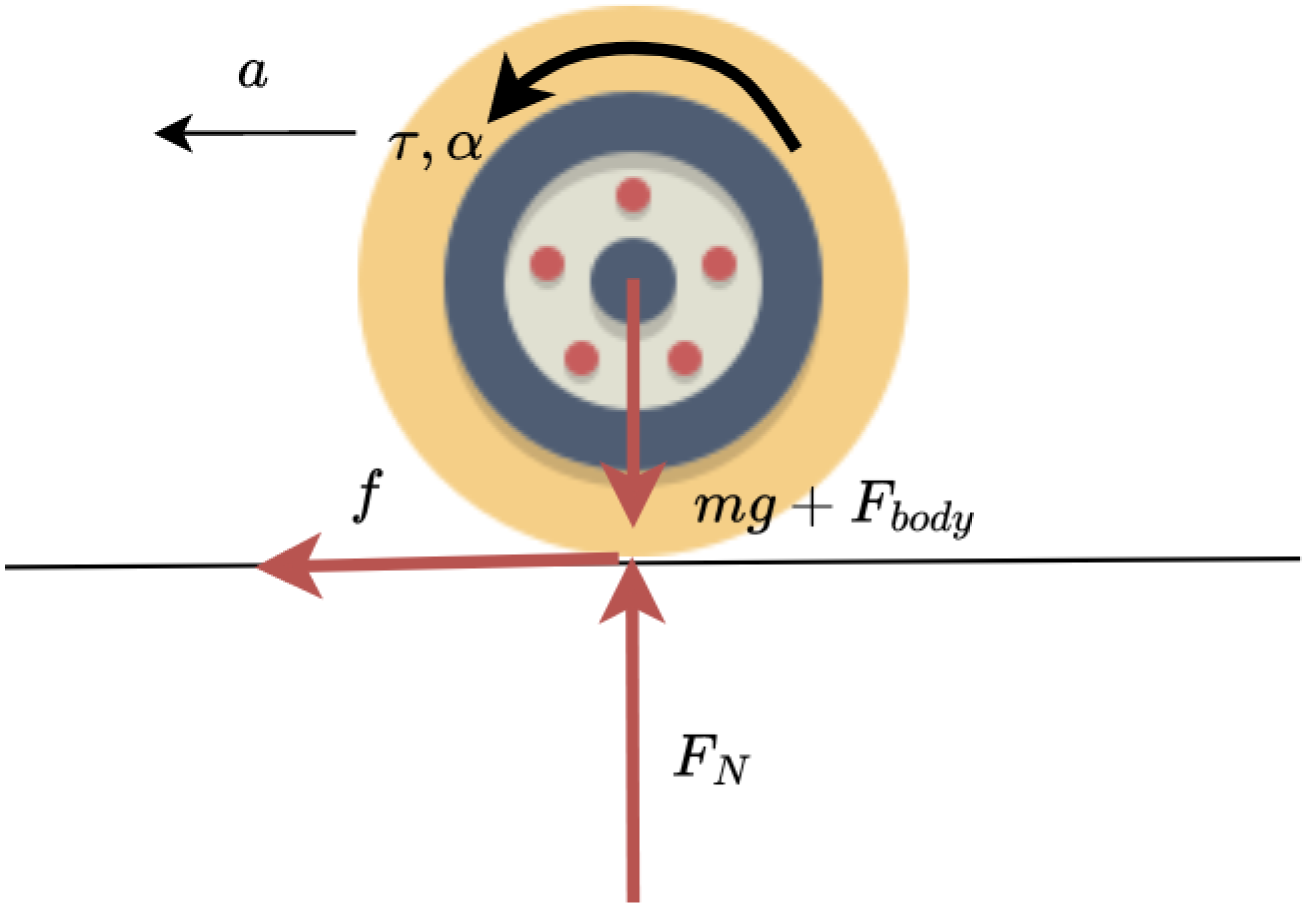
外力分析

主要对轮子进行受力分析，在考虑侧摆电机的基础上，有：



分析，有机器人body通过腿部连杆给轮子的力： F_{body} ，可以沿着腿有：

对于轮子的受力如下

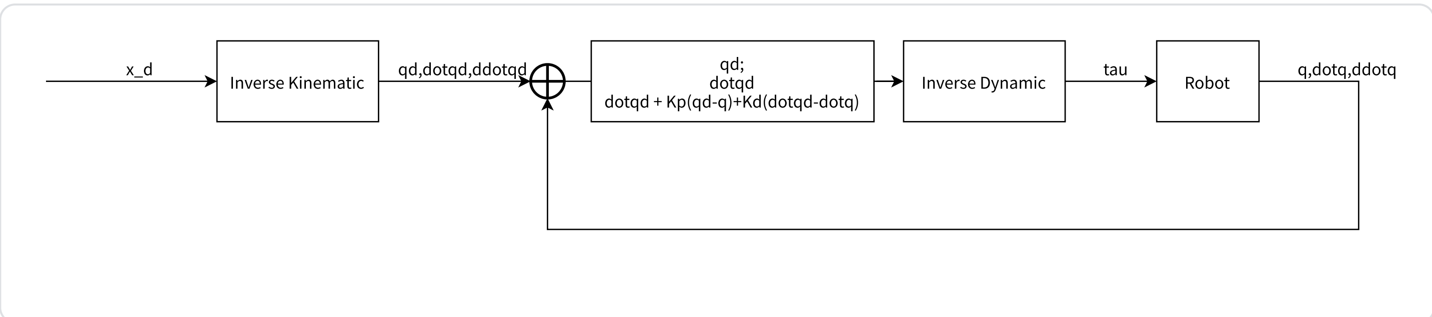


有：

$$\begin{cases} F_N = mg + F_{body} \\ f = ma \\ f < \mu F_N \qquad\qquad \text{滚动摩擦} \\ \tau - fr = I\alpha \end{cases}$$

控制系统

系统框图



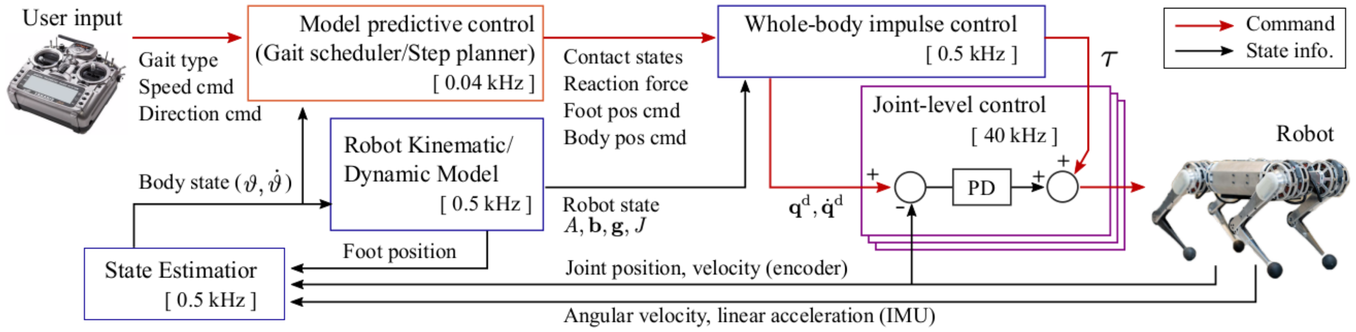
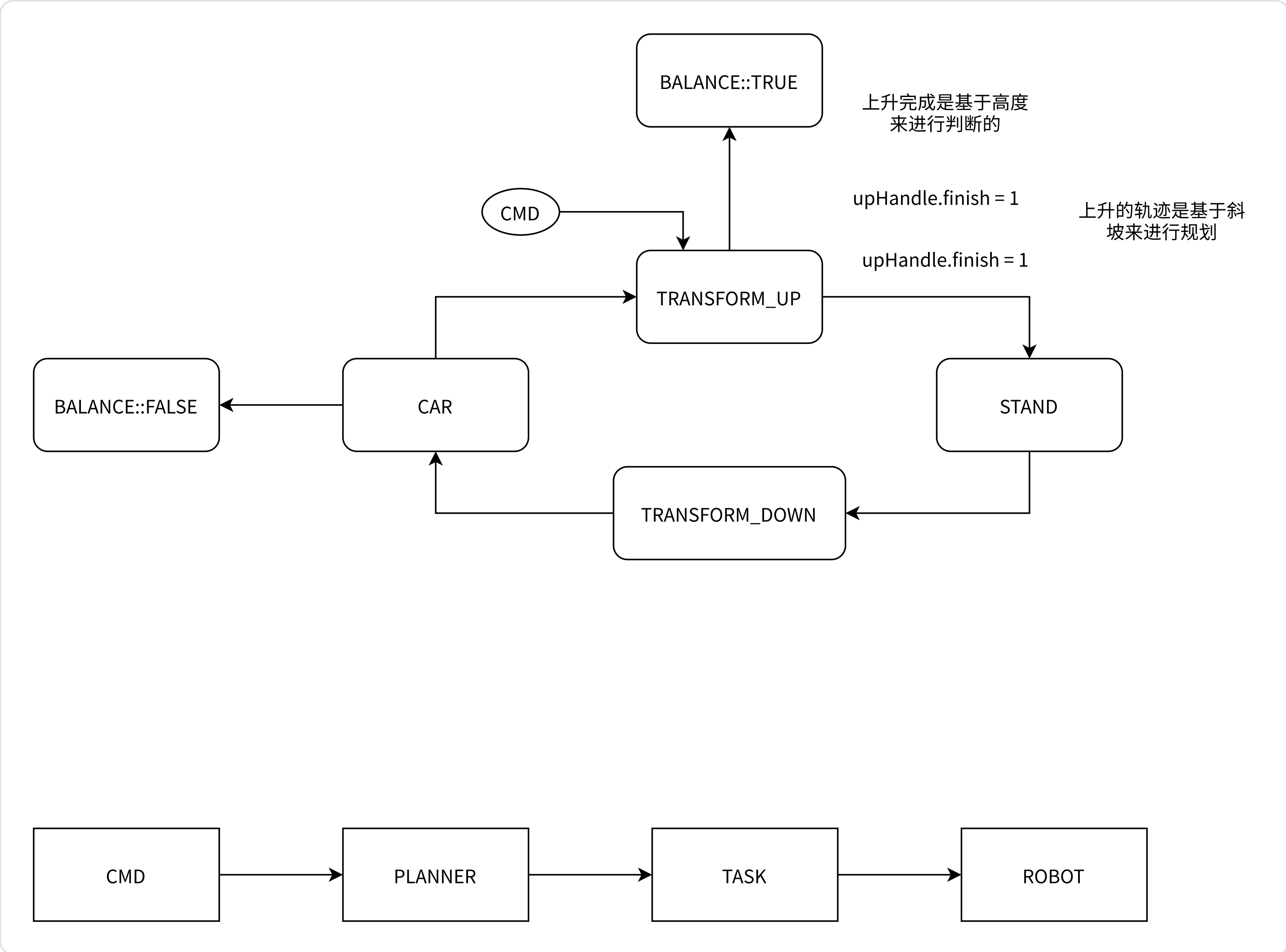


Fig. 2. **Overall Control Framework.** Using the user commanded gait type, speed, and direction from the RC-controller, the MPC computes desired reaction forces and foot/body position commands. From these, WBC computes joint torque, position, and velocity commands that are delivered to the each joint-level controller. Each component's update frequency is represented by the color of its box.

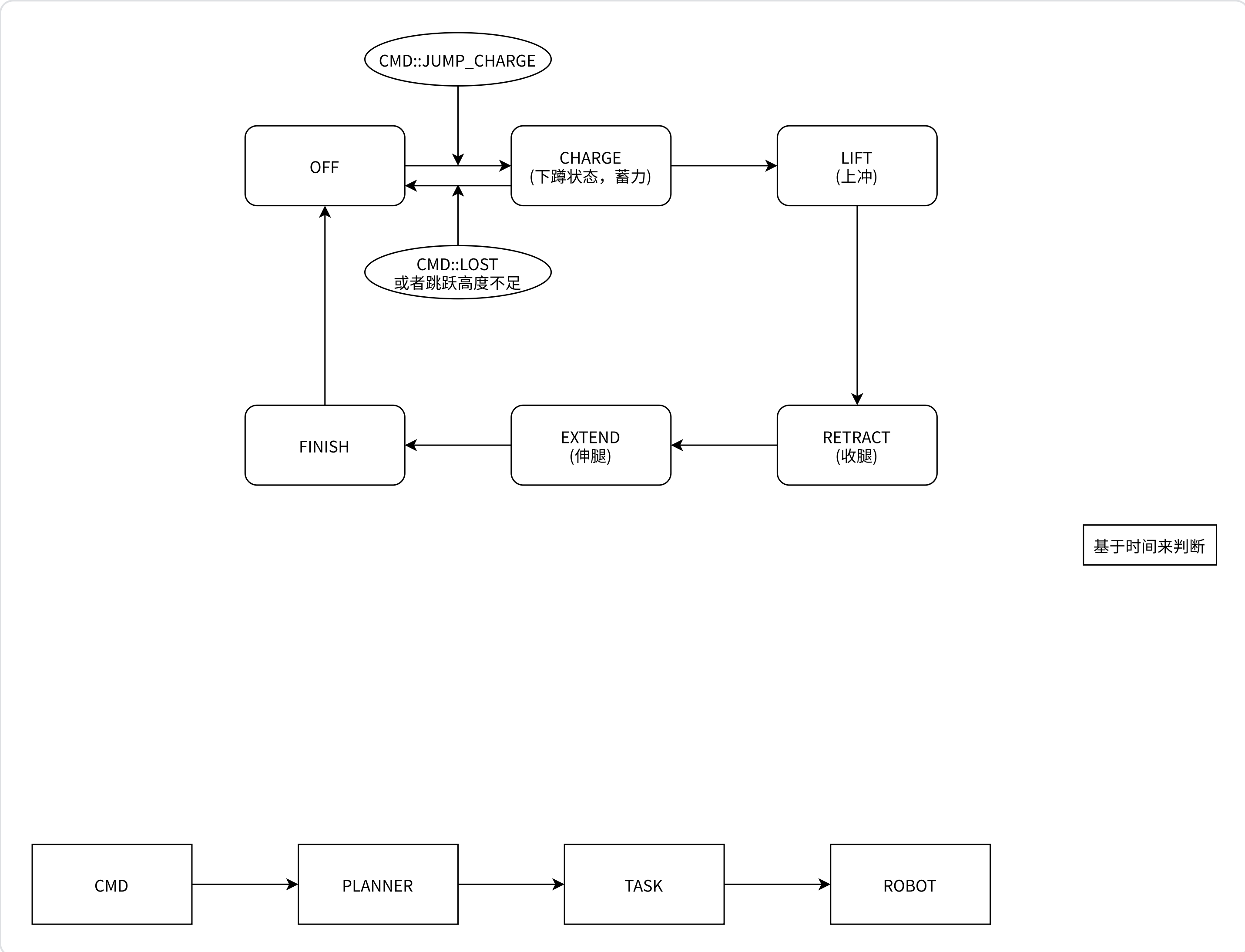
跳跃分析

状态机

ROBOT


BALANCE::TRUE
上升完成是基于高度
来进行判断的
CMD
upHandle.finish = 1
上升的轨迹是基于斜
坡来进行规划
upHandle.finish = 1
TRANSFORM_UP
BALANCE::FALSE
CAR
STAND
TRANSFORM_DOWN
CMD
PLANNER
TASK
ROBOT

JUMP



分析：由于现有结构上，存在四连杆结构，而一般导出urdf文件时要求连杆为串联形式，因此建立坐标系

（1）运动学状态量：

$$q := [q_x, q_y, q_z, q_{yaw}, q_{pitch}, q_{roll}, q_{1L}, q_{2L}, q_{3L}, q_{4L}, q_{1R}, q_{2R}, q_{3R}, q_{4R}]^T$$

其中body的状态量为：

$$q_{\text{body}} := \left[q_{1L}, \ldots, q_{4L}, q_{1R}, \ldots, q_{4R}\right]^{\top}$$

关节电机名称定义：

（2）关节电机状态量为：

$$q_{\text{motor}} := \left[q_{hipAbductionL}, q_{hipL}, q_{kneeL}, q_{wheelL}, q_{hipAbductionR}, q_{hipR}, q_{kneeR}, q_{wheelR}\right]^{\top}$$

电机初始化位置为：

$$q_{\text{motorInit}} := \left[q_{hipL0}, q_{kneeL0}, q_{wheelL0}, q_{hipR0}, q_{kneeR0}, q_{wheelR0}\right]^{\top}$$

转换关系：

$$q_{hip} - q_{hip0} = \frac{\pi}{2} - q_2$$

$$q_{knee} - q_{knee0} = 2\pi - q_3$$

$$q_{wheel} - q_{wheel0} = q_4$$

（3）IMU、ACCL、GYRO计算状态量为：

1）IMU：

获得四元数来求解pitch、roll、yaw

2）ACCL

加速度计 获得xyz轴方向加速度

3）GYRO

陀螺仪，获得绕轴角速度

（4）控制状态变量为：（基于现有A1代码）

$$h_0(q) = \left[q_{alpha}, q_{beta}, q_{kneeAngle}, q_{len}, q_{angle}\right]^{\top}$$

其中：

q_{alpha} 表示为 l_1 与地面的夹角，q_{beta} 为杆 $l_2^{'}$ 与地面法线的夹角，$q_{kneeAngle}$ 为 l_1 和 $l_2^{'}$ 之间的夹角。q_{len} 为虚拟腿长，q_{angle} 为虚拟腿与地面法线角度。

与运动学状态量之间的转换关系为：

$$q_{alpha} = q_1 + q_{pitch} - \frac{\pi}{2}$$

$$q_{beta} = 2\pi - q_2 - q_{alpha}$$

$$q_{kneeAngle} = (2\pi - q_2)/2$$

$$q_{len} = 0.28 * \cos(q_{kneeAngle})$$

$$q_{angle} = q_{alpha} - q_{kneeAngle} - q_{pitch}$$

IMU坐标转换以及四元数相关计算

https://blog.csdn.net/Sandy_WYM_/article/details/84328395

动力学模型基于牛顿-欧拉方程推导，但现在不太对，

也用了frost来进行计算。