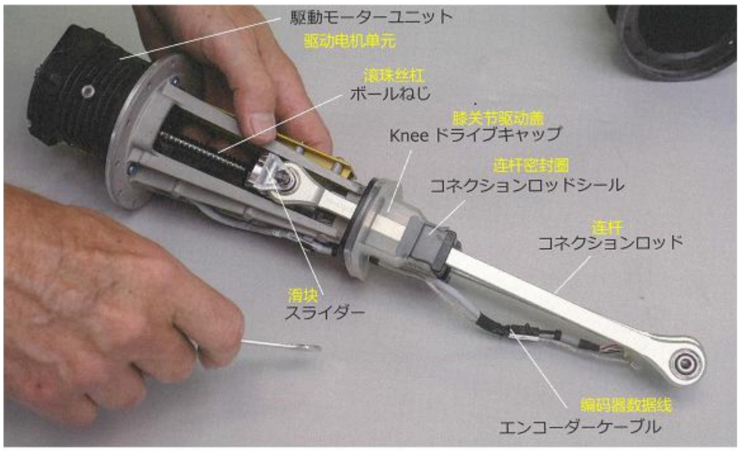
常规二连杆方案与丝杠二连杆方案对比

https://git.ddt.dev:9281/rbt/alg/MATLAB_Small_Script/-/blob/dev/link_design/BD_leg.m

https://git.ddt.dev:9281/rbt/alg/MATLAB_Small_Script/-/blob/dev/geo_movement/BD_leg.ggb

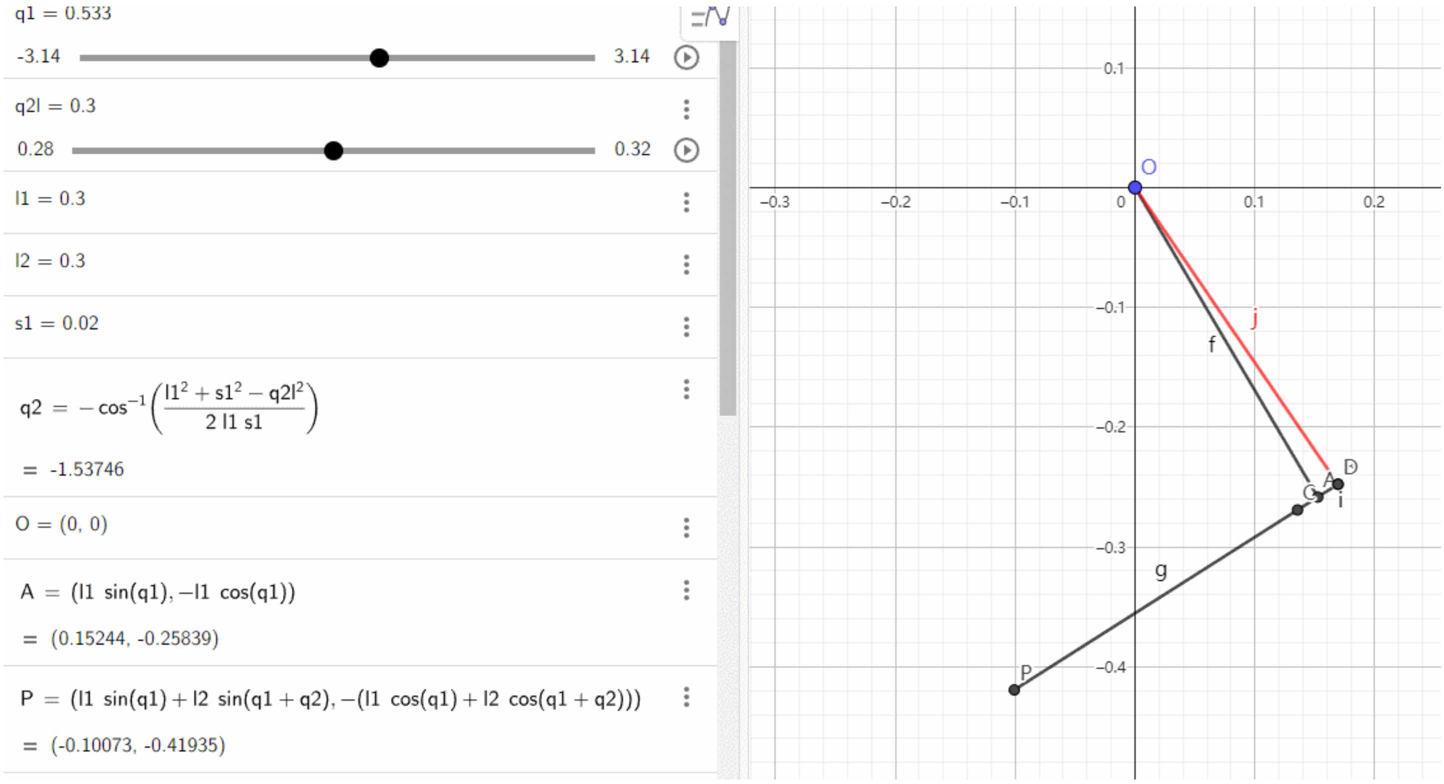
背景

阅读Spot mini拆解报告的时候，注意到SPot mini的腿部结构：abad电机和hip电机用的是谐波减速电机（50:1），knee关节电机用的是集中式绕组电机+滚珠丝杠的方案。这里存在着一个问题：使用丝杠方案，和直接使用谐波电机/行星电机，到底有多大的差异?



膝关节丝杠电机下的运动学推导

考虑以下关节构型：OD为导程为5mm丝杠，OA，AD为实际作用连杆。DA设置长度为0.02m。



正运动学思路是将推杆长度转换为关节q2的角度。设推杆行程是q2l，则根据余弦定理

$$q_2 = -acos(\frac{l1^2 + s_1^2 - q_{2l}^2}{2l_1 s_1})$$

其中l1是上连杆的长度，s1是杆DA的长度。获得q2后，可以按串联二连机械臂的正运动学计算，得

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 * sin(q_1) + l_2 * sin(q_1 + q_2) \\ -(l_1 * cos(q_1) + l_2 * cos(q_1 + q_2)) \end{bmatrix}$$

对运动学方程两端求偏导，得

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} =$$

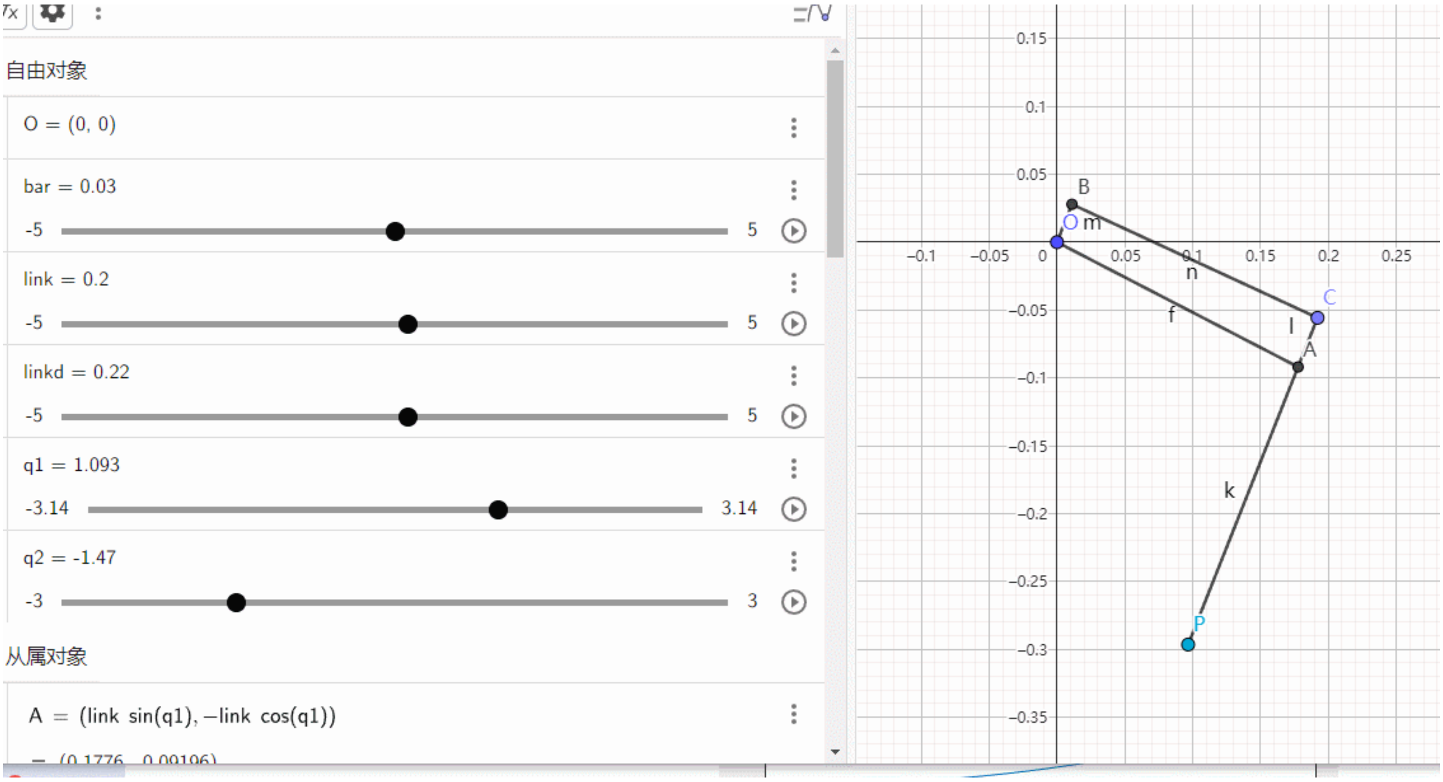
$$\begin{bmatrix} (l_1 * cos(q_1) + l_2 * cos(q_1 - acos(\frac{(l_1^2 - q_{2l}^2 + s1^2)}{(2*l_1*s_1)}))) & \frac{-(l_2*q_2 s*cos(q_1 - acos(\frac{l_1^2-q_{2l}^2+s1^2}{2*l_1*s_1})))}{(l_1*s_1*(1-(l_1^2-q_{2l}^2+s1^2)^2/(4*l_1^2*s1^2))^{\frac{1}{2}}))} \\ l_1 * sin(q_1) + l_2 * sin(q_1 - acos(\frac{(l_1^2 - q_2 s^2 + s1^2)}{(2*l_1*s1)}))) & \frac{(-(l_2*q_{2s}*sin(q_1 - acos(\frac{(l_1^2-q_{2s}^2+s_1^2)}{(2*l_1*s_1)}))))}{(l_1*s_1*(1-(l_1^2-q_{2s}^2+s_1^2)^2/(4*l_1^2*s_1^2))^{(}1/2)))} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q_1} \\ \dot{q_2} \end{bmatrix}$$

雅各比矩阵看起来比较阴间,但注意到雅各比矩阵中包含的 $q_2 = -acos(\frac{l1^2 + s1^2 - q_{2l}^2}{2l_1 s_1})$，是可以通过膝关节连接处的编码器直接测得得，可以一定程度上减缓实际运算时候得压力。

由此我们可以推出丝杆推力和末端受力之间的关系。

性能对比

先回忆下，常规二连杆方案如下图所示：



雅各比矩阵为：

$$J_s = \begin{bmatrix} l_1 * c(q_1) + l_2 * c(q_1 + q_2) & l_2 * c(q_1 + q_2) \\ l_1 * s(q_1) + l_2 * s(q_1 + q_2) & l_1 * s(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

下面开始做对比。

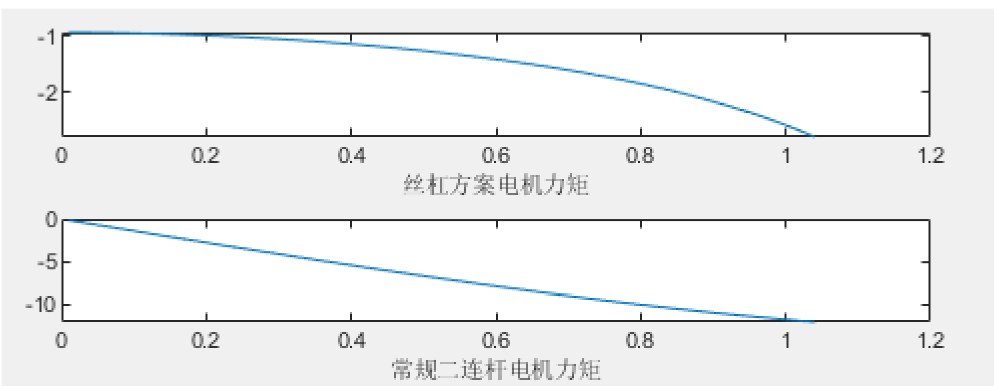
设腿部末端作用力为：

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 700 \end{bmatrix}$$

即假定单腿上加70kg负载，设连杆长度0.2m，在腿竖直起降的情况下(常规二连杆下 $q_2 = -2q_1$,q1越大，腿长越短)。

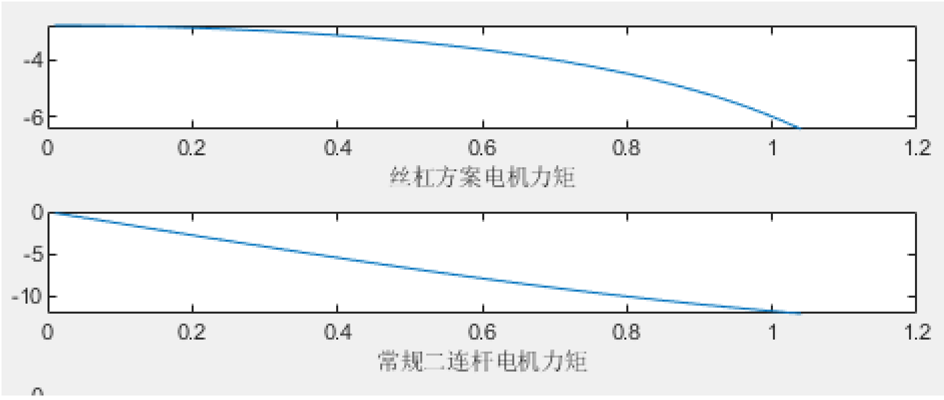
对滚珠丝杆方案，丝杆导程为5mm，丝杆与膝关节连杆的突出长度DA（s1）设置为0.05m，传动效率为90%，属于比较常规的丝杠方案。

对常规二连杆方案，电机减速比为10（类似P10，10:1基本到一级行星减速比的极限了）,传动效率假定为100%。此时，两种方案的电机输出力矩和q1之间的关系为：

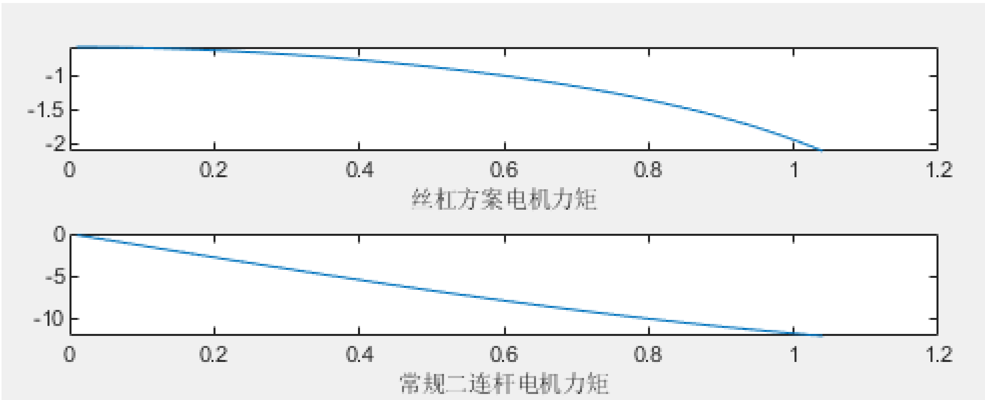


可以看到，在同样的外部负载下，丝杠方案的电机所用力矩更小，相当于有了减速比更大比。

同时，如果我们减少突出杆长s1的长度至0.02m，则两电机力矩如下，丝杠电机力矩变大，相当于减速比变小了。

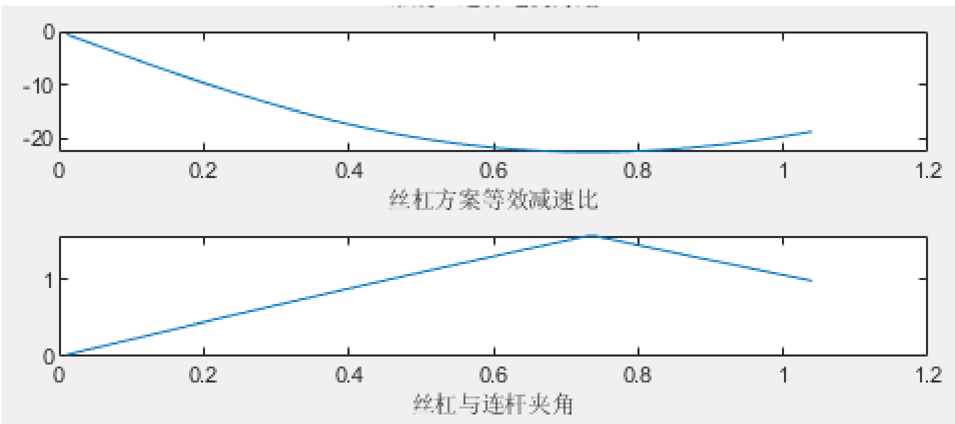


当然，s1并不是越大减速效果越明显，如果s1长度增加至0.07m，则两电机力矩如下，丝杠电机力矩也变大了一点，相当于减速比也减小了一点。



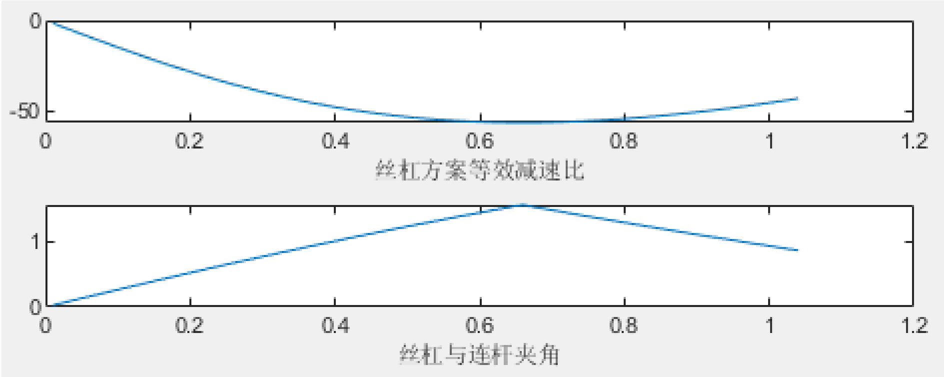
那么丝杠方案对力矩的放大作用，其减速比是不是恒定的?

我们通过把同样q1下，减速关节电机输出的力矩，比上丝杠方案下电机本体的力矩，就能得到丝杠方案的等效减速比。以突出长度0.02m为例：



可以看到，随着q1的增加（即腿长的减小），丝杠方案的减速比会越来越大，在角度ODP = 90度的时候达到峰值，之后减速比逐步减小。在突出长度为0.02m的情况下，最大减速比可达20:1，最小减速比为1：1。

在突出长度为0.05m时，等效减速比如下图所示，最大减速比可达56:1，已经达到谐波减速器和两级行星减速器的减速性能了。



丝杠方案特性分析

1. 减速比容易做大。 对一级行星减速电机而言，10:1的减速比已经快做到头了，需要用两级减速电机或谐波减速器来实现减速比的放大，这样造价变高，可靠性上也会打折扣。而丝杠方案则给我们设计大减速比提供了新的思路。
2. 非线性更强。 如上述推导，丝杠方案的电机等效减速比是变化的，这意味着更强的力矩输出非线性。这种非线性的**坏处是**会使我们通过电机电流测算力矩的精度下降、同时增加系统运算量。**好处则是**，合理的利用变减速比特性，可以增加机器人的跳跃能力：比如，合理配置减速比变化曲线，可以在机器人蹲低时提供较大末端力输出，又在机器人离地前提供较大上升速度，进而提高机器人跳跃能力。
3. 行程有限，丝杠方案下的，受机械结构限制，膝关节摆角会更小一些。