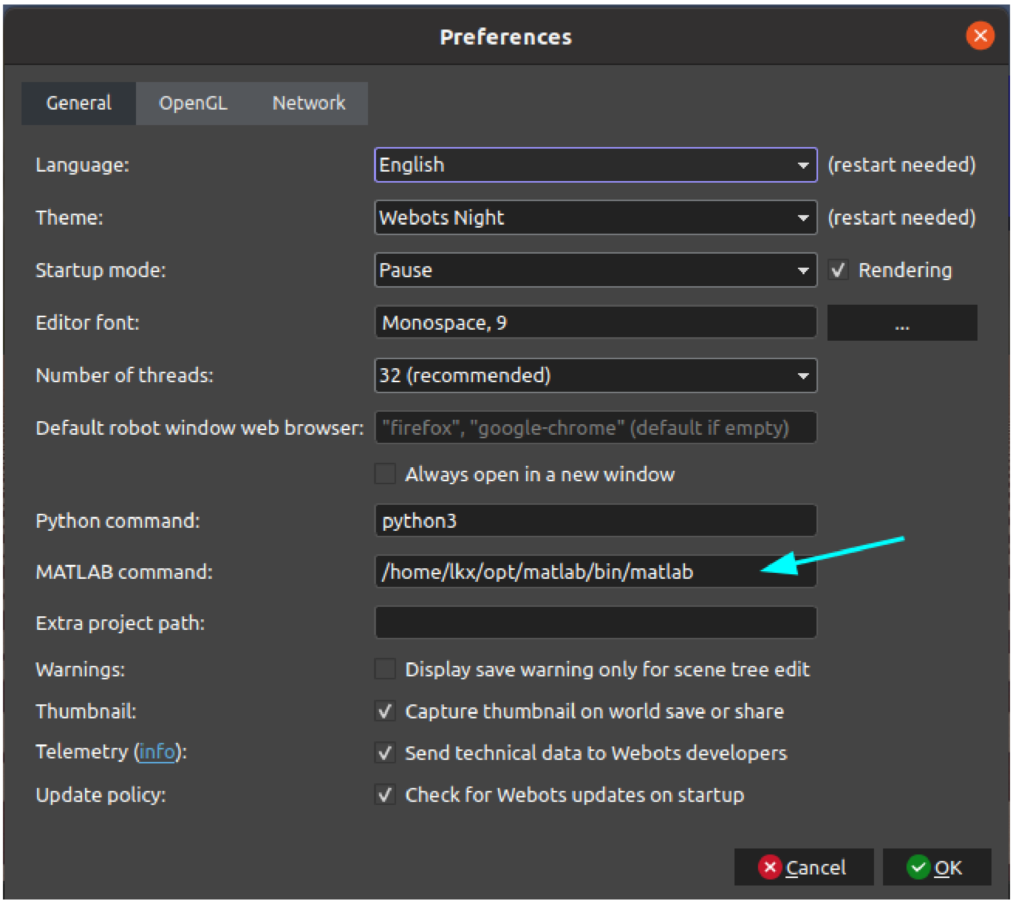
倒立摆及lqr控制

环境：webots:R2023a matlab:R2022b

配置联合仿真方法：https://cyberbotics.com/doc/guide/using-matlab?version=R2023a，像下面所示

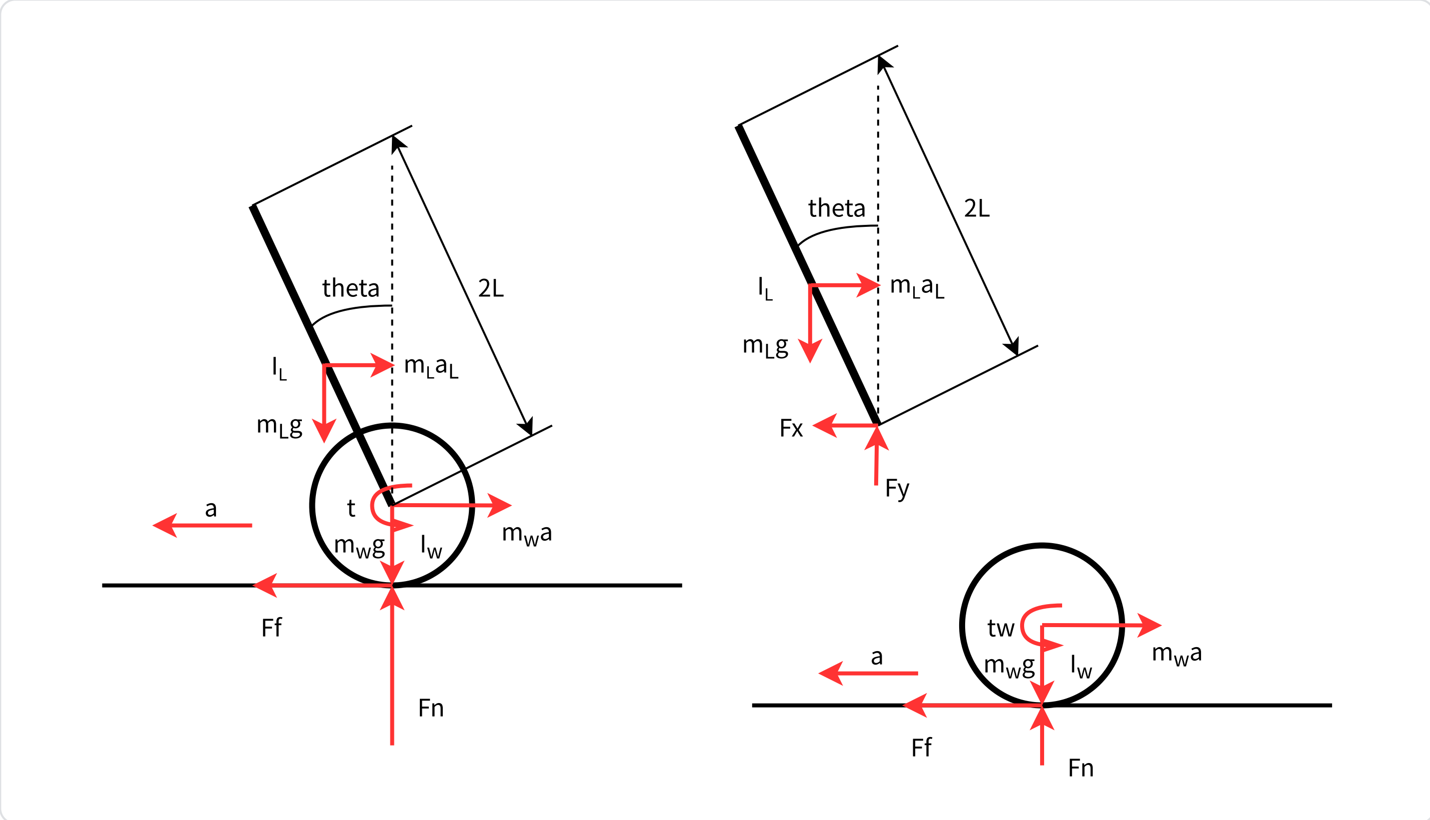
下文中代码托管在：https://git.ddt.dev:9281/lkx8421/lqr_webots



- 注：严格意义上来说，如下所述的模型并不是二阶倒立摆，为了方便起名如下

一阶倒立摆

以轮为例，输入为轮子的力矩 τ ，



受力分析

> 上述力矩：τ_w 为施加在轮子上的力矩

连杆质心位置 $x_L = p + L\sin\theta$，$y_L = L\cos\theta$

1. 轮子受力分析

$$F_f = m_w a + F_x'$$

$$F_N - F_y' = m_w g$$

$$\tau_w - F_f r = I_w \alpha$$

有速度约束：$a = \alpha r$

2. 连杆受力分析

$$F_x = m_L \ddot{x}_L = m_L(a + \frac{d^2}{dt^2}(L\sin\theta))$$

$$F_y - m_L g = m_L \ddot{y}_L = m_L \frac{d^2}{dt^2}(L\cos\theta)$$

$$-\tau + F_y L\sin\theta - \ F_x L\cos\theta \ = I_L\ddot{\theta}$$

线性化，即 $\sin\theta = \theta$， $\cos\theta = 1$，舍去高阶项有

$$F_x = m_L(a + L\ddot{\theta})$$

$$F_y = m_L g$$

$$\tau_w - m_L L g\theta + \ m_L L(a + L\ddot{\theta}) \ = -I_L\ddot{\theta}$$

3. 消除内力，地面摩擦力，有

- 由轮子受力： $(m_L+m_w+\frac{I_w}{r^2})a+m_L L\ddot{\theta}=\frac{\tau_w}{r}$
- 由连杆受力： $m_L La+(m_L L^2+I_L)\ddot{\theta}=m_L gL\theta-\tau_w$

选取状态变量

状态变量为 $X=\begin{bmatrix}\theta & \dot{\theta} & p & v\end{bmatrix}^T$ ，设参数如下：

m_w/kg	1
m_L/kg	0.5
$I_w/kg.m^2$	0.00125
$I_L/kg.m^2$	0.00177083
r/m	0.05
L/m	0.1
g	9.81

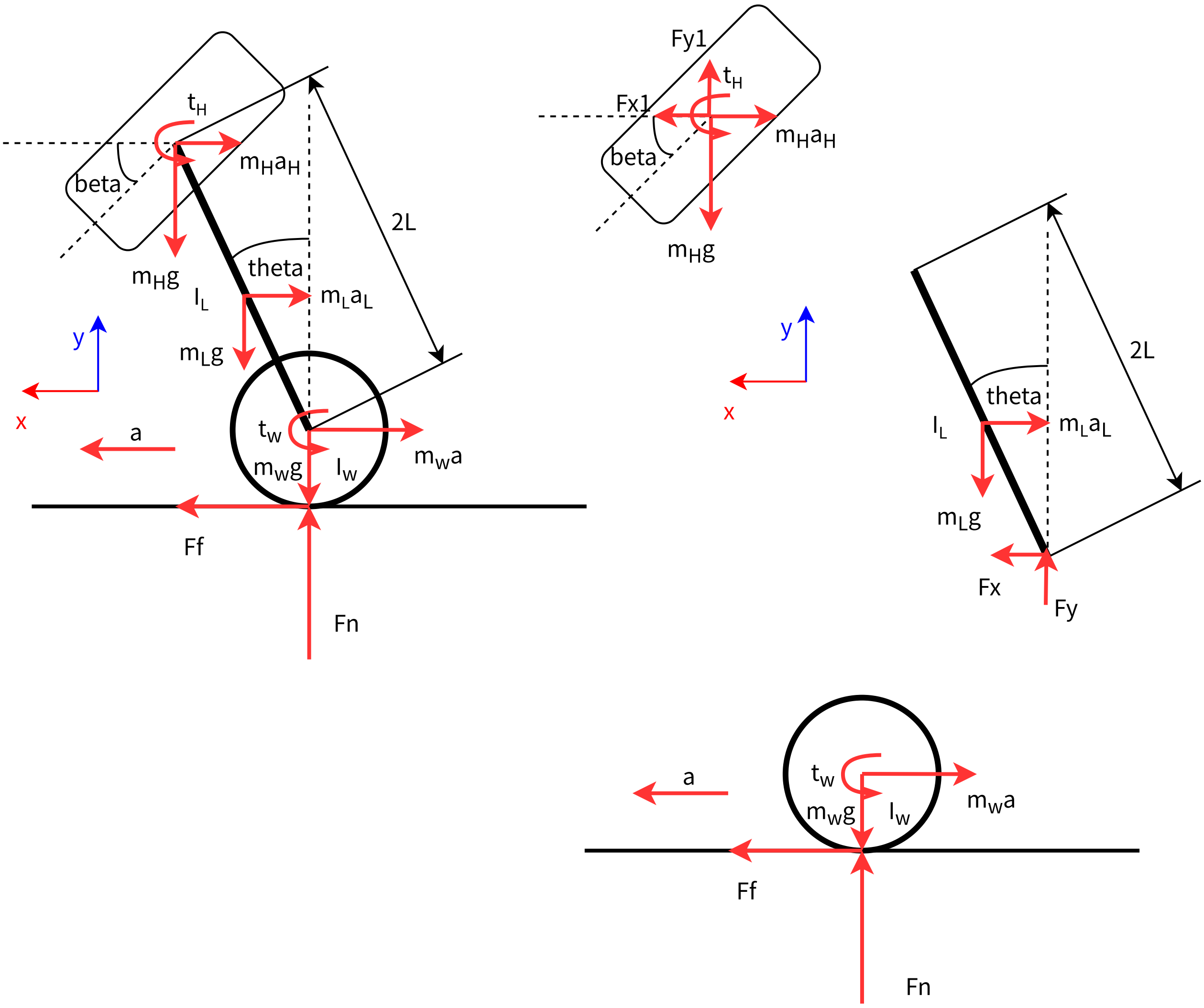
lqr控制

取Q = diag([100 1 1 1])，R = 1，用matlab自带lqr方法计算得到系数K

仿真：

https://git.ddt.dev:9281/lkx8421/lqr_webots/-/blob/master/worlds/first_order_inverted_pendulum.wbt

二阶倒立摆



> 上述力矩：τ_w 为施加在**轮子**上的力矩，τ_H 为施加在头上的力矩

连杆质心位置

连杆质心位置 $x_L = p + L\sin\theta$，$y_L = L\cos\theta$

头部质心位置 $x_H = p + 2L\sin\theta$，$y_L = 2L\cos\theta$

力学分析

轮子受力和一阶倒立摆一致，对于连杆受力有：

$$F_x = m_L(a + \frac{d^2}{dt^2}(L\sin\theta)) \ {\color{red} + F'_{x1}}$$

$$F_y - m_L g = m_L \frac{d^2}{dt^2}(L\cos\theta) \ {\color{red} + F'_{y1}}$$

$$-\tau_w + F_y L\sin\theta - \ F_x L\cos\theta \ {\color{red} - \tau_H + F'_{y1} L\sin\theta - F'_{x1} L\cos\theta} \ = I_L\ddot{\theta} \qquad (3)$$

头部受力：

$$F_{x1} = m_H(a + \frac{d^2}{dt^2}(2L\sin\theta))$$

$$F_{y1} - m_H g = m_H \frac{d^2}{dt^2}(2L\cos\theta)$$

$$\tau_H = I_H \ddot{\beta} \qquad (4)$$

线性化后的结果

$$F_{x1} = m_H(a + 2L\ddot{\theta})$$

$$F_{y1} = m_H(g - 2L\theta\ddot{\theta})$$

带入式子(3)，线性化有

$$(I_L + 4m_H L^2 + m_L L^2)\ddot{\theta} + (2m_H L + m_L L)a = (2m_H gL + m_L gL)\theta - \tau_w - \tau_H \qquad (5)$$

由轮子受力有：

$$(2m_H L + m_L L)\ddot{\theta} + (\frac{I_w}{r^2} + m_H + m_L + m_w)a = \frac{\tau_w}{r} \qquad (6)$$

由(4)(5)(6)得状态方程

$$\begin{bmatrix} I_H & 0 & 0 \\ 0 & I_L + 4m_H L^2 + m_L L^2 & 2m_H L + m_L L \\ 0 & 2m_H L + m_L L & \frac{I_w}{r^2} + m_H + m_L + m_w) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\beta} \\ \ddot{\theta} \\ a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(2m_H gL + m_L gL) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \theta \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_H \\ \tau_w \end{bmatrix}$$

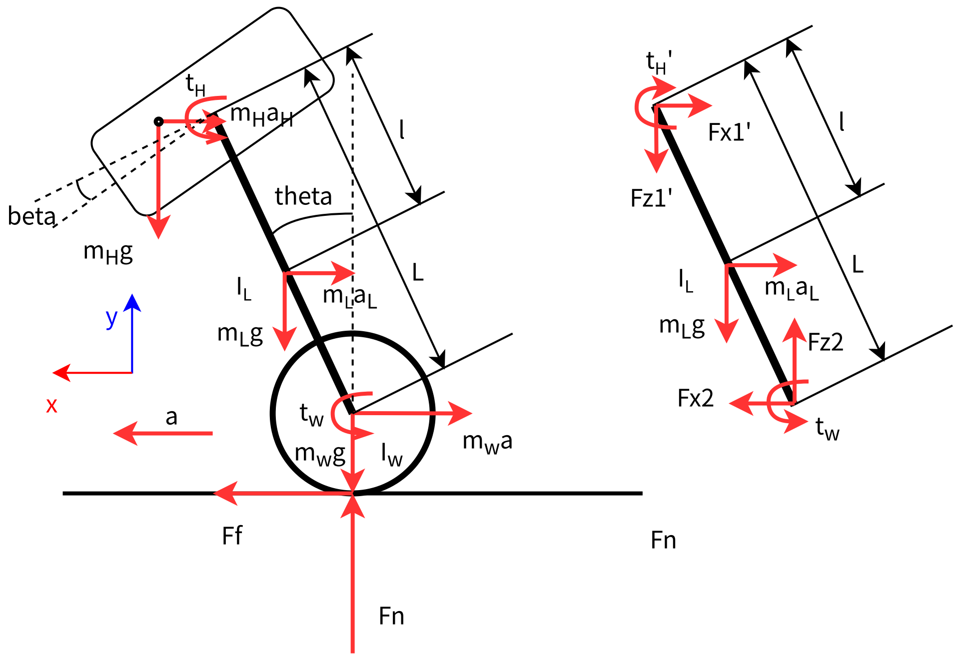
后面的lqr部分按照第三个例子弄的，不写了。

仿真：

https://git.ddt.dev:9281/lkx8421/lqr_webots/-/blob/master/worlds/second_order_inverted_pendulum.wbt

二阶倒立摆（改）

- 修改一下头部质心位置，以及一些长度信息，以及力方向的信息



> 上述力矩：τ_w 为施加在**杆子**上的力矩，τ_H 为施加在头上的力矩

连杆质心位置

连杆质心位置

$$x_L = p + (L-l)\sin\theta,\ y_L = (L-l)\cos\theta$$

头部质心位置

$$x_H = p + L\sin\theta + x_{0com}\cos(\theta+\beta) + z_{0com}\sin(\theta+\beta),\ y_L = L\cos\theta - x_{0com}\sin(\theta+\beta) + z_{0com}\cos(\theta+\beta)$$

力学分析

1. 轮子受力

$$F_f = m_w a + F'_{x2}$$

$$F_N = m_w g + F'_{x2}$$

$$-\tau'_w - F_f r = I_w \alpha$$

有速度约束：$a = \alpha r$

2. 连杆受力有：

$$F_{x2} = m_{L2}\frac{d^2}{dt^2}(x_L) + F'_{x1}$$

$$F_{z2} - m_{L2} g = m_{L2}\frac{d^2}{dt^2}(z_L) + F'_{z1}$$

$$\tau_w - \tau'_H + F_{z2}(L-l)\sin\theta - F_{x2}(L-l)\cos\theta + F'_{z1} l\sin\theta - F'_{x1} l\cos\theta = I_L\ddot{\theta} \qquad (3)$$

3. 头部受力：

$$F_{x1} = m_H \frac{d^2}{dt^2}(x_H)$$

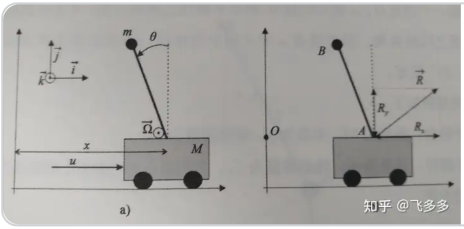
$$F_{z1} - m_H g = m_H \frac{d^2}{dt^2}(z_H)$$

$$\tau_H + F_{z1}(x_{0com}\cos(\theta+\beta) + z_{0com}\sin(\theta+\beta)) - F_{x1}(-x_{0com}\sin(\theta+\beta) + z_{0com}\cos(\theta+\beta)) = I_0(\ddot{\theta}+\ddot{\beta})$$

后面的公式推导，线性化部分可见matlab中代码部分~

引入了头部的质心位置后，计算复杂程度肉眼可见的复杂，因此在实际模型中并没有引入这个位置，而是通过在状态变量中引入积分项来解决期望位置和实际位置的误差问题。即增大对应Q矩阵中积分项的增益来解决。至此，模型部分基本与现在A1、A2中的LQR部分大概符合。

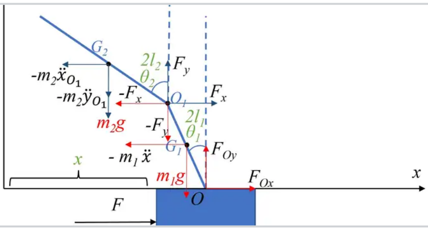
例子：



知乎 https://zhuanlan.zhihu.com/p/358140662

动力学建模-拉格朗日方程

朗格朗日这个人，与欧拉、柯西、高斯、伯努利、拉普拉斯、笛卡尔（排名不分先后）等人一起在大学时代折磨了无数的莘莘学子，拉格朗日曾说过：“知道我的名字的…



知乎 https://zhuanlan.zhihu.com/p/597289805

二阶倒立摆动力学建模

受力分析中的符号可能是一个困扰很多人的问题。最初列倒立摆方程时，我也深受其扰，请教了同学之后，并加上自己反复的思考比对，算是解决了这个问题：其实关…

https://blog.csdn.net/qq_42731705/article/details/122464642

线性系统大作业——1.一阶倒立摆建模与控制系统设计_一阶倒立摆系统的建模仿真与控制_Cc1924的博客-CSDN博客

文章目录0.简介1.建立数学模型1.1.牛顿运动定律分析1.2.欧拉-拉格朗日方程分析…

仿真：

https://git.ddt.dev:9281/lkx8421/lqr_webots/-/blob/master/worlds/second_order_inverted_pendulum_gai.wbt

平面3dof轮足

> 下述力矩：τ_w 为施加在**轮子**上的力矩，τ_H 为施加在**杆子**的力矩

在（改）的基础上继续补充，增加腿长的pd控制器，实现平面3dof轮足的平衡以及腿长控制

建系如同现有A2类似，只不过转化为平面上 xOz 上，从**关节位置状态量**到**控制状态量**之间的关系

$$\begin{bmatrix} pitch \\ tilt \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ r & r & r & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} pitch \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

腿长 len 和机器人高度 $height$ 的关系

$$len = \ 2L\cos(\frac{q_2}{2})\ , \quad height = len\cos(tilt)$$

通过控制腿长来控制高度，目前A1/2腿长控制满足如下控制律：

$$\tau_{len} = m_H(\ddot{len}_{cmd} \ + \ g) * \ \dot{len}_d/2 \ * \ \sin(-q_2/2)$$

$$\ddot{len}_{cmd} \ = \ \ddot{len}_d + k_p err + k_d \dot{err} + k_i \int err$$

比较切合A1/2现有控制逻辑

仿真：

https://git.ddt.dev:9281/lkx8421/lqr_webots/-/blob/master/worlds/three_dof_plane_wheel_robot.wbt

动力学表达式为： $a\ddot{x} + bx = cu$ ，其中： $x = [pitch, tilt, p]^T$ ， $u = [\tau_H, \tau_w]^T$ ，分别的，触地和离地阶段有：

1. 触地阶段：

$$a \ = \begin{bmatrix} I_H & 0 & 0 \\ I_H & I_L + L^2\, m_H + L^2\, m_L + l^2\, m_L - 2\, L\, l\, m_L & L\, m_H + L\, m_L - l\, m_L \\ 0 & L\, m_H + L\, m_L - l\, m_L & \frac{I_w + m_H\, r^2 + m_L\, r^2 + m_w\, r^2}{r^2} \end{bmatrix}$$

$$b \ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & g\, l\, m_L - L\, g\, m_L - L\, g\, m_H & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c \ = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix}$$

2. 离地阶段

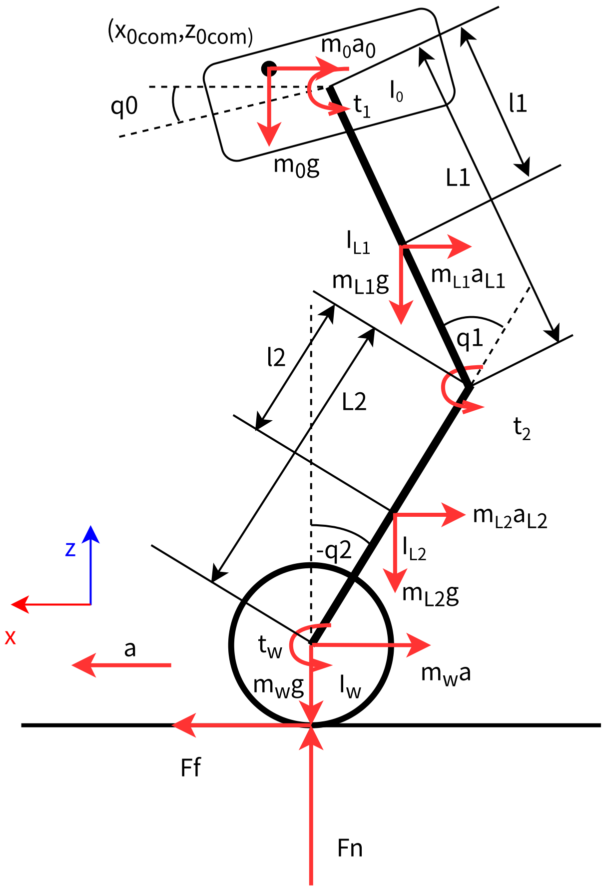
$$a = \begin{bmatrix} I_H & 0 & 0 \\ I_H & I_L + L^2\, m_H + L^2\, m_L + l^2\, m_L - 2\, L\, l\, m_L & L\, m_H + L\, m_L - l\, m_L \\ 0 & 0 & \frac{I_w}{r^2} \end{bmatrix}$$

$$b \ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & g\, l\, m_L - L\, g\, m_L - L\, g\, m_H & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c \ = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix}$$

扩充：三阶倒立摆

🎁 以下内容为补充，公式暂未验证正确性，暂未通过代码实现。



各个连杆质心位置

	wheel(link3)	link2	link1	head(link0)
$x_{com,i}$	p	$p + (L2 - l2)\sin q2$	$p + L2\sin q2 + (L1 - l1)\sin(q1 + q2)$	$p + L2\sin q2 + L1\sin(q1 + q2) + x0com\cos(q1 + q2 + q0) + z0com\sin(q1 + q2 + q0)$
$z_{com,i}$	0	$(L2 - l2)\cos q2$	$L2\cos q2 + (L1 - l1)\cos(q1 + q2)$	$L2\cos q2 + L1\cos(q1 + q2) - x0com\sin(q1 + q2 + q0) + z0com\cos(q1 + q2 + q0)$

受力分析

> 下述力矩：τ_w 为施加在**杆子**上的力矩，τ_1 为施加在头部的力矩，τ_2 为施加在L1的力矩

1. 轮子受力：

$$F_f = m_w a + F'_{x2}$$

$$F_N = m_w g + F'_{x2}$$

$$-\tau'_w - F_f r = I_w \alpha$$

有速度约束： $a = \alpha r$

2. L2连杆受力

$$F_{x2} = m_{L2} \frac{d^2}{dt^2}(x_{com,2}) + F'_{x1}$$

$$F_{z2} - m_{L2} g = m_{L2} \frac{d^2}{dt^2}(z_{com,2}) + F'_{z1}$$

$$\tau_w - \tau'_2 + F_{z2}(L_2 - l_2)\sin q_2 - F_{x2}(L_2 - l_2)\cos q_2 + F'_{z1} l_2 \sin q_2 - F'_{x1} l_2 \cos q_2 = I_{L2} \ddot{q}_2$$

(3)

3. L1连杆受力

$$F_{x1} = m_{L1} \frac{d^2}{dt^2}(x_{com,1}) + F'_{x0}$$

$$F_{z1} - m_{L1} g = m_{L1} \frac{d^2}{dt^2}(z_{com,1}) + F'_{z0}$$

$$\tau_2 - \tau'_1 + F_{z1}(L_1 - l_1)\sin(q_1 + q_2) - F_{x1}(L_1 - l_1)\cos(q_1 + q_2) + F'_{z0} l_1 \sin(q_1 + q_2) - F'_{x0} l_1 \cos(q_1 + q_2) = I_{L1}(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)$$

4. head受力

$$F_{x0} = m_0 \frac{d^2}{dt^2}(x_{com,0})$$

$$F_{z0} - m_0 g = m_0 \frac{d^2}{dt^2}(z_{com,0})$$

$$\tau_1 + F_{z0}(x_{0com}\cos(q_1 + q_2 + q_0) + z_{0com}\sin(q_1 + q_2 + q_0)) - F_{x0}(-x_{0com}\sin(q_1 + q_2 + q_0) + z_{0com}\cos(q_1 + q_2 + q_0)) = I_0(\ddot{q}_2 + \ddot{q}_1 + \ddot{q}_0)$$

RNE

比较困难线性化