

A2 系列运动学及动力学模型推导

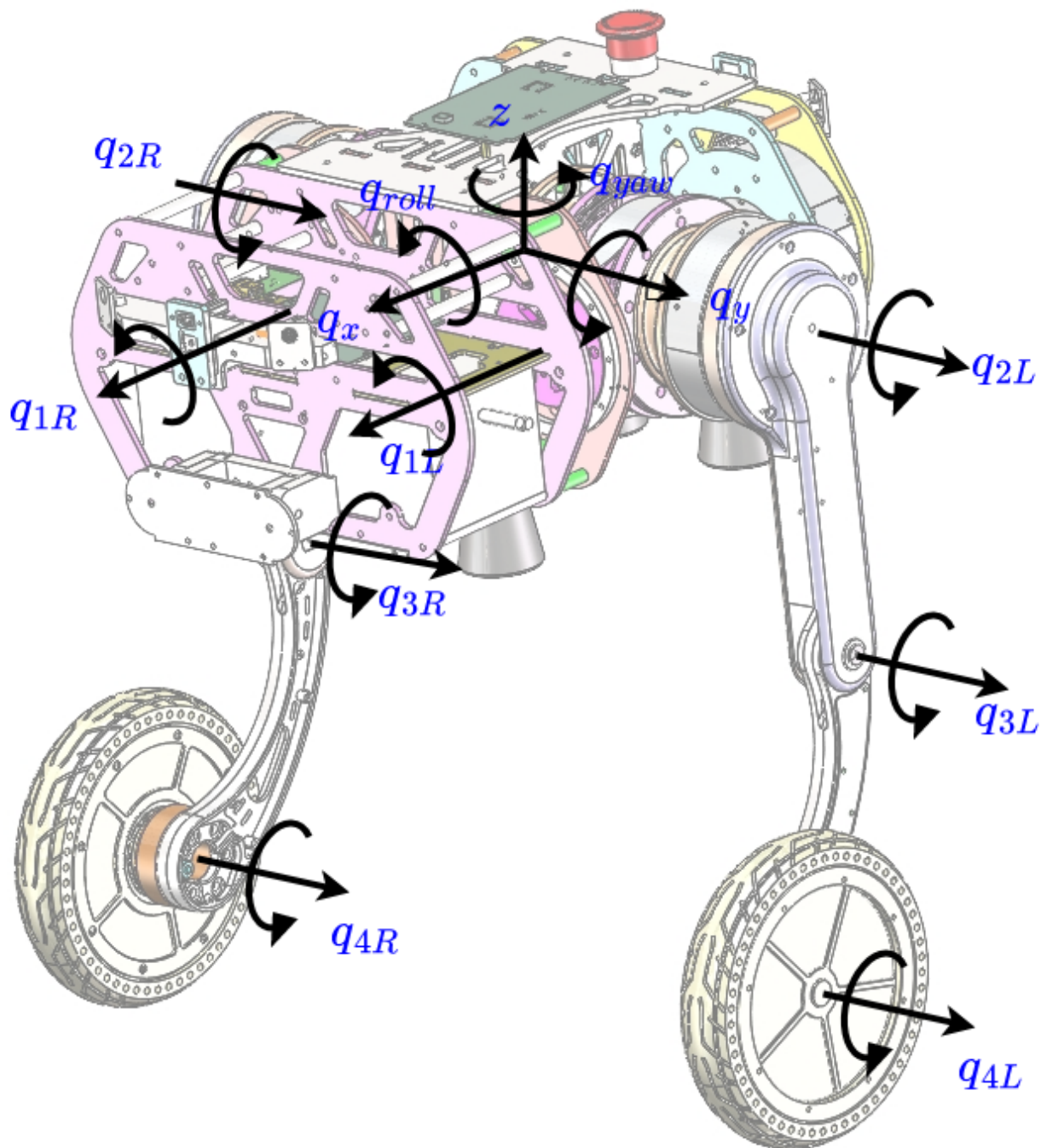


时间：2023/03/13

作者：刘可心

机器人坐标系定义

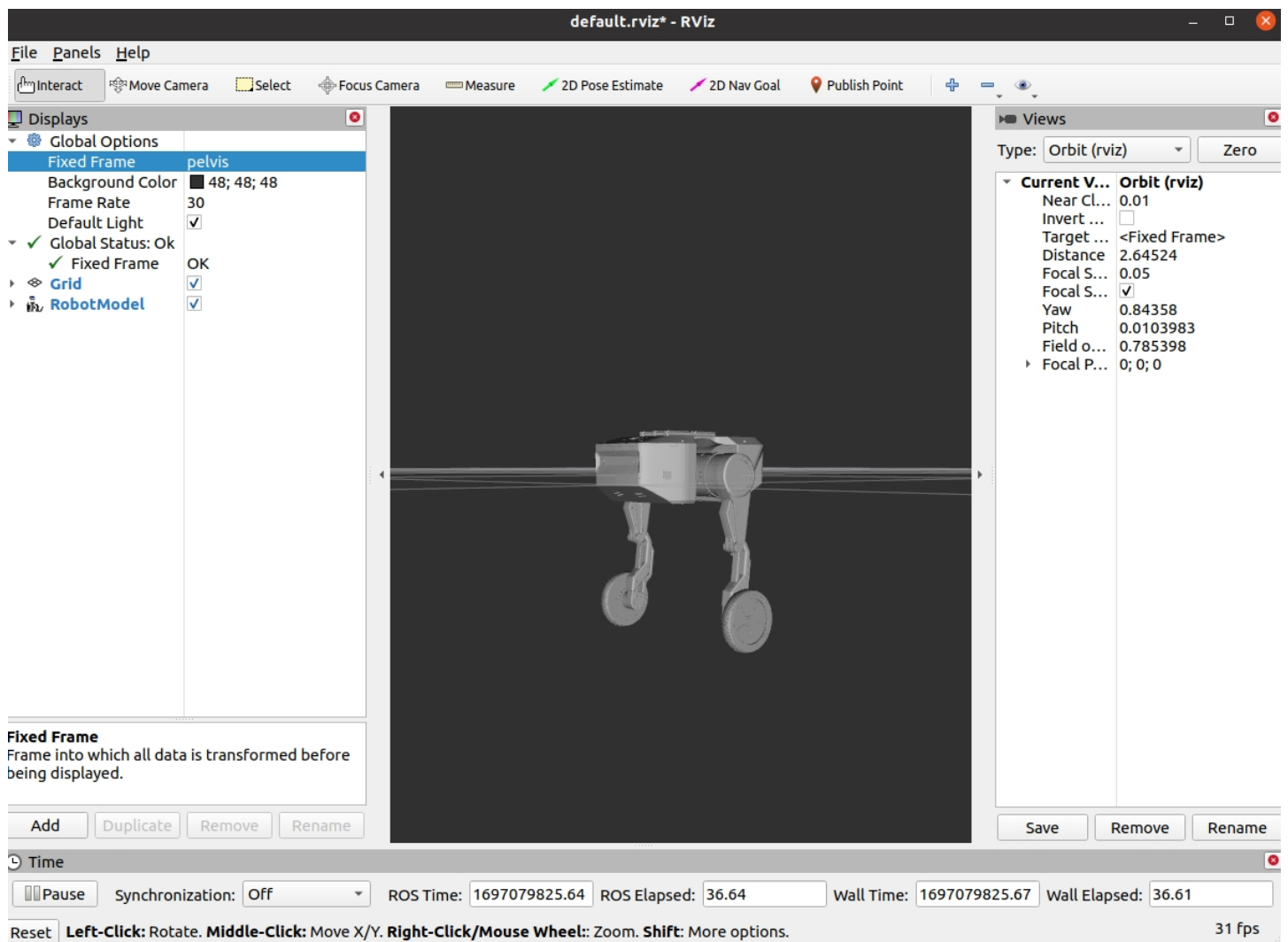
对于A2机器人共有8个驱动关节。对应左腿采用下标为 q_{iL} , $i = 1, \dots, 4$, 依次为侧摆关节、髋关节、膝关节、轮关节；右腿采用下标为 q_{iR} , $i = 1, \dots, 4$, 依次为侧摆关节、髋关节、膝关节、轮关节；如下图所示。关节 z 轴方向为箭头方向。对应关节旋转正方向采用右手定则判断，即：大拇指沿着 z 轴方向，四指所指方向为对应关节旋转正方向，如下图所示：



注意：由于 q_3 ，也就是**膝关节**的力矩输入是由四连杆传动机构来传递的。当前A2样机四连杆机构为**交叉四连杆**，如下图所示。为了保证**膝关节** q_3 有如上图所示的旋转方向，对于**膝关节电机**定义旋转方向示意如下：

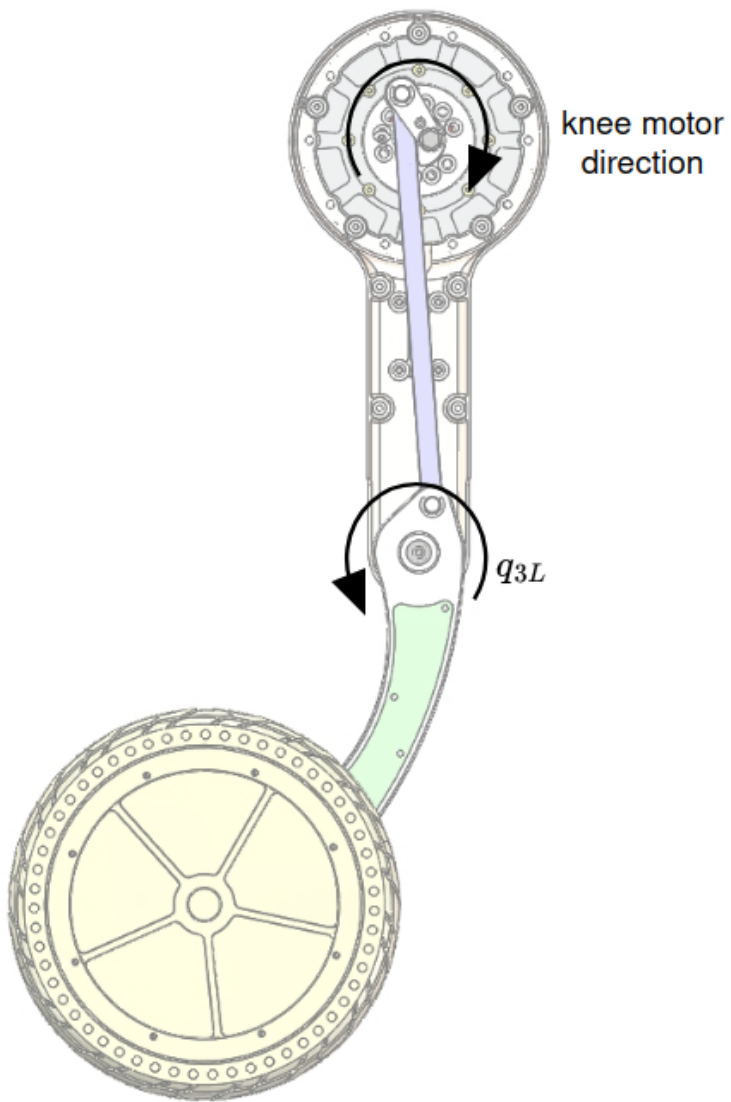
而对于其他**关节**，**电机转向**和坐标系定义**关节转向**相同即可。

机器人的零位导入在rviz中显示如下

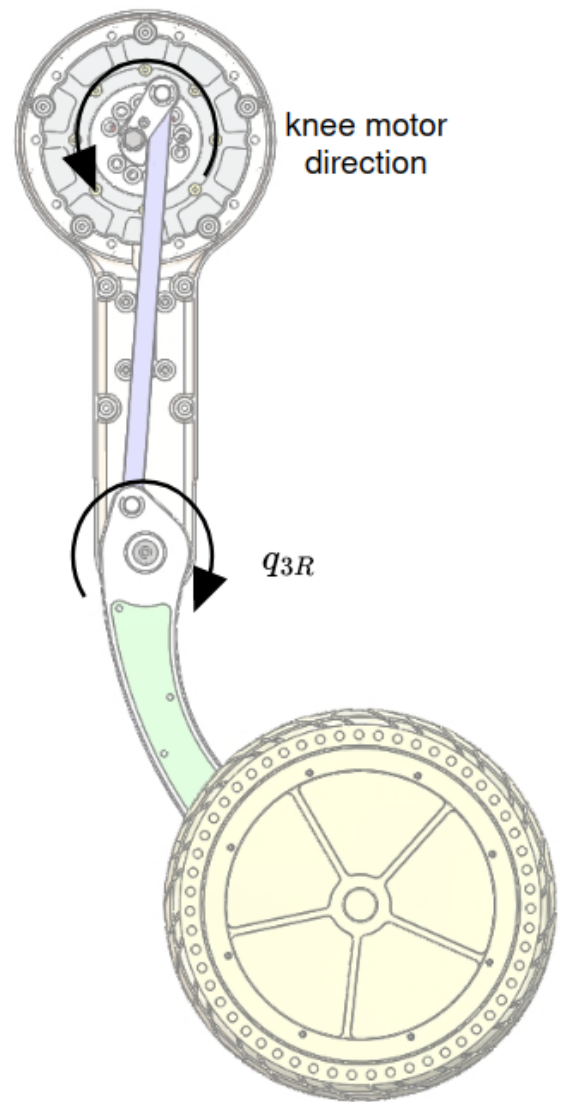


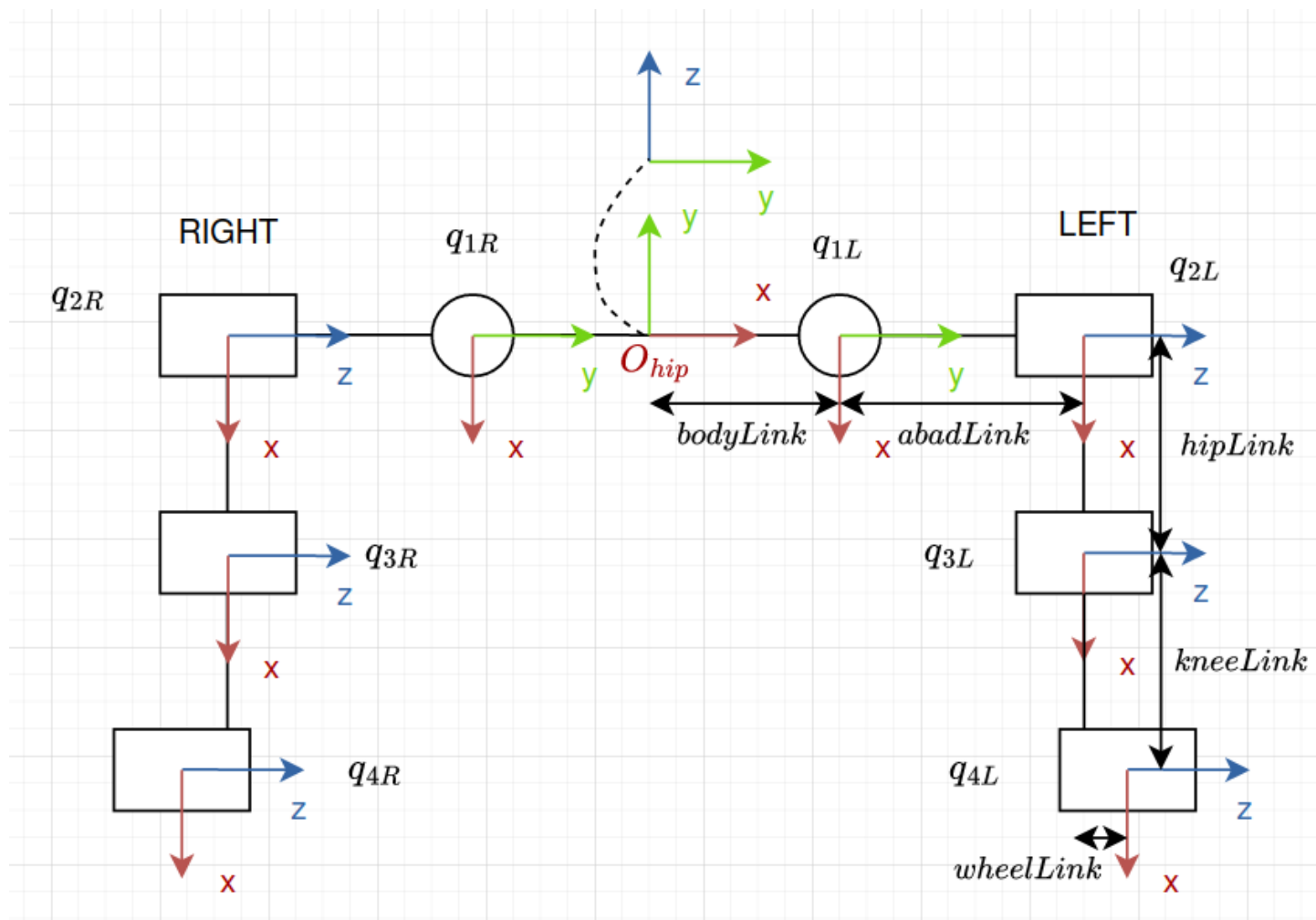
运动学模型的建立

Left leg view



Right leg view





单腿运动学分析

对单腿运动学进行分析，由于DH参数法的限制，此处在建模过程中从机器人基坐标系 O_0 到坐标系 O_{hip} 之间只存在坐标系旋向的问题，即：

$${}^bR_0 = Rotz(90^\circ) * Rotx(90^\circ)$$

对于后续mDH坐标系建立均给予坐标系 O_{hip} 建立，如上图所示的坐标系建立如下的mDH参数表：

	frame	q_i	关节限位	d_i	α_{i-1}	a_{i-1}	备注
left_leg	0T_1	$q1L = -\frac{\pi}{2}$	$(-120^\circ, 0^\circ)$	0	0	bodylink=94.5 mm	
	1T_2	$q2L = 0$	$(-90^\circ, 90^\circ)$	adabLink = 122.8mm	-pi/2	0	
	2T_3	$q3L = -0.547$	$(-31.35^\circ, 145.86^\circ)$	0	0	hipLink=200mm	
	3T_4	$q4L$		d4 = 50.2mm	0	kneeLink=200 mm	

right_ leg	0T_1	$q_{1L} = -\frac{\pi}{2}$	$(-120^\circ, 0^\circ)$	0	0	bodylink=-94.5mm	
	1T_2	$q_{2L} = 0$	$(-90^\circ, 90^\circ)$	adabLink = -122.8mm	-pi/2	0	
	2T_3	$q_{3L} = -0.547$	$(-31.35^\circ, 145.86^\circ)$	0	0	hipLink=200mm	
	3T_4	q_{4L}		d4 = -50.2mm	0	kneeLink=200mm	



电机关节定义：abad-hip-knee-wheel

feat:展会样机结构有部分修改，修改后的DH参数如下：

	frame	q_i	关节限位	d_i	α_{i-1}	a_{i-1}	备注
left_ leg	0T_1	$q_{1L} = -\frac{\pi}{2}$	$(-120^\circ, 0^\circ)$	0	0	bodylink=89.5mm	
	1T_2	$q_{2L} = 0$	$(-90^\circ, 90^\circ)$	adabLink = 126.3mm	-pi/2	0	
	2T_3	$q_{3L} = -0.547$	$(-31.35^\circ, 145.86^\circ)$	0	0	hipLink=200mm	
	3T_4	q_{4L}		d4 = 57.95mm	0	kneeLink=200mm	
right_ leg	0T_1	$q_{1L} = -\frac{\pi}{2}$	$(-120^\circ, 0^\circ)$	0	0	bodylink=-89.5mm	
	1T_2	$q_{2L} = 0$	$(-90^\circ, 90^\circ)$	adabLink = -126.3mm	-pi/2	0	
	2T_3	$q_{3L} = -0.547$	$(-31.35^\circ, 145.86^\circ)$	0	0	hipLink=200mm	
	3T_4	q_{4L}		d4 = -57.95mm	0	kneeLink=200mm	

正运动学

以左腿为例，由DH表，可以得到各个坐标系之间的转换关系为：

$$\begin{aligned} {}^0T_1 &= \begin{pmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & a_1 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ {}^1T_2 &= \begin{pmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ -\sin(q_2) & -\cos(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ {}^2T_3 &= \begin{pmatrix} \cos(q_3) & -\sin(q_3) & 0 & a_3 \\ \sin(q_3) & \cos(q_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ {}^3T_4 &= \begin{pmatrix} \cos(q_4) & -\sin(q_4) & 0 & a_4 \\ \sin(q_4) & \cos(q_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

有从基坐标系到轮子坐标系之间的坐标变换为：

$${}^bT_4 = {}^bT_0 {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4$$

计算的齐次变换矩阵为：

$${}^bT_4 = \begin{pmatrix} -s_{234} & -c_{234} & 0 & -a_3 s_2 - a_4 s_{23} \\ c_1 c_{234} & -c_1 s_{234} & -s_1 & a_3 c_1 c_2 + a_4 c_1 c_{23} - (d_2 + d_4) s_1 + a_1 \\ s_1 c_{234} & -s_1 s_{234} & c_1 & a_3 s_1 c_2 + a_4 s_1 c_{23} + (d_2 + d_4) c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

此式子中：

$s_i = \sin(q_i)$, $c_i = \cos(q_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, $s_{ij} = \sin(q_i + q_j)$, $c_{ij} = \cos(q_i + q_j)$ ，依此类推。

其中旋转矩阵对应左上角3x3矩阵，平移变换对应右上角3x1向量，即：

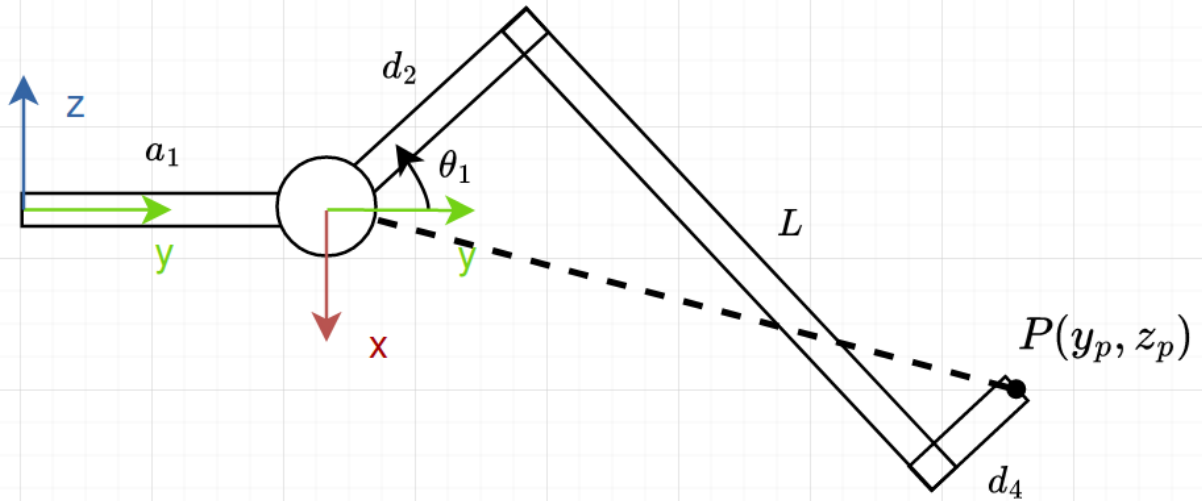
$${}^bT_4 = \begin{pmatrix} R_{3 \times 3} & P_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{pmatrix}$$

至此完成了单腿的正向运动学求解，也就是给定任意的关节角度后，可以得到机器人足端在机器人空间中的坐标。

逆运动学

下述为用几何法来计算逆运动学，参照：

1. 求解q1



当机身旋转角 θ_1 ，末端 P 在 yz 平面内投影为 (y_p, z_p) ，根据几何关系可以得到：

$$y_p - a_1 = (d_2 + d_4) \cos(\theta_1) + L \sin(\theta_1)$$

$$z_p = (d_2 + d_4) \sin(\theta_1) - L \cos(\theta_1)$$

式子中 L 表示机器人大腿小腿连杆在 yz 平面上的投影长度，根据勾股定理得：

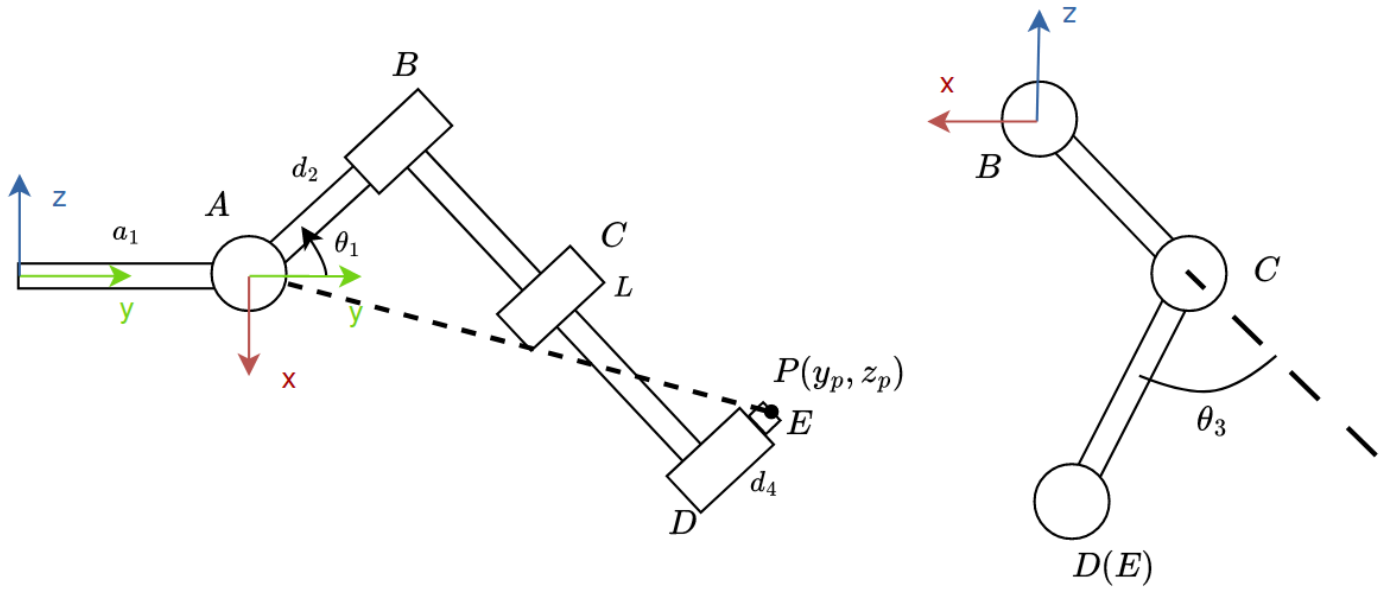
$$L = \sqrt{(y_p - a_1)^2 + z_p^2 - (d_2 + d_4)^2}$$

所以可以求得

$$\tan \theta_1 = \frac{z_p(d_2 + d_4) + (y_p - a_1)L}{(y_p - a_1)(d_2 + d_4) - z_p L}$$

使用C++中的反正切函数 `atan2` 来求解 θ_1 ，要注意，在[坐标系定义图示](#)中，初始状态下的关节角 $q_1 = -\frac{\pi}{2}$ ，因此关节角度 $q_1 = \theta_1 - \frac{\pi}{2}$

2. 求解q3



利用余弦定理，可以得到 $\angle BCD = \cos^{-1}(\frac{BC^2 + CD^2 - BD^2}{2BC \cdot CD})$ ，其中 BC 、 CD 分别为大腿，小腿长度 a_3 、 a_4 。下面则是要计算 BD 。

由于 $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE}$ ，即 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DE}$
 $\overrightarrow{OE} = (x_p, y_p, z_p)^T$ 、 $\overrightarrow{OA} = (0, a_1, 0)^T$ 、 $\overrightarrow{AB} = (0, d_2 \sin \theta_1, d_2 \cos \theta_1)^T$ 、
 $\overrightarrow{DE} = (0, d_4 \sin \theta_1, d_4 \cos \theta_1)^T$ ；

几何关系得到 $BD = \sqrt{AE^2 - (AB + DE)^2}$ ，即：

$$BD = \sqrt{x_p^2 + (y_p - a_1)^2 + z_p^2 - (d_2 + d_4)^2}$$

因此可以得到 $\angle BCD$ ，而关节角度 $q_3 = -\pi + \angle BCD$ 。

3. 求解q2

q2的求解相对复杂，由正向运动学可以得到末端关节位置：

$$x_p = -a_3 s_2 - a_4 s_{23}$$

$$y_p = a_3 c_1 c_2 + a_4 c_1 c_{23} - (d_2 + d_4) s_1 + a_1$$

$$z_p = a_3 s_1 c_2 + a_4 s_1 c_{23} + (d_2 + d_4) c_1$$

可以得到

$$y_p c_1 + z_p s_1 - a_1 c_1 = a_4 c_{23} + a_3 c_2 \quad (1)$$

我们由于已经求得 q_1, q_3 ，因此令

$$-x_p = A$$

$$y_p c_1 + z_p s_1 - a_1 c_1 = B$$

可有：

$$A = a_3 s_2 + a_4 s_{23}$$

$$B = a_3 c_2 + a_4 c_{23}$$

于是：

$$s_2 A + c_2 B = a_3 + a_4 c_3 = C$$

$$-c_2 A + s_2 B = -a_4 s_3 = D$$

$$\text{所以可以得到： } q_2 = \text{atan2} \frac{AC + BD}{BC - AD}$$

雅克比矩阵

由于 $\dot{x} = J\dot{q}$ ， x 为末端位置在基坐标系下的表达， J 为雅克比矩阵， q 为各关节角度。根据[上述](#)正向运动学中已知末端位置在基坐标系下的表达，因此，直接对 x 求导后，分离系数 q 即可得到雅克比矩阵：

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 c_2 - a_4 c_{23} & -a_4 c_{23} \\ -a_4 s_1 c_{23} - a_3 s_1 c_2 - (d_2 + d_4) c_1 & -c_1 (a_3 s_2 + a_4 s_{23}) & -a_4 c_1 s_{23} \\ a_4 c_1 c_{23} + a_3 c_1 c_2 - (d_2 + d_4) s_1 & -s_1 (a_3 s_2 + a_4 s_{23}) & -a_4 s_1 s_{23} \end{pmatrix}$$

微分逆运动学

直接由 $\dot{x} = J\dot{q}$ ，可以得到 $\dot{q} = J^{-1}\dot{x}$

交叉杆和平行杆结构分析

国交叉杆和平行杆差异性分析

动力学模型建立

浮动基座分析

浮动基座的动力学是建立在将机器人基座上叠加6-DOF关节来进行处理的，在固定基座的机器人动力学分析中，设置基座为0号，根据连杆顺序依次为1号，2号...。而至于浮动基座建模，是在固定基座的基础上增加6-DOF关节后来进行迭代牛顿-欧拉法计算，并且这6个关节应设置为无质量属性来进行迭代计算；此时设置地面为0号基座，新增的6-DOF是在0号基座上进行坐标转换，按照：x，y，z，yaw，pitch，roll的顺序来进行坐标转换，到roll后转化到了机器人的基座上，接着依次是机器人1号连杆，2号连杆... 接下来直接套用迭代牛顿-欧拉法或拉格朗日法来进行计算动力学即可。

因此，定义运动学状态量：

$$\mathbf{q} := [q_x, q_y, q_z, q_{yaw}, q_{pitch}, q_{roll}, q_{1L}, q_{2L}, q_{3L}, q_{4L}, q_{1R}, q_{2R}, q_{3R}, q_{4R}]^T$$

其中：

$$\mathbf{q}_f := [q_x, q_y, q_z, q_{yaw}, q_{pitch}, q_{roll}]^T$$

$$\mathbf{q}_b := [q_{1L}, \dots, q_{4L}, q_{1R}, \dots, q_{4R}]^\top$$

有动力学方程为

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_f \\ \mathbf{q}_b \end{bmatrix} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_6 \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} + \mathbf{J}_c^\top \mathbf{f}_{ext}$$

其中 \mathbf{J}_c 为接触雅克比矩阵，根据不同的运动状态来决定，大小为 14×6 ，

迭代牛顿-欧拉法计算动力学

基于递推牛顿欧拉法来计算浮动基座的动力学方程，参考文章如下：

<https://blog.csdn.net/rouyu308/article/details/125205057>

(8.1)基于牛顿-欧拉公式的动力学方程_欧拉动力学方程_公子文刀的博客-CSDN博客

目录1、坐标系的建立:2、为什么要递推:3、前向递推与反向递推:1、速度和加速度的前向递推:1.1、旋转关节的速度传递:1.2、平移关节的速度传递:1.3、速度变换到质心:1.4、加速度传递:1.5、转化为递归形式:2、力与力矩的方向递推:4、总结:连杆坐标系...

核心算法如下：

Outward iterations: $i : 0 \rightarrow 5$

$${}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} = {}^i R^{i+1} {}^i \boldsymbol{\omega}_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1} \hat{\mathbf{Z}}_{i+1}, \quad (6.45)$$

$${}^{i+1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} = {}^i R^{i+1} {}^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + {}^i R^{i+1} {}^i \boldsymbol{\omega}_i \times \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1} \hat{\mathbf{Z}}_{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1} {}^{i+1} \hat{\mathbf{Z}}_{i+1}, \quad (6.46)$$

$${}^{i+1}\dot{\mathbf{v}}_{i+1} = {}^i R^{i+1} ({}^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times {}^i \mathbf{P}_{i+1} + {}^i \boldsymbol{\omega}_i \times ({}^i \boldsymbol{\omega}_i \times {}^i \mathbf{P}_{i+1}) + {}^i \dot{\mathbf{v}}_i), \quad (6.47)$$

$$\begin{aligned} {}^{i+1}\dot{\mathbf{v}}_{C_{i+1}} &= {}^{i+1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} \times {}^{i+1} \mathbf{P}_{C_{i+1}} \\ &\quad + {}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} \times ({}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} \times {}^{i+1} \mathbf{P}_{C_{i+1}}) + {}^{i+1}\dot{\mathbf{v}}_{i+1}, \end{aligned} \quad (6.48)$$

$${}^{i+1} \mathbf{F}_{i+1} = m_{i+1} {}^{i+1} \dot{\mathbf{v}}_{C_{i+1}}, \quad (6.49)$$

$${}^{i+1} \mathbf{N}_{i+1} = {}^{C_{i+1}} I_{i+1} {}^{i+1} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} + {}^{i+1} \boldsymbol{\omega}_{i+1} \times {}^{C_{i+1}} I_{i+1} {}^{i+1} \boldsymbol{\omega}_{i+1}. \quad (6.50)$$

Inward iterations: $i : 6 \rightarrow 1$

$${}^i \mathbf{f}_i = {}^i R^{i+1} {}^{i+1} \mathbf{f}_{i+1} + {}^i \mathbf{F}_i, \quad (6.51)$$

$$\begin{aligned} {}^i \mathbf{n}_i &= {}^i \mathbf{N}_i + {}^i R^{i+1} {}^{i+1} \mathbf{n}_{i+1} + {}^i \mathbf{P}_{C_i} \times {}^i \mathbf{F}_i \\ &\quad + {}^i \mathbf{P}_{i+1} \times {}^i R^{i+1} {}^{i+1} \mathbf{f}_{i+1}, \end{aligned} \quad (6.52)$$

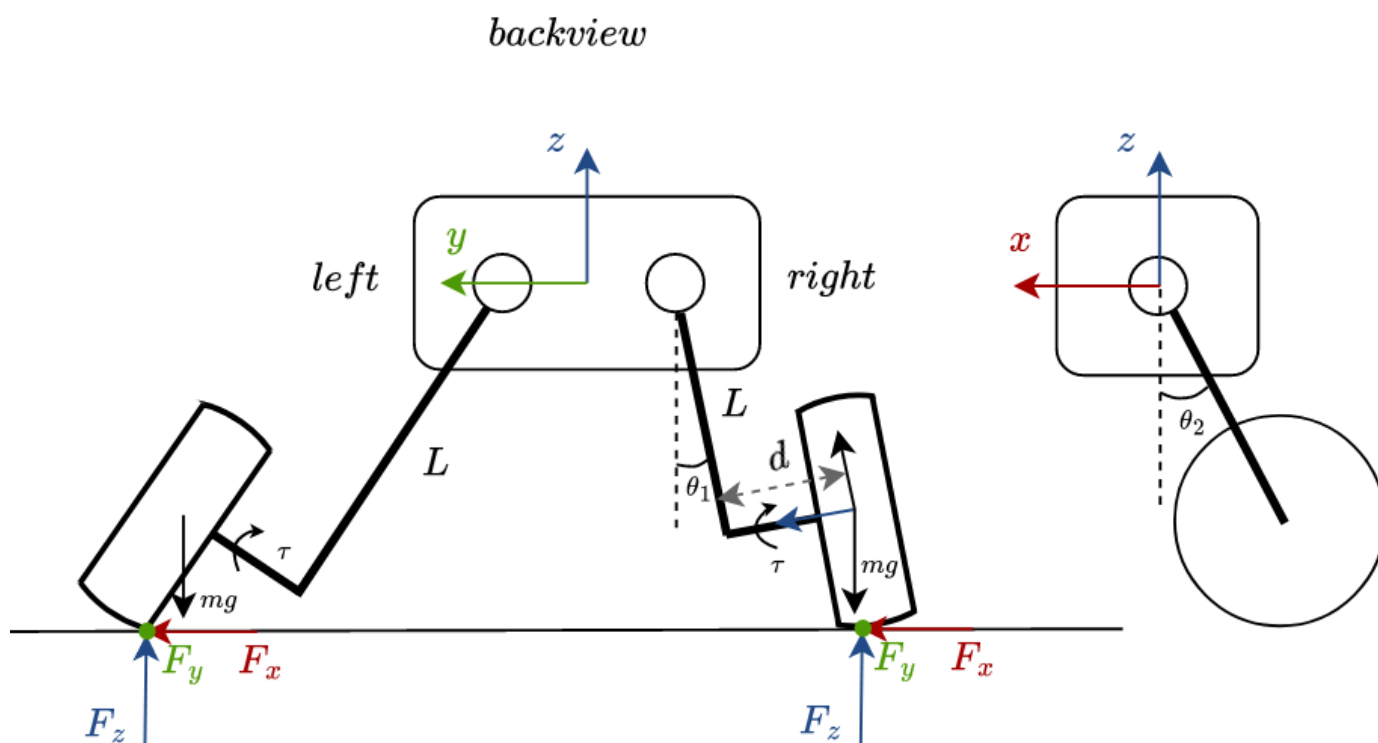
$$\boldsymbol{\tau}_i = {}^i \mathbf{n}_i^T {}^i \hat{\mathbf{Z}}_i. \quad (6.53)$$

经典迭代的牛顿欧拉是在一条链式连接关节的基础上进行分析的，也就是说，一个连杆只有一个子连杆和一个父连杆。而对于双足机器人而言，他是一种非一条链式的连接，所以在共同连接的地方需要特殊处理（目前代码具有此类特殊性、后续看是否能优化）。

根据迭代牛顿-欧拉计算在6-DOF关节处也有力产生。可以认为这些力是为了维持机器人在这个方向（坐标）下所需要的外力。这个得到的外力可以均分给两个轮子（End of Effector）作为外力输入。

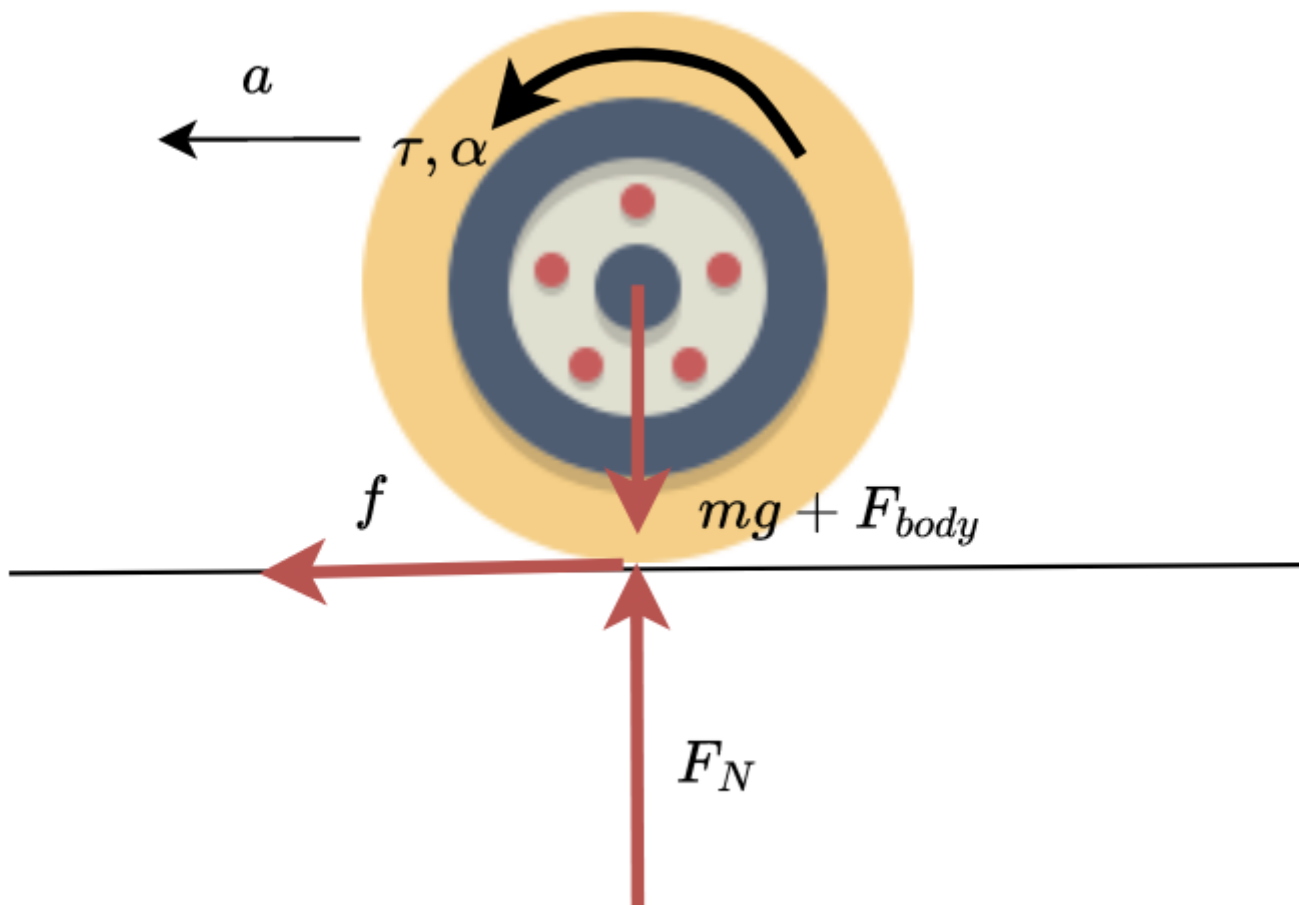
外力分析

主要对轮子进行受力分析，在考虑侧摆电机的基础上，有：



分析，有机器人body通过腿部连杆给轮子的力： F_{body} ，可以沿着腿有：

对于轮子的受力如下

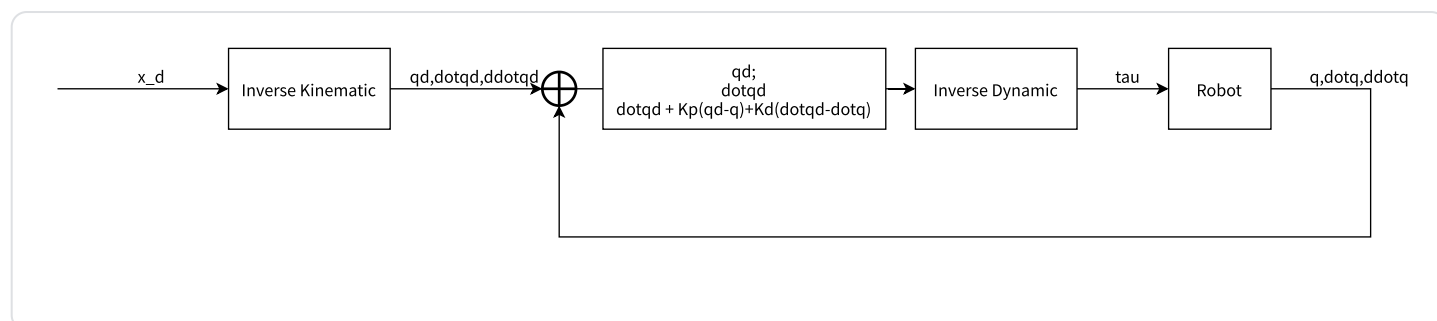


有：

$$\begin{cases} F_N = mg + F_{body} \\ f = ma \\ f < \mu F_N \\ \tau - fr = I\alpha \end{cases} \quad \text{滚动摩擦}$$

控制系统

系统框图



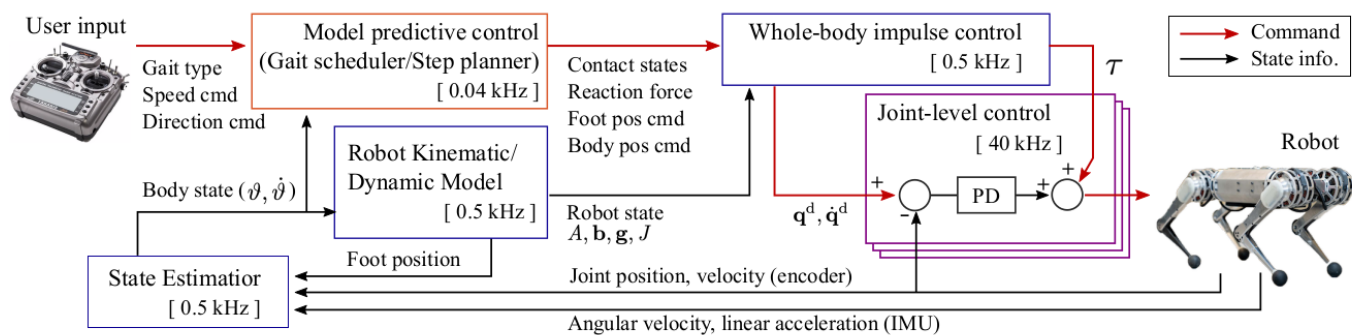
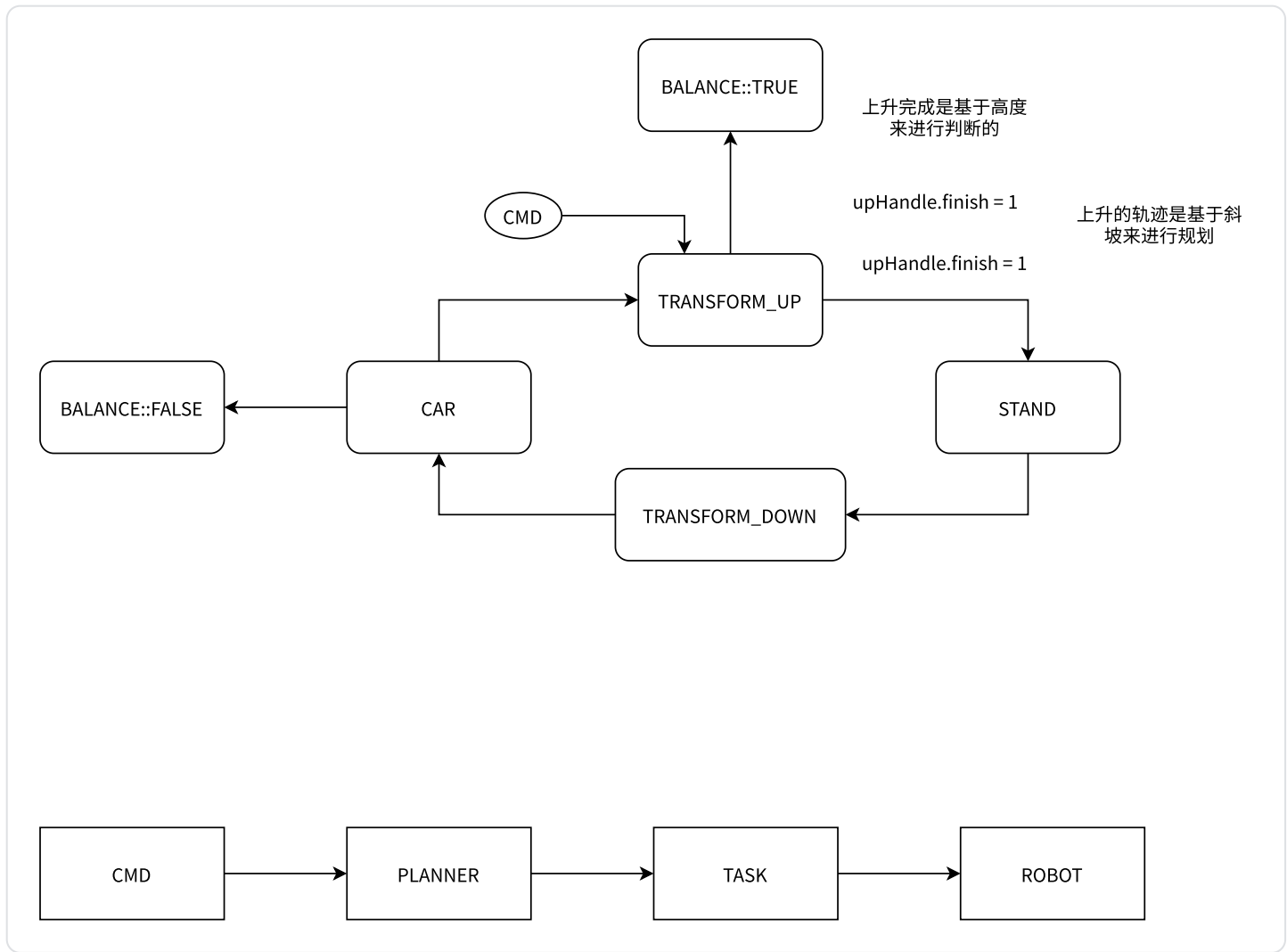


Fig. 2. **Overall Control Framework.** Using the user commanded gait type, speed, and direction from the RC-controller, the MPC computes desired reaction forces and foot/body position commands. From these, WBC computes joint torque, position, and velocity commands that are delivered to the each joint-level controller. Each component's update frequency is represented by the color of its box.

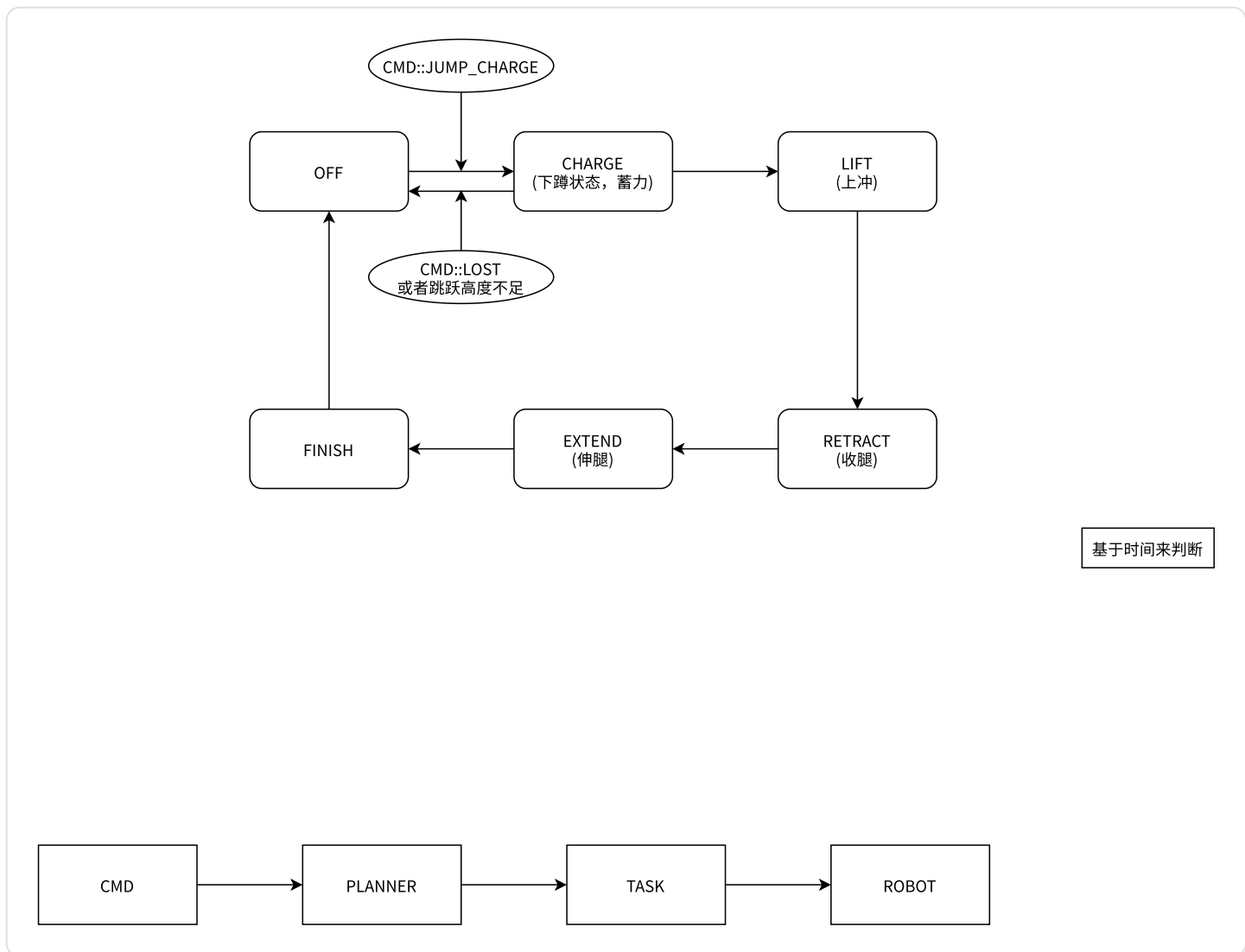
跳跃分析

状态机

ROBOT



JUMP



分析：由于现有结构上，存在四连杆结构，而一般导出urdf文件时要求连杆为串联形式，因此建立坐标系

(1) 运动学状态量：

$$q := [q_x, q_y, q_z, q_{yaw}, q_{pitch}, q_{roll}, q_{1L}, q_{2L}, q_{3L}, q_{4L}, q_{1R}, q_{2R}, q_{3R}, q_{4R}]^T$$

其中body的状态量为：

$$q_{\text{body}} := [q_{1L}, \dots, q_{4L}, q_{1R}, \dots, q_{4R}]^T$$

关节电机名称定义：

(2) 关节电机状态量为：

$$q_{\text{motor}} := [q_{\text{hipAbductionL}}, q_{\text{hipL}}, q_{\text{kneeL}}, q_{\text{wheelL}}, q_{\text{hipAbductionR}}, q_{\text{hipR}}, q_{\text{kneeR}}, q_{\text{wheelR}}]^T$$

电机初始化位置为：

$$q_{\text{motorInit}} := [q_{\text{hipL0}}, q_{\text{kneeL0}}, q_{\text{wheelL0}}, q_{\text{hipR0}}, q_{\text{kneeR0}}, q_{\text{wheelR0}}]^T$$

转换关系：

$$q_{\text{hip}} - q_{\text{hip0}} = \frac{\pi}{2} - q_2$$

$$q_{\text{knee}} - q_{\text{knee0}} = 2\pi - q_3$$

$$q_{\text{wheel}} - q_{\text{wheel0}} = q_4$$

(3) IMU、ACCL、GYRO计算状态量为：

1) IMU：

获得四元数来求解pitch、roll、yaw

2) ACCL

加速度计 获得xyz轴方向加速度

3) GYRO

陀螺仪，获得绕轴角速度

(4) 控制状态变量为：（基于现有A1代码）

$$h_0(q) = [q_{\alpha}, q_{\beta}, q_{\text{kneeAngle}}, q_{\text{len}}, q_{\text{angle}}]^T$$

其中：

q_{α} 表示为 l_1 与地面的夹角， q_{β} 为杆 l_2' 与地面法线的夹角， $q_{\text{kneeAngle}}$ 为 l_1 和 l_2' 之间的夹角。

q_{len} 为虚拟腿长， q_{angle} 为虚拟腿与地面法线角度。

与运动学状态量之间的转换关系为：

$$q_{\alpha} = q_1 + q_{\text{pitch}} - \frac{\pi}{2}$$

$$q_{\beta} = 2\pi - q_2 - q_{\alpha}$$

$$q_{\text{kneeAngle}} = (2\pi - q_2)/2$$

$$q_{\text{len}} = 0.28 * \cos(q_{\text{kneeAngle}})$$

$$q_{angle} = q_{alpha} - q_{kneeAngle} - q_{pitch}$$

IMU坐标转换以及四元数相关计算

https://blog.csdn.net/Sandy_WYM_/article/details/84328395

动力学模型基于牛顿-欧拉方程推导，但现在不太对，
也用了frost来进行计算。