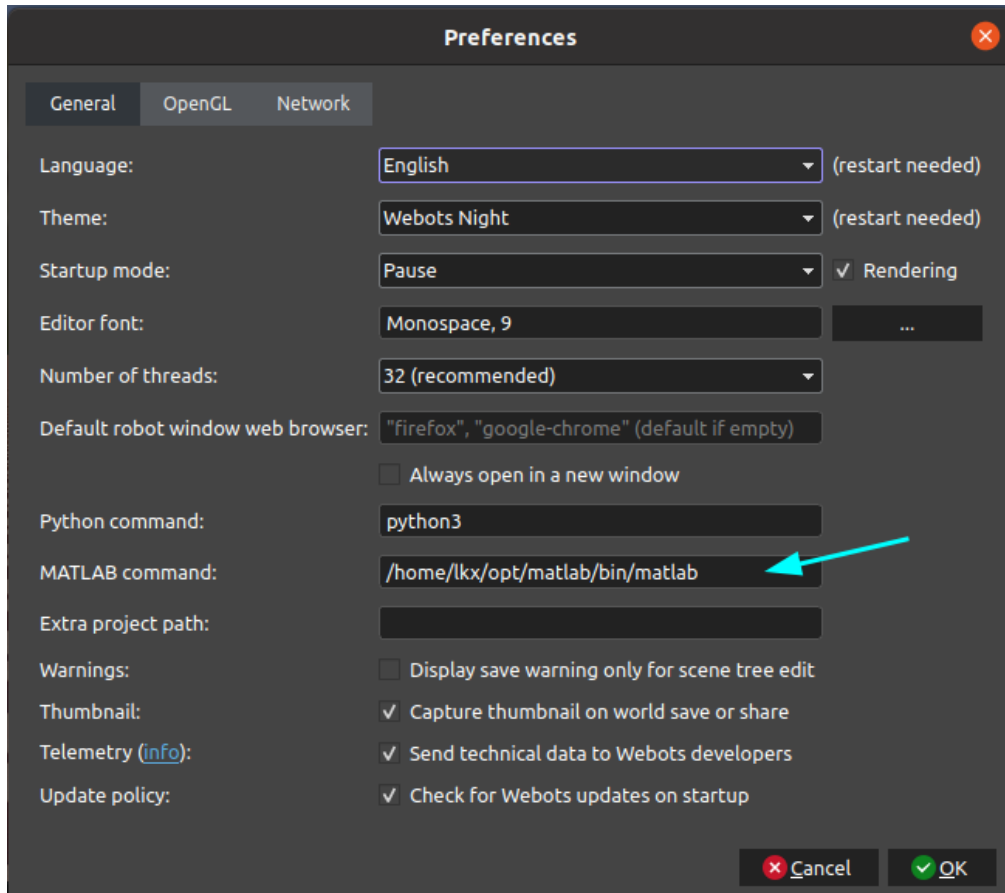


# hxt--倒立摆及lqr控制

环境：webots:R2023a matlab:R2022b

配置联合仿真方法：<https://cyberbotics.com/doc/guide/using-matlab?version=R2023a>，像下面所示

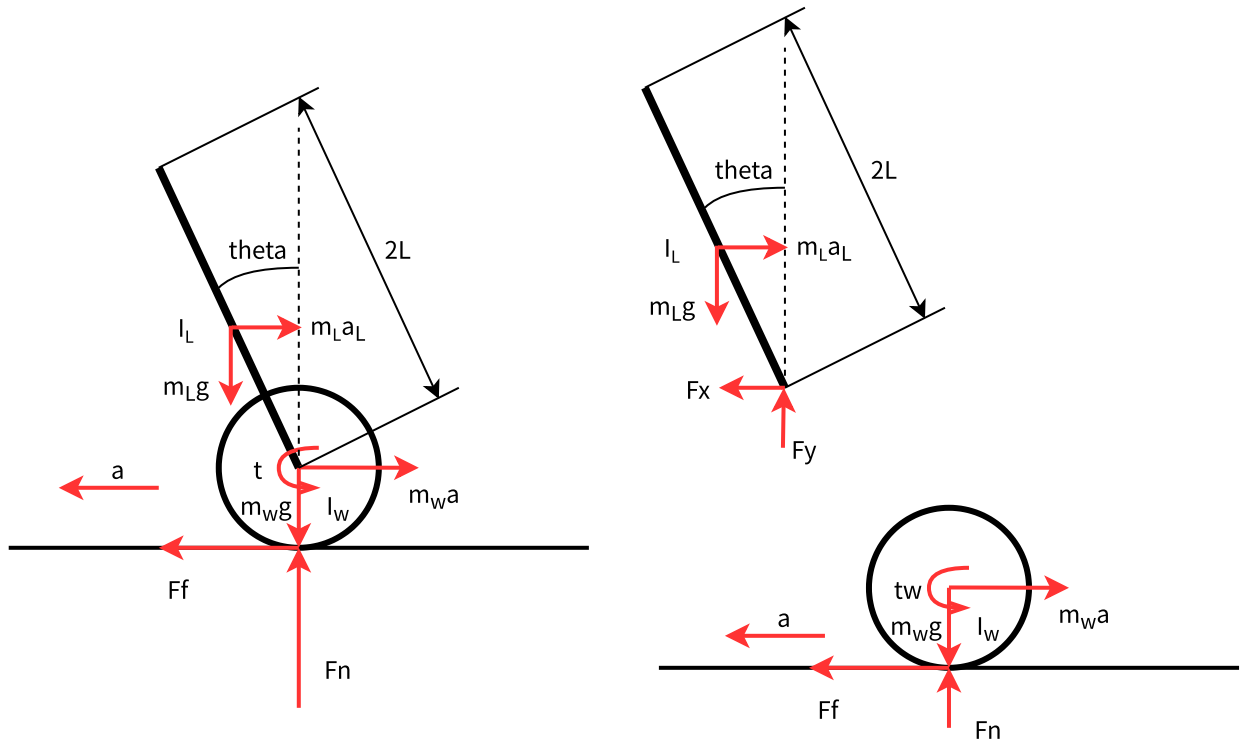
下文中代码托管在：[https://git.ddt.dev:9281/lkx8421/lqr\\_webots](https://git.ddt.dev:9281/lkx8421/lqr_webots)



- 注：严格意义上来说，如下所述的模型并不是二阶倒立摆，为了方便起名如下

## 一阶倒立摆

以轮为例，输入为轮子的力矩  $\tau$ ，



## 受力分析

上述力矩： $\tau_w$  为施加在轮子上的力矩

连杆质心位置  $x_L = p + L \sin \theta$ ,  $y_L = L \cos \theta$

### 1. 轮子受力分析

$$F_f = m_w a + F'_x$$

$$F_N - F'_y = m_w g$$

$$\tau_w - F_f r = I_w \alpha$$

有速度约束： $a = \alpha r$

### 2. 连杆受力分析

$$F_x = m_L \ddot{x}_L = m_L (a + \frac{d^2}{dt^2} (L \sin \theta))$$

$$F_y - m_L g = m_L \ddot{y}_L = m_L \frac{d^2}{dt^2} (L \cos \theta)$$

$$-\tau + F_y L \sin \theta - F_x L \cos \theta = I_L \ddot{\theta}$$

线性化，即  $\sin \theta = \theta$ ,  $\cos \theta = 1$ ，舍去高阶项有

$$F_x = m_L (a + L \ddot{\theta})$$

$$F_y = m_L g$$

$$\tau_w - m_L L g \theta + m_L L (a + L \ddot{\theta}) = -I_L \ddot{\theta}$$

### 3. 消除内力，地面摩擦力，有

- 由轮子受力：  $(m_L + m_w + \frac{I_w}{r^2})a + m_L L \ddot{\theta} = \frac{\tau_w}{r}$
- 由连杆受力：  $m_L L a + (m_L L^2 + I_L) \ddot{\theta} = m_L g L \theta - \tau_w$

## 选取状态变量

状态变量为  $X = [\theta \quad \dot{\theta} \quad p \quad v]^T$ ，设参数如下：

$m_w / kg$	1
$m_L / kg$	0.5
$I_w / kg.m^2$	0.00125
$I_L / kg.m^2$	0.00177083
$r / m$	0.05
$L / m$	0.1
$g$	9.81

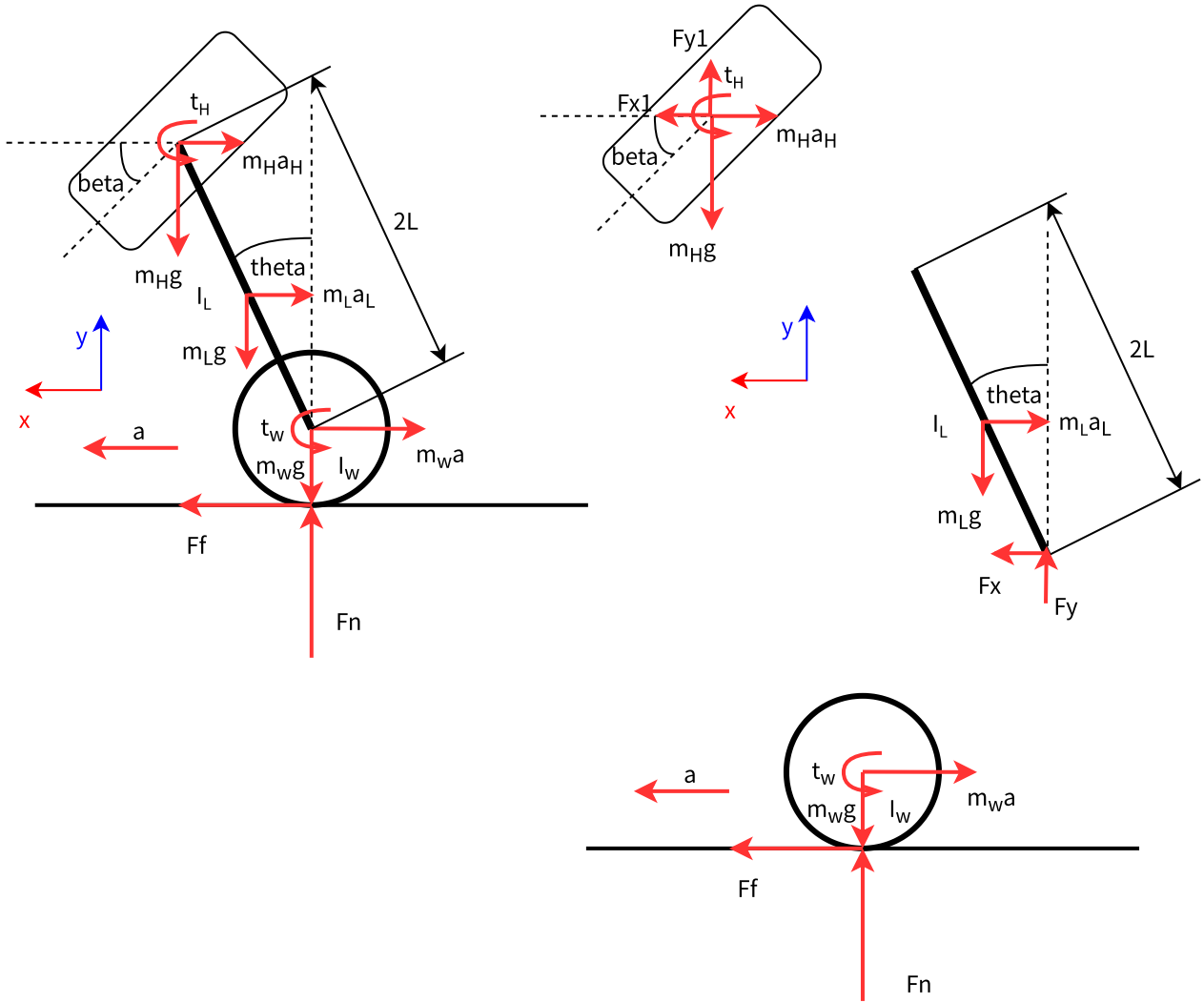
## lqr控制

取  $Q = \text{diag}([100 \ 1 \ 1 \ 1])$ ， $R = 1$ ，用matlab自带lqr方法计算得到系数K

仿真：

[https://git.ddt.dev:9281/lkx8421/lqr\\_webots/-/blob/master/worlds/first\\_order\\_inverted\\_pendulum.wbt](https://git.ddt.dev:9281/lkx8421/lqr_webots/-/blob/master/worlds/first_order_inverted_pendulum.wbt)

## 二阶倒立摆



上述力矩： $\tau_w$  为施加在**轮子**上的力矩， $\tau_H$  为施加在**头上**的力矩

## 连杆质心位置

连杆质心位置  $x_L = p + L \sin \theta$ ,  $y_L = L \cos \theta$

头部质心位置  $x_H = p + 2L \sin \theta$ ,  $y_L = 2L \cos \theta$

## 力学分析

轮子受力和一阶倒立摆一致，对于连杆受力有：

$$F_x = m_L(a + \frac{d^2}{dt^2}(L \sin \theta)) + F'_{x1}$$

$$F_y - m_L g = m_L \frac{d^2}{dt^2}(L \cos \theta) + F'_{y1}$$

$$-\tau_w + F_y L \sin \theta - F_x L \cos \theta - \tau_H + F'_{y1} L \sin \theta - F'_{x1} L \cos \theta = I_L \ddot{\theta} \quad (3)$$

头部受力：

$$F_{x1} = m_H(a + \frac{d^2}{dt^2}(2L \sin \theta))$$

$$F_{y1} - m_H g = m_H \frac{d^2}{dt^2} (2L \cos \theta)$$

$$\tau_H = I_H \ddot{\beta} \quad (4)$$

线性化后的结果

$$F_{x1} = m_H (a + 2L\ddot{\theta})$$

$$F_{y1} = m_H (g - 2L\theta\ddot{\theta})$$

带入式子(3)，线性化有

$$(I_L + 4m_H L^2 + m_L L^2)\ddot{\theta} + (2m_H L + m_L L)a = (2m_H g L + m_L g L)\theta - \tau_w - \tau_H \quad (5)$$

由轮子受力有：

$$(2m_H L + m_L L)\ddot{\theta} + \left(\frac{I_w}{r^2} + m_H + m_L + m_w\right)a = \frac{\tau_w}{r} \quad (6)$$

由(4)(5)(6)得状态方程

$$\begin{bmatrix} I_H & 0 & 0 \\ 0 & I_L + 4m_H L^2 + m_L L^2 & 2m_H L + m_L L \\ 0 & 2m_H L + m_L L & \frac{I_w}{r^2} + m_H + m_L + m_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\beta} \\ \ddot{\theta} \\ a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(2m_H g L + m_L g L) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \theta \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_H \\ \tau_w \end{bmatrix}$$

后面的lqr部分按照第三个例子弄的，不写了。

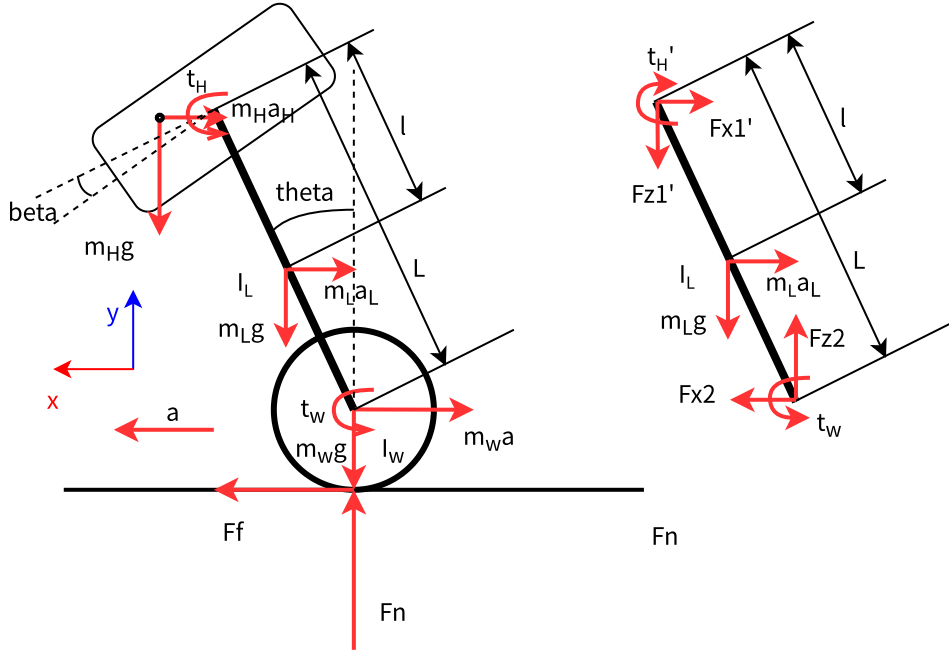
仿真：

[https://git.ddt.dev:9281/lkx8421/lqr\\_webots/-/blob/master/worlds/second\\_order\\_inverted\\_pendulum.wbt](https://git.ddt.dev:9281/lkx8421/lqr_webots/-/blob/master/worlds/second_order_inverted_pendulum.wbt)

## 二阶倒立摆（改）



- 修改一下头部质心位置，以及一些长度信息，以及力方向的信息



上述力矩： $\tau_w$  为施加在杆子上的力矩， $\tau_H$  为施加在头上的力矩

## 连杆质心位置

连杆质心位置

$$x_L = p + (L - l) \sin \theta, \quad y_L = (L - l) \cos \theta$$

头部质心位置

$$x_H = p + L \sin \theta + x_{0com} \cos(\theta + \beta) + z_{0com} \sin(\theta + \beta), \quad y_L = L \cos \theta - x_{0com} \sin(\theta + \beta) + z_{0com} \cos(\theta + \beta)$$

## 力学分析

### 1. 轮子受力

$$F_f = m_w a + F'_{x2}$$

$$F_N = m_w g + F'_{x2}$$

$$-\tau'_w - F_f r = I_w \alpha$$

有速度约束： $a = \alpha r$

### 2. 连杆受力有：

$$F_{x2} = m_{L2} \frac{d^2}{dt^2}(x_L) + F'_{x1}$$

$$F_{z2} - m_{L2} g = m_{L2} \frac{d^2}{dt^2}(z_L) + F'_{z1}$$

$$\tau_w - \tau'_H + F_{z2}(L - l) \sin \theta - F_{x2}(L - l) \cos \theta + F'_{z1} l \sin \theta - F'_{x1} l \cos \theta = I_L \ddot{\theta} \quad (3)$$

### 3. 头部受力：

$$F_{x1} = m_H \frac{d^2}{dt^2}(x_H)$$

$$F_{z1} - m_H g = m_H \frac{d^2}{dt^2}(z_H)$$

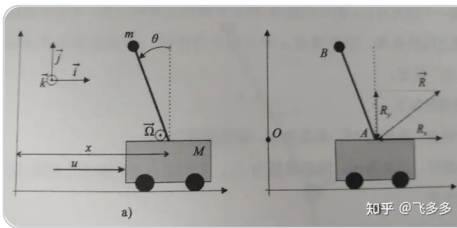
$$\tau_H + F_{z1}(x_{0com} \cos(\theta + \beta) + z_{0com} \sin(\theta + \beta)) - F_{x1}(-x_{0com} \sin(\theta + \beta) + z_{0com} \cos(\theta + \beta)) = I_0(\ddot{\theta} + \ddot{\beta})$$



后面的公式推导，线性化部分可见matlab中代码部分~

引入了头部的质心位置后，计算复杂程度肉眼可见的复杂，因此在实际模型中并没有引入这个位置，而是通过在状态变量中引入积分项来解决期望位置 and 实际位置的误差问题。即增大对应Q矩阵中积分项的增益来解决。至此，模型部分基本与现在A1、A2中的LQR部分大概符合。

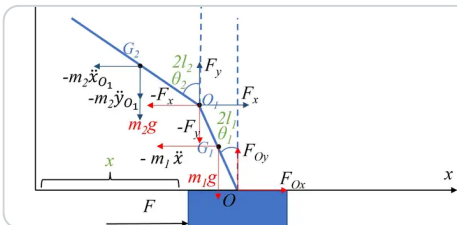
例子：



[知乎 https://zhuanlan.zhihu.com/p/358140662](https://zhuanlan.zhihu.com/p/358140662)

### 动力学建模-拉格朗日方程

朗格朗日这个人，与欧拉、柯西、高斯、伯努利、拉普拉斯、笛卡尔（排名不分先后）等人一起在大学时代折磨了无数的莘莘学子，拉格朗日曾说过：“知道我的名字的…”



[知乎 https://zhuanlan.zhihu.com/p/597289805](https://zhuanlan.zhihu.com/p/597289805)

### 二阶倒立摆动力学建模

受力分析中的符号可能是一个困扰很多人的问题。最初列倒立摆方程时，我也深受其扰，请教了同学之后，并加上自己反复的思考比对，算是解决了这个问题：其实关…



[https://blog.csdn.net/qq\\_42731705/article/details/122464642](https://blog.csdn.net/qq_42731705/article/details/122464642)

### 线性系统大作业——1.一阶倒立摆建模与控制系统设计\_一阶倒立摆系统的建模仿真与控制\_Cc1924的博客-CSDN博客

文章目录0.简介1.建立数学模型1.1.牛顿运动定律分析1.2.欧拉-拉格朗日方程分析…

仿真：

[https://git.ddt.dev:9281/lkx8421/lqr\\_webots/-/blob/master/worlds/second\\_order\\_inverted\\_pen\\_dulum\\_gai.wbt](https://git.ddt.dev:9281/lkx8421/lqr_webots/-/blob/master/worlds/second_order_inverted_pen_dulum_gai.wbt)

## 平面3dof轮足

下述力矩： $\tau_w$  为施加在**轮子**上的力矩， $\tau_H$  为施加在**杆子**的力矩



在（改）的基础上继续补充，增加腿长的pd控制器，实现平面3dof轮足的平衡以及腿长控制

建系如同现有A2类似，只不过转化为平面上  $xOz$  上，从**关节位置状态量**到**控制状态量**之间的关系

$$\begin{bmatrix} pitch \\ tilt \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ r & r & r & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} pitch \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

腿长  $len$  和机器人高度  $height$  的关系

$$len = 2L \cos(\frac{q_2}{2}), \quad height = len \cos(tilt)$$

通过控制腿长来控制高度，目前A1/2腿长控制满足如下控制律：

$$\tau_{len} = m_H(\ddot{len}_{cmd} + g) * len_d/2 * \sin(-q_2/2)$$

$$\ddot{len}_{cmd} = \ddot{len}_d + k_p err + k_d \dot{err} + k_i \int err$$

比较切合A1/2现有控制逻辑

仿真：

[https://git.ddt.dev:9281/lkx8421/lqr\\_webots/-/blob/master/worlds/three\\_dof\\_plane\\_wheel\\_robot.wbt](https://git.ddt.dev:9281/lkx8421/lqr_webots/-/blob/master/worlds/three_dof_plane_wheel_robot.wbt)

动力学表达式为： $a\ddot{x} + bx = cu$ ，其中： $x = [pitch, tilt, p]^T$ ， $u = [\tau_H, \tau_w]^T$ ，分别的，触地和离地阶段有：

1. 触地阶段：

$$a = \begin{bmatrix} I_H & 0 & 0 \\ I_H & I_L + L^2 m_H + L^2 m_L + l^2 m_L - 2Ll m_L & L m_H + L m_L - l m_L \\ 0 & L m_H + L m_L - l m_L & \frac{I_w + m_H r^2 + m_L r^2 + m_w r^2}{r^2} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & g l m_L - L g m_L - L g m_H & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix}$$

2. 离地阶段

$$a = \begin{bmatrix} I_H & 0 & 0 \\ I_H & I_L + L^2 m_H + L^2 m_L + l^2 m_L - 2Ll m_L & L m_H + L m_L - l m_L \\ 0 & 0 & \frac{I_w}{r^2} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & g l m_L - L g m_L - L g m_H & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

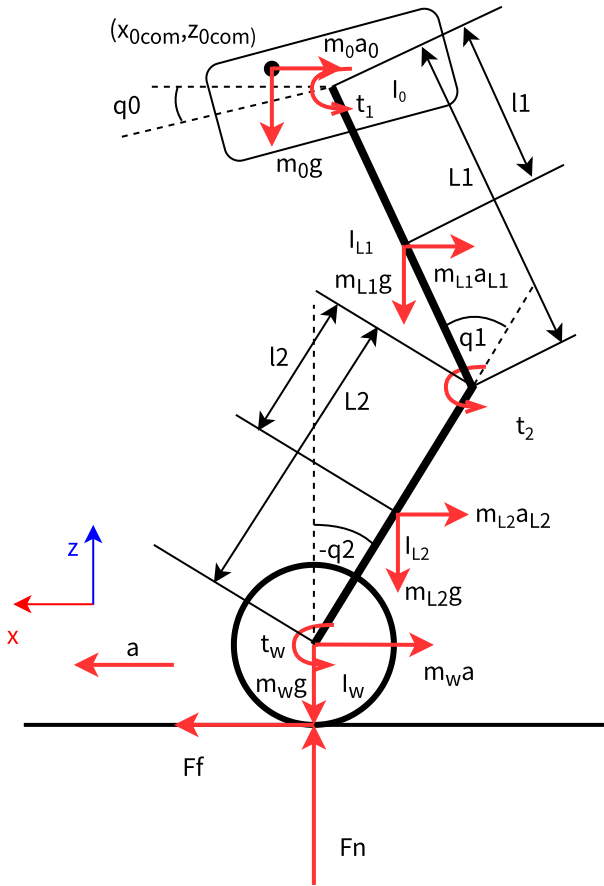
$$c = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix}$$



# 扩充：三阶倒立摆



以下内容为补充，公式暂未验证正确性，暂未通过代码实现。



## 各个连杆质心位置

	wheel(link3)	link2	link1	head(link0)
$x_{com,i}$	$p$	$p + (L_2 - l_2) \sin q_2$	$p + L_2 \sin q_2 + (L_1 - l_1) \sin(q_1 + q_2)$	$p + L_2 \sin q_2 + L_1 \sin(q_1 + q_2) + x_{0com} \cos(q_1 + q_2 + q_0) + z_{0com} \sin(q_1 + q_2 + q_0)$
$z_{com,i}$	$0$	$(L_2 - l_2) \cos q_2$	$L_2 \cos q_2 + (L_1 - l_1) \cos(q_1 + q_2)$	$L_2 \cos q_2 + L_1 \cos(q_1 + q_2) - x_{0com} \sin(q_1 + q_2 + q_0) + z_{0com} \cos(q_1 + q_2 + q_0)$

## 受力分析

下述力矩： $\tau_w$  为施加在杆子上的力矩， $\tau_1$  为施加在头部的力矩， $\tau_2$  为施加在L1的力矩

### 1. 轮子受力:

$$F_f = m_w a + F'_{x2}$$

$$F_N = m_w g + F'_{x2}$$

$$-\tau'_w - F_f r = I_w \alpha$$

有速度约束:  $a = \alpha r$

### 2. L2连杆受力

$$F_{x2} = m_{L2} \frac{d^2}{dt^2}(x_{com,2}) + F'_{x1}$$

$$F_{z2} - m_{L2} g = m_{L2} \frac{d^2}{dt^2}(z_{com,2}) + F'_{z1}$$

$$\tau_w - \tau'_2 + F_{z2}(L_2 - l_2) \sin q_2 - F_{x2}(L_2 - l_2) \cos q_2 + F'_{z1} l_2 \sin q_2 - F'_{x1} l_2 \cos q_2 = I_{L2} \ddot{q}_2 \quad (3)$$

### 3. L1连杆受力

$$F_{x1} = m_{L1} \frac{d^2}{dt^2}(x_{com,1}) + F'_{x0}$$

$$F_{z1} - m_{L1} g = m_{L1} \frac{d^2}{dt^2}(z_{com,1}) + F'_{z0}$$

$$\tau_2 - \tau'_1 + F_{z1}(L_1 - l_1) \sin(q_1 + q_2) - F_{x1}(L_1 - l_1) \cos(q_1 + q_2) + F'_{z0} l_1 \sin(q_1 + q_2) - F'_{x0} l_1 \cos(q_1 + q_2) = I_{L1}(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)$$

### 4. head受力

$$F_{x0} = m_0 \frac{d^2}{dt^2}(x_{com,0})$$

$$F_{z0} - m_0 g = m_0 \frac{d^2}{dt^2}(z_{com,0})$$

$$\tau_1 + F_{z0}(x_{0com} \cos(q_1 + q_2 + q_0) + z_{0com} \sin(q_1 + q_2 + q_0)) - F_{x0}(-x_{0com} \sin(q_1 + q_2 + q_0) + z_{0com} \cos(q_1 + q_2 + q_0)) = I_0(\ddot{q}_2 + \ddot{q}_1 + \ddot{q}_0)$$

RNE

比较困难线性化