lqr_webots 扩充：坡度估计及外力估计

https://git.ddt.dev:9281/rbt-pre/diablo_athena_enhance/a-1-1-c-enhance

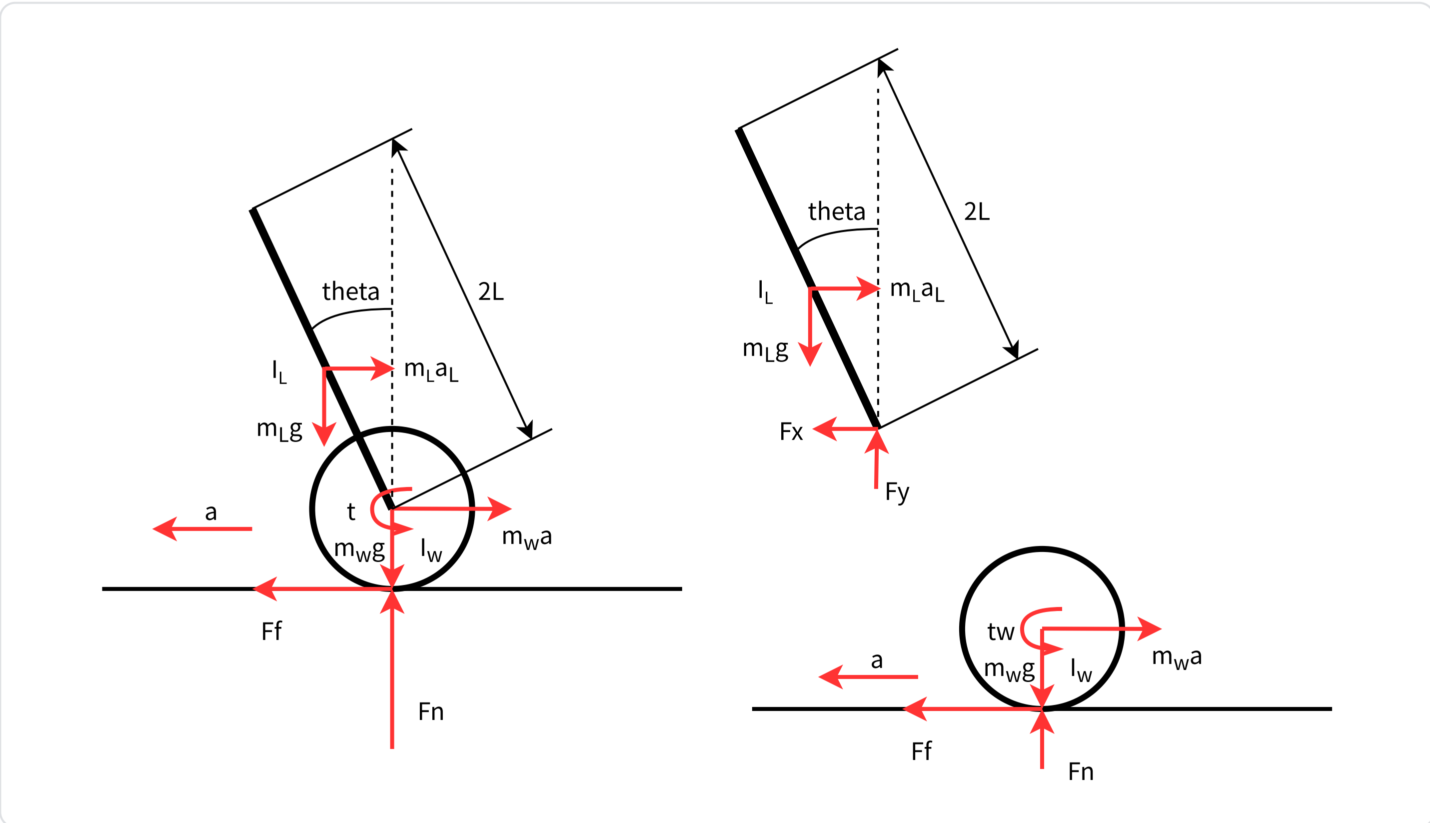
https://git.ddt.dev:9281/rbt-pre/diablo_athena_enhance/a-1-simulation/-/tree/Vel_Track?ref_type=heads

机器人建模，参考可心文章：倒立摆及lqr控制

一阶倒立摆

首先参考可心的一阶倒立摆建模：

力学分析原则，先规定正方向，等式左边写受力/力矩，右边写加速度/角加速度



受力分析

> 上述力矩：τ_w 为施加在轮子上的力矩

连杆质心位置 $x_L = p + L\sin\theta$，$y_L = L\cos\theta$

1. 轮子受力分析

$$F_f = m_w a + F'_x$$

$$F_N - F'_y = m_w g$$

$\tau_w - F_f r = I_w \alpha$

有速度约束： $a = \alpha r$

2. 连杆受力分析

$F_x = m_L \ddot{x}_L = m_L (a + \frac{d^2}{dt^2}(L\sin\theta))$

$F_y - m_L g = m_L \ddot{y}_L = m_L \frac{d^2}{dt^2}(L\cos\theta)$

$-\tau + F_y L\sin\theta - \ F_x L\cos\theta \ = I_L \ddot{\theta}$

线性化，即 $\sin\theta = \theta$， $\cos\theta = 1$ ，舍去高阶项有

$F_x = m_L(a + L\ddot{\theta})$

$F_y = m_L g$

$\tau_w - m_L L g\theta + \ m_L L(a + L\ddot{\theta}) \ = -I_L \ddot{\theta}$

3. 消除内力，地面摩擦力，有

- 由轮子受力： $(m_L + m_w + \frac{I_w}{r^2})a + m_L L\ddot{\theta} = \frac{\tau_w}{r}$
- 由连杆受力： $m_L L a + (m_L L^2 + I_L)\ddot{\theta} = m_L g L\theta - \tau_w$

选取状态变量

状态变量为 $X \ = \ \begin{bmatrix}\theta & \dot{\theta} & p & v\end{bmatrix}^T$ ，设参数如下：

m_w/kg	1
m_L/kg	0.5
$I_w/kg.m^2$	0.00125
$I_L/kg.m^2$	0.00177083
r/m	0.05
L/m	0.1
g	9.81

lqr控制

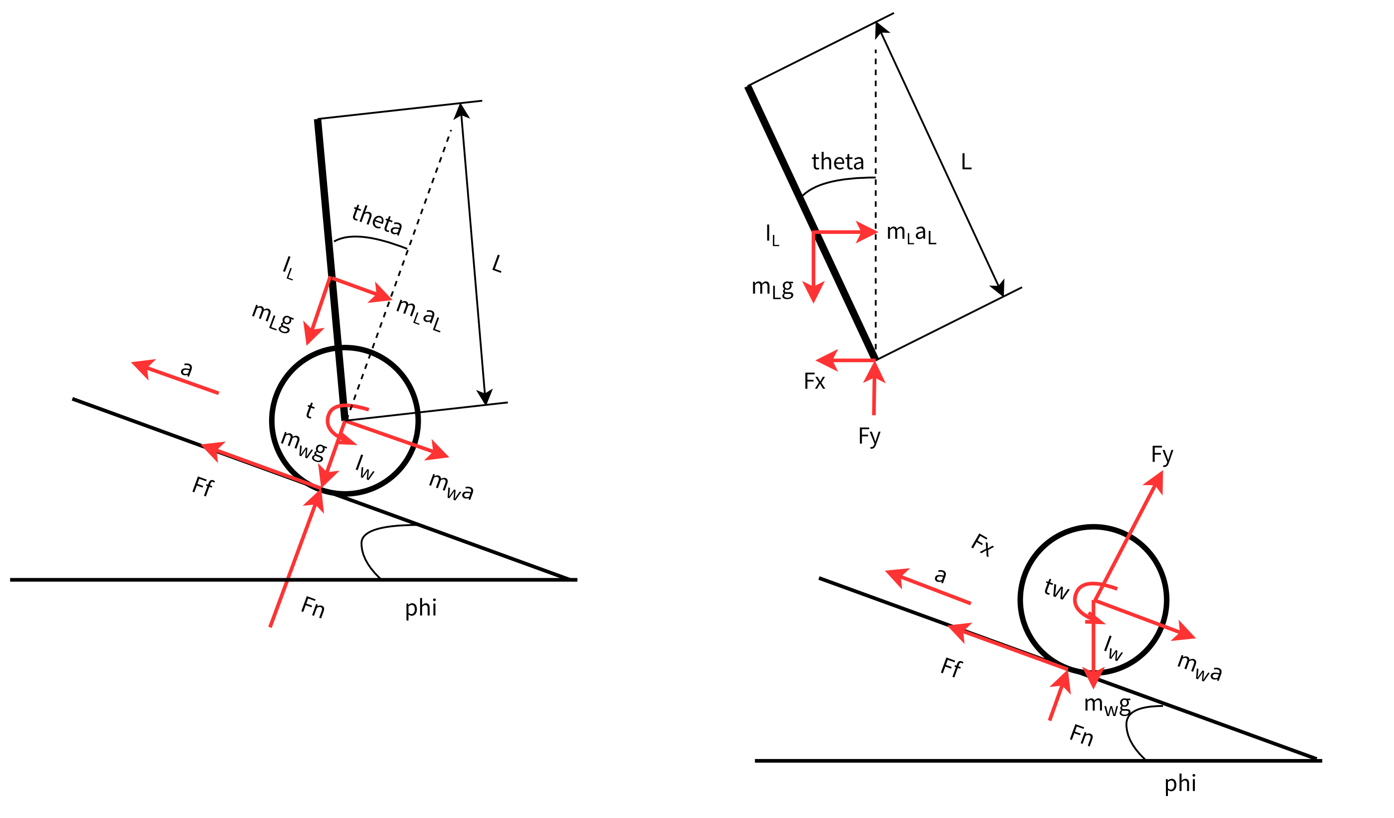
取Q = diag([100 1 1 1])，R = 1，用matlab自带lqr方法计算得到系数K

仿真：

https://git.ddt.dev:9281/lkx8421/lqr_webots/-/blob/master/worlds/first_order_inverted_pendulum.wbt

扩充：一阶倒立摆在斜坡上的动力学

以轮为例，输入为轮子的力矩 τ ，



受力分析与建模

基于上述分析，考虑机器人处于斜坡上的情况，作出以上受力分析图。

注意，建模过程基本和一阶倒立摆一致，但坐标系xoy沿着斜坡表面建立，而不是沿着地面建立。

同时，考虑了斜坡角度 ϕ 带来的重力项的影响。

问题一：已知tilt，求斜坡坡度 ϕ

> 上述力矩： τ_w 为施加在轮子上的力矩

连杆质心位置 $x_L = p + L\sin\theta$，$y_L = L\cos\theta$

此时，以斜坡法线为y轴，分析受力

1. 轮子受力分析

$F_f - m_w g sin(\phi) - F_x = m_w a$ ... (1)

$F_N - F_y - m_w g cos(\phi) = 0$ ... (2)

$\tau_w - F_f r = I_w \alpha$ ... (3)

$a = \alpha r$ ... (4)

2. 连杆受力分析

$F_x = m_L \ddot{x_L} + m_L gsin(\phi) = m_L(a + \frac{d^2}{dt^2}(L\sin\theta)) + m_L gsin(\phi)$ ... (5)

$F_y = m_L \ddot{y}_L + m_L gcos(\phi) = m_L \frac{d^2}{dt^2}(L\cos\theta) + m_L gcos(\phi)$ ... (6)

$-\tau + F_y L\sin\theta - \ F_x L\cos\theta \ = I_L\ddot{\theta}$ ...(7)

静态状况下斜坡估计推导

第一部分

将式(1)代入式(3)，得到

$\tau_w - (m_w a + F_x + m_w gsin(\phi))r = I_w(\frac{a}{r})$ ... (8)

将式(5)代入式(8)，

$\frac{\tau_w}{r} - (m_w a + (m_L(a + \frac{d^2}{dt^2}(L\sin\theta)) + m_L gsin(\phi)) + (m_w gsin(\phi))) = I_w(\frac{a}{r^2})$ ...(9)

将式(9)进行线性化处理

$(m_L + m_w + \frac{I_w}{r^2})a + m_L L\ddot{\theta} + m_L gsin(\phi) + m_w gsin(\phi) = \frac{\tau_w}{r}$ **.... (10)**

如果**考虑静态不加速**的状况 ,即 $a = 0, \ddot{\theta} = 0$

$(m_L + m_w)gsin(\phi)r = \tau_w$ **... (11)**

第二部分

将式(5)(6)代入式(7)

$-\tau + (m_L\frac{d^2}{dt^2}(L\cos\theta) + m_L gcos(\phi))L\sin\theta - \ (m_L(a + \frac{d^2}{dt^2}(L\sin\theta)) - m_L gsin(\phi))L\cos\theta \ = I_L\ddot{\theta}$

... (12)

对式(12)进行线性化处理：

$-\tau + (m_L gcos(\phi))L\sin\theta - \ (m_L(a + L\ddot{\theta}))L\cos\theta - m_L gsin(\phi)L\cos\theta \ = I_L\ddot{\theta}$ **... (13)**

考虑静态的状况：(即 $a = 0, \ddot{\theta} = 0$)

$(m_L gcos(\phi))L\sin\theta - m_L gsin(\phi)L\cos\theta \ = \tau$ **... (14)**

将 τ 替换，即将式(11)代入式(14)

$(m_L gcos(\phi))L\sin\theta - m_L gsin(\phi)L\cos\theta \ = (m_L + m_w)gsin(\phi)r$ ... (15)

化简：

$$(cos(\phi))L\sin\theta - sin(\phi)L\cos\theta \ = \frac{m_L+m_w}{m_L}sin(\phi)r \quad ... (16)$$

根据三角函数求和公式，

$$Lsin(\theta-\phi) \ = \frac{m_L+m_w}{m_L}sin(\phi)r \quad ... (17)$$

由于 $\theta = tilt + \phi$

$$sin(\phi) = \frac{m_L}{m_L+m_w}\frac{L}{r}sin(tilt) \quad \textbf{... (18)}$$

由此找到 ϕ 和tilt在静态时的关系，这个 ϕ 是机器人x方向上的梯度。

最大梯度求解

已知y方向梯度（ground_tilt）和x方向上的梯度，求当前所处在路面的最大梯度 ϕ

设沿机器人x方向的单位向量为 $(\Delta x_1, \Delta z_1)$,测得的坡度为 ϕ_1

沿机器人y方向的单位向量为 $(\Delta x_2, \Delta z_2)$,测得的ground_tilt为 ϕ_2

$$\Delta x^2 \ = \frac{1}{1+tan\phi^2}$$

$$\Delta z^2 \ = \frac{tan\phi^2}{1+tan\phi^2}$$

则而可求出最大梯度 （即当前所处斜坡的最大坡度）

$$tan(\phi) = \sqrt{\frac{\Delta z_1^2+\Delta z_2^2}{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2}} \quad \textbf{... (19)}$$

动态估计坡度变化：坡度状态观测器

将 ϕ 视作一个**扩展状态**，进入到建模当中，期望通过**扩张状态观测器**的方式降低机器人加减速时对于坡度估计带来的影响。

由于斜坡倾斜程度不影响pitch角，为方便运算，考虑直接使用一阶倒立摆模型进行建模。

Ground tilt和phi的合梯度计算非线性较强，不考虑在观测器内。 （不然可能要做EKF之类的，增大运算量）

状态变量选取:

$$X \ = \begin{bmatrix} tilt \\ d_{tilt} \\ x \\ d_x \\ \phi, \end{bmatrix}$$

输出变量选取：

$$Y = \begin{bmatrix} tilt \\ d_{tilt} \\ x \\ d_x \end{bmatrix}$$

输入变量

$u = \tau$

状态 $x_5 = \phi$ 为**待观测变量**

一般认为 $\dot{\phi} = 0$, $\ddot{\phi} = 0$ 即斜坡坡度不发生改变

由式(10):

$$(m_L + m_w + \frac{I_w}{r^2})a + m_L L\ddot{\theta} + m_L gsin(\phi) + (m_w gsin(\phi)) = \frac{\tau_w}{r}$$ **.... (10)**

得到

$$\ddot{\theta} = \frac{\tau_w}{r} - \frac{(m_L + m_w + \frac{I_w}{r^2})a - (m_L + m_w)gsin(\phi)}{m_L L}$$ .... (20)

由于通常认为坡度不变，因此，

$$\dot{x_2} = \frac{u}{r} - \frac{(m_L + m_w + \frac{I_w}{r^2})\dot{x_4} - (m_L + m_w)gsin(x_5)}{m_L L}$$ .... **(21)**

由式(13)

$$-\tau + (m_L g * cos(\phi))L\sin\theta - \ (m_L(a + L\ddot{\theta}))L\cos\theta - m_L gsin(\phi)L\cos\theta \ = I_L\ddot{\theta}$$ **... (13)**

进一步线性化

$$-\tau + (m_L g * cos(\phi))L\sin\theta - \ (m_L(a + L\ddot{\theta}))L - m_L gsin(\phi)L\cos\theta \ = I_L\ddot{\theta}$$ ... (22)

$$\frac{-\tau}{I_L} + \frac{(m_L g * cos(\phi))L\sin\theta}{I_L} - \frac{m_L La}{I_L} - \frac{m_L gsin(\phi)Lcos\theta}{I_L} \ = \frac{m_L L^2 + I_L}{I_L}\ddot{\theta}$$

三角函数和化简

$$\frac{-\tau}{I_L} + \frac{(m_L g)L\sin(\theta - \phi)}{I_L} - \frac{m_L La}{I_L} \ = \frac{m_L L^2 + I_L}{I_L}\ddot{\theta}$$ ... (23)

于是,进一步线性化

$$\frac{-u}{I_L} + \frac{(m_L g)L\sin(x_1)}{I_L} - \frac{m_L L\dot{x_4}}{I_L} \ = \frac{m_L L^2 + I_L}{I_L}\dot{x_2}$$

注意到这里，x5都被消掉了,再做下化简和线性化

$$\frac{-u + (m_L g)Lx_1 - m_L L\dot{x_4}}{m_L L^2 + I_L} = \dot{x_2}$$ ... **(24)**

于是，将 **(21)** 代入 **(24)**

$$\frac{-u+(m_Lg)Lx_1-m_LL\dot{x_4}}{m_LL^2+I_L}=\frac{u}{r}-\frac{(m_L+m_w+\frac{I_w}{r^2})\dot{x_4}-(m_L+m_w)gsin(x_5)}{m_LL}$$

合并同类项，

$$\left(-\frac{1}{I_L+L^2\,m_L}-\frac{1}{r}\right)u+\left(\frac{m_L+m_w+\frac{I_w}{r^2}}{L\,m_L}-\frac{m_LL}{I_L+L^2\,m_L}\right)\dot{x_4}+\frac{L\,g\,m_L}{I_L+L^2\,m_L}x_1+\frac{(m_L+m_w)gsin(x_5)}{m_LL}=0$$

$$b_1u+a_1\dot{x_4}+a_2x_1+a_3x_5=0$$

$$b_1=\left(-\frac{1}{I_L+L^2\,m_L}-\frac{1}{r}\right)$$

$$a_1=\left(\frac{m_L+m_w+\frac{I_w}{r^2}}{L\,m_L}-\frac{m_LL}{I_L+L^2\,m_L}\right)$$

$$a_2=\frac{L\,g\,m_L}{I_L+L^2\,m_L}$$

$$a_3=\frac{(m_L+m_w)g}{m_LL}$$

故

$$\dot{x_4}=-\frac{a_3}{a_1}x_5-\frac{a_2}{a_1}x_1-\frac{b_1}{a_1}u$$ **...(25)**

由**(24)，**

$$\frac{-u+(m_Lg)Lx_1-m_LL(-\frac{a_3}{a_1}x_5-\frac{a_2}{a_1}x_1-\frac{b_1}{a_1}u)}{m_LL^2+I_L}=\dot{x_2}$$

合并同类项后

$$b_2=\frac{m_LL\frac{b_1}{a_1}-1}{m_L*L^2+I_L}$$

$$a_4=\frac{m_LgL+m_LL\frac{a_2}{a_1}}{m_L*L^2+I_L}$$

$$a_5=\frac{m_LL\frac{a_3}{a_1}}{m_L*L^2+I_L}$$

$$\dot{x_2}=b_2*u+a_4*x_1+a_5*x_5$$ **...(26)**

总结一下：

$$\dot{x_2}=b_2*u+a_4*x_1+a_5*x_5$$ **...(26)**

$\dot{x_4} = -\frac{b_1}{a_1}u - \frac{a_2}{a_1}x_1 - \frac{a_3}{a_1}x_5$ **...(25)**

$\dot{x_5} = 0$

从而得到状态空间模型为，并构成ESO：

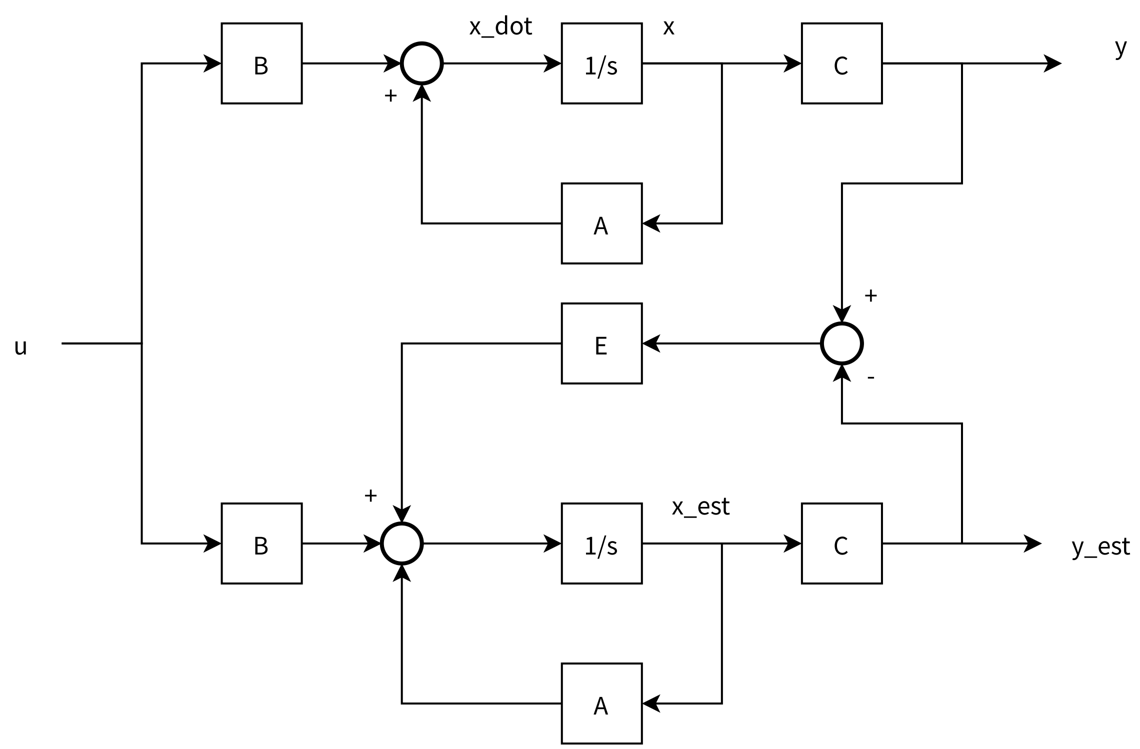
$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a_2}{a_1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{a_3}{a_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ -\frac{b_1}{a_1} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} X = CX$$

对于该状态空间方程，其能观矩阵 Obs = [CA CA^2 CA^3....]，其秩为5，系统能观，**可以设计龙伯格状态观测器。**

$\dot{\hat{x}} = (A - EC)\hat{x} + Ey + Bu$

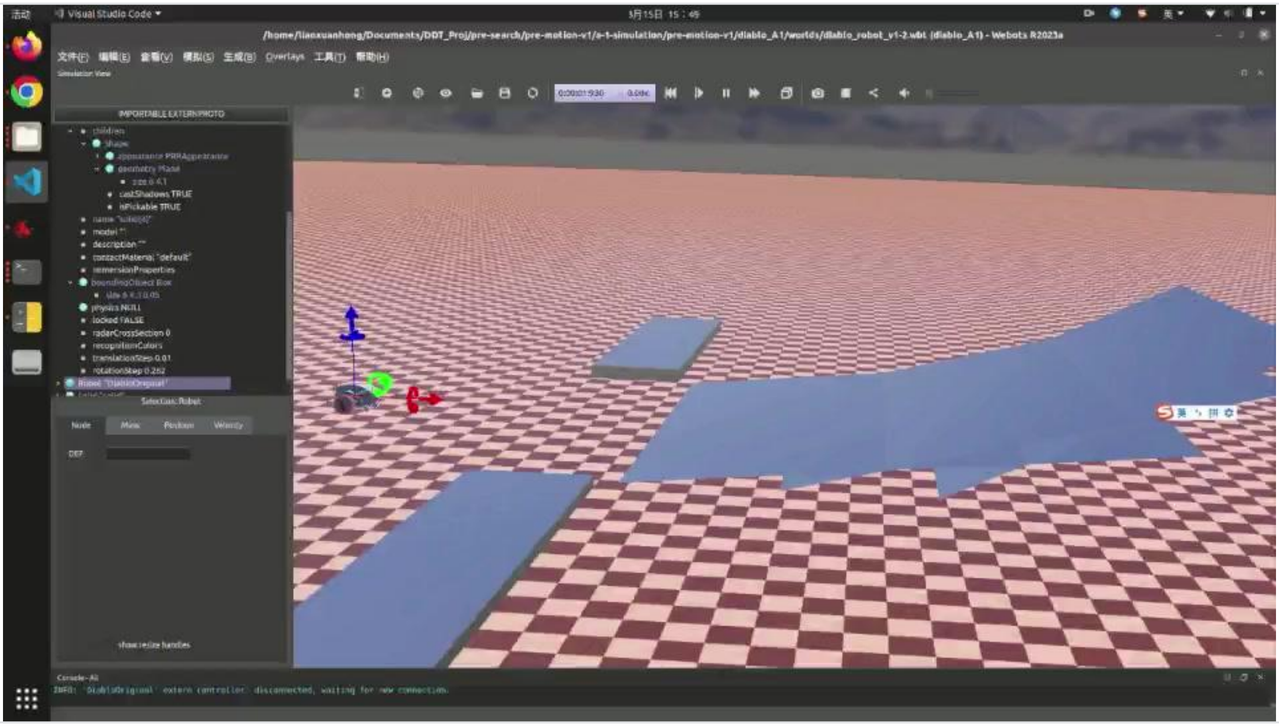
其中E为龙波格观测器增益，龙伯格观测器框图如下所示：



效果对比

下图中，绿线为静态计算的结果，紫线为观测器结果。主要有以下几个特点：

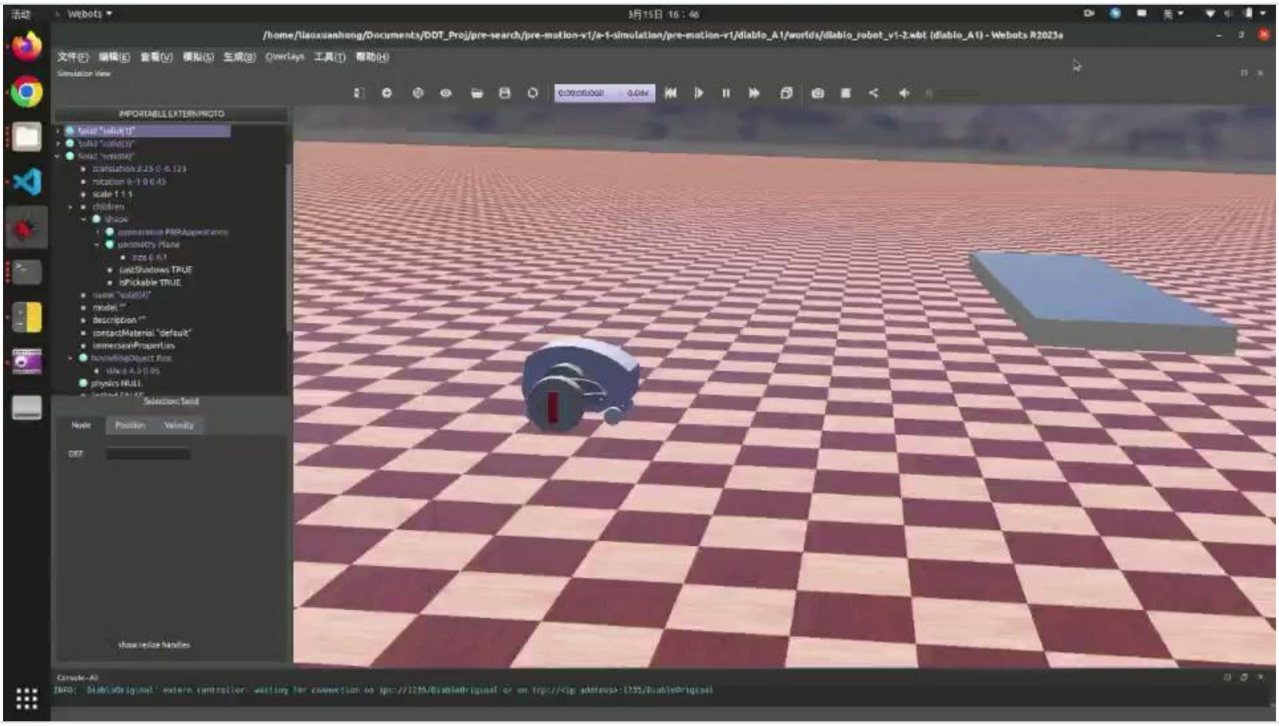
1. 静态计算跟模型本身强关联，在动态的时候波动明显大于观测器，但由于消除了力矩的影响，在轮毂力矩发生震荡时，坡度的震荡较少。
2. 观测器有引入了力矩的因素，如果控制参数没调好，使得力矩一直在波动，则会造成坡度估计的振铃和抖动，需要专门做处理。
3. 观测器在模型参数不太准的情况下，依然可以有较好的鲁棒性，**对于坡度估计的准确值会大于静态计算**。



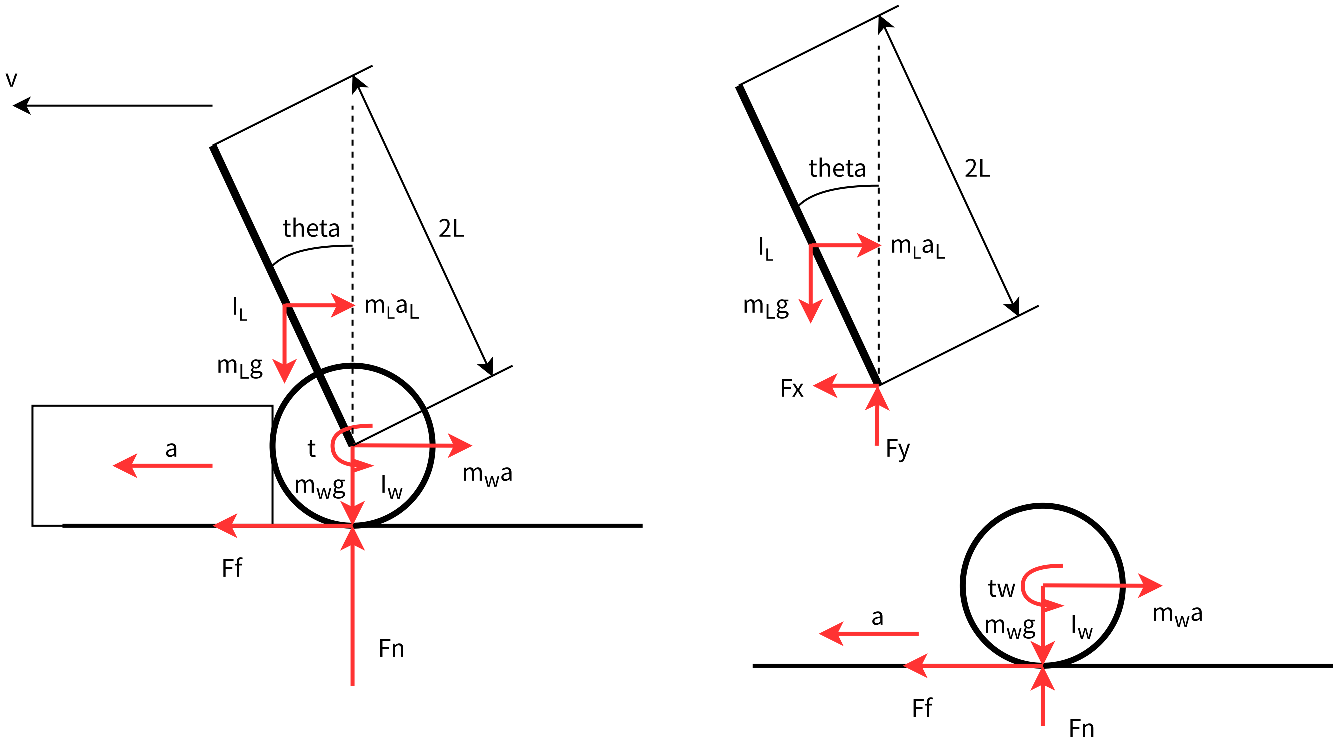
应用及后续

障碍检测

当轮足机器人遇到障碍时，可以认为是遇到了一个坡度为90度的斜坡，状态观测器使得机器人对于是否遇到了无法越过的坎这个事情有了更加灵敏的判定，可作为触发机器人越障以及停障的一个重要标志位。（0:40开始）



TODO：高速急停



最简单的做法：根据斜坡坡度phi急剧减少vel_output。

vel_output的降低速率应该由机器人基座的速度来提供，撞击时速度越大，vel_output减少越多。

当基座的v = 0,

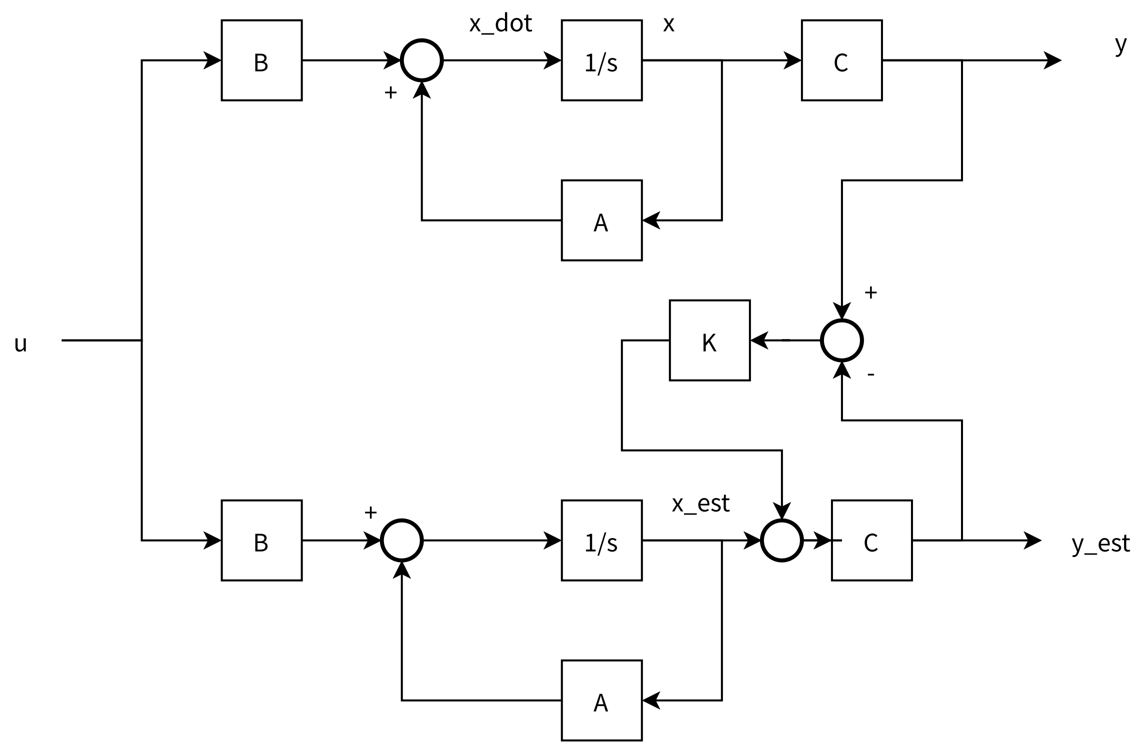
TODO： 沟槽自动脱困

障碍检测的延申应用。

TODO:斜坡上的力矩补偿

TODO： 卡尔曼滤波 + 坡度估计

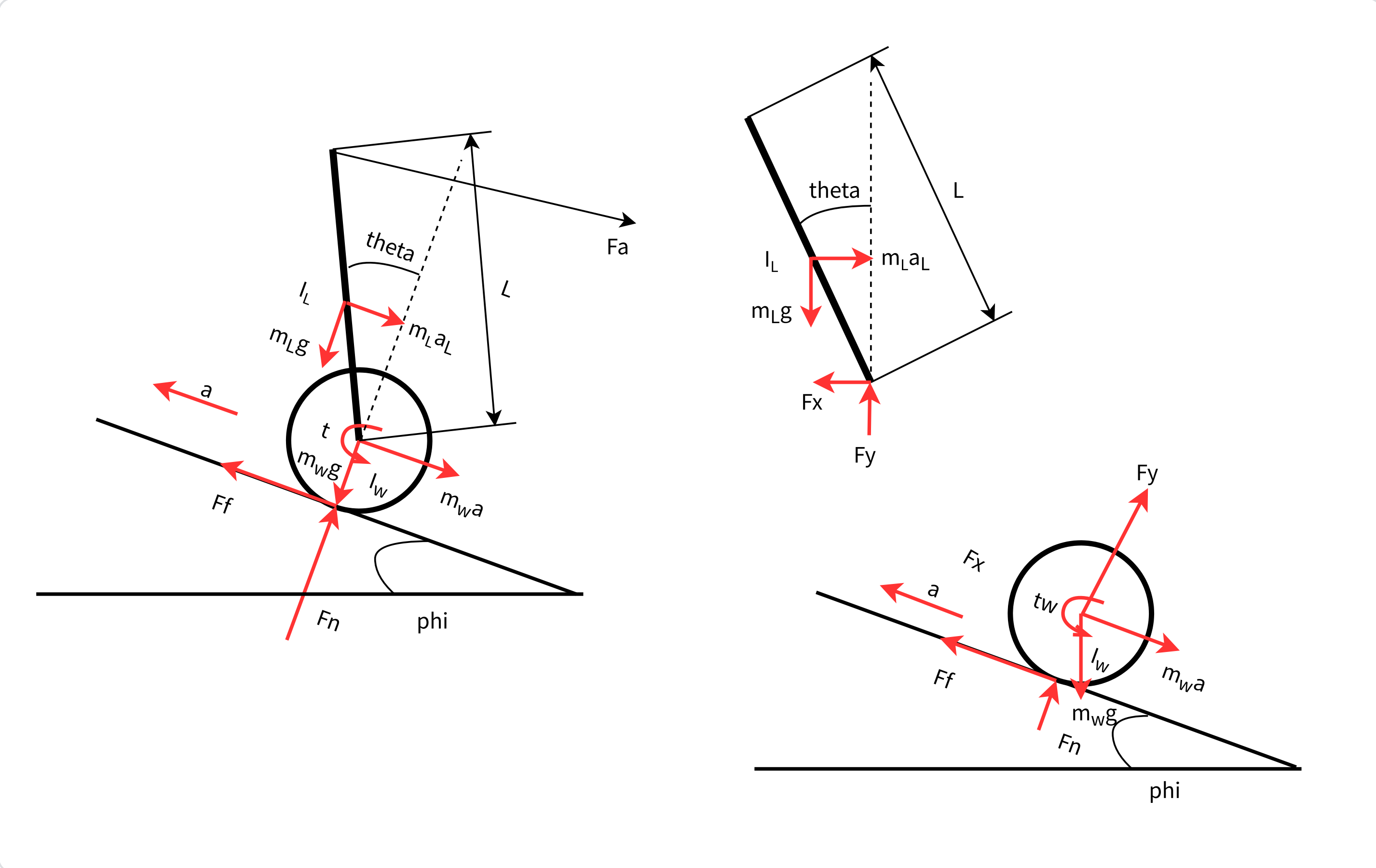
当前观测器**没有考虑随机噪声**问题，对于瞬态响应的精度应该不如直接用EKF。



当前观测器，稳定性上可以保证，而且不用实时更新P矩阵，运算量确保了基本部署在单片机上问题不大。

扩充2：外力估计

假设存在一个水平于x的外力作用在机器人的基座上，一阶倒立摆的简化模型如图所示，尝试观测该外力的作用大小，并作为LQR控制的指令输入参考。



1. 轮子受力分析

$F_f - m_w gsin(\phi) - F_x = m_w a$ ... (1)

$F_N - F_y - m_w gcos(\phi) = 0$ ... (2)

$\tau_w - F_f r = I_w \alpha$ ... (3)

$a = \alpha r$ ... (4)

2. 连杆受力分析

$F_x - F_a = m_L \ddot{x_L} + m_L gsin(\phi) = m_L(a + \frac{d^2}{dt^2}(L\sin\theta)) + m_L gsin(\phi)$ ... (5)

$F_y = m_L \ddot{y}_L + m_L gcos(\phi) = m_L \frac{d^2}{dt^2}(L\cos\theta) + m_L gcos(\phi)$ ... (6)

$-\tau + F_y L\sin\theta -（F_x - F_a）L\cos\theta = I_L\ddot{\theta}$ ...(7)

静态状况下斜坡估计推导

第一部分

将式(1)代入式(3)，得到

$\tau_w - (m_w a + F_x + m_w gsin(\phi))r = I_w(\frac{a}{r})$ ... (8)

将式(5)代入式(8)，

$$\frac{\tau_w}{r} - (m_w a + (m_L(a + \frac{d^2}{dt^2}(L\sin\theta)) + m_L gsin(\phi)) + (m_w gsin(\phi)) + F_a) = I_w(\frac{a}{r^2})$$ ...(9)

将式(9)进行线性化处理

$$(m_L + m_w + \frac{I_w}{r^2})a + m_L L\ddot{\theta} + m_L gsin(\phi) + (m_w gsin(\phi)) + F_a = \frac{\tau_w}{r}$$ **.... (10)**

如果考虑**静态不加速**的状况 ,即 $a = 0, \ddot{\theta} = 0$

$$(m_L + m_w)gsin(\phi)r + F_a = \tau_w$$ **... (11)**

第二部分

将式(5)(6)代入式(7) 【不变】

$$-\tau + (m_L\frac{d^2}{dt^2}(L\cos\theta) + m_L gcos(\phi))L\sin\theta - (m_L(a + \frac{d^2}{dt^2}(L\sin\theta)) - m_L gsin(\phi))L\cos\theta = I_L\ddot{\theta}$$

... (12)

对式(12)进行线性化处理：【不变】

$$-\tau + (m_L gcos(\phi))L\sin\theta - (m_L(a + L\ddot{\theta}))L\cos\theta - m_L gsin(\phi)L\cos\theta = I_L\ddot{\theta}$$ **... (13)**

考虑静态的状况：即 $a = 0, \ddot{\theta} = 0$

$$(m_L gcos(\phi))L\sin\theta - m_L gsin(\phi)L\cos\theta = \tau$$ **... (14)**

将 τ 替换，即将式(11)代入式(14)

$$(m_L gcos(\phi))L\sin\theta - m_L gsin(\phi)L\cos\theta = (m_L + m_w)gsin(\phi)r + F_a$$ ... (15)

化简：

$$(cos(\phi))L\sin\theta - sin(\phi)L\cos\theta = \frac{m_L + m_w}{m_L}sin(\phi)r + \frac{F_a}{m_L}$$ ... (16)

根据三角函数求和公式，

$$L * sin(\theta - \phi) = \frac{m_L + m_w}{m_L}sin(\phi)r + \frac{F_a}{m_L}$$ ... (17)

由于 $\theta = tilt + \phi$

$$sin(\phi) = \frac{m_w}{m_L + m_w}\frac{L}{r}sin(tilt) + F_a$$ **... (18)**

这里隐含了一个点：假定当前在平地上，即 $sin(\phi) = 0$ ，则通过tilt角，当机器人达到稳态时，即可算出机器人的水平扰动力Fa。

动态估计外力变化：扰动观测器

状态变量选取

$$X=\begin{bmatrix} tilt \\ d_{tilt} \\ x \\ d_x \\ \phi \\ F_a \end{bmatrix}$$

输出变量选取：

$$Y=\begin{bmatrix} tilt \\ d_{tilt} \\ x \\ d_x \end{bmatrix}$$

输入变量

$u=\tau$

状态x5为**待观测变量**

一般认为 $\dot{\phi}=0$, $\ddot{\phi}=0$ 即斜坡坡度不发生改变

由式(10):

$$(m_L+m_w+\frac{I_w}{r^2})a+m_L L\ddot{\theta}+m_L gsin(\phi)+(m_w gsin(\phi))+F_a=\frac{\tau_w}{r}$$ **.... (10)**

得到

$$\ddot{\theta}=\frac{\tau_w}{r}-\frac{(m_L+m_w+\frac{I_w}{r^2})a-(m_L+m_w)gsin(\phi)-F_a}{m_L L}$$ .... (20)

由于通常认为坡度不变，因此，

$$\dot{x_2}=\frac{u}{r}-\frac{(m_L+m_w+\frac{I_w}{r^2})\dot{x_4}-(m_L+m_w)gsin(x_5)-F_a}{m_L L}$$ **.... (21)**

由式(13)

$$-\tau+(m_L g*cos(\phi))L\sin\theta-\ (m_L(a+L\ddot{\theta}))L\cos\theta-m_L gsin(\phi)L\cos\theta\ =I_L\ddot{\theta}$$ **... (13)**

进一步线性化

$$-\tau+(m_L g*cos(\phi))L\sin\theta-\ (m_L(a+L\ddot{\theta}))L-m_L gsin(\phi)L\cos\theta\ =I_L\ddot{\theta}$$ ... (22)

$$\frac{-\tau}{I_L}+\frac{(m_L g*cos(\phi))L\sin\theta}{I_L}-\frac{m_L La}{I_L}-\frac{m_L gsin(\phi)Lcos(\theta)}{I_L}\ =\frac{m_L L^2+I_L}{I_L}\ddot{\theta}$$

三角函数和化简

$$\frac{-\tau}{I_L}+\frac{(m_L g)L\sin(\theta-\phi)}{I_L}-\frac{m_L La}{I_L}\ =\frac{m_L L^2+I_L}{I_L}\ddot{\theta}$$ ... (23)

于是,进一步线性化

$$\frac{-u}{I_L}+\frac{(m_L g)L\sin(x_1)}{I_L}-\frac{m_L L\dot{x_4}}{I_L} = \frac{m_L L^2+I_L}{I_L}\dot{x_2}$$

注意到这里，x5都被消掉了,再做下化简和线性化

$$\frac{-u+(m_L g)Lx_1-m_L L\dot{x_4}}{m_L L^2+I_L}=\dot{x_2} \quad \ldots \textbf{(24)}$$

于是，将 **(21)** 代入 **(24)**

$$\frac{-u+(m_L g)Lx_1-m_L L\dot{x_4}}{m_L L^2+I_L}=\frac{u}{r}-\frac{(m_L+m_w+\frac{I_w}{r^2})\dot{x_4}-(m_L+m_w)gsin(x_5)-F_a}{m_L L}$$

合并同类项，

$$\left(-\frac{1}{I_L+L^2\,m_L}-\frac{1}{r}\right)u+\left(\frac{m_L+m_w+\frac{I_w}{r^2}}{L\,m_L}-\frac{m_L L}{I_L+L^2\,m_L}\right)\dot{x_4}+\frac{L\,g\,m_L}{I_L+L^2\,m_L}x_1+\frac{(m_L+m_w)gsin(x_5)+F_a}{m_L L}=0$$

$$b_1 u+a_1\dot{x_4}+a_2 x_1+a_3 x_5+a_{31}x_6=0$$

$$b_1=\left(-\frac{1}{I_L+L^2\,m_L}-\frac{1}{r}\right)$$

$$a_1=\left(\frac{m_L+m_w+\frac{I_w}{r^2}}{L\,m_L}-\frac{m_L L}{I_L+L^2\,m_L}\right)$$

$$a_2=\frac{L\,g\,m_L}{I_L+L^2\,m_L}$$

$$a_3=\frac{(m_L+m_w)g}{m_L L}$$

$$a_{31}=\frac{1}{m_L L}$$

故

$$\dot{x_4}=-\frac{a_3}{a_1}x_5-\frac{a_2}{a_1}x_1-\frac{a_4}{a_1}x_6-\frac{b_1}{a_1}u \quad \textbf{...(25)}$$

由**(24)**,

$$\frac{-u+(m_L g)Lx_1-m_L L(-\frac{a_3}{a_1}x_5-\frac{a_2}{a_1}x_1-\frac{b_1}{a_1}u)}{m_L L^2+I_L}=\dot{x_2}$$

合并同类项后

$$\dot{x_2}=b_2*u+a_4*x_1+a_5*x_5 \quad \textbf{...(26)}$$

$$b_2 = \frac{m_L L \frac{b_1}{a_1} - 1}{m_L * L^2 + I_L}$$
$$a_4 = \frac{m_L g L + m_L L \frac{a_2}{a_1}}{m_L * L^2 + I_L}$$
$$a_5 = \frac{m_L L \frac{a_3}{a_1}}{m_L * L^2 + I_L}$$

总结一下：

$\dot{x_2} = b_2 * u + a_4 * x_1 + a_5 * x_5$ **...(26)**

$\dot{x_4} = -\frac{a_3}{a_1} x_5 - \frac{a_2}{a_1} x_1 - \frac{a_4}{a_1} x_6 - \frac{b_1}{a_1} u$ **...(25)**

$\dot{x_5} = 0$

$\dot{x_6} = 0$

从而得到状态空间模型为，并构成ESO：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_2}{a_1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{a_3}{a_1} & \frac{-a_{31}}{a_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ -\frac{b_1}{a_1} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

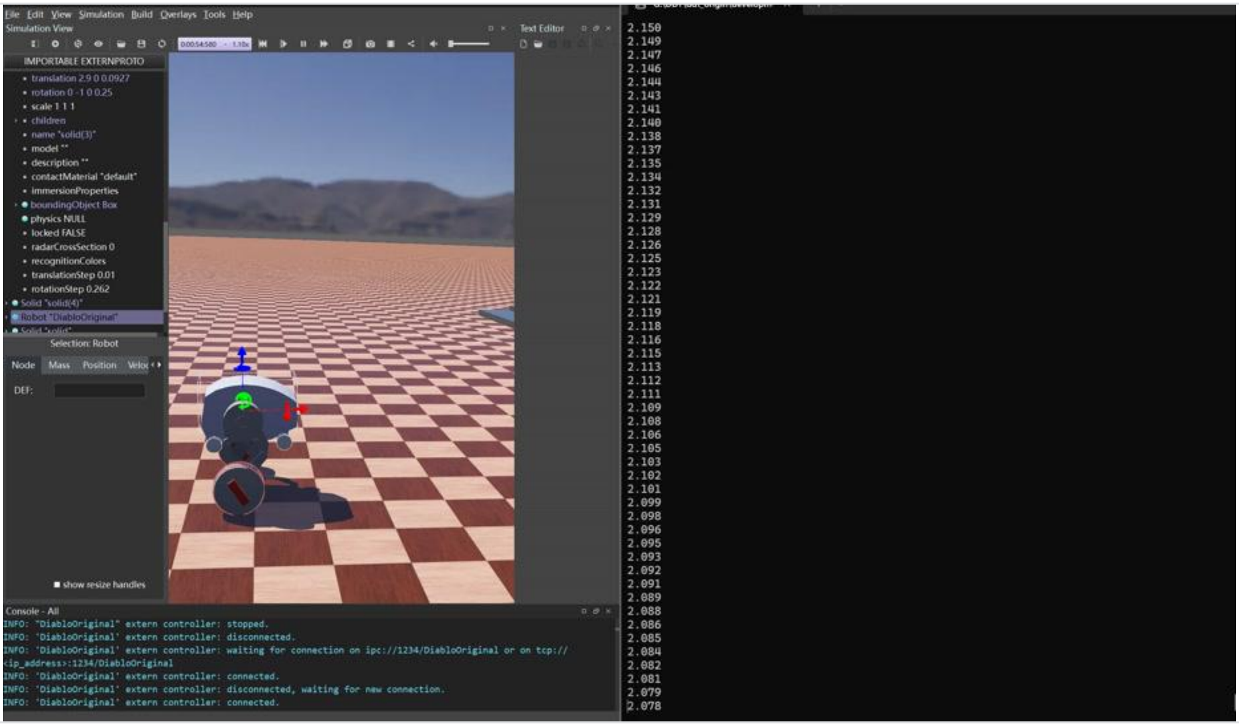
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

对于该状态空间方程，其能观矩阵 Obs = [CA CA^2 CA^3....]，其秩为6，系统能观，**可以设计龙伯格状态观测器。**

$\dot{\hat{x}} = (A - EC)\hat{x} + Ey + Bu$

效果：

注意，观测器默认外力作用点在转轴（质心）处，换言之，如果外力作用在其他点，那就只能得到在转轴处平行于地面的等效力。



TODO： 打滑检测

当观测器在机器人加速时检测到较大坡度变化时，由于此时 Ff > Ff_max，理论上可以认为是地面太滑导致的，需要进一步推导。

通过测试发现：由外力项Fa和斜坡phi，非常容易判断出来机器人是不是打滑了。（tilt角干到22度的时候外力估计达到很大），但只有机器人开始打滑了之后才会出现外力Fa和斜坡phi的异常增加。在实时运行的过程中，如果没有突破最大摩擦力，无法观测出来摩擦系数。

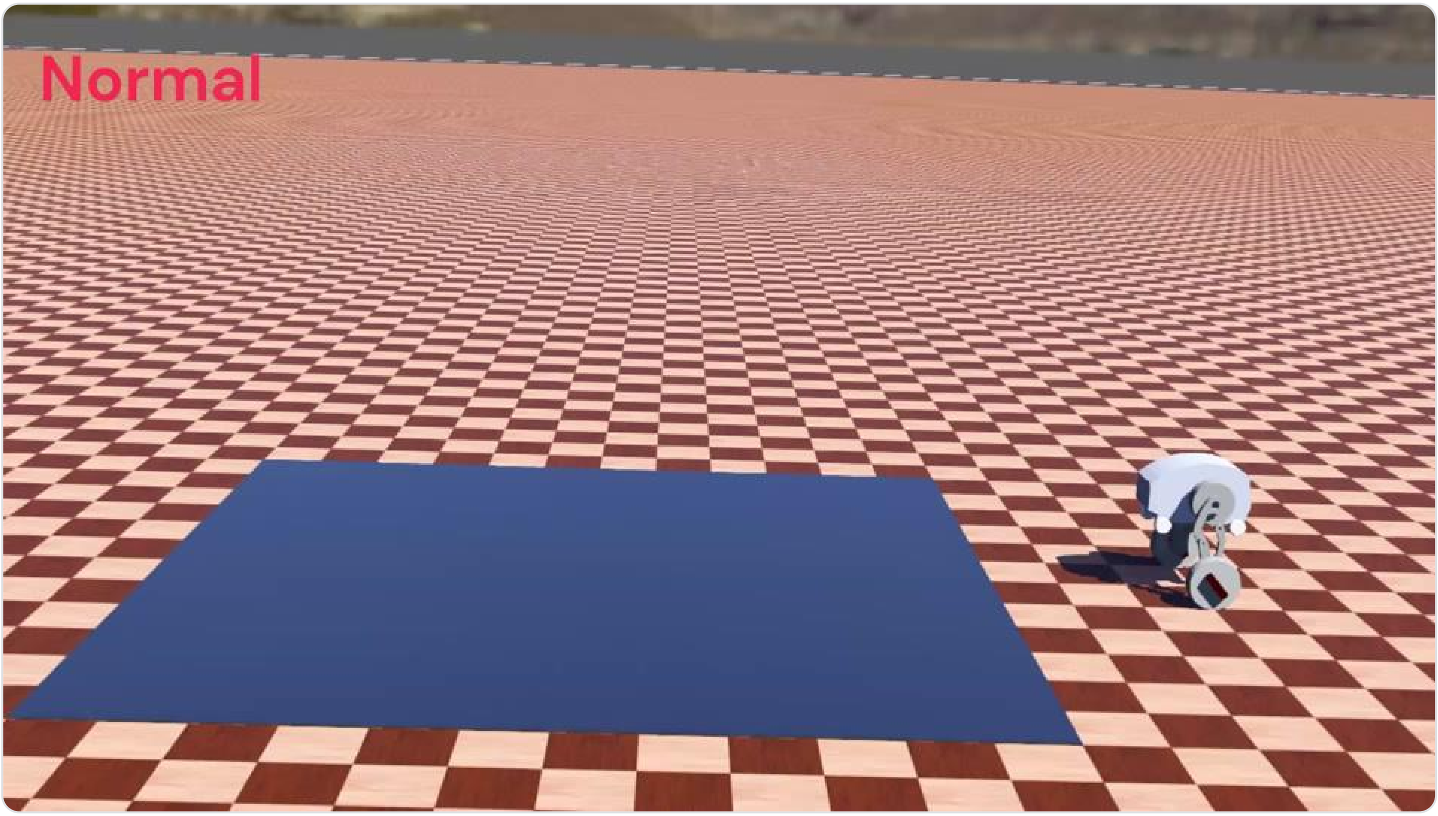
问题就在于：如果已经突破了最大摩擦力，应该如何让机器人不倒。是不是可以利用劈叉等姿态介入呢?

可能需要引入LIPM模型

一个比较简单的做法如下：当检测到机器人外力异常增大时，直接限制vel_output的输出。

接下来的一个问题：怎样限制和规划vel_output的力矩输出，并对当前地面的摩擦系数加以判定。

另外一旦从光滑地面进入到粗糙地面，怎样设计控制器/逻辑流，才能恢复机器人的加速度输出？（比如逐步试探？）



TODO：通过速度指令进行外力补偿

计算虚拟力矩，使用无外力的斜坡模型：

$$(m_L + m_w + \frac{I_w}{r^2})a + m_L L\ddot{\theta} + (m_L g + m_w g sin(\phi)) = \frac{\tau_w}{r}$$ **.... (10)**

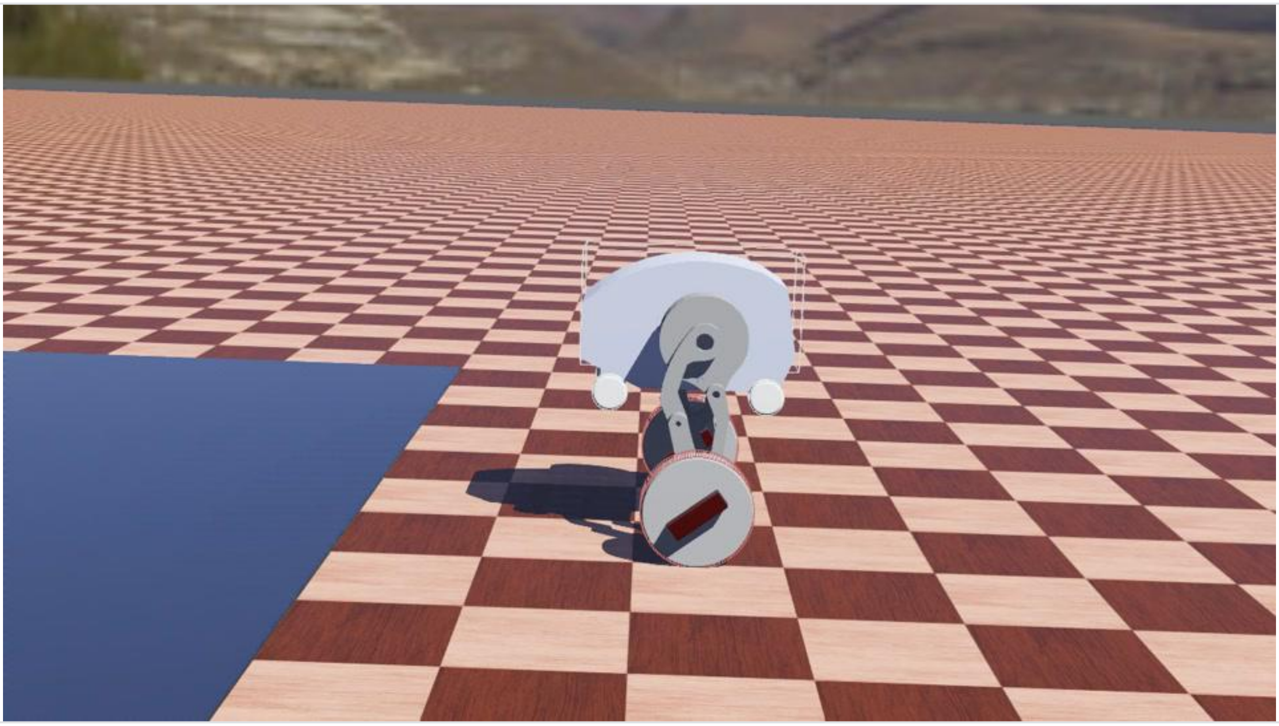
$$-\tau + (m_L g cos(\phi))L\sin\theta - \ (m_L(a + L\ddot{\theta}))L\cos\theta - m_L g sin(\phi)L\cos\theta \ = I_L\ddot{\theta}$$ **... (13)**

θ 以及 τ 可测得，因此可以直接求出a和 $\ddot{\theta}$ ，从而求得：

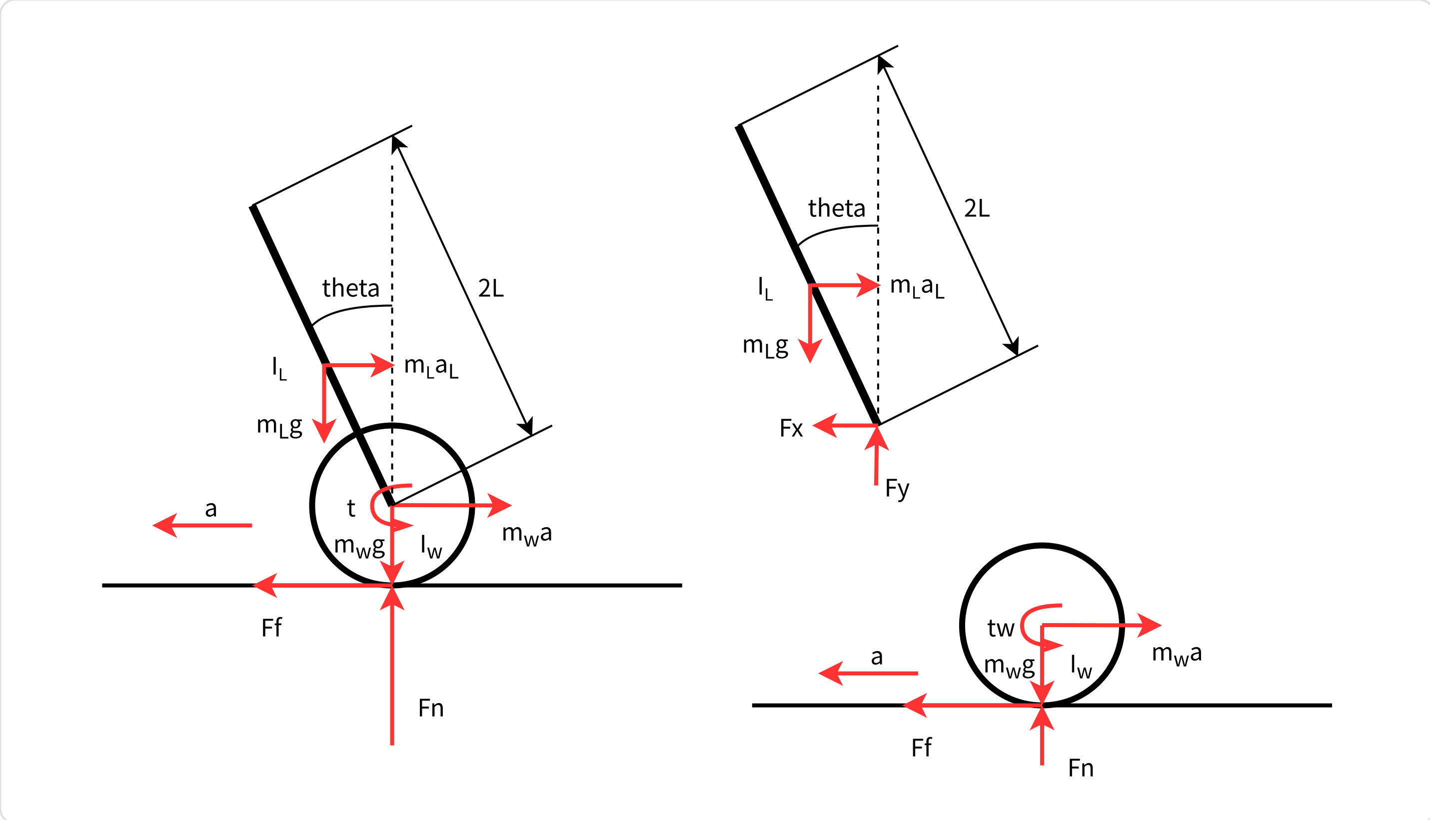
$$F_x = m_L\ddot{x_L} + m_L g sin(\phi) = m_L(a + \frac{d^2}{dt^2}(L\sin\theta)) + m_L g sin(\phi) = m_L(a + L\ddot{\theta})$$ ... (5)

理论上，如果外力平衡，应当有 $F_x - F_a \to 0$ ，由此作为反馈补偿。

实际测试发现：结合质心辨识，效果更好：



扩充3：劈叉姿态引入



连杆质心位置 $x_L = p + L\sin\theta$，$y_L = L\cos\theta$

1. 轮子受力分析

$F_{fmax} = m_w a + F'_x$ (1)

$F_N - F'_y = m_w g$ (2)

$\tau_w - F_{fmax} r = I_w \alpha$ (3)

速度约束： $a = \alpha r$ 在这里不成立，因为机器人打滑

如果 $F_f = 0$，代入到(1)(3)中

$0 = m_w a + F'_x$ (1)

$F_N - F'_y = m_w g$ (2)

$\tau_w = I_w \alpha$ (3)

2. 连杆受力分析

$F_x = m_L \ddot{x}_L = m_L(a + \frac{d^2}{dt^2}(L\sin\theta))$ (4)

$F_y - m_L g = m_L \ddot{y}_L = m_L \frac{d^2}{dt^2}(L\cos\theta)$ (5)

$-\tau + F_y L\sin\theta - \ F_x L\cos\theta \ = I_L \ddot{\theta}$ (6)

线性化，即 $\sin\theta = \theta$， $\cos\theta = 1$，**舍去高阶项有**

$F_x = m_L(a + L\ddot{\theta})$

$F_y = m_L g$

$\tau_w - m_L L g\theta + \ m_L L(a + L\ddot{\theta}) \ = -I_L\ddot{\theta}$

$-m_w a = m_L(a + L\ddot{\theta})$

$-\tau + m_L g L\sin\theta - \ (-m_w a)L\cos\theta \ = I_L\ddot{\theta}$ (6)

3. 消除内力，地面摩擦力，有
   - 由轮子受力： $(m_L + m_w + \frac{I_w}{r^2})a + m_L L\ddot{\theta} = \frac{\tau_w}{r}$
   - 由连杆受力： $m_L L a + (m_L L^2 + I_L)\ddot{\theta} = m_L g L\theta - \tau_w$

假如地面绝对光滑，那么必然， a = 0

轮子受力： $0 + m_L L\ddot{\theta} = \frac{\tau_w}{r}$

$\ddot{\theta} = \frac{\tau_w}{m_L L r}$

连杆受力，$(m_L L^2 + I_L)\ddot{\theta} = m_L g L\theta - \tau_w$

$(m_L L^2 + I_L)(\frac{\tau_w}{m_L L r}) = m_L g L\theta - \tau_w$

惯量简单化（ $I_L = m_L L^2$?)

$(\frac{2L\tau_w}{r}) = m_L g L\theta - \tau_w$

将式(1)代入式(3)，

估计：

$$
\begin{aligned}
F_{fmax} &= m_w a + (m_L(a + \frac{d^2}{dt^2}(L\sin\theta))) \\
&= (m_w + m_L)a + m_L L(\dot{\theta}cos(\theta))' \\
&= (m_w + m_L)a + m_L L(\ddot{\theta}cos(\theta) - \dot{\theta}sin(\theta)) \\
&= (m_w + m_L)a + m_L L(\ddot{\theta} - \dot{\theta}\theta)
\end{aligned}
$$

$F_f = \mu F_N$

$\tau_w - F_{fmax} r = I_w \alpha$ (3)

- 由轮子受力： $(m_L + m_w + \frac{I_w}{r^2})a + m_L L\ddot{\theta} = \frac{\tau_w}{r}$
- 由连杆受力： $m_L La + (m_L L^2 + I_L)\ddot{\theta} = m_L gL\theta - \tau_w$

$-\tau + m_L gL\sin\theta - \ (m_L(L\ddot{\theta}))L\cos\theta \ = I_L\ddot{\theta}$ (6)

$\tau_w = I_w \alpha$ (3)

基座受力

$F_{x1} = m_L(L\ddot{\theta}_{v1})$ （光滑状态）

$F_{x2} = m_L(a_{v2} + L\ddot{\theta}_{v2})$ (正常状态)

扩充4：零后移加速

与通过速度补偿进行外力估计类似。

首先，由于头部采取的是位移控制，因此假设 $\ddot{\theta} = 0$

目标输入是机器人的加速度，从而计算得到目标角度 θ^*

随着机器人的轮毂力矩增大，为了维持目标加速度，目标 θ^* 要继续增大。

当 $\theta^* = \theta_{max}$ 的时候终止， θ_{max} 由人为确定。

$-\tau + (m_L gcos(\phi))L\sin\theta - \ (m_L a)L\cos\theta - m_L gsin(\phi)L\cos\theta \ = 0$ **... (13)**

$\frac{-\tau + (m_L gcos(\phi))L\sin\theta - m_L gsin(\phi)L\cos\theta}{m_L L\cos\theta} = a$ **... (13)**

直接线性化：

$$\frac{-\tau + (m_L g)L\theta - m_L gsin(\phi)L}{m_L L} = a$$ **... (13)**

需要通过上半身对 θ 进行管控，这需要首先知道（x,z）的值。

换言之：如果上半身无法调节 θ ，那么无法实现零后移加速。

假如在平地上：

$$\frac{-\tau + (m_L gcos(\phi))L\sin\theta - m_L gsin(\phi)L\cos\theta}{m_L L\cos\theta} = a$$ **... (13)**