

# 串并联跳跃动力学分析

快速链接：

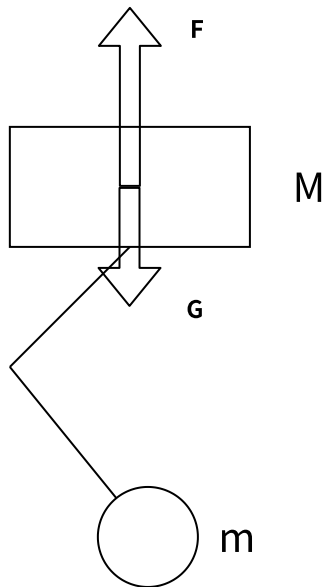
[https://git.ddt.dev:9281/rbt/alg/MATLAB\\_Small\\_Script/-/blob/dev/geo\\_movement/AJ.ggb](https://git.ddt.dev:9281/rbt/alg/MATLAB_Small_Script/-/blob/dev/geo_movement/AJ.ggb)

[https://git.ddt.dev:9281/rbt/alg/MATLAB\\_Small\\_Script/-/blob/dev/link\\_design/rot\\_test\\_2.m](https://git.ddt.dev:9281/rbt/alg/MATLAB_Small_Script/-/blob/dev/link_design/rot_test_2.m)

脚本中rot\_test2.m只考虑了未收腿的情况

本文仅作跳跃模型讨论，控制相关请看 [📖 A2机器人跳跃梳理](#)

## 跳跃过程简化



通过关节力矩可得竖直作用在基座上的力  $\delta F$  和重力  $G$ 。则加速度为

$$a = \frac{\delta F - G}{M}$$

$$v = \int a dt$$

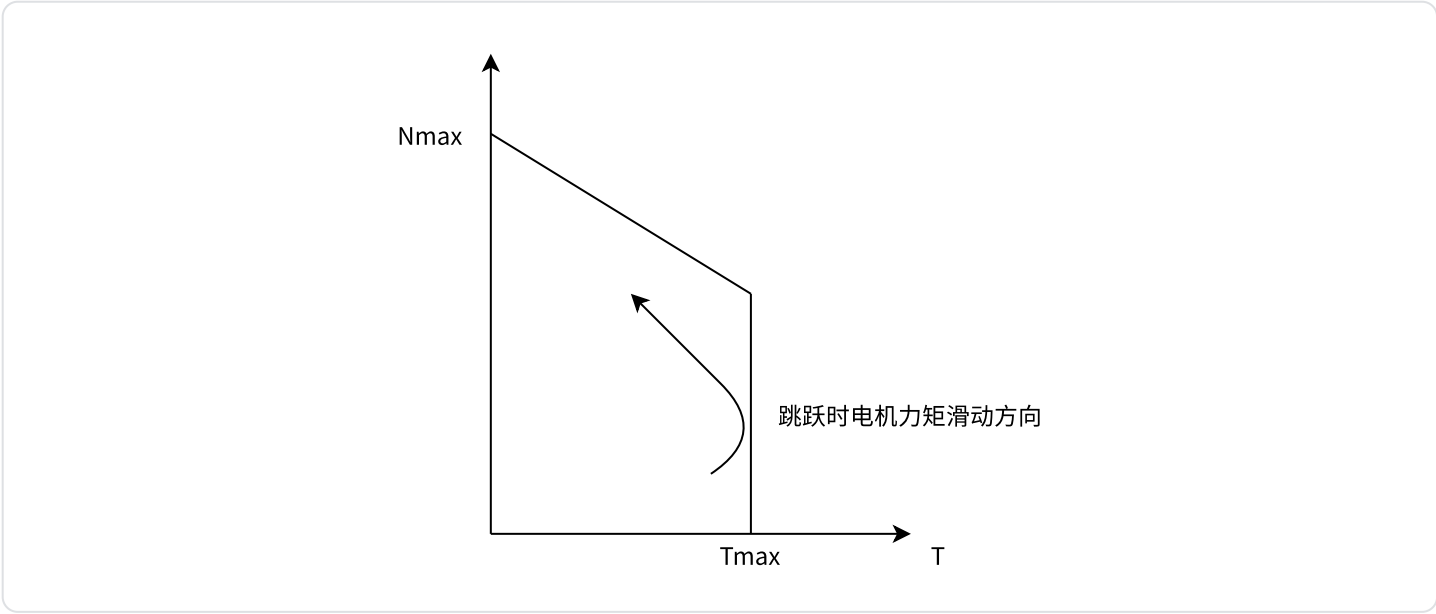
由雅各比矩阵即可求得对应电机所需速度

$$N = J^{-1}v$$

同时，考虑电机特性曲线表达式

$$N = k * T + N_{max}$$

并对输出转矩T 做限制，形成以下梯形状特性曲线：



由此，可通过数值的方法，计算出机器人离地瞬间的作用力F以及速度v，进而再通过能量守恒算出不收腿时的离地高度：

$$\frac{M * v^2}{2(M + m)g} = h$$

进一步的，如果考虑收腿的情况，假定在空中速度为0的瞬间收腿，腿的总长为L，则

$$S = \iint (\delta F - m * g) / m) dt + 0.5 * (\delta F + M * g) / M) dt <= L$$

将腿长L设定为终止条件，则可估算出  $\iint (\delta F - m * g) / m) dt$  为最终的收腿的腿长。（rot\_test2 后续补充完毕）。

因此最终高度如下图所示，a为下半身上升高度与上半身下降高度之比

$$H = h + aL$$

## 串联并联互转

串联雅各比矩阵

$$J_s = \begin{bmatrix} l_1 * c(q_1) + l_2 * c(q_1 + q_2) & l_2 * c(q_1 + q_2) \\ l_1 * s(q_1) + l_2 * s(q_1 + q_2) & l_1 * s(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

并联雅各比矩阵

$$J_p = \begin{bmatrix} l_1 * c(q_1) & l_2 * c(q_1 + q_2) \\ l_1 * s(q_1) & l_2 * s(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

然后，根据静力学公式有

$$J_s^{-1} \tau_s = J_p^{-1} \tau_p = F$$

得到

$$\tau_p = J_p J_s^{-1} \tau_s = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tau_s$$

换言之：

$$\tau_{p1} = \tau_{s1} + \tau_{s2}$$

$$\tau_{p2} = \tau_{s2}$$

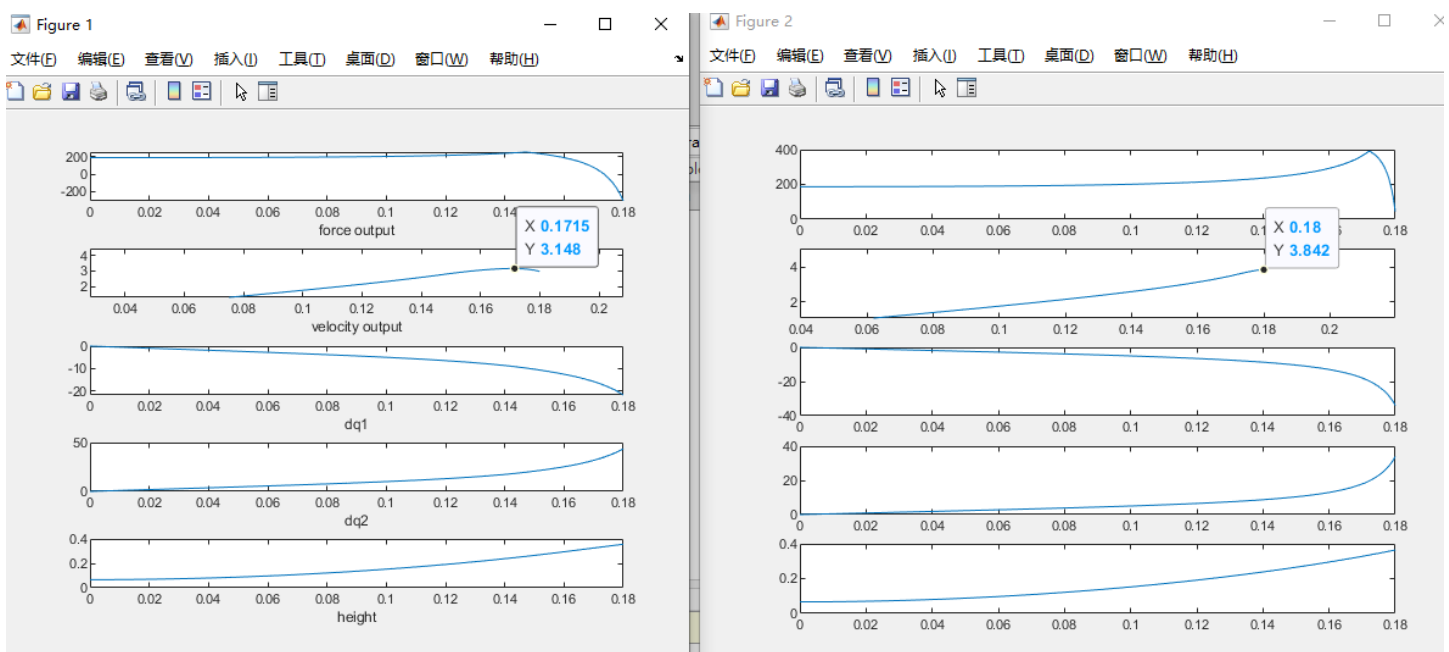
通过上述公式，如果我们的代码是基于串连杆进行的设计，只需把输入时正运动学部分以及输出时的力矩部分做一下调整，就可以直接把串联腿代码平移到并联腿上。

## 串并联跳跃对比

以DIABLO Jump参数为例，整机重量11kg，杆长0.22m，采用TMotor AK10-9 V2.0。其中第二栏为机器人竖直方向上末端速度的数值，当速度出现拐点时，证明在机器人加速到对应高度后，继续抬高时，基座无法进一步被加速，因而可把拐点视为机器人的离地速度，再通过能量守恒计算出机器人最终跳跃高度。

下图中，左图为串联机构，最大速度可达约3.1m/s，不考虑收腿则跳跃高度约为49cm。

右图为并联基座可达最大速度约3.8m/s，垂直起跳高度约70cm。



**一个可能的结论：**笔者尝试过在不同电机和连杆参数下的测试，包括本末M63、瑞创X80-8、瓴控MG100等参数下测试，最终结论是，仅考虑不收腿的状况下，**并联跳跃高度的下限时串联高度的上限**，并联最大跳跃高度不超过串联跳跃高度的4倍（基本上不太可能到4倍）。

**两个看似矛盾的点：**尽管由雅各比矩阵来看，同等电机转速下，并联的末端速度为串联末端速度的2倍，理论最大高度应该可达串联的4倍。 $(1/2mv^2 = mgh)$ ，但由于两者加速的行程有限，在相同的力F、相同的加速行程a下，两者做功的大小 $E = Fa$ 又应该是一样的，因此跳跃高度应该没有差异。

因此，简单的静力分析和能量的分析可能是有问题的，应当考虑动态的情况。最终造成并联跳跃高度大于串联跳跃高度的原因，体现在**机器人起跳的末期和电机特性的差异上**。

在机器人起跳的末期，限制串联机械臂速度进一步增高的主要原因在电机转速上。以上图0.18m高度处为例，串联关节转速已经来到了48 rad/s；而并联关节则大概在38rad/s。由于转速的提高，受电机特性影响，能作用的最大力矩降低，一旦作用力低于重力，电机将开始减速。显然，串联关节转速高于并联，因而，电机所能维持的力矩也就低于并联，一旦无法克服重力，则机器人末端速度开始下降。

**场景1：**电机力矩区间和转速区间都很充裕

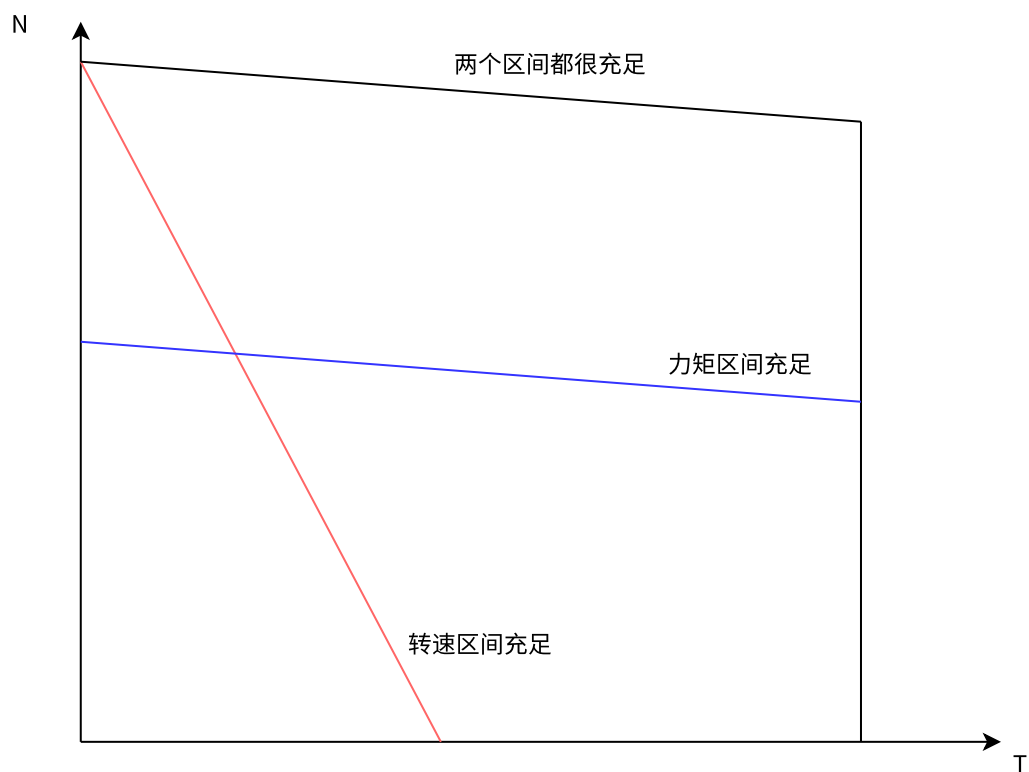
这种情况下，无论串联并联，**跳跃高度应该都没有很大差异**，可以用  $E = Fa$  计算跳跃高度。

**场景2：**力矩区间宽裕而转速区间较窄（特性曲线很硬）

这种情况下，一般是电机内部做了速度限制，**对于串联关节不利**。因为力矩大的情况下，电机可能在行程到达极限前就加到了电机最高速度。在电机速度相同的情况下，并联末端速度是

**场景3：**力矩区间不足而转速区间宽裕（特性曲线很软）

这种情况下，**对于串联关节不利**，随着转速升高，由于串联关节转速高于并联关节转速更高，力矩衰减更为明显。



综上，仅跳跃而言，并联方案会比串联上更有优势。但如果要综合考虑电机续航、总功耗等，则需要进一步考虑，因为串联关节是一个**关节**承受力矩  $\tau$  ,而并联关节则是**两个关节**承受力矩  $\tau$  ，并联的铜损要显著高于串联。