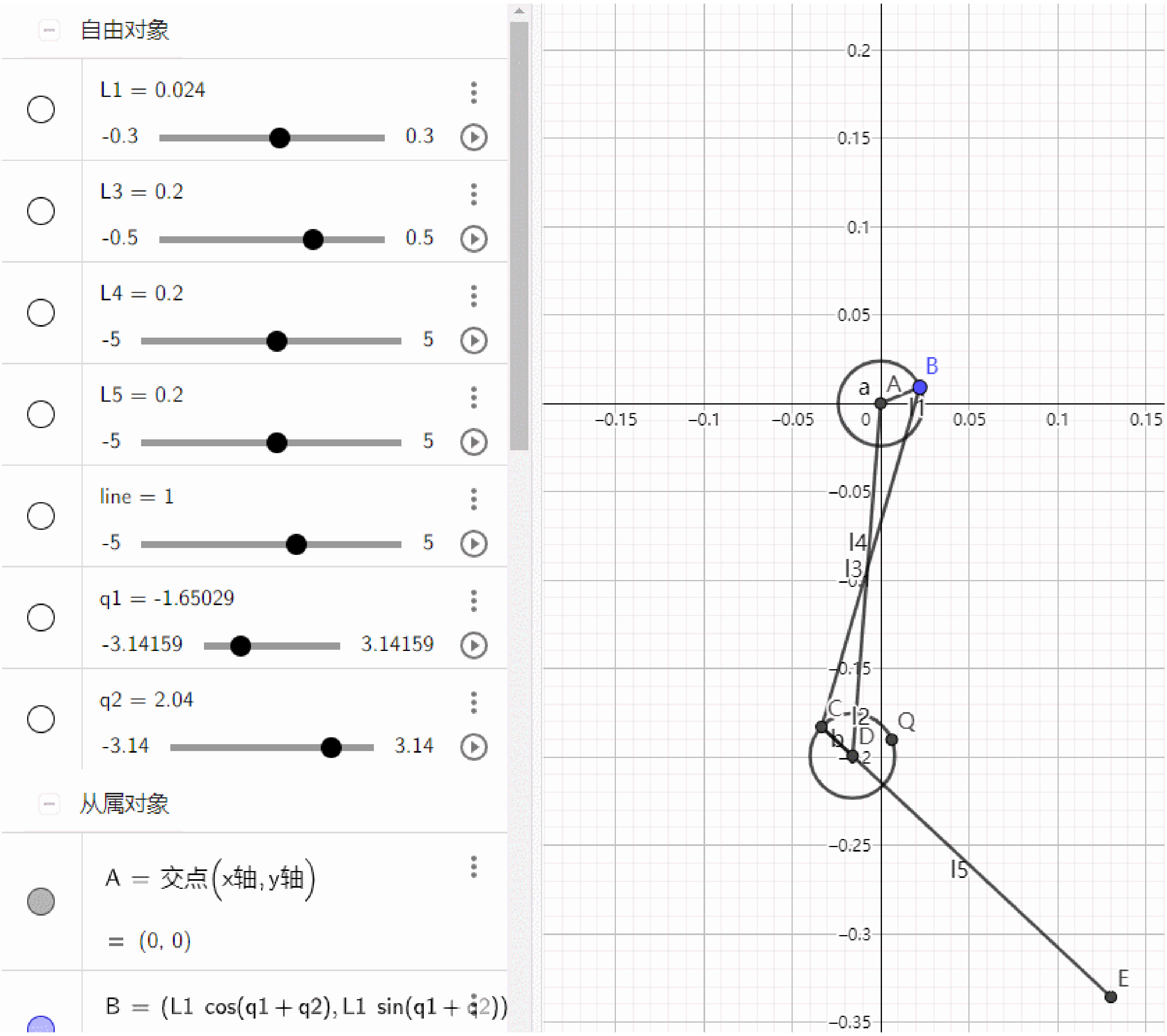
交叉杆串联腿的运动学与静力学

🕑时间： 2023/03/13

🎁作者：廖铉泓

说明

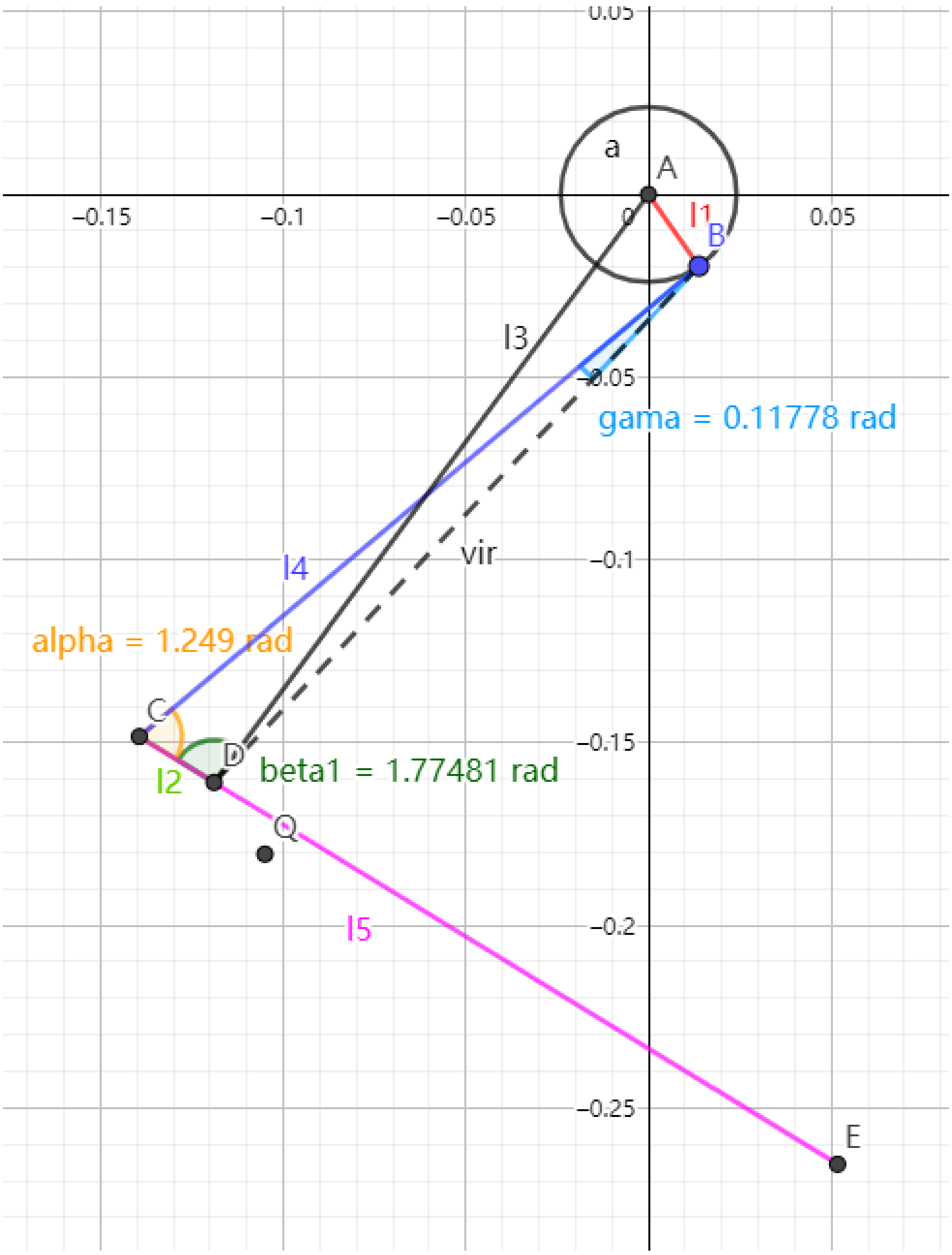
A2机器人的样机版本使用的是交叉杆腿型，如下图所示。



该杆型称为交叉杆型，即长杆BC与长杆AD在平面上相交。 该文章中指出，这一杆型的运动学、静力学推导比较复杂，**已被弃用**，但未进行细致推导。 下文将交叉杆型的运动学、静力学部分进行推导和说明。

正运动学：从关节角度到末端轨迹

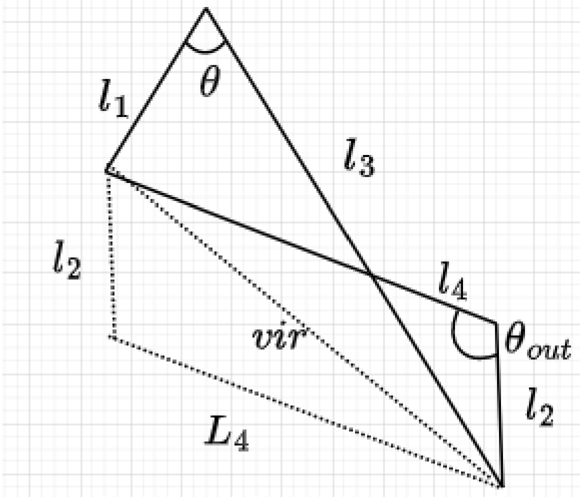
正运动学模型就是要从关节输入角度q1，q2，推算得到末端点E相对于机身坐标系A的坐标。先对交叉杆的各杆、各角度进行命名，如下图所示



其中vir 为辅助线BD。∠CBD = ∠alpha，为q2关节输入角，也就是∠BAC。

问题一：已知l1=l2, l3 = l4，证明∠BAD = ∠alpha，∠ADB=∠gamma

 上述问题可抽象为以下解三角形问题，其中，θ=∠BAD，θout=∠alpha。由余弦定理，可得到以下两个方程，并解得∠BAD = ∠alpha。



$$vir^2 = {l_1}^2 + {l_3}^2 - 2 * l_1 * l_3 * c\theta$$

$$c\theta_{out} = \frac{{l_2}^2 + {l_4}^2 - vir^2}{2 * l_2 * l_4}$$

当l1 = l2, l3 =l4

$$\theta = \theta_{out}$$

完成上述证明后还可发现， 三角形CDB与三角形ADB相似，因此∠ADB＝∠gamma得证。

问题二：已知q1,q2，求末端点E的坐标（正运动学）

$$vir = \sqrt{{l_1}^2 + {l_3}^2 - 2l_1l_3 * c(\alpha)}$$

$$\beta = asin(\frac{l_3}{vir} * s(\alpha)) \qquad \gamma = \pi - \beta - \alpha$$

对于关节q2，E点的坐标如下：

$$\begin{matrix} x_k \\ y_k \end{matrix} = \begin{matrix} l_3 - (l_1 + l_3) * c(\gamma) \\ -(l_1 + l_3) * s(\gamma) \end{matrix}$$

对于关节q1，对整个腿部的旋转变换为

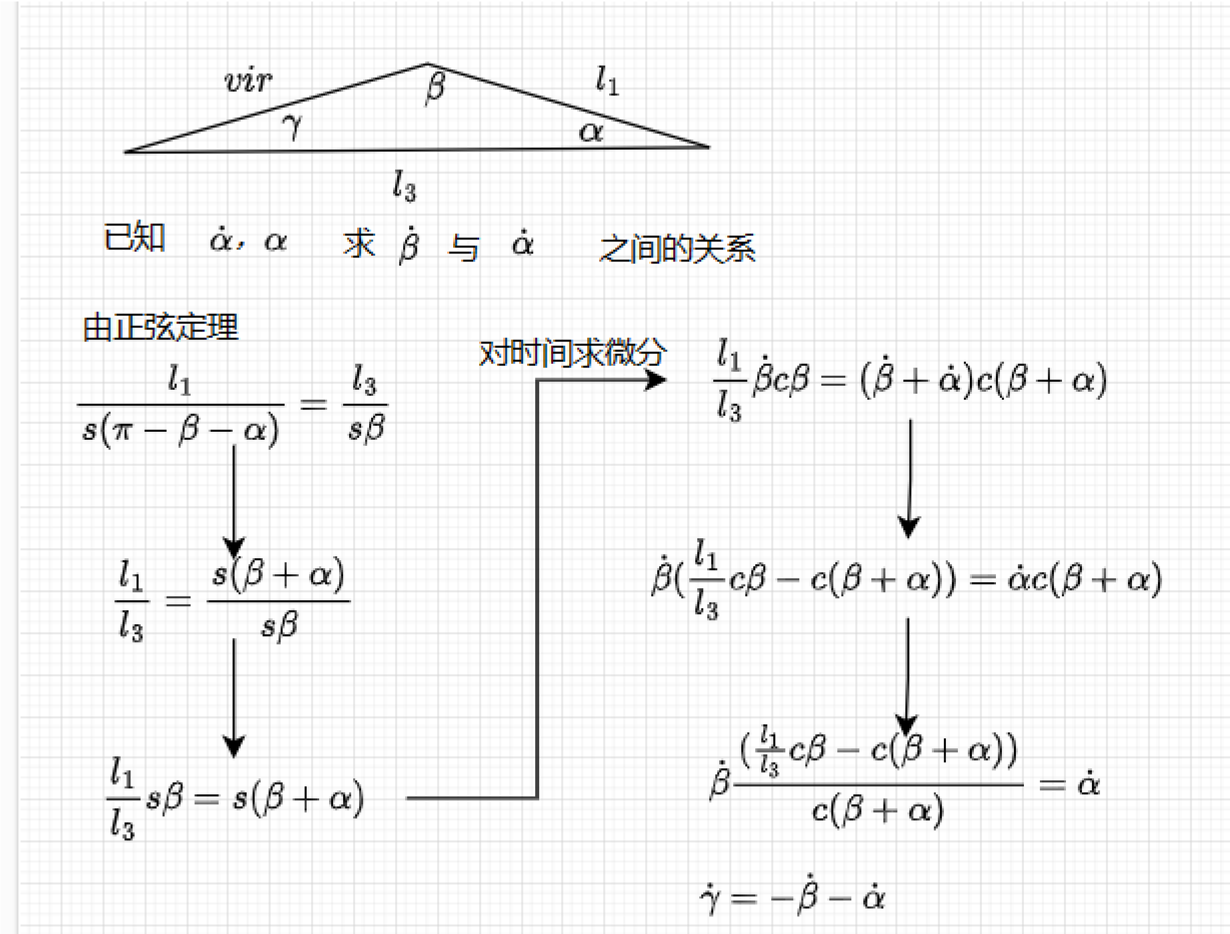
$$Rot = \begin{matrix} c(q1) & -s(q1) \\ s(q1) & c(q1) \end{matrix}$$

故E点的关于A点的坐标为：

$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = Rot * \begin{matrix} l_3 - (l_1 + l_3) * c(\gamma) \\ -(l_1 + l_3) * s(\gamma) \end{matrix}$$

正运动学得证。

问题三：已知关节角alpha的角速度，求beta和gamma的角速度



alpha，beta，gamma 之间角速度的关系得证。

微分逆运动学和静力学

问题四：求q1,q2角速度与末端线速度之间的关系（求雅各比矩阵）

可以注意到，虚拟二连杆ADE是一个我们比较喜欢的结构，如果我们的关节q1在A上，关节q2在D上，那么二连杆ADE的**雅各比矩阵可以按照如下通式进行求解**。 其中z1，z2为单位向量[0;0;1]。对于向量**AE**和**DE**，其z坐标认为是0即可。

$$J=[z_1\times\vec{AE}\quad z_2\times\vec{DE}]$$

正常来说，求出雅各比矩阵以后，我们即可通过以下式子，求得关节转速与末端线速度之间的关系，以及关节扭矩与末端输出力之间的关系(静力学关系)。

$$v = J\dot{q}$$

$$\tau = J^{T}F$$

但是，显然，我们的关节q2并不在D上。 实际上关节q2和点A，也就是关节q1在同一z轴线上。 因此上述雅各比矩阵不可以直接进行套用。

一种解决思路是，找到关节q2的角速度，与虚拟二连杆ADE中的∠ADE的角速度之间的关系，并且叠加到这个雅各比矩阵上。

根据**问题一**，上述问题翻译成数学语言则为：

已知 $\dot{\alpha}$，α 求 $\dot{\beta} - \dot{\gamma}$ 与 $\dot{\alpha}$ 之间的关系

显然，**这是对问题三的一个延伸**。

已知 $\dot{\alpha}$，α 求 $\dot{q_{2vir}} = \dot{\beta} - \dot{\gamma}$ 与 $\dot{\alpha}$ 之间的关系

$$\dot{q_{2vir}} = \dot{\beta} - \dot{\gamma} = 2\dot{\beta} + \dot{\alpha}$$

设 $$k = \frac{\left(-\frac{l_1}{l_3}c\beta - c(\beta+\alpha)\right)}{c(\beta+\alpha)}$$

$$\dot{q_{2vir}} = \dot{\beta} - \dot{\gamma} = \frac{2+k}{k}\dot{\alpha}$$

$$\dot{q_{2vir}}\frac{k}{2+k} = \dot{\alpha} = \dot{q_2}$$

$$J_{vir} * \begin{matrix}\dot{q_1} \\ \dot{q_{2vir}}\end{matrix} = \begin{matrix} v_x \\ v_y \end{matrix}$$

$$J * \begin{matrix}\dot{q_1} \\ \dot{q_2}\end{matrix} = \begin{matrix} v_x \\ v_y \end{matrix}$$

$$J = J_{vir} * \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{k}{2+k} \end{matrix}$$

以上，求得关节空间到末端线速度的雅各比矩阵J。

注意，如果直接按照问题二，通过对正运动学的解进行求导的话，**由于涉及到反三角函数的求导**，会变得很复杂。 因此，通过**问题三**的解，找到q2（也就是∠alpha）与∠beta之间的关系，会更加容易进行推导。

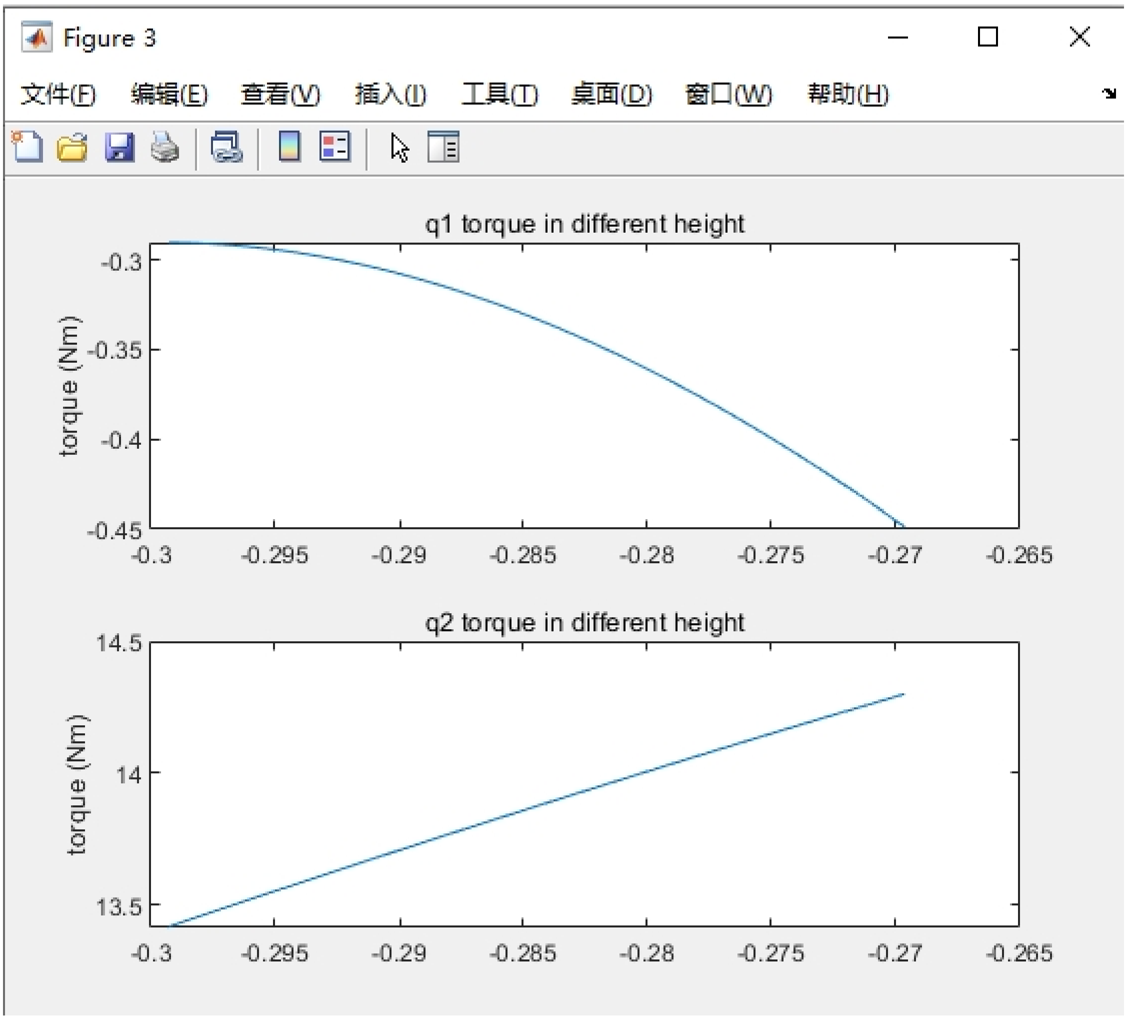
问题五：求关节力矩τ和末端力输出F之间的关系（静力学）

求得雅各比矩阵后，根据机器人学知识，就可以有：

$$v = J\dot{q}$$

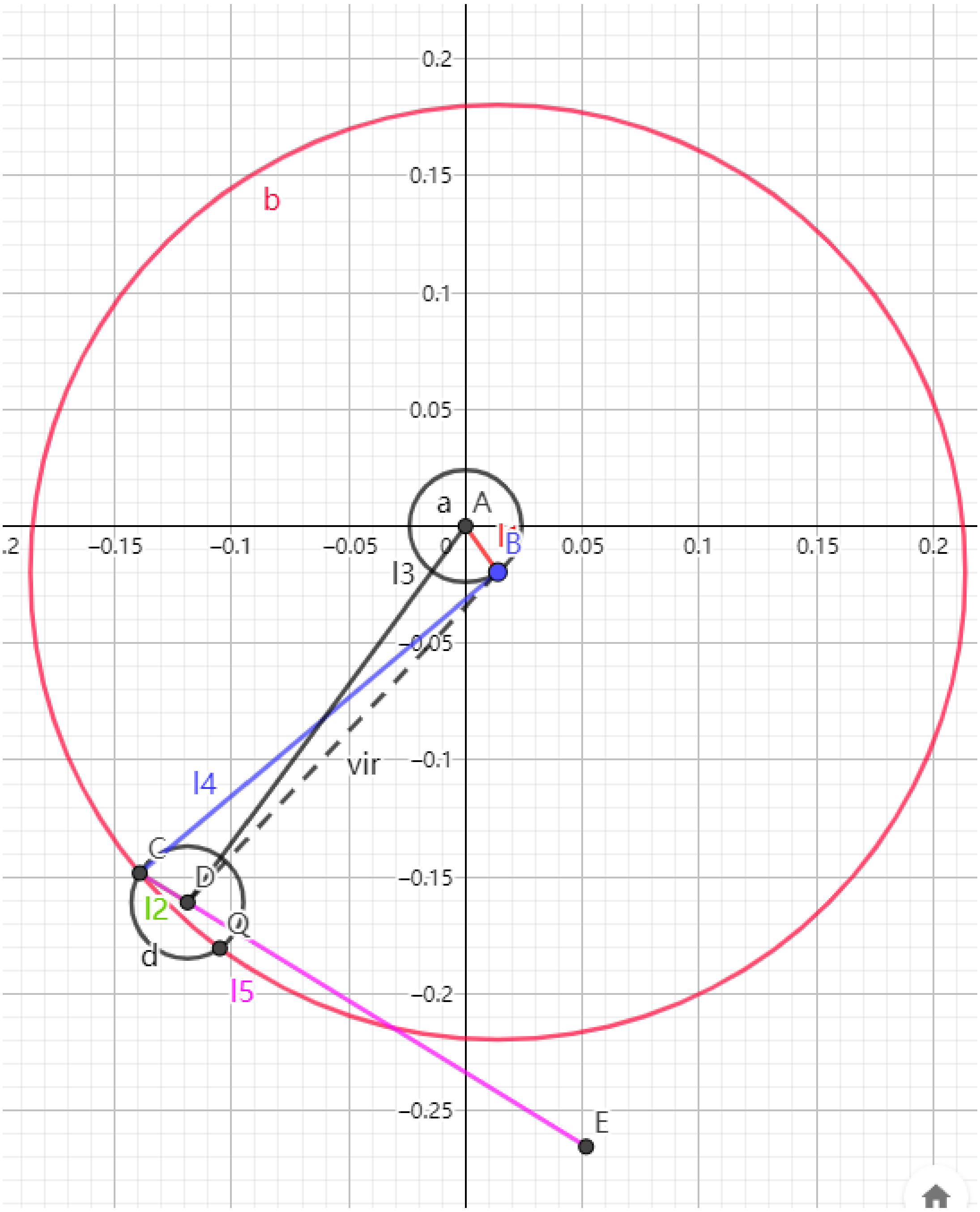
$$\tau = J^T F$$

假定机器人竖直，在不同高度下，q1 q2两个关节的变化趋势大致如下图所示。注意符号。随着高度降低，q2收到的扭矩越来越大，**q1受到的扭矩也越来越大**。

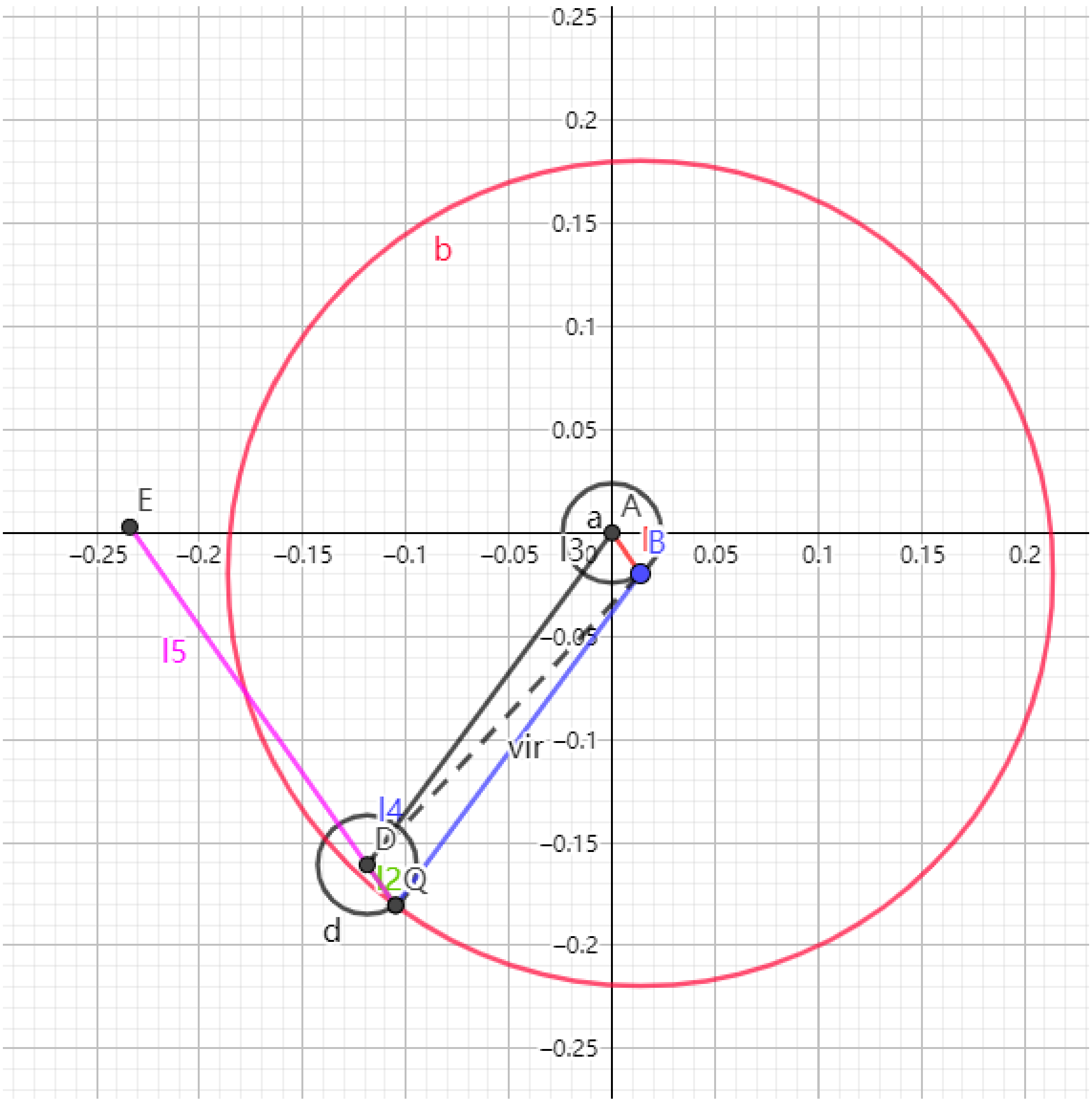


交叉杆和平行四边形连杆

在Geobra对交叉杆进行建模的过程中，我们先确定了点A，点B和点D，然后由以B为圆心的圆b和以D为圆心的圆d，这两个圆的交点，确定了点C，如下图所示。



如果l4杆接到两圆的另一个交点Q上，交叉杆就会变成平行四边形杆，如下图所示。



因此交叉杆和平行四边形杆具有较强的对称性质。点C和点Q关于线BD对称。 平行四边形杆下，其正运动学和微分逆运动学以及静力学，几乎与虚拟杆ADE等效。(除了q2转速，q2vir = pi - q2)。

不过想通过平行四边形杆对称求解交叉杆，依然是一件很困难的事情，**不建议尝试**。

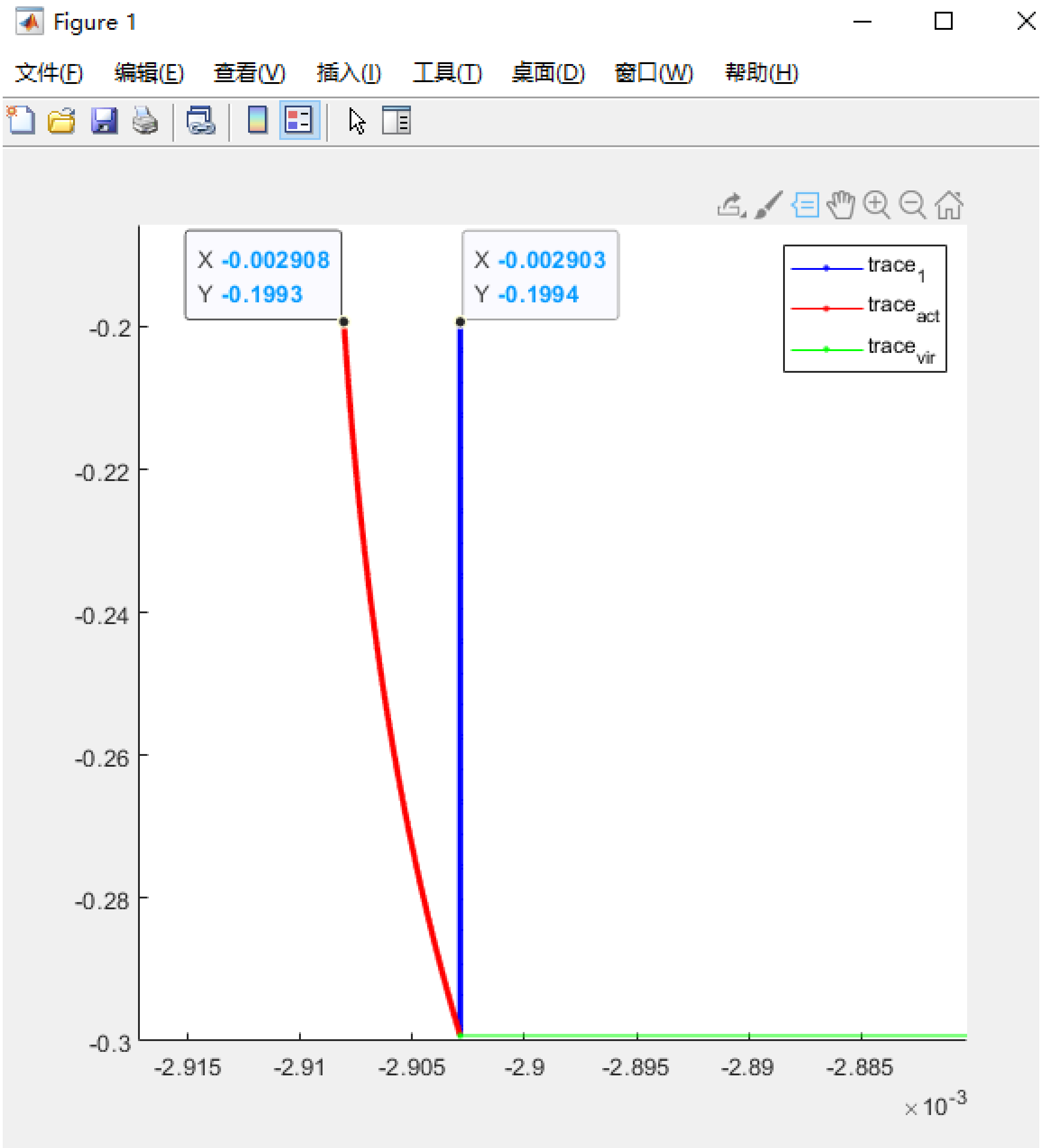


Figure 1
文件(F) 编辑(E) 查看(V) 插入(I) 工具(T) 桌面(D) 窗口(W) 帮助(H)
X -0.002908
Y -0.1993
X -0.002903
Y -0.1994
trace1
traceact
tracevir
-0.2
-0.22
-0.24
-0.26
-0.28
-0.3
-2.915
-2.91
-2.905
-2.9
-2.895
-2.89
-2.885
×10-3