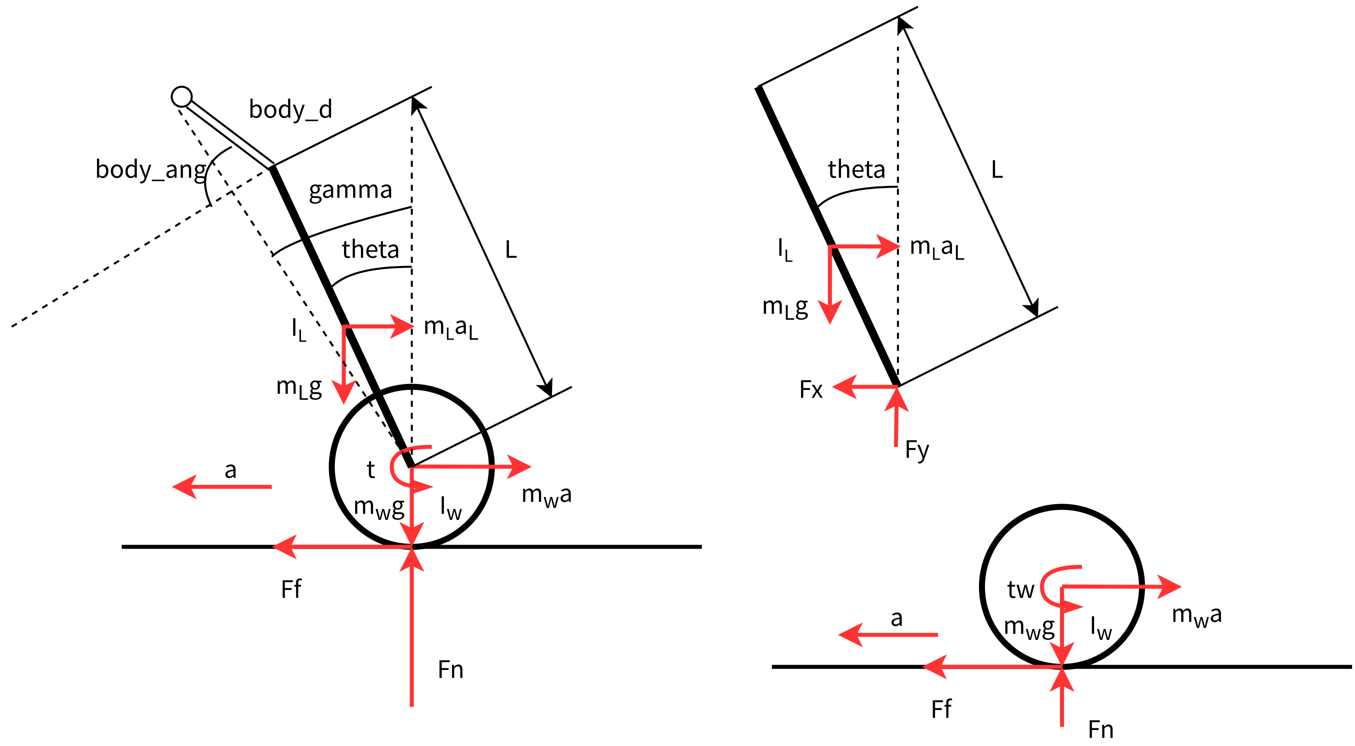
轮足机器人质心估计



质心偏移造成的影响

一直向一个方向走

首先，set_tilt - tilt ≠ 0，使得balance_output一直有数值存在。vel_psc也有数值的存在。由于模型不准，控制器有差，从而出现局部收敛的情况。

比如：tilt不准，那么在vel_error = 0,tilt_error = 0的时候，vel_output = 0, balance_output = 0 ，但由于此时，实际的tilt_error ≠ 0，所以机器人无法进入真实的稳态。 进而，收敛到别的稳态上面， 只需vel_error + balance_error= 0 ， 即可进入稳态，机器人也就会一直往前走。

问题建模

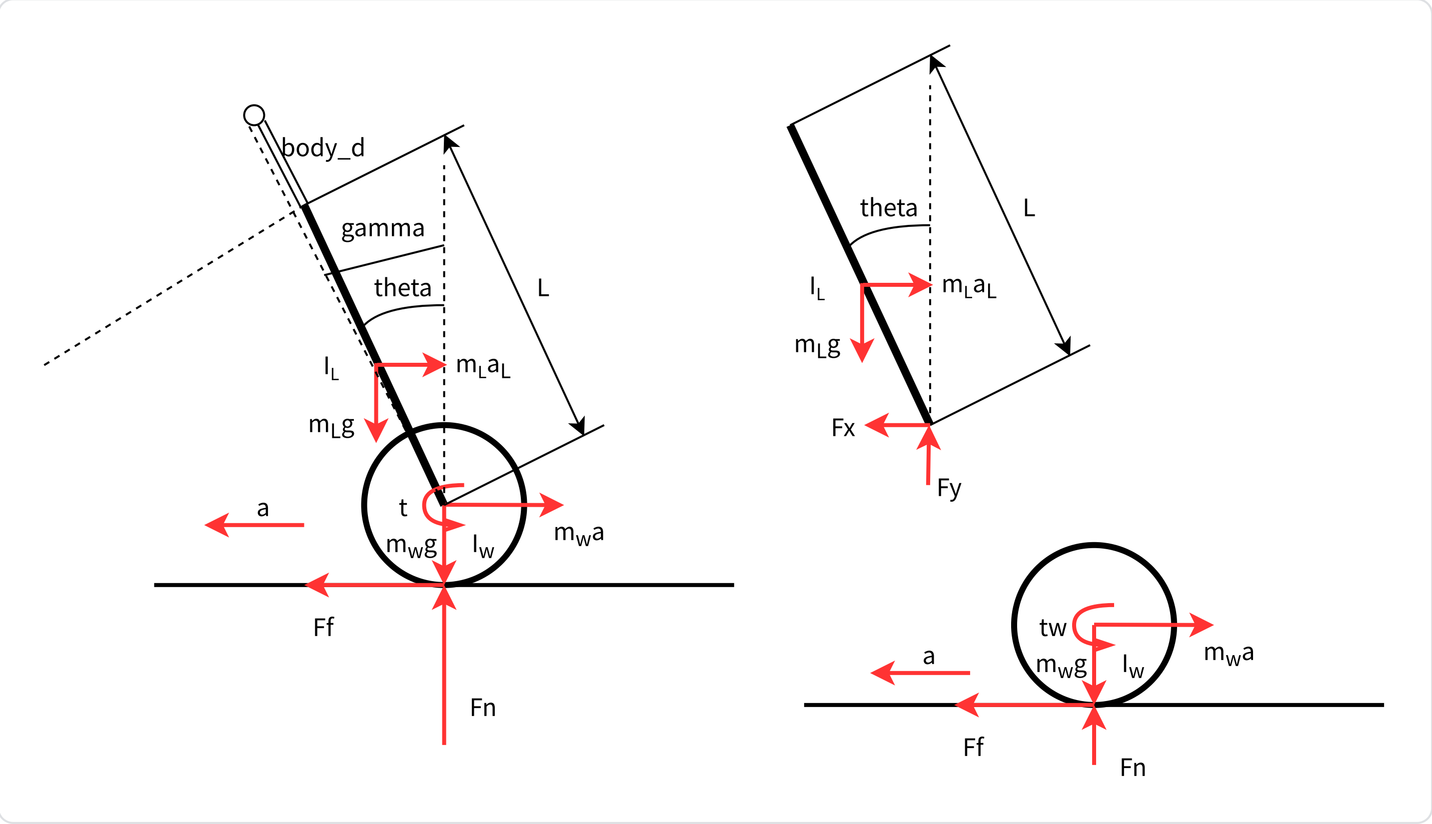
沿用：https://ehooj45utb.feishu.cn/docx/HO3Nd9a1Dos7VpxIkO2cvfLYnhd 当中的思路，会发现，模型非线性度非常高。

tilt和d_tilt的计算都需要进行变更。

仅考虑平地的状况，引入未知质心，尝试获得该质心所在的位置。假设质心方向沿杆分布。

在原A1代码中，其辨识的逻辑是，依赖机器人自身的稳定性，在机器人达到稳态的时候，读取当前的tilt和pitch，并计算出body_ang和body_d。

为什么普通平衡车不太需要考虑质心问题



因为 theta （即tilt）的变化不随质心的位置变化而变化，因此并不需要特地去观测z坐标的位置。只要有一套还不错的LQR参数出来即可。

如果仔细考察上述模型，尝试在动力学模型的层面去观测质心的z坐标。在静态的时候无法辨识，但在动态的时候可以辨识出来，有点像电机的无感控制。（demo： 机器人拆装不同的机械臂的时候，都可以实现抓取时时，车轮不怎么动）

$$(m_L + m_w + \frac{I_w}{r^2})a + m_L L_\gamma \ddot{\theta} = \frac{\tau_w}{r}$$ **.... (10)**

... (13)

$$\ddot{\theta} = \frac{\tau_w}{r} - \frac{(m_L + m_w + \frac{I_w}{r^2})a}{m_L(L+d)} \text{ .... (20)}$$

$$\dot{x_2} = \frac{\tau_w}{r} - \frac{(m_L + m_w + \frac{I_w}{r^2})a}{m_L} x_3 \text{ .... (21)}$$

~~实际上稳态的时候~~ $\frac{\tau}{L_\gamma} = m_L g sin\theta$ ~~不能这样估计，没办法同时满足两个方程~~

- 由轮子受力： $(m_L + m_w + \frac{I_w}{r^2})a + m_L L\ddot{\theta} = \frac{\tau_w}{r}$
- 由连杆受力： $m_L La + (m_L L^2 + I_L)\ddot{\theta} = m_L gL\theta - \tau_w$

$$b_1 = \left(-\frac{1}{I_L + L^2\, m_L} - \frac{1}{r}\right)$$

$$b_2 = \frac{m_L L\frac{b_1}{a_1} - 1}{m_L^2 * L + I_L^2}$$

$$a_1 = \left(\frac{m_L + m_w + \frac{I_w}{r^2}}{L\, m_L} - \frac{m_L L}{I_L + L^2\, m_L}\right)$$

$$a_2 = \frac{L\, g\, m_L}{I_L + L^2\, m_L}$$

$$a_3 = \frac{(m_L + m_w)g}{m_L L}$$

$$a_4 = \frac{m_L gL + m_L L\frac{a_2}{a_1}}{m_L * L^2 + I_L}$$

$$a_5 = \frac{m_L L\frac{a_3}{a_1}}{m_L * L^2 + I_L}$$

$$-\frac{b_1}{a_1}=\frac{\left(\frac{1}{I_L+L^2\,m_L}+\frac{1}{r}\right)}{\left(\frac{m_L+m_w+\frac{I_w}{r^2}}{L\,m_L}-\frac{m_L L}{I_L+L^2\,m_L}\right)}$$

总结一下：

$\dot{x_2}=b_2*u+a_4*x_1$ **...(26)**

$\dot{x_4}=-\frac{b_1}{a_1}u-\frac{a_2}{a_1}x_1$ **...(25)**

$\dot{x_5}=0$

f(x)

鲁棒观测器： v的观测值一定为0。

$\dot{x}=f(x)+g(x)u+G(\hat{x},u,y)[y-h(\hat{x})]$

$y=h(x)$

无感控制中，选择了使用梯度下降的算子来作为增益。增益最好保证数值都可测

$\frac{\gamma}{4}\nabla h(x,t)$

$$\dot{\hat{x}}=y_{12}+\frac{\gamma}{4}\nabla_{\hat{x}}\hbar(\hat{x},t)\left[y_3-\hbar(\hat{x},t)\right] \tag{8}$$

离线辨识

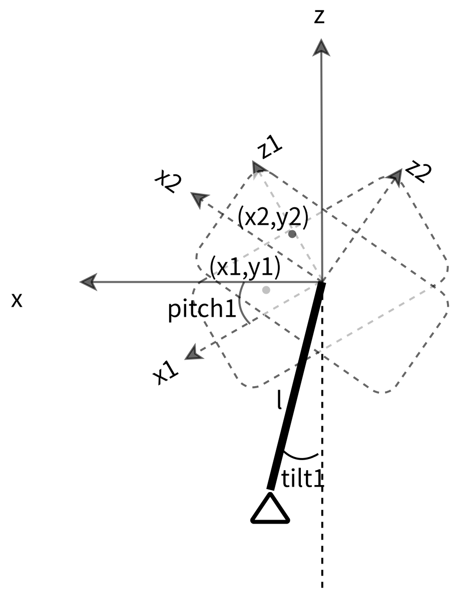
大概的模型如下所示，已知机器人在静稳定时，重心沿重力方向投影应落在地面接触点上。假设头部重心位于头部的世界坐标系的位置为 (x,y) ，满足：

$$x=-l\sin(tilt)$$

假设机器人头部 $pitch$ 在两个不同角度 $pitch1,pitch2$ 时，对应有机器人质心位置在世界坐标系的位置为 $(x1,y1),(x2,y2)$ 。

令 $\Delta p=\ pitch2\ -\ pitch1$ ，满足变换：

$$\begin{bmatrix}\cos(\Delta p) & -\sin(\Delta p)\\ \sin(\Delta p) & \cos(\Delta p)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x1\\ y1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x2\\ y2\end{bmatrix}$$



可直接拿到tilt，pitch以及腿长l的数据，即x1,x2可直接根据tilt，pitch和腿长l计算得到。由矩阵可计算得到

$$y1 \ = \ \frac{\cos(\Delta p)x1 \ - \ x2}{\sin(\Delta p)}$$

质心偏离轴心位置，在极坐标系中，有

$$\rho \ = \ \sqrt{x1^2 + y1^2}$$

$$\theta \ = \ atan(x1, y1) \ + \ pitch1$$

❓ Q：这里是否考虑了腿部质量带来的质心偏移问题？

在线辨识

NESO鲁棒控制器：保证机器人能收敛到稳态。

非线性观测器

解决这个问题，1. 加积分可以解决 2. 让模型变准 **3.鲁棒控制**

因而，首先要把模型弄准一点； 其次，使用鲁棒控制消除误差（最简单的鲁棒控制：积分控制，即方法1）

和split-tilt控制的差异：对任意状态(split,tilt)都是稳态，通过输出planning不会导致机器人失稳，只影响split tilt的响应特性。 而系统(balance,vel)并非任意配置都是稳态，输出planning可能会导致系统失去稳定。

body_ang, body_d未知,统一由

$\theta = -sin^{-1}(\frac{x}{L})$

$L_\gamma = \sqrt{(d^2 + L^2 + 2 * d * L * sin(body_{ang}))}$

1. 轮子受力分析

$F_f - F_x = m_w a$ ... (1)

$F_N - F_y = 0$ ... (2)

$\tau_w - F_f r = I_w \alpha$ ... (3)

$a = \alpha r$ ... (4)

2. 连杆受力分析

$F_x = m_L \ddot{x_L} = m_L(a + \frac{d^2}{dt^2}(L_\gamma \sin\gamma))$ ... (5)

$F_y = m_L \ddot{y}_L = m_L \frac{d^2}{dt^2}(L_\gamma \cos\gamma)$ ... (6)

$-\tau + F_y L_\gamma \sin\gamma - F_x L_\gamma \cos\gamma = I_L \ddot{\gamma}$ ...(7)

$\gamma = \theta + asin(\frac{d * cos(body_{ang})}{L})$

body_ang和d认为时不变，因此

$\dot{\gamma} = \dot{\theta}$

同时，由于杆长变化较慢或不变，因此

$\dot{L_\gamma} = 0$

第一部分

将式(1)代入式(3)，得到

$$\tau_w - (m_w a + F_x) r = I_w (a/r)$$ ... (8)

将式(5)代入式(8)，

$$\frac{\tau_w}{r} - (m_w a + (m_L (a + \frac{d^2}{dt^2} (L_\gamma \sin\gamma))) + (m_w * g)) = I_w (\frac{a}{r^2})$$ ...(9)

将式(9)进行线性化处理

$$(m_L + m_w + \frac{I_w}{r^2}) a + m_L L_\gamma \ddot{\gamma} = \frac{\tau_w}{r}$$ **.... (10)**

静态状况下：

$$\tau_w = 0$$ ...(11)

第二部分

将式(5)(6)代入式(7) 【不变】

$$-\tau + (m_L \frac{d^2}{dt^2} (L\cos\gamma) + m_L g) L_\gamma \sin\gamma - \ (m_L (a + \frac{d^2}{dt^2} (L_\gamma \sin\gamma))) L_\gamma \cos\gamma = I_L \ddot{\gamma}$$

... (12)

对式(12)进行线性化处理：

$$-\tau + (m_L g) L_\gamma \sin\gamma - \ (m_L (a + L_\gamma \ddot{\gamma})) L_\gamma \cos\gamma = I_L \ddot{\gamma}$$ **... (13)**

考虑静态的状况：

$$\gamma = \theta - asin(\frac{d * cos(body_{ang})}{L}) = 0$$ ... （13.1）

$$\theta = -asin(\frac{d * cos(body_{ang})}{L})$$ **...(14)**

暴露出一个问题：静态下，二元一次方程

$$\theta = -asin(\frac{d * cos(body_{ang})}{L})$$

1. **需要有两个以上的 θ 角，才能解这个二元一次方程，但对于一阶倒立摆系统，仅有唯一 θ 使系统达到稳定。 因此对于一阶倒立摆系统，无法在静态下获取d和body_ang。**

2. 但是，对于可变高度一阶倒立摆系统（L不同），以及二阶倒立摆系统，由于可以获得不同的tilt角，进而得到n个方程，因此，依然有办法算出body_ang和body_d。

3. 还有一个特征，当出现 分子大于分母的时候，**静态方程(14)无解**，即对一阶倒立摆系统以及可变高度一阶倒立摆系统，永远到达不了系统稳态，从而，无法在静态状况下估计出d和body_ang。

考虑带加速度计的情况：

$$-\tau+(m_L g)L_\gamma \sin\gamma - \ (m_L a)L_\gamma \cos\gamma = 0 \ \ \textbf{... (13.2)}$$

线性化

$$\gamma = \frac{(m_L a)L_\gamma + \tau}{(m_L g)L_\gamma} \ \ \textbf{...(15)}$$

这里揭示了两点：

1. 即便在有加速度的情况下，依然需要多个加速度状态下的配置才能拿到d和body_ang。
2. 根据(15)，可以得到

$$a = \frac{(m_L g)L_\gamma \gamma - \tau}{m_L L_\gamma}$$

这意味着：如果们是二阶倒立摆，且我们期望通过头部控制来实现机器人加速（即零后移加速），则这里揭示了机器人前进加速度和 γ 之间的关系，**是我们零后移控制机器人加速度的基础。**此外这还意味着，只需要进行机器人头部的位置控制，即可实现机器人的加速度控制。

我们仍要解决质心估计的问题。尝试使用状态观测器进行观测。

状态变量选取

$$x_1 = tilt, x_2 = d_{tilt}, x_3 = x, x_4 = d_x, x_5 = L_\gamma, x_6 = \gamma$$

输出变量选取：

$$y_1 = tilt, y_2 = d_{tilt}, y_3 = x, y_4 = d_x$$

输入变量

$$u = \tau$$

由式(10):

$$(m_L + m_w + \frac{I_w}{r^2})a + m_L L_\gamma \ddot{\gamma} = \frac{\tau_w}{r} \ \textbf{.... (10)}$$

得到

$$\ddot{\gamma} = \frac{\tau_w}{r} - \frac{(m_L + m_w + \frac{I_w}{r^2})a}{m_L L_\gamma} \text{ .... (20)}$$

$$\dot{x_2} = \frac{\tau_w}{r} - \frac{(m_L + m_w + \frac{I_w}{r^2})a}{m_L x_6} \text{ .... (21)}$$

由式(13)

$$-\tau+(m_L g)L_\gamma \sin\gamma - \ (m_L(a + L_\gamma\ddot{\gamma}))L_\gamma \cos\gamma = I_L\ddot{\gamma} \ \ \textbf{... (13)}$$

进一步线性化

$$-\tau + (m_L \gamma g) L_\gamma \gamma - \ (m_L (a + L_\gamma \ddot{\gamma})) L_\gamma = I_L \ddot{\gamma}$$ ... (14)

于是,进一步线性化

$$\frac{-u}{I_L} + \frac{(m_L g) L_\gamma \gamma}{I_L} - \frac{m_L L_\gamma \dot{x_4}}{I_L} \ = \frac{m_L L_\gamma^2 + I_L}{I_L} \dot{x_2}$$

于是，将 **(21)** 代入 **(24)**

$$\frac{-u}{I_L} + \frac{(m_L g) x_6 \gamma}{I_L} - \frac{m_L L_\gamma \dot{x_4}}{I_L} \ = \frac{m_L x_6^2 + I_L}{I_L} (\frac{\tau_w}{r} - \frac{(m_L + m_w + \frac{I_w}{r^2}) a}{m_L x_6})$$

是关于状态变量 x_6 的强非线性项，可能需要设计非线性观测器来求解，总体求解过程变得非常的麻烦。

因此，利用二阶倒立摆的特性，分阶段辨识当前质心位置。

阶段一：机器人起立

通过逐渐增加的电机顶起力矩，粗测得负载质量

通过hip锁止力矩的大小粗判定质心在x方向上的坐标，并假定y = 0。

通过阶段一，可以粗判定机器人质心的x坐标。

通过粗测后，可建立这样一条假设，即 $\gamma \approx \theta$,此时，想办法观测 L_γ 即可

于是： $L_\gamma = L + d$,状态变量修改为

$$x_1 = tilt, x_2 = d_{tilt} = d_x, x_3 = \frac{1}{L + d}$$

由式(10):

$$(m_L + m_w + \frac{I_w}{r^2}) a + m_L (L + d) \ddot{\theta} = \frac{\tau_w}{r}$$ **.... (10)**

得到

$$\ddot{\theta} = \frac{\tau_w}{r} - \frac{(m_L + m_w + \frac{I_w}{r^2}) a}{m_L (L + d)}$$ .... (20)

$$\dot{x_2} = \frac{\tau_w}{r} - \frac{(m_L + m_w + \frac{I_w}{r^2}) a}{m_L} x_3$$ .... (21)

$$b_1 = \frac{1}{r}$$

$$a_1 = \frac{(m_L + M_w + \frac{I_w}{r^2})a}{m_L}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

阶段二：头抬到不同角度

阶段3：实时质心跟踪

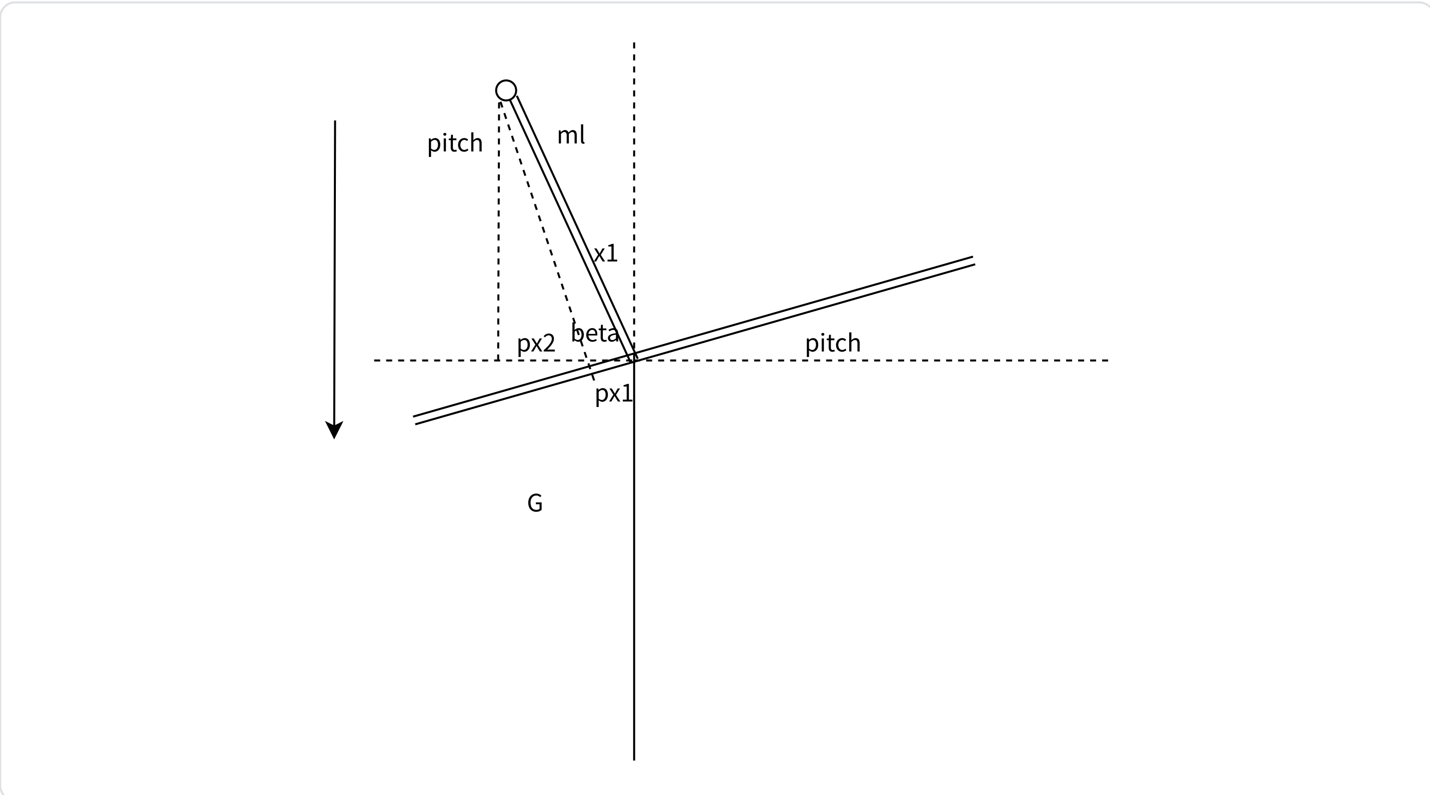
根据**外力检测**调整质心的x轴，因为更实时

根据腿部周期调整z轴质心

整体质心更新周期会比较慢。

在未知上半身负载的情况下，依赖自身鲁棒性，可以达成不失衡的目的。

假设质心在转轴正上方



$$\tau - m * g * (p_{x1} + p_{x2}) = 0$$

p_{x1} 已知

$$\beta = atan(\frac{(p_{x1} + p_{x2})tan(pitch)}{p_{x2}}) + pitch$$

整理得

$$\dot{x_1} = x_2$$

$$\dot{x_2} = \frac{\tau}{m_l * x_3^2} - \frac{m * g * x_3 * sin(x_1)}{m_l * x_3^2}$$