東大 2018 年度数学解答例

文殊の知恵
高橋那弥

目次

第 1 問 1

第 1 問問題文 1

第 1 問解答例 2

第 2 問 4

第 2 問問題文 4

第 2 問解答例 5

第 3 問 7

第 3 問問題文 7

第 3 問解答例 8

第 1 問

第 1 問　問題文

次の連立一次方程式を解く問題を考える.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

ここで, $\boldsymbol{A} \in \mathcal{R}^{m\times n}$, $b \in \mathcal{R}^{m}$ は与えられた定数の行列とベクトルであり, $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^{n}$ は未知ベクトルである. 以下の問いに答えよ.

(1) $\overline{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})$ のように, 行列 $\boldsymbol{A}$ の最後の列の後ろに 1 列追加した $m \times (n+1)$ 行列を作る. 例えば, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ の場合には, $\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ となる. この例の $\overline{\boldsymbol{A}}$ の第 i 列ベクトルを $\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ とする.

(i) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ のうち線形独立なベクトルの最大個数を求めよ.

(ii) $\boldsymbol{a}_4$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の線形和で表されることを, $\boldsymbol{a}_4 = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$ となるスカラー x_1, x_2 を求めることで示せ.

(iii) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ のうち線形独立なベクトルの最大個数を求めよ.

(2) 任意の $m, n, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}$ に対して, $\mathrm{rank}\overline{\boldsymbol{A}} = \mathrm{rank}\boldsymbol{A}$ のとき連立一次方程式の解が存在することを示せ.

(3) $\mathrm{rank}\overline{\boldsymbol{A}} > \mathrm{rank}\boldsymbol{A}$ ならば解は存在しない. $m > n$, $\mathrm{rank}\boldsymbol{A} = n$ で, $\mathrm{rank}\overline{\boldsymbol{A}} > \mathrm{rank}\boldsymbol{A}$ のとき, 連立一次方程式の右辺と左辺の差のノルムの 2 乗 $\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^2$ を最小にする $\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(4) $m < n$, $\mathrm{rank}\boldsymbol{A} = m$ のとき, どのような $\boldsymbol{b}$ に対しても連立一次方程式を満たす解が複数存在する. 解のうちで $\|\boldsymbol{x}\|^2$ を最小にする $\boldsymbol{x}$ を, 連立一次方程式の制約条件として, ラグランジュ乗数法を用いて求めよ.

(5) 任意の $m, n, \boldsymbol{A}$ に対して, 以下の 4 つの式を満たす $\boldsymbol{P} \in \mathcal{R}^{n\times m}$ が唯一に決まることを示せ.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{APA} &= \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{PAP} &= \boldsymbol{P} \\ (\boldsymbol{AP})^T &= \boldsymbol{AP} \\ (\boldsymbol{PA})^T &= \boldsymbol{PA} \end{aligned}$$

(6) (3) で求めた $\boldsymbol{x}$ と (4) で求めた $\boldsymbol{x}$ が, いずれも $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Pb}$ の形で表せることを示せ.

第 1 問　解答例

(1)　(i) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ が線形従属の関係にある場合, 実数 c $(\neq 0, \in \mathbb{R})$ を用いて

$$\boldsymbol{a}_1 = c\,\boldsymbol{a}_2$$

と表すことができる．しかし, $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ であることから, これを満たす実数 c は存在しないので, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ は線形独立なベクトルである．次に, $\boldsymbol{a}_3$ が $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ の線形従属の関係にある場合, 実数 c_1, c_2 $(\neq 0, \in \mathbb{R})$ を用いて

$$\boldsymbol{a}_3 = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2$$

と表すことが出来る．$\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるので, $c_1 = -1$, $c_2 = 1$ とすればこの式は満たされる．ゆえに $\boldsymbol{a}_3$ は線形従属の関係にあるので, 線形独立なベクトルの最大個数は 2 個である．

(ii) $\boldsymbol{a}_4$ について $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ の線形和で表されることを x_1, x_2 を求めることで示す．

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}_4 = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 \\
\Longleftrightarrow\ & \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\Longleftrightarrow\ & \begin{cases} 2 = x_1 - 1 \\ 4 = x_1 + x_2 \\ 2 = x_2 + 1 \end{cases} \\
\Longleftrightarrow\ & \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

したがって, $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ というスカラーの組が求まったので, $\boldsymbol{a}_4$ は $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ の線形和で表される．

(iii) $\boldsymbol{a}_4$ は $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ の線形和で表されることから $\boldsymbol{a}_4$ は $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ と線形従属な関係であるので, 線形独立なベクトルの最大個数は 2 個である．

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ の第 i 列ベクトルを $\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ とする．$\mathrm{rank}\overline{\boldsymbol{A}} = \mathrm{rank}\boldsymbol{A}$ のとき, 実数 c_i $(\neq 0, \in \mathbb{R})$ を用いて

$$\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} c_i\boldsymbol{a}_i$$

と表すことができる．この c_i を 1 から順に n まで縦に並べた $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ をつくると

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$$

となるので, $\boldsymbol{c}$ は連立方程式の解 $\boldsymbol{x}$ となる．ゆえに題意は示された．

(3) 以下のように変形することができる．

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^2 &= (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) \\
&= (\boldsymbol{b}^T - \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T)(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) \\
&= \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{b}
\end{aligned}$$

これを $\boldsymbol{x}$ で微分すると

$$\frac{\partial\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^2}{\partial\boldsymbol{x}} = 2\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$$

となる．ゆえに最小となる必要条件は

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$$

である．$\mathrm{rank}\boldsymbol{A} = n$ かつ $\mathrm{rank}\overline{\boldsymbol{A}} > \mathrm{rank}\boldsymbol{A}$ のとき, $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) = n$ となる．ゆえに $\boldsymbol{A}$ は正則であるので, 逆行列が存在して

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b} \\ \iff &\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

となる．

第 2 問

第 2 問　問題文

関数 f_1 を $[0,1]$ 上で定義される正値の定数関数とし，$f_1(x)=c$ とおく．また，正の実数 p,q を $1/p+1/q=1$ を満たすものとする．これらに対し，$[0,1]$ 上で定義される関数の列 $\{f_n\}$ を

$$f_{n+1}(x)=p\int_0^x (f_n(t))^{1/q}\,\mathrm{d}t$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) $a_1=0$, $c_1=c$ かつ

$$a_{n+1}=q^{-1}a_n+1 \qquad (n=1,2,...),$$
$$c_{n+1}=\frac{p\,(c_n)^{1/q}}{a_{n+1}} \qquad (n=1,2,...)$$

で定まる実数列 $\{a_n\}$ と $\{c_n\}$ を用いて $f_n(x)=c_nx^{a_n}$ と表されることを示せ．

(2) $n\geq 2$ に対し $[0,1]$ 上で定義される関数 g_n を $g_n(x)=x^{a_n}-x^p$ とおく．$n\geq 2$ に対し $a_n\geq 1$ となることに注意して，g_n がある点 $x=x_n$ で最大値をとることを示し，この x_n を求めよ．

(3) 任意の $x\in[0,1]$ に対して $\lim_{n\to\infty} g_n(x)=0$ となることを示せ．

(4) $d_n=(c_n)^{q^n}$ とおく．d_{n+1}/d_n が $n\to\infty$ のとき有限な正の値に収束することを示せ．
なお，$\lim_{t\to\infty}(1-1/t)^t=1/\mathrm{e}$ となることは用いて良い．

(5) $\lim_{n\to\infty} c_n$ の値を求めよ．

(6) 任意の $x\in[0,1]$ に対して $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=x^p$ となることを示せ．

第 2 問　解答例

(1) 数学的帰納法によって示す.

(i) $n=1$ のとき,

$$f_1(x)=c=c\cdot x^0=c_1x^{a_0}$$

となるので, 成立する.

(ii) $n=k$ のとき $f_n(x)=c_nx^{a_n}$ であると仮定すると, $n=k+1$ のときは

$$\begin{aligned}f_{k+1}(x)&=p\int_0^x((f_k(t))^{1/q}\,\mathrm{d}t\\&=p\int_0^x(c_kx^{a_k})^{1/q}\,\mathrm{d}t\\&=p\left[c_k^{1/q}\cdot\frac{q}{a_k+q}x^{\frac{a_k+q}{q}}\right]_0^x\\&=p\,c_k^{1/q}\cdot\frac{1}{q^{-1}a_k+1}x^{q^{-1}a_k+1}\\&=\frac{p\,c_k^{1/q}}{a_{k+1}}x^{a_{k+1}}\\&=c_{k+1}x^{a_{k+1}}\end{aligned}$$

となり, 成立する.

(i),(ii) より, 数学的帰納法より, 題意は示された.

(2) $n\geq 2$ のとき,

$$g_n'(x)=a_nx^{a_n-1}-px^{p-1}$$

ここで, a_n の一般項を求める. 特性方程式 $\alpha=q^{-1}\alpha+1$ を解くことによって, $\alpha=p$ となる. ゆえに

$$\begin{aligned}a_n-p&=q^{-1}\left(a_n-p\right)\\a_n&=p\left(1-q^{1-n}\right)<p\end{aligned}$$

ゆえに, $g_n'(x)=0$ となるときは

$$\begin{aligned}&g_n'(x)=0\\\iff&a_nx^{a_n-1}-p\,x^{p-1}=0\\\iff&x^{a_n-1}\Big(a_n-p\,x^{p-a_n}\Big)=0\\\iff&x=0,\left(\frac{a_n}{p}\right)^{\frac{1}{p-a_n}}\end{aligned}$$

$g_n'(1)=a_n-p<0$ より増減表は以下のように書くことができる.

x	0	$\cdots$	$\left(\frac{a_n}{p}\right)^{\frac{1}{p-a_n}}$	$\cdots$	1
$g_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	a_n-p
$g_n(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

よって, $x_n=\left(\dfrac{a_n}{p}\right)^{\frac{1}{p-a_n}}$ のとき最大値をとることが示された.

(3) まず,

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{p(1-q^{1-n})\right\}=p$$

より,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} g_n'(x) &= \lim_{n\to\infty} a_n x^{a_n-1} - px^{p-1} \\ &= px^{p-1} - px^{p-1} \\ &= 0\end{aligned}$$

これより関数 $g_n'(x)$ は区間 $[0,1]$ において増減がなく, $n \to \infty$ において $g_n(0) = g_n(1) = 0$ であるから, 任意の $x \in [0,1]$ に対しても $n \to \infty$ において $g_n(x) = 0$ となる. よって, 題意は示された.

(4) q の大きさについて

$$\begin{aligned}\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 &\Longrightarrow \frac{1}{q} < 1 \\ &\Longleftrightarrow q > 1\end{aligned}$$

となる. d_{n+1}/d_n について整理すると

$$\begin{aligned}\frac{d_{n+1}}{d_n} &= \frac{\left(\dfrac{p(c_n)^{1/q}}{a_{n+1}}\right)^{q^{n+1}}}{(c_n)^{q^n}} \\ &= \frac{\dfrac{p^{q^{n+1}}(c_n)^{q^n}}{(a_{n+1})^{q^{n+1}}}}{(c_n)^{q^n}} \\ &= \frac{p^{q^{n+1}}}{(a_{n+1})^{q^{n+1}}} \\ &= \left(\frac{p}{p(1-q^{-n})}\right)^{q_{n+1}} \\ &= \left(\frac{1}{1-q^{-n}}\right)^{q^{n+1}} \\ &= \left(\frac{1}{1-\frac{1}{q^n}}\right)^{q^n} \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{q^n}}\right)\end{aligned}$$

$q > 1$ より, $n \to \infty$ のとき $q^n \to \infty$ であることを用いて

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{q^n}}\right)^{q^n} \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{q^n}}\right) \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}}\end{aligned}$$

第 3 問

第 3 問　問題文

赤いカードが 2 枚と白いカードが 1 枚入った袋および複素数 z_n, w_n $(n = 0, 1, 2, ...)$ について考える．まず, 袋から 1 枚のカードを取り出し袋に戻す．このとき取り出されたカードの色に応じて z_{k+1} $(k = 0, 1, 2, ...)$ を以下のルールで生成する．

$$z_{k+1} = \begin{cases} iz_k & \text{赤いカードが取り出された場合} \\ -iz_k & \text{白いカードが取り出された場合} \end{cases}$$

次に, 袋からもう一度 1 枚のカードを取り出し袋に戻す．このとき取り出したカードの色に応じて w_{k+1} を以下のルールで生成する．

$$w_{k+1} = \begin{cases} -iw_k & \text{赤いカードが取り出された場合} \\ iw_k & \text{白いカードが取り出された場合} \end{cases}$$

ここで, 各カードは独立に等確率で取り出されるものとする．また初期状態を $z_0 = 1$, $w_0 = 1$ とする．すなわち, z_n, w_n は, $z_0 = 1$, $w_0 = 1$ の状態から始め, 上記の一連の二つの操作を n 回繰り返した後の値である．なお, ここでは i は虚数単位とする．

以下の問いに答えよ．

(1) n が奇数のとき $\mathrm{Re}(z_n) = 0$, 偶数のとき $\mathrm{Im}(z_n) = 0$ であることを示せ．ただし, $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$ はそれぞれ z の実部, 虚部を表すものとする．

(2) $z_n = 1$ である確率を P_n, $z_n = i$ である確率を Q_n とする．P_n, Q_n についての漸化式を立てよ．

(3) $z_n = 1$, $z_n = i$, $z_n = -1$, $z_n = -i$ である確率をそれぞれ求めよ．

(4) z_n の期待値が $(i/3)^n$ であることを示せ．

(5) $z_n = w_n$ である確率を求めよ．

(6) $z_n + w_n$ の期待値を求めよ．

(7) $z_n w_n$ の期待値を求めよ．

第 3 問　解答例

(1) 赤いカードが 2 回連続で出されたら

$$z_{k+2} = -z_k^2$$

となり, これは白いカードが 2 回連続で出された場合も同様である. 赤いカードが取り出され, 白いカードが取り出された場合

$$z_{k+2} = z_k^2$$

となり, これは白いカードが取り出され, 赤いカードが取り出された場合も同様である. ゆえに,

$$z_{k+2} = \begin{cases} -z_k^2 & \text{同じカードが 2 回連続で取り出された場合} \\ z_k^2 & \text{異なるカードが取り出された場合} \end{cases}$$

ここで, $n = 0$ のとき $z_0 = 1$ であるので, z_2 は 1 または -1 の値をとる. 帰納的に $n = 2k$ のとき z_n は 1 または -1 の値をとるので, $\mathrm{Im}(z_n) = 0$ となる. 一方で, $n = 1$ のとき, z_1 は i または $-i$ である. 帰納的に $n = 2k+1$ のとき z_n は i または $-i$ の値をとるので, $\mathrm{Re}(z_n) = 0$ となる. よって, 題意は示された.