東大 2019 年度数学解答例

文殊の知恵
高橋那弥
(加筆：中田昌輝)

目次

第 1 問

第 1 問　問題文

複素正方行列 X は $XX^* = I$ を満たすとき, ユニタリ行列であるという. 但し,X^* は行列 X の共役転置行列（もしくは随伴行列）を表し,I は単位行列とする. また,i は虚数単位とする. 以下の問いに答えよ.

(1) n を正の整数とし,A, B を n 次ユニタリ行列とする. 行列 AB もユニタリ行列であることを示せ.

(2) n を正の整数とし,C, D を n 次実正方行列とする. 行列 F を $F = C + \mathrm{i}D$ と定義し, 行列 G を

$$G = \begin{pmatrix} C & -D \\ D & C \end{pmatrix}$$

と定義する. 行列 F がユニタリ行列であることと行列 G が直交行列であることは同値であることを示せ.

(3) 次の行列の固有値を求めよ.

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

(4) n を正の整数とし,n 次正方行列 Q の (j, k) 成分 q_{jk} を

$$q_{jk} = \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left(\frac{2\pi \mathrm{i}(j-1)(k-1)}{n}\right)$$

とする. 行列 Q はユニタリ行列であることを示せ.

(5) 行列式が 1 である 2 次のユニタリ行列は次の一形式を持つことを示せ. 但し,θ, ψ は実数であるとする. (これは一般形ではないので, 誤植修正しました).

$$H = \begin{pmatrix} \exp(\mathrm{i}\psi_1)\cos\theta & \exp(\mathrm{i}\psi_2)\sin\theta \\ -\exp(-\mathrm{i}\psi_2)\sin\theta & \exp(-\mathrm{i}\psi_1)\cos\theta \end{pmatrix}$$

(6) 2 次のユニタリ行列の一般形を求めよ

第 1 問　解答例

(1) A, B ともにユニタリ行列より以下が成り立つ.

$$\begin{cases} AA^* &= I \\ BB^* &= I \end{cases} \tag{1.1}$$

よって, 式 (1.1) より, 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} (AB)(AB)^* &= ABB^*A^* \\ &= AIA^* \\ &= AA^* \\ &= I \end{aligned}$$

よって, 行列 AB についてもユニタリ行列であることが示された.

(2) 題意は以下のように同値変形できる.

$$\begin{aligned} &\text{行列 } F \text{ がユニタリ行列であることと行列 } G \text{ が直交行列であることは同値である} \\ \Longleftrightarrow\ &\text{行列 } F \text{ がユニタリ行列である} \Leftrightarrow \text{行列 } G \text{ が直交行列である} \\ \Longleftrightarrow\ &FF^* = I \Leftrightarrow GG^\top = I \end{aligned} \tag{1.2}$$

よって, 式 (1.2) が成り立つことを示せばよい.
まず以下の式 (1.3) が成り立つことを示す.

$$FF^* = I \Rightarrow GG^\top = I \tag{1.3}$$

題意より,$F = C + \mathrm{i}D$ より,$F^* = C^\top - \mathrm{i}D^\top$ であり, 式 (1.3) の仮定条件 $FF^* = I$ から以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} FF^* &= (C + \mathrm{i}D)\left(C^\top - \mathrm{i}D^\top\right) \\ &= CC^\top + DD^\top + \mathrm{i}\left(DC^\top - CD^\top\right) \\ &= I \\ \Longleftrightarrow I &= CC^\top + DD^\top + \mathrm{i}\left(DC^\top - CD^\top\right) \\ \Longrightarrow &I\text{は実正方行列より } \mathbf{0} = DC^\top - CD^\top \\ \Longrightarrow I &= CC^\top + DD^\top \\ \therefore GG^\top &= \begin{pmatrix} C & -D \\ D & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C^\top & D^\top \\ -D^\top & C^\top \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} CC^\top + DD^\top & CD^\top - DC^\top \\ DC^\top - CD^\top & DD^\top + CC^\top \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} \\ &= I \end{aligned}$$

よって, 式 (1.3) が成り立つことは示された.
次に以下の式 (1.4) が成り立つを示す.

$$GG^\top = I \Rightarrow FF^* = I \tag{1.4}$$

題意と式 (1.4) の仮定条件 $GG^\top = I$ から以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} GG^\top &= \begin{pmatrix} C & -D \\ D & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C^\top & D^\top \\ -D^\top & C^\top \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} CC^\top + DD^\top & CD^\top - DC^\top \\ DC^\top - CD^\top & DD^\top + CC^\top \end{pmatrix} \\ &= I \\ \Longleftrightarrow &\begin{cases} \mathbf{0} = CD^\top - DC^\top \\ I = CC^\top + DD^\top \end{cases} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\therefore FF^* &= (C+\mathrm{i}D)\left(C^\top - \mathrm{i}D^\top\right)\\
&= CC^\top + DD^\top + \mathrm{i}\left(DC^\top - CD^\top\right)\\
&= I + \mathbf{0}\\
&= I
\end{aligned}
$$

よって, 式 (1.4) が成り立つことが示された.

従って, 式 (1.3), (1.4) が成り立つことが示されたので, 式 (1.2) が成り立つことが示された. よって, 題意は示された.

(中田解)

$$
\begin{aligned}
\text{行列 } F \text{ がユニタリ行列である} &\iff FF^* = I\\
&\iff (C+\mathrm{i}D)(C+\mathrm{i}D)^* = I\\
&\iff (C+\mathrm{i}D)(C^\mathsf{T} - \mathrm{i}D^\mathsf{T}) = I\\
&\iff (CC^\mathsf{T} + DC^\mathsf{T}) + \mathrm{i}(DC^\mathsf{T} + CD^{-\mathsf{T}}) = I\\
&\iff \begin{cases} CC^\mathsf{T} + DD^\mathsf{T} = I\\ DC^\mathsf{T} + CD^\mathsf{T} = \mathbf{0}\end{cases}\\
&\iff \begin{pmatrix} CC^\mathsf{T} + DD^\mathsf{T} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & CC^\mathsf{T} + DD^\mathsf{T}\end{pmatrix} = I\\
&\iff \begin{pmatrix} C & -D\\ D & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix} C^\mathsf{T} & D^\mathsf{T}\\ -D^\mathsf{T} & C^\mathsf{T}\end{pmatrix} = I\\
&\iff GG^\mathsf{T} = I
\end{aligned}
$$

よって, 題意は示された.

(3) 題意の 4 次正方行列を A とおき,$|\ A\ |$ は行列 A の行列式を表すとすると, 固有値 λ は以下を満たす.

$$|\ \lambda I - A\ | = 0$$

よって, この方程式を解くと以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
|\ \lambda I - A\ | &= \left(\frac{1}{2}\right)^4 |\ 2\lambda I - 2A\ |\\
&= \frac{1}{16}\begin{vmatrix} 2\lambda-1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 2\lambda-\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i}\\ -1 & 1 & 2\lambda-1 & 1\\ -1 & \mathrm{i} & 1 & 2\lambda-\mathrm{i}\end{vmatrix}\\
&= \frac{1}{16}\begin{vmatrix} 0 & (2\lambda-1)(2\lambda-\mathrm{i})-1 & 2\lambda-2 & \mathrm{i}(2\lambda-1)-1\\ -1 & 2\lambda-\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i}\\ 0 & 1+\mathrm{i}-2\lambda & 2\lambda-2 & 1-\mathrm{i}\\ 0 & 2\mathrm{i}-2\lambda & 0 & 2\lambda-2\mathrm{i}\end{vmatrix}\\
&= \frac{1}{16}\times(-1)^{2+1}\times(-1)\begin{vmatrix} (2\lambda-1)(2\lambda-\mathrm{i})-1 & 2\lambda-2 & \mathrm{i}(2\lambda-1)-1\\ 1+\mathrm{i}-2\lambda & 2\lambda-2 & 1-\mathrm{i}\\ 2\mathrm{i}-2\lambda & 0 & 2\lambda-2\mathrm{i}\end{vmatrix}\\
&= \frac{1}{16}\begin{vmatrix} (2\lambda-1)(2\lambda-\mathrm{i})-1 & 2\lambda-2 & 2\lambda(2\lambda-1)-2\\ 1+\mathrm{i}-2\lambda & 2\lambda-2 & 2-2\lambda\\ 2\mathrm{i}-2\lambda & 0 & 0\end{vmatrix}\\
&= \frac{1}{16}\times(-1)^{3+1}\times(2\mathrm{i}-2\lambda)\begin{vmatrix} 2\lambda-2 & 2\lambda(2\lambda-1)-2\\ 2\lambda-2 & 2-2\lambda\end{vmatrix}\\
&= \frac{1}{16}(2\mathrm{i}-2\lambda)(2\lambda-2)\left[2-2\lambda-\{2\lambda(2\lambda-1)-2\}\right]\\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{i}-\lambda)(\lambda-1)(2-\lambda-2\lambda^2+\lambda)\\
&= (\mathrm{i}-\lambda)(\lambda-1)(1-\lambda^2)\\
&= (\lambda-\mathrm{i})(\lambda-1)^2(\lambda+1)\\
\therefore\ \lambda &= \pm 1, \mathrm{i}
\end{aligned}
$$

よって, 固有値は $\pm 1\mathrm{i}$ である.

(中田解)

この行列を A とし, この行列 A に対する固有値を λ, 固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とおくと

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} &\iff (\lambda I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \\ &\iff \det|\lambda I - A| = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. ゆえに求める固有値 λ は

$$\begin{aligned}
&\det\left|\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}\right| = 0 \\
\iff &\det\left|\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\lambda-1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2\lambda-\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} \\ -1 & 1 & 2\lambda-1 & 1 \\ -1 & \mathrm{i} & 1 & 2\lambda-\mathrm{i} \end{pmatrix}\right| = 0 \\
\iff &\begin{vmatrix} 2\lambda-1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2\lambda-\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} \\ -1 & 1 & 2\lambda-1 & 1 \\ -1 & \mathrm{i} & 1 & 2\lambda-\mathrm{i} \end{vmatrix} = 0 \\
\iff &\begin{vmatrix} 0 & -1+(2\lambda-1)(2\lambda-\mathrm{i}) & 2\lambda-2 & -1+\mathrm{i}(2\lambda-1) \\ -1 & 2\lambda-\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} \\ 0 & -2\lambda+\mathrm{i}+1 & 2\lambda-2 & 1-\mathrm{i} \\ 0 & -2\lambda+2\mathrm{i} & 0 & 2\lambda-2\mathrm{i} \end{vmatrix} = 0 \\
\iff &\begin{vmatrix} -1+(2\lambda-1)(2\lambda-\mathrm{i}) & 2\lambda-2 & -1+\mathrm{i}(2\lambda-1) \\ -2\lambda+\mathrm{i}+1 & 2\lambda-2 & 1-\mathrm{i} \\ -2\lambda+2\mathrm{i} & 0 & 2\lambda-2\mathrm{i} \end{vmatrix} = 0 \\
\iff &\begin{vmatrix} -1+(2\lambda-1)(2\lambda-\mathrm{i}) & 2\lambda-2 & -2+2\lambda(2\lambda-1) \\ -2\lambda+\mathrm{i}+1 & 2\lambda-2 & -2\lambda+2 \\ -2\lambda+2\mathrm{i} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\
\iff &(-2\lambda+2\mathrm{i})\begin{vmatrix} 2\lambda-2 & -2+2\lambda(2\lambda-1) \\ 2\lambda-2 & -2\lambda+2 \end{vmatrix} = 0 \\
\iff &(\lambda-\mathrm{i})(\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & -2+2\lambda(2\lambda-1) \\ 1 & -2\lambda+2 \end{vmatrix} = 0 \\
\iff &(\lambda-\mathrm{i})(\lambda-1)\{-2\lambda+2+2-2\lambda(2\lambda-1)\} = 0 \\
\iff &(\lambda-\mathrm{i})(\lambda-1)(-4\lambda^2+4) = 0 \\
\iff &(\lambda-\mathrm{i})(\lambda-1)(\lambda^2-1) = 0 \\
\iff &(\lambda-\mathrm{i})(\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0 \\
\iff &\lambda = \pm 1, \mathrm{i}
\end{aligned}$$

よって, 固有値は ± 1, i である.

中田別方針

問題の行列を A とすると

$$AA^* = I$$

より,A はユニタリ行列である. この A の固有値を λ, 固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とすると

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

が成り立ち, 複素内積と随伴行列の間に

$$\langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y} \rangle = \langle A^*\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$$

の関係があることから

$$\begin{aligned}\langle A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}\rangle &= \langle A^* A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle \\ &= \|\boldsymbol{x}\|^2\end{aligned}$$

となり, $A\boldsymbol{x}$ 同士の内積は $\boldsymbol{x}$ のノルムの 2 乗に等しくなる.
一方で, 複素内積の性質で

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}\rangle &= \alpha\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle \\ \langle \alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle &= \alpha^*\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle\end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned}\langle A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}\rangle &= \langle \lambda\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{x}\rangle \\ &= \lambda^*\langle \boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{x}\rangle \\ &= \lambda^*\lambda\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle \\ &= |\lambda|^2\|\boldsymbol{x}\|^2\end{aligned}$$

したがって,

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = |\lambda|^2\|\boldsymbol{x}\|^2$$

ここで, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ から $\|\boldsymbol{x}\|^2 \neq 0$ であるので,

$$|\lambda|^2 = 1 \Longleftrightarrow |\lambda| = 1$$

となる. 4 次のユニタリ行列であるので, $\lambda = \pm 1, \pm \mathrm{i}$ が候補に上がる. これから固有ベクトルを求めて一致するかどうかを確認する.

(4) 題意より複素数 z に対する共役な複素数を $\overline{z}$ と表すとき, n 次正方行列 Q の共役転置行列 Q^* の (j, k) 成分 q^*_{jk} は以下のようになる.

$$\begin{aligned}q^*_{jk} &= \overline{q_{kj}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\exp\left(\frac{-2\pi\mathrm{i}(k-1)(j-1)}{n}\right) \end{aligned} \tag{1.5}$$

よって, 式 (1.5) から QQ^* の (j,k) 成分 Q_{jk} は以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
Q_{jk} &= \sum_{l=1}^{n}(q_{jl}\times q_{lk}^*)\\
&= \sum_{l=1}^{n}\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}(j-1)(l-1)}{n}\right)\times\frac{1}{\sqrt{n}}\exp\left(\frac{-2\pi\mathrm{i}(k-1)(l-1)}{n}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}(j-1)(l-1)}{n}+\frac{-2\pi\mathrm{i}(k-1)(l-1)}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}(j-k)l}{n}\right)\\
&= \begin{cases}\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{l=0}^{n-1}\exp(0) & j=k\\[2ex] \dfrac{1}{n}\dfrac{\exp\left(\dfrac{2\pi\mathrm{i}(j-k)n}{n}\right)-\exp(0)}{\exp\left(\dfrac{2\pi\mathrm{i}(j-k)}{n}\right)-1} & j\neq k\end{cases}
\end{aligned}
$$

オイラーの公式からj,k は整数より

$$
Q_{jk}=\begin{cases}1 & j=k\\ \dfrac{1}{n}\dfrac{\cos\{2\pi(j-k)\}+\mathrm{i}\sin\{2\pi(j-k)\}-1}{\exp\left(\dfrac{2\pi\mathrm{i}(j-k)}{n}\right)-1}=0 & j\neq k\end{cases}
$$

従って, 対角成分のみ 1 となり, 他の成分は全て 0 となるので,QQ^* は単位行列となる. 従って,Q はユニタリ行列であることが示された.

(5) 題意の 2 次正方行列 H についてユニタリ行列であることを示す.

$$
\begin{aligned}
HH^* &= \begin{pmatrix}\exp(\mathrm{i}\psi)\cos\theta & \exp(\mathrm{i}\psi)\sin\theta\\ -\exp(-\mathrm{i}\psi)\sin\theta & \exp(-\mathrm{i}\psi)\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\exp(-\mathrm{i}\psi)\cos\theta & -\exp(\mathrm{i}\psi)\sin\theta\\ \exp(-\mathrm{i}\psi)\sin\theta & \exp(\mathrm{i}\psi)\cos\theta\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\exp(\mathrm{i}\psi-\mathrm{i}\psi)(\cos^2\theta+\sin^2\theta) & \exp(2\mathrm{i}\psi)(-\cos\theta\sin\theta+\sin\theta\cos\theta)\\ \exp(-2\mathrm{i}\psi)(-\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta) & \exp(-\mathrm{i}\psi+\mathrm{i}\psi)(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= I
\end{aligned}
$$

よって, 行列 H はユニタリ行列である. また, 行列 H の行列式は以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
|\,H\,| &= \exp(\mathrm{i}\psi)\cos\theta\times\exp(-\mathrm{i}\psi)\cos\theta-(-\exp(-\mathrm{i}\psi)\sin\theta)\times\exp(\mathrm{i}\psi)\sin\theta\\
&= \cos^2\theta+\sin^2\theta=1
\end{aligned}
$$

よって, この 2 次正方行列 H は行列式が 1 でユニタリ行列であるので, 行列式が 1 で 2 次のユニタリ行列の一形式となることが示された.

(中田解)

求める行列を H とする.

実数 $r_{11},r_{12},r_{21},r_{22},\psi_{11},\psi_{12},\psi_{21},\psi_{22}$ を用いて次のように H を表すことができる.

$$
H=\begin{pmatrix}r_{11}\exp(\mathrm{i}\psi_{11}) & r_{12}\exp(\mathrm{i}\psi_{12})\\ r_{21}\exp(\mathrm{i}\psi_{21}) & r_{22}\exp(\mathrm{i}\psi_{22})\end{pmatrix}
$$

H がユニタリ行列になるとき

$$
\begin{aligned}
& HH^* = I \\
\iff & \begin{pmatrix} r_{11}\exp(\mathrm{i}\psi_{11}) & r_{12}\exp(\mathrm{i}\psi_{12}) \\ r_{21}\exp(\mathrm{i}\psi_{21}) & r_{22}\exp(\mathrm{i}\psi_{22}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11}\exp(-\mathrm{i}\psi_{11}) & r_{21}\exp(-\mathrm{i}\psi_{21}) \\ r_{12}\exp(-\mathrm{i}\psi_{12}) & r_{22}\exp(-\mathrm{i}\psi_{22}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\iff & \begin{cases} r_{11}^2 + r_{12}^2 = 1 \\ r_{11}r_{21}\exp(\mathrm{i}(\psi_{11}-\psi_{21})) + r_{12}r_{22}\exp(\mathrm{i}(\psi_{12}-\psi_{22})) = 0 \\ r_{11}r_{21}\exp(\mathrm{i}(\psi_{21}-\psi_{11})) + r_{12}r_{22}\exp(\mathrm{i}(\psi_{22}-\psi_{12})) = 0 \\ r_{21}^2 + r_{22}^2 = 1 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} r_{11}^2 + r_{12}^2 = 1 \\ r_{11}r_{21}\exp(\mathrm{i}(\psi_{11}-\psi_{21})) + r_{12}r_{22}\exp(\mathrm{i}(\psi_{12}-\psi_{22})) = 0 \\ r_{21}^2 + r_{22}^2 = 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

同様にして,

$$
\begin{aligned}
& H^*H = I \\
\iff & \begin{pmatrix} r_{11}\exp(-\mathrm{i}\psi_{11}) & r_{21}\exp(-\mathrm{i}\psi_{21}) \\ r_{12}\exp(-\mathrm{i}\psi_{12}) & r_{22}\exp(-\mathrm{i}\psi_{22}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11}\exp(\mathrm{i}\psi_{11}) & r_{12}\exp(\mathrm{i}\psi_{12}) \\ r_{21}\exp(\mathrm{i}\psi_{21}) & r_{22}\exp(\mathrm{i}\psi_{22}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\iff & \begin{cases} r_{11}^2 + r_{21}^2 = 1 \\ r_{11}r_{12}\exp(\mathrm{i}(\psi_{12}-\psi_{11})) + r_{21}r_{22}\exp(\mathrm{i}(\psi_{22}-\psi_{21})) = 0 \\ r_{11}r_{12}\exp(\mathrm{i}(\psi_{11}-\psi_{12})) + r_{21}r_{22}\exp(\mathrm{i}(\psi_{21}-\psi_{22})) = 0 \\ r_{12}^2 + r_{22}^2 = 1 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} r_{11}^2 + r_{21}^2 = 1 \\ r_{11}r_{12}\exp(\mathrm{i}(\psi_{11}-\psi_{12})) + r_{21}r_{22}\exp(\mathrm{i}(\psi_{21}-\psi_{22})) = 0 \\ r_{12}^2 + r_{22}^2 = 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

これらをまとめると,

$$
\begin{aligned}
& \begin{cases} r_{11}^2 + r_{12}^2 = 1 \\ r_{11}r_{21}\exp(\mathrm{i}(\psi_{11}-\psi_{21})) + r_{12}r_{22}\exp(\mathrm{i}(\psi_{12}-\psi_{22})) = 0 \\ r_{21}^2 + r_{22}^2 = 1 \\ r_{11}^2 + r_{21}^2 = 1 \\ r_{11}r_{12}\exp(\mathrm{i}(\psi_{11}-\psi_{12})) + r_{21}r_{22}\exp(\mathrm{i}(\psi_{21}-\psi_{22})) = 0 \\ r_{12}^2 + r_{22}^2 = 1 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} r_{11}^2 + r_{12}^2 = 1 \\ r_{11}^2 = r_{22}^2 \\ r_{12}^2 = r_{21}^2 \\ r_{11}r_{21}\exp(\mathrm{i}(\psi_{11}-\psi_{21})) + r_{12}r_{22}\exp(\mathrm{i}(\psi_{12}-\psi_{22})) = 0 \\ r_{11}r_{12}\exp(\mathrm{i}(\psi_{11}-\psi_{12})) + r_{21}r_{22}\exp(\mathrm{i}(\psi_{21}-\psi_{22})) = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

したがって, $r_{11} = \cos\theta$ $(\theta \in \mathbb{R})$ とすると, $r_{12} = \sin\theta$ となり, $r_{21} = \pm\sin\theta$, $r_{22} = \pm\cos\theta$ となる. また行列式の値が 1 であるから,

$$
\begin{aligned}
& \left| \begin{pmatrix} r_{11}\exp(\mathrm{i}\psi_{11}) & r_{12}\exp(\mathrm{i}\psi_{12}) \\ r_{21}\exp(\mathrm{i}\psi_{21}) & r_{22}\exp(\mathrm{i}\psi_{22}) \end{pmatrix} \right| = 1 \\
\iff & r_{11}r_{22}\exp(\mathrm{i}(\psi_{11}+\psi_{22})) - r_{12}r_{22}\exp(\mathrm{i}(\psi_{12}+\psi_{21})) = 1 \qquad (*)
\end{aligned}
$$

(i) $r_{21} = \sin\theta, r_{22} = \cos\theta$ のとき,

$$
\begin{aligned}
& \begin{cases} \sin\theta\cos\theta\Big\{\exp(\mathrm{i}(\psi_{11}-\psi_{21})) + \exp(\mathrm{i}(\psi_{12}-\psi_{22}))\Big\} = 0 \\ \sin\theta\cos\theta\Big\{\exp(\mathrm{i}(\psi_{11}-\psi_{21})) + \exp(\mathrm{i}(\psi_{12}-\psi_{22}))\Big\} = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} \psi_{11} - \psi_{21} = (2k+1)\pi + \psi_{12} + \psi_{22} & (k \in \mathbb{Z}) \\ \psi_{11} - \psi_{12} = (2m+1)\pi + \psi_{21} + \psi_{22} & (m \in \mathbb{Z}) \end{cases} \\
\iff & \psi_{11} = (2k+1)\pi + \psi_{12} + \psi_{21} - \psi_{22} \qquad (k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}
$$

式 $(*)$ に代入すると

$$
\begin{aligned}
& \cos^2\theta\exp\{\mathrm{i}((2k+1)\pi + \psi_{12} + \psi_{21} - \psi_{22} + \psi_{22})\} - \sin^2\theta\exp(\mathrm{i}(\psi_{12}+\psi_{21})) = 1 \\
\iff & -\cos^2\theta\exp(\mathrm{i}(\psi_{12}+\psi_{21})) - \sin^2\theta\exp(\mathrm{i}(\psi_{12}+\psi_{21})) = 1 \\
\iff & \psi_{12} + \psi_{21} = \pi
\end{aligned}
$$

したがって,

$$\begin{aligned} r_{21}\exp(\mathrm{i}\psi_{21}) &= \sin\theta\exp(\mathrm{i}(\pi-\psi_{12})) \\ &= -\sin\theta\exp(-\mathrm{i}\psi_{12}) \end{aligned}$$

また, $\psi_{12}+\psi_{21}=\pi$ より

$$\begin{aligned} \psi_{11} &= (2k+1)\pi+\pi-\psi_{22} \\ &= -\psi_{22} \end{aligned}$$

(ii) $r_{21}=\sin\theta, r_{22}=-\cos\theta$ のとき,

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \sin\theta\cos\theta\Big\{\exp(\mathrm{i}(\psi_{11}-\psi_{21}))-\exp(\mathrm{i}(\psi_{12}-\psi_{22}))\Big\}=0 \\ \sin\theta\cos\theta\Big\{\exp(\mathrm{i}(\psi_{11}-\psi_{21}))-\exp(\mathrm{i}(\psi_{12}-\psi_{22}))\Big\}=0 \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} \psi_{11}-\psi_{21}=2k\pi-\psi_{12}-\psi_{22} & (k\in\mathbb{Z}) \\ \psi_{11}-\psi_{12}=2m\pi-\psi_{21}-\psi_{22} & (m\in\mathbb{Z}) \end{cases} \\ \iff &\psi_{11}=2k\pi+\psi_{12}+\psi_{21}-\psi_{22} \qquad (k\in\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

(iii) $r_{21}=-\sin\theta, r_{22}=\cos\theta$ のとき,

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \sin\theta\cos\theta\Big\{\exp(\mathrm{i}(\psi_{11}-\psi_{21}))-\exp(\mathrm{i}(\psi_{12}-\psi_{22}))\Big\}=0 \\ \sin\theta\cos\theta\Big\{-\exp(\mathrm{i}(\psi_{11}-\psi_{21}))+\exp(\mathrm{i}(\psi_{12}-\psi_{22}))\Big\}=0 \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} \psi_{11}-\psi_{21}=2k\pi-\psi_{12}-\psi_{22} & (k\in\mathbb{Z}) \\ \psi_{11}-\psi_{12}=2m\pi-\psi_{21}-\psi_{22} & (m\in\mathbb{Z}) \end{cases} \\ \iff &\psi_{11}=2k\pi+\psi_{12}+\psi_{21}-\psi_{22} \qquad (k\in\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

(iv) $r_{21}=-\sin\theta, r_{22}=-\cos\theta$ のとき,

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \sin\theta\cos\theta\Big\{-\exp(\mathrm{i}(\psi_{11}-\psi_{21}))-\exp(\mathrm{i}(\psi_{12}-\psi_{22}))\Big\}=0 \\ \sin\theta\cos\theta\Big\{-\exp(\mathrm{i}(\psi_{11}-\psi_{21}))-\exp(\mathrm{i}(\psi_{12}-\psi_{22}))\Big\}=0 \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} \psi_{11}-\psi_{21}=2k\pi-\psi_{12}-\psi_{22} & (k\in\mathbb{Z}) \\ \psi_{11}-\psi_{12}=2m\pi-\psi_{21}-\psi_{22} & (m\in\mathbb{Z}) \end{cases} \\ \iff &\psi_{11}=(2k+1)\pi+\psi_{12}+\psi_{21}-\psi_{22} \qquad (k\in\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

(6) 解けなかったので後述.

(中田解)

求める行列を H とする.

実数 $r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22}, \psi_{11}, \psi_{12}, \psi_{21}, \psi_{22}$ を用いて次のように H を表すことができる.

$$H=\begin{pmatrix} r_{11}\exp(\mathrm{i}\psi_{11}) & r_{12}\exp(\mathrm{i}\psi_{12}) \\ r_{21}\exp(\mathrm{i}\psi_{21}) & r_{22}\exp(\mathrm{i}\psi_{22}) \end{pmatrix}$$

H がユニタリ行列になるとき

$$\begin{aligned} &HH^*=I \\ \iff &\begin{pmatrix} r_{11}\exp(\mathrm{i}\psi_{11}) & r_{12}\exp(\mathrm{i}\psi_{12}) \\ r_{21}\exp(\mathrm{i}\psi_{21}) & r_{22}\exp(\mathrm{i}\psi_{22}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_{11}\exp(-\mathrm{i}\psi_{11}) & r_{21}\exp(-\mathrm{i}\psi_{21}) \\ r_{12}\exp(-\mathrm{i}\psi_{12}) & r_{22}\exp(-\mathrm{i}\psi_{22}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \iff &\begin{cases} r_{11}^2+r_{12}^2=1 \\ r_{11}r_{21}\exp(\mathrm{i}(\psi_{11}-\psi_{21}))+r_{12}r_{22}\exp(\mathrm{i}(\psi_{12}-\psi_{22}))=0 \\ r_{11}r_{21}\exp(\mathrm{i}(\psi_{21}-\psi_{11}))+r_{12}r_{22}\exp(\mathrm{i}(\psi_{22}-\psi_{12}))=0 \\ r_{21}^2+r_{22}^2=1 \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} r_{11}^2+r_{12}^2=1 \\ r_{11}r_{21}\exp(\mathrm{i}(\psi_{11}-\psi_{21}))+r_{12}r_{22}\exp(\mathrm{i}(\psi_{12}-\psi_{22}))=0 \\ r_{21}^2+r_{22}^2=1 \end{cases} \end{aligned}$$

同様にして,

$$
\begin{aligned}
&H^*H = I\\
\iff &\begin{pmatrix} r_{11}\exp(-\mathrm{i}\psi_{11}) & r_{21}\exp(-\mathrm{i}\psi_{21}) \\ r_{12}\exp(-\mathrm{i}\psi_{12}) & r_{22}\exp(-\mathrm{i}\psi_{22}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_{11}\exp(\mathrm{i}\psi_{11}) & r_{12}\exp(\mathrm{i}\psi_{12}) \\ r_{21}\exp(\mathrm{i}\psi_{21}) & r_{22}\exp(\mathrm{i}\psi_{22}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\\
\iff &\left\{\begin{array}{l} r_{11}^2 + r_{21}^2 = 1 \\ r_{11}r_{12}\exp(\mathrm{i}(\psi_{12}-\psi_{11})) + r_{21}r_{22}\exp(\mathrm{i}(\psi_{22}-\psi_{21})) = 0 \\ r_{11}r_{12}\exp(\mathrm{i}(\psi_{11}-\psi_{12})) + r_{21}r_{22}\exp(\mathrm{i}(\psi_{21}-\psi_{22})) = 0 \\ r_{12}^2 + r_{22}^2 = 1 \end{array}\right.\\
\iff &\left\{\begin{array}{l} r_{11}^2 + r_{21}^2 = 1 \\ r_{11}r_{12}\exp(\mathrm{i}(\psi_{11}-\psi_{12})) + r_{21}r_{22}\exp(\mathrm{i}(\psi_{21}-\psi_{22})) = 0 \\ r_{12}^2 + r_{22}^2 = 1 \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

これらをまとめると,

$$
\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{l} r_{11}^2 + r_{12}^2 = 1 \\ r_{11}r_{21}\exp(\mathrm{i}(\psi_{11}-\psi_{21})) + r_{12}r_{22}\exp(\mathrm{i}(\psi_{12}-\psi_{22})) = 0 \\ r_{21}^2 + r_{22}^2 = 1 \\ r_{11}^2 + r_{21}^2 = 1 \\ r_{11}r_{12}\exp(\mathrm{i}(\psi_{11}-\psi_{12})) + r_{21}r_{22}\exp(\mathrm{i}(\psi_{21}-\psi_{22})) = 0 \\ r_{12}^2 + r_{22}^2 = 1 \end{array}\right.\\
\iff &\left\{\begin{array}{l} r_{11}^2 + r_{12}^2 = 1 \\ r_{11}^2 = r_{22}^2 \\ r_{12}^2 = r_{21}^2 \\ r_{11}r_{21}\exp(\mathrm{i}(\psi_{11}-\psi_{21})) + r_{12}r_{22}\exp(\mathrm{i}(\psi_{12}-\psi_{22})) = 0 \\ r_{11}r_{12}\exp(\mathrm{i}(\psi_{11}-\psi_{12})) + r_{21}r_{22}\exp(\mathrm{i}(\psi_{21}-\psi_{22})) = 0 \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

したがって, $r_{11} = \cos\theta$ $(\theta \in \mathbb{R})$ とすると, $r_{12} = \sin\theta$ となり, $r_{21} = \pm\sin\theta$, $r_{22} = \pm\cos\theta$ となる.

(i) $r_{21} = \sin\theta, r_{22} = \cos\theta$ のとき,

$$
\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{l} \sin\theta\cos\theta\Big\{\exp(\mathrm{i}(\psi_{11}-\psi_{21})) + \exp(\mathrm{i}(\psi_{12}-\psi_{22}))\Big\} = 0 \\ \sin\theta\cos\theta\Big\{\exp(\mathrm{i}(\psi_{11}-\psi_{21})) + \exp(\mathrm{i}(\psi_{12}-\psi_{22}))\Big\} = 0 \end{array}\right.\\
\iff &\left\{\begin{array}{ll} \psi_{11}-\psi_{21} = (2k+1)\pi + \psi_{12} + \psi_{22} & (k \in \mathbb{Z}) \\ \psi_{11}-\psi_{12} = (2m+1)\pi + \psi_{21} + \psi_{22} & (m \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.\\
\iff &\psi_{11} = (2k+1)\pi + \psi_{12} + \psi_{21} - \psi_{22} \qquad (k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}
$$

(ii) $r_{21} = \sin\theta, r_{22} = -\cos\theta$ のとき,

$$
\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{l} \sin\theta\cos\theta\Big\{\exp(\mathrm{i}(\psi_{11}-\psi_{21})) - \exp(\mathrm{i}(\psi_{12}-\psi_{22}))\Big\} = 0 \\ \sin\theta\cos\theta\Big\{\exp(\mathrm{i}(\psi_{11}-\psi_{21})) - \exp(\mathrm{i}(\psi_{12}-\psi_{22}))\Big\} = 0 \end{array}\right.\\
\iff &\left\{\begin{array}{ll} \psi_{11}-\psi_{21} = 2k\pi - \psi_{12} - \psi_{22} & (k \in \mathbb{Z}) \\ \psi_{11}-\psi_{12} = 2m\pi - \psi_{21} - \psi_{22} & (m \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.\\
\iff &\psi_{11} = 2k\pi + \psi_{12} + \psi_{21} - \psi_{22} \qquad (k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}
$$

(iii) $r_{21} = -\sin\theta, r_{22} = \cos\theta$ のとき,

$$
\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{l} \sin\theta\cos\theta\Big\{\exp(\mathrm{i}(\psi_{11}-\psi_{21})) - \exp(\mathrm{i}(\psi_{12}-\psi_{22}))\Big\} = 0 \\ \sin\theta\cos\theta\Big\{-\exp(\mathrm{i}(\psi_{11}-\psi_{21})) + \exp(\mathrm{i}(\psi_{12}-\psi_{22}))\Big\} = 0 \end{array}\right.\\
\iff &\left\{\begin{array}{ll} \psi_{11}-\psi_{21} = 2k\pi - \psi_{12} - \psi_{22} & (k \in \mathbb{Z}) \\ \psi_{11}-\psi_{12} = 2m\pi - \psi_{21} - \psi_{22} & (m \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.\\
\iff &\psi_{11} = 2k\pi + \psi_{12} + \psi_{21} - \psi_{22} \qquad (k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}
$$

(iv) $r_{21}=-\sin\theta, r_{22}=-\cos\theta$ のとき,

$$
\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{l}
\sin\theta\cos\theta\Big\{-\exp(\mathrm{i}(\psi_{11}-\psi_{21}))-\exp(\mathrm{i}(\psi_{12}-\psi_{22}))\Big\}=0\\
\sin\theta\cos\theta\Big\{-\exp(\mathrm{i}(\psi_{11}-\psi_{21}))-\exp(\mathrm{i}(\psi_{12}-\psi_{22}))\Big\}=0
\end{array}\right.\\
\Longleftrightarrow&\left\{\begin{array}{ll}
\psi_{11}-\psi_{21}=2k\pi-\psi_{12}-\psi_{22} & (k\in\mathbb{Z})\\
\psi_{11}-\psi_{12}=2m\pi-\psi_{21}-\psi_{22} & (m\in\mathbb{Z})
\end{array}\right.\\
\Longleftrightarrow&\ \psi_{11}=(2k+1)\pi+\psi_{12}+\psi_{21}-\psi_{22}\qquad(k\in\mathbb{Z})
\end{aligned}
$$

したがって，一般形は (i),(ii),(iii),(iv) より

$$
H=\begin{pmatrix}-\exp(\mathrm{i}(\psi_{12}+\psi_{21}-\psi_{22}))\cos\theta & \exp(\mathrm{i}\psi_{12})\sin\theta\\ \exp(\mathrm{i}\psi_{21})\sin\theta & \exp(\mathrm{i}\psi_{22})\cos\theta\end{pmatrix}
$$

第 2 問

第 2 問　問題文

実数値関数 $u(x,t)$ が $-\infty < x < \infty, t \geq 0$ で定義されている．ここで x,t は独立である. 偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.1}$$

の解を初期条件

$$u(x,0) = \exp\left(-ax^2\right) \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \tag{2.3}$$

の下で求める. 但し,a, c は正の実数であり,i は虚数単位とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 次の式を複素積分を用いて計算せよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-a(x + \mathrm{i}d)^2\right) \, \mathrm{d}x$$

但し,d は実数である．また, 以下の式を用いてもよい

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) \, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

(2) $u(x,t)$ の x に関するフーリエ変換 $U(k,t)$ を以下のように定義する.

$$U(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) \exp(-\mathrm{i}kx) \, \mathrm{d}x$$

ここで x に関する積分と t に関する積分の順序の交換が可能であると仮定してよい. さらに,$u(x,t)$ と $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ は任意の t に対して $x \to \pm\infty$ の時 0 に収束するものとする.

(i) $u(x,t)$ が式 (2.1) を満たすとき,$U(k,t)$ が従う偏微分方程式を答えよ.

(ii) (i) の解は式 (2.3) の初期条件の下で k を変数とする関数 $F(k)$ を用いて以下のように表せることを示せ.

$$U(k,t) = F(k) \cos(kct)$$

(iii) さらに式 (2.2) の初期条件の下で $F(k)$ を求め,$U(k,t)$ を与えよ. 設問 (1) の結果を用いてもよい.

(3) 設問 2 で得られた $U(k,t)$ のフーリエ逆変換を計算することにより,$u(x,t)$ を求めよ. 但し, フーリエ逆変換は次式で定義される.

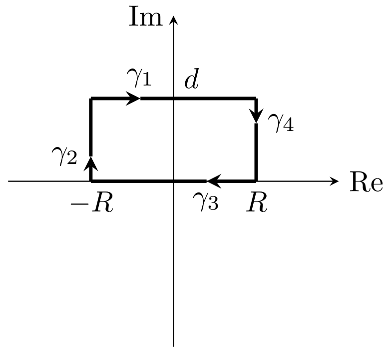
$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(k,t) \exp(\mathrm{i}kx) \, \mathrm{d}k$$

第 2 問　解答例

(1) 題意の式は複素数 $f(z)=\exp(-az^2)$ とおくと $R(\in\mathbb{R})$ を用いて, 直線 $\gamma_1(t)=t+\mathrm{i}d:\ t\in[-R,R]$ における以下のような複素積分となる.

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-a(x+\mathrm{i}d)^2\right\}\,\mathrm{d}x\\&=\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1}\exp\left(-az^2\right)\,\mathrm{d}z\\&=\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1}f(z)\,\mathrm{d}z\end{aligned}\tag{2.4}$$

よって, 式 (2.4) を求めればいいことが分かるので, この式の値を以下で求める.
ここで, 以下の積分路 $C:\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4$ を考える.



よって, この時,$f(z)=\exp(-az^2)$ は $\mathbb{C}$ 上で正則であるので, 積分路 C 及び C 内で正則より, Cauchy の積分定理より以下が成り立つ.

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=0\tag{2.5}$$

よって, またここで以下が成り立つ.

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=\int_{\gamma_1}f(z)\,\mathrm{d}z+\int_{\gamma_2}f(z)\,\mathrm{d}z+\int_{\gamma_3}f(z)\,\mathrm{d}z+\int_{\gamma_4}f(z)\,\mathrm{d}z\tag{2.6}$$

従って, 積分路 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ における積分について以下が成り立つ.
まず,γ_2 の積分について $\gamma_2(t)=-R+\mathrm{i}t\ :\ t\in[0,d]$ より以下が成り立つ.

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2}f(z)\,\mathrm{d}z&=\int_0^d\exp\left(-a(-R+\mathrm{i}t)^2\right)\mathrm{i}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^d\exp\left(-a(R^2-2\mathrm{i}Rt-t^2)\right)\mathrm{i}\,\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{2.7}$$

次に,γ_3 の積分について $\gamma_3(t)=t\ :\ t\in[-R,R]$ より以下が成り立つ.

$$\int_{\gamma_3}f(z)\,\mathrm{d}z=\int_R^{-R}\exp\left(-at^2\right)\,\mathrm{d}t\tag{2.8}$$

次に,γ_4 の積分について $\gamma_4(t)=R+\mathrm{i}t\ :\ t\in[0,d]$ より以下が成り立つ.

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_4}f(z)\,\mathrm{d}z&=\int_0^d\exp\left(-a(R+\mathrm{i}t)^2\right)\mathrm{i}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^d\exp\left(-a(R^2+2\mathrm{i}Rt-t^2)\right)\mathrm{i}\,\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{2.9}$$

従って, 式 (2.7) より, 以下が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^d \exp\left(-a(R^2-2\mathrm{i}Rt-t^2)\right)\mathrm{i}\,\mathrm{d}t\right| &\leq \int_0^d \left|\exp\left(-a(R^2-2\mathrm{i}Rt-t^2)\right)\mathrm{i}\right|\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^d \left|\exp\left(-a(R^2-2\mathrm{i}Rt-t^2)\right)\right|\,|\,\mathrm{i}\,|\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^d \left|\exp\left(-aR^2\right)\right|\left|\exp\left(-2\mathrm{i}Rt\right)\right|\left|\exp\left(-t^2\right)\right|\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^d \left|\exp\left(-aR^2\right)\right|\left|\exp\left(-t^2\right)\right|\,\mathrm{d}t \\
&= \exp\left(-aR^2\right)\int_0^d \exp\left(-t^2\right)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \lim_{R\to\infty}\int_0^d \left|\exp\left(-a(R^2-2\mathrm{i}Rt-t^2)\right)\mathrm{i}\right|\,\mathrm{d}t = \lim_{R\to\infty}\exp\left(-aR^2\right)\int_0^d \exp\left(-t^2\right)\,\mathrm{d}t = 0
$$

挟み撃ちの定理より

$$
\lim_{R\to\infty}\left|\int_0^d \exp\left(-a(R^2-2\mathrm{i}Rt-t^2)\right)\mathrm{i}\,\mathrm{d}t\right| = 0
$$

$$
\therefore \lim_{R\to\infty}\int_0^d \exp\left(-a(R^2-2\mathrm{i}Rt-t^2)\right)\mathrm{i}\,\mathrm{d}t = 0 \tag{2.10}
$$

また, 式 (2.9) より, 同様にして以下が成り立つ.

$$
\left|\int_0^d \exp\left(-a(R^2+2\mathrm{i}Rt-t^2)\right)\mathrm{i}\,\mathrm{d}t\right| \leq \exp\left(-aR^2\right)\int_0^d \exp\left(-t^2\right)\,\mathrm{d}t
$$

$$
\therefore \lim_{R\to\infty}\int_0^d \left|\exp\left(-a(R^2-2\mathrm{i}Rt-t^2)\right)\mathrm{i}\right|\,\mathrm{d}t = \lim_{R\to\infty}\exp\left(-aR^2\right)\int_0^d \exp\left(-t^2\right)\,\mathrm{d}t = 0
$$

挟み撃ちの定理より

$$
\lim_{R\to\infty}\left|\int_0^d \exp\left(-a(R^2-2\mathrm{i}Rt-t^2)\right)\mathrm{i}\,\mathrm{d}t\right| = 0
$$

$$
\therefore \lim_{R\to\infty}\int_0^d \exp\left(-a(R^2-2\mathrm{i}Rt-t^2)\right)\mathrm{i}\,\mathrm{d}t = 0 \tag{2.11}
$$

また, 題意の式より, 以下が成り立つ.

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-x^2\right)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi} \tag{2.12}
$$

また,$a>0$ より式 (2.8) から, $u=-\sqrt{a}t$ と置換すると以下が成り立つ.

$$
\int_R^{-R}\exp\left(-at^2\right)\,\mathrm{d}t = \int_{-\sqrt{a}R}^{\sqrt{a}R}\exp\left(-u^2\right)\frac{1}{-\sqrt{a}}\,\mathrm{d}u \tag{2.13}
$$

よって, 式 (2.12), (2.13) より, 以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\int_R^{-R}\exp\left(-at^2\right)\,\mathrm{d}t &= -\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-u^2\right)\,\mathrm{d}u \\
&= -\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

従って, 式 (2.5), (2.10), (2.14), (2.11) より, 以下が成り立つ.

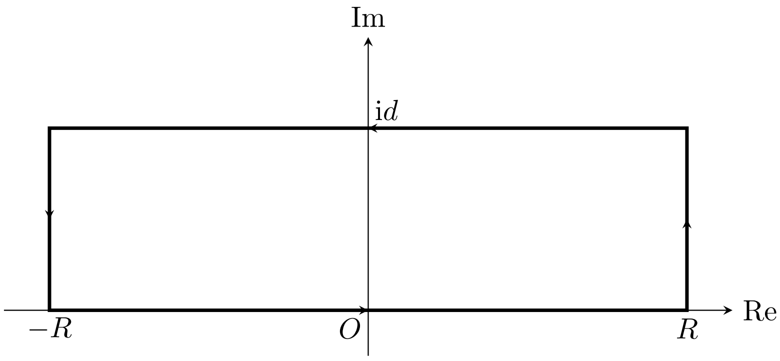
$$
\begin{aligned}
&\lim_{R\to\infty}\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \\
\iff &\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z + \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \\
\iff &\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + 0 + \left(-\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right) + 0 = 0 \\
\iff &\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \sqrt{\frac{\pi}{a}}
\end{aligned}
$$

従って, 式 (2.4) より求める値は $\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ となる.

(中田解)

$f(z)=\exp(-az^2)$ とする.

$R(\in\mathbb{R})$ を用いて, 次の積分路を考える.



e^{-az^2} に留数は存在しないので, 上の周回積分路 C において

$$\int_C \exp(-az^2)\,\mathrm{d}z=0$$

ここで, $-R\to R$ の積分路を C_1 とし, $R\to R+\mathrm{i}d$ の積分路を C_2, $R+\mathrm{i}d\to -R+\mathrm{i}d$ の積分路を C_3, $-R+\mathrm{i}d\to -R$ の積分路を C_4 とすると,

$$C=C_1+C_2+C_3+C_4$$

である. ここで,$R\to\infty$ において

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\int_{C_2}\exp(-az^2)\,\mathrm{d}z&=\lim_{R\to\infty}\int_0^d \exp(-a(R+\mathrm{i}t)^2)\,\mathrm{d}t\\&=0\end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\int_{C_4}\exp(-az^2)\,\mathrm{d}z&=\lim_{R\to\infty}\int_d^0 \exp(-a(-R+\mathrm{i}t)^2)\,\mathrm{d}t\\&=0\end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\int_C\exp(-az^2)\,\mathrm{d}z&=\lim_{R\to\infty}\int_{C_1}\exp(-az^2)\,\mathrm{d}z+\lim_{R\to\infty}\int_{C_3}\exp(-az+\mathrm{i}d)\,\mathrm{d}z\\&=0\end{aligned}$$

したがって,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-ax^2)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-a(x+\mathrm{i}d)^2)\,\mathrm{d}x$$

ここで, $t=\sqrt{a}x$ とおくと,

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\sqrt{a}\iff \mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{a}}\,\mathrm{d}t$$

であるから,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-ax^2)\,\mathrm{d}x&=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-t^2)\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2)\,\mathrm{d}x\\&=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\end{aligned}$$

よって,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a(x+\mathrm{i}d))\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

(2) (i) 式 (2.1) と題意より, 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U(k,t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\exp(-\mathrm{i}kx)\,\mathrm{d}x\right)}{\partial t^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\exp(-\mathrm{i}kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} c^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\exp(-\mathrm{i}kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{c^2}{\sqrt{2\pi}}\left\{\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\exp(-\mathrm{i}kx)\right]_{-\infty}^{\infty} - (-\mathrm{i}k)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\exp(-\mathrm{i}kx)\,\mathrm{d}x\right\} \\
&= \frac{\mathrm{i}kc^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\exp(-\mathrm{i}kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\mathrm{i}kc^2}{\sqrt{2\pi}}\left\{[u(x,t)\exp(-\mathrm{i}kx)]_{-\infty}^{\infty} - (-\mathrm{i}k)\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)\exp(-\mathrm{i}kx)\,\mathrm{d}x\right\} \\
&= \frac{(\mathrm{i}kc)^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)\exp(-\mathrm{i}kx)\,\mathrm{d}x \\
&= -(kc)^2U(k,t)
\end{aligned}$$

よって,$U(k,t)$ は以下の偏微分方程式に従う.

$$\frac{\partial^2 U(k,t)}{\partial t^2} = -(kc)^2U(k,t) \tag{2.15}$$

(ii) 初期条件 (2.3) より, 以下のことが成り立つ.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U(k,t)}{\partial t} &= \frac{\partial \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\exp(-\mathrm{i}kx)\,\mathrm{d}x\right)}{\partial t} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\exp(-\mathrm{i}kx)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\therefore\ \frac{\partial U}{\partial t}(k,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\exp(-\mathrm{i}kx)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{2.16}$$

よって,$U(k,t)$ に関する初期条件も式 (2.16) のようになる. ここで $U(k,t)$ が題意の関数で表されるとすると $U(k,t)$ の t に関する 1 階偏微分を行うと以下のようになる.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U(k,t)}{\partial t} &= \frac{\partial F(k)\cos(kct)}{\partial t} \\
&= F(k)(-kc\sin(kct))
\end{aligned}$$

よって, 以下が成り立つ.

$$\frac{\partial U}{\partial t}(k,0) = F(k)(-kc\sin(kc\cdot 0)) = 0 \tag{2.17}$$

よって, 題意の関数でおくと初期条件 (2.16) を満たす. また,(i) の解となるかを以下に示す.
(i) の式に代入して,

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \frac{\partial^2 U(k,t)}{\partial t^2} \\
&= \frac{\partial^2\left(F(k)\cos(kct)\right)}{\partial t^2} \\
&= -(kc)^2F(k)\cos(kct) \\
&= -(kc)^2U(k,t) \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}$$

よって,$U(k,t)=F(k)\cos(kct)$ は (i) の解の一つである. 従って, 式 (2.3) の初期条件のもとで (i) の解となることが示されたので, 題意は示された.

(iii) 式 (2.2) の初期条件の下で設問 (1) より, 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned}
U(k,0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)\exp(-\mathrm{i}kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-ax^2\right)\exp(-\mathrm{i}kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-ax^2-\mathrm{i}kx\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-a\left(x-\frac{\mathrm{i}k}{2a}\right)^2+\frac{1}{a}\cdot\left(\frac{\mathrm{i}k}{2}\right)^2\right\}\mathrm{d}x \\
&= \frac{\exp\left(-\frac{k^2}{4a}\right)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-a\left(x-\frac{\mathrm{i}k}{2a}\right)^2\right\}\mathrm{d}x \\
&= \frac{\exp\left(-\frac{k^2}{4a}\right)}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}
\end{aligned}$$

従って以下が成り立つ.

$$U(k,0)=F(k)\cos(kc\cdot 0)=F(k)=\frac{\exp\left(-\frac{k^2}{4a}\right)}{\sqrt{2a}}$$

よって,$U(k,t)$ は以下のようになる

$$U(k,t)=F(k)\cos(kct)=\frac{\exp\left(-\frac{k^2}{4a}\right)}{\sqrt{2a}}\cos(kct) \tag{2.18}$$

(3) 設問 (2) で得られた $U(k,t)$ と $a>0$, 設問 (1) より, 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} U(k,t)\exp(ikx)\,\mathrm{d}k \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(\frac{-k^2}{4a}\right)}{\sqrt{2a}}\cos(kct)\exp(\mathrm{i}kx)\,\mathrm{d}k \\
&= \frac{1}{2\sqrt{a\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{k^2}{4a}+\mathrm{i}kx\right)\frac{\exp\left(\mathrm{i}kct\right)+\exp\left(-\mathrm{i}kct\right)}{2}\,\mathrm{d}k \\
&= \frac{1}{4\sqrt{a\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{k^2}{4a}+\mathrm{i}kx+\mathrm{i}kct\right)+\exp\left(-\frac{k^2}{4a}+\mathrm{i}kx-\mathrm{i}kct\right)\mathrm{d}k \\
&= \frac{1}{4\sqrt{a\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{4a}\left\{k-2a\mathrm{i}(x+ct)\right\}^2-a(x+ct)^2\right]\mathrm{d}k \\
&\quad+\frac{1}{4\sqrt{a\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{4a}\left\{k-2a\mathrm{i}(x-ct)\right\}^2-a(x-ct)^2\right]\mathrm{d}k \\
&= \frac{1}{4\sqrt{a\pi}}\exp\left\{-a(x+ct)^2\right\}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{4a}\left\{k-2a\mathrm{i}(x+ct\right\}^2\right]\mathrm{d}k \\
&\quad+\frac{1}{4\sqrt{a\pi}}\exp\left\{-a(x-ct)^2\right\}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{4a}\left\{k-2a\mathrm{i}(x-ct)\right\}^2\right]\mathrm{d}k \\
&= \frac{1}{4\sqrt{a\pi}}\exp\left\{-a(x+ct)^2\right\}\sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{4a}}}+\frac{1}{4\sqrt{a\pi}}\exp\left\{-a(x-ct)^2\right\}\sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{4a}}} \\
&= \frac{1}{2}\left[\exp\left\{-a(x+ct)^2\right\}+\exp\left\{-a(x-ct)^2\right\}\right]
\end{aligned}$$

よって, 求める関数 $u(x,t)$ は以下のようになる.

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\exp\left\{-a(x+ct)^2\right\}+\exp\left\{-a(x-ct)^2\right\}\right]$$

第 3 問

第 3 問　問題文

下図のように, 平面上に三角形 ABC が与えられており, 各頂点の座標は A$(1,0)$, B$(0,1)$, C$(-1,-1)$ とする. 原点 $(0,0)$ を端点とする半直線 ℓ をランダムに選ぶ. すなわち,Θ を区間 $[0,2\pi)$ 上の一様分布に従う確率変数として,

$$\ell = \{(r\cos\Theta, r\sin\Theta) \mid r \geq 0\}$$

とおく. この半直線 ℓ と三角形 ABC の周との交点を Q とおく. また,Q の座標を (X,Y) とおく. ただし,X,Y は確率変数である. 以下の問いに答えよ.

(1) 点 Q が辺 AB 上にある確率を求めよ.

(2) 点 Q が辺 AB 上にあるという条件の下での X の期待値は $1/2$ であることを示せ. 但し, 三角形 ABC が直線 $y=x$ に関して対称であることを利用してもよい.

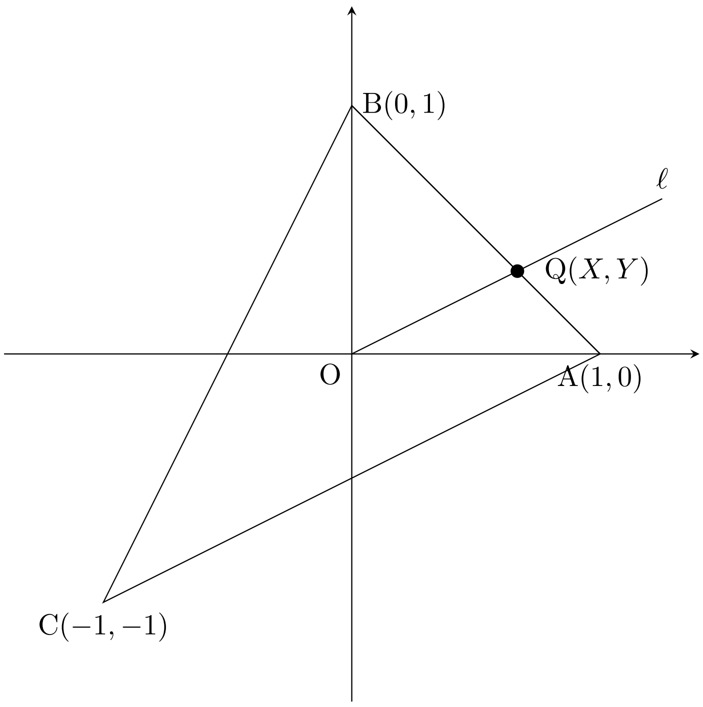
(3) 点 Q が辺 BC にあるという条件のもとでの X の確率密度関数を, 変数変換の公式

$$f(x) = g(h(x))\left|\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}(x)\right|$$

を使って求めよ. ただし,x は任意の実数とし,f と g はそれぞれ X と Θ の確率密度関数を表し,h は $\Theta = h(X)$ を満たす関数とする.

(4) 点 Q が辺 BC にあるという条件のもとでの X の期待値を α とおく. 設問 3 の結果を用いて α を求めよ.

(5) X の期待値 μ を求めよ.



第 3 問　解答例

(1) 点 Q が辺 AB にある時, 確率変数 Θ は以下の範囲に存在する.

$$0 \leq \Theta \leq \frac{\pi}{2} \tag{3.1}$$

ここで, 確率変数 Θ は区間 $[0, 2\pi)$ 上の一様分布に従う確率変数であるので, Θ に関する確率密度関数 $f_\Theta(\Theta)$ は定数 $c \in \mathbb{R}$ を用いて, 以下のように定義される.

$$f_\Theta(\Theta) = \begin{cases} c & 0 \leq \Theta < 2\pi \\ 0 & 0 > \Theta, \Theta \geq 2\pi \end{cases} \tag{3.2}$$

よって, 式 (3.2) と確率密度関数の定義より, 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} f_\Theta(\Theta)\,\mathrm{d}\Theta = 1 \\ &\iff \lim_{x \to 2\pi - 0} \int_0^x c\,\mathrm{d}\Theta = 1 \\ &\iff \lim_{x \to 2\pi - 0} cx = 1 \\ &\iff 2c\pi = 1 \\ &\iff c = \frac{1}{2\pi} \end{aligned}$$

よって, 式 (3.2) から $f_\Theta(\Theta)$ は以下のように定義し直すことができる.

$$f_\Theta(\Theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & 0 \leq \Theta < 2\pi \\ 0 & 0 > \Theta, \Theta \geq 2\pi \end{cases} \tag{3.3}$$

従って式 (3.3), (3.1) から求める確率 P は以下のようになる.

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_\Theta(\Theta)\,\mathrm{d}\Theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{d}\Theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

よって, 求める確率は $\frac{1}{4}$ になる.

(中田解)

Q が AB 上にある確率とは, Q が第 1 象限上に存在する確率と等しい. ここで, Θ は区間 $[0, 2\pi)$ 上の一様分布に従う確率変数であるので, 半直線 l が第 1 象限上に存在する確率は $\dfrac{1}{4}$ である. よって答えは $\dfrac{1}{4}$ である.

(2) 設問 (1) より, 辺 AB 上に点 Q が存在するときは $0 \leq \Theta \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす.
また, この時, 題意より確率変数 X について以下が成り立つ.
ℓ の方程式:

$$X = r\cos\Theta, Y = r\sin\Theta \therefore X\sin\Theta = Y\cos\Theta \tag{3.4}$$

$$\tag{3.5}$$

辺 AB の方程式:

$$(y-1) = \frac{0-1}{1-0}(x-0) \therefore y = -x + 1\,(0 \leq x \leq 1)$$

よって点 Q が AB 上にあるので

$$Y = -X + 1\,(0 \leq X \leq 1) \tag{3.6}$$

式 (3.4), (3.6) より $0 \leq X \leq 1$ において

$$\begin{aligned} &X\sin\Theta = (-X+1)\cos\Theta \\ &\therefore \cos\Theta = X(\sin\Theta + \cos\Theta) \end{aligned} \tag{3.7}$$

ここで $\sin\Theta+\cos\Theta=\sqrt{2}\sin\left(\Theta+\frac{\pi}{4}\right)$ であるため, $0\ \leq\ \Theta\ \leq\ \frac{\pi}{2}$ における範囲は以下のようになる.

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}&\leq\sqrt{2}\sin\left(\Theta+\frac{\pi}{4}\right)\ \leq\ \sqrt{2}\\ \Longleftrightarrow 1&\leq\sin\Theta+\cos\Theta\ \leq\ \sqrt{2}\end{aligned}\tag{3.8}$$

よって, 式 (3.7), (3.8) より,X は以下のように表せる.

$$X=\frac{\cos\Theta}{\sin\Theta+\cos\Theta}=\frac{\cos\Theta}{\sqrt{2}\sin\left(\Theta+\frac{\pi}{4}\right)}\tag{3.9}$$

ここで $0\ \leq\ \Theta\ \leq\ \frac{\pi}{2}$ において, X を Θ の関数 $F(\Theta)$ として考えると以下が成り立つ.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\Theta}(\Theta)&=\frac{-\cos\left\{\Theta-\left(\Theta+\frac{\pi}{4}\right)\right\}}{\sqrt{2}\sin^2\left(\Theta+\frac{\pi}{4}\right)}\\ &=-\frac{1}{2\sin^2\left(\Theta+\frac{\pi}{4}\right)}<0\end{aligned}$$

よって,$0\ \leq\ \Theta\ \leq\ \frac{\pi}{2}$ において,$X=F(\Theta)$ は単調減少することが分かる. 従って,$0\ \leq\ \Theta\ \leq\ \frac{\pi}{2}$ において, ある Θ に対応する X の値はただ一つしか存在しないので,X も $0\ \leq\ X\ \leq\ 1$ において一様分布に従う. よって, この区間における確率密度関数 $f_{X_{01}}(X)$ は以下のようになる.

$$f_{X_{01}}(X)=\begin{cases}c_X & 0\ \leq\ X\ \leq\ 1\\ 0 & X<0,\ X>1\end{cases}$$

よって, 確率密度関数の性質より

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}f_{X_{01}}(X)\,\mathrm{d}X&=1\\ \int_0^1 f_{X_{01}}(X)\,\mathrm{d}X&=1\\ \int_0^1 c_X\,\mathrm{d}X&=1\\ c_X&=1\end{aligned}$$

従って, 点 Q が辺 AB 上にある条件の下での X の期待値 E_X は以下のようになる.

$$\begin{aligned}E_X&=\int_{-\infty}^{\infty}Xf_{X_{01}}(X)\,\mathrm{d}X\\ &=\int_0^1 X\,\mathrm{d}X\\ &=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

よって, 題意は示された.

(中田解)

三角形 ABC が直線 $y=x$ に関して対称であることから一様分布に従う確率変数のもとでは期待値は $y=x$ 上に存在する. ここで, 点 Q が辺 AB 上にあるという条件下においては辺 AB と $y=x$ の交点が期待値であることがいえる. ここで交点を求めると $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ であるから求める X の期待値は 1/2 である. よって, 題意は示された.

(3) 以降 $\arctan x$ の定義域は $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ であるとする.
点 Q が辺 BC 上にあるので, 確率変数 X に関して以下が成り立つ.
辺 BC の方程式:

$$(y-1)=\frac{1+1}{0+1}(x-0)\ \therefore y=2x+1$$

よって点 Q が BC 上にあるので $-1 \le X \le 0$ において

$$Y = 2X + 1 \tag{3.10}$$

点 Q は半直線 ℓ 上の点でもあるので, 式 (3.4), (3.10) より $-1 \le X \le 0$ において

$$\begin{aligned} X\sin\Theta &= (2X+1)\cos\Theta \\ \therefore &\begin{cases} \Theta = \frac{\pi}{2} & X = 0 \\ \sin\Theta = \frac{2X+1}{X}\cos\Theta & -1 \le X < 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{3.11}$$

よって,$X \neq 0$ の時 $\Theta \neq \frac{\pi}{2}$ であるので $\cos\Theta \neq 0$ であり, 式 (3.11) より Θ について点 Q が辺 BC に存在する場合,$\frac{\pi}{2} \le \Theta \le \frac{5\pi}{4}$ より以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \Theta = \frac{\pi}{2} & X = 0 \\ \tan\Theta = \frac{2X+1}{X} & -1 \le X < 0 \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} \Theta = \frac{\pi}{2} & X = 0 \\ \Theta = \pi + \arctan\left(\frac{2X+1}{X}\right) & -1 \le X < 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Θ は区間 $[0, 2\pi)$ において一様分布に従うので確率密度関数 $g(\Theta)$ は式 (3.3) であるため, 以下が成り立つ.

$$g(\Theta) = \frac{1}{2\pi}$$

$\frac{\pi}{2} < \Theta \le \frac{5\pi}{4}$ において, つまり $-1 \le X < 0$ の時, 式 (3.12) より確率密度関数 $f(x)$ は変数変換の公式を用いて以下のようになる

$$\begin{aligned} \Theta = h(X) &= \pi + \arctan\left(\frac{2X+1}{X}\right) \\ \therefore \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}(x) &= \frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{x}\right)^2}\frac{2x-(2x+1)}{x^2} \\ &= \frac{-x^2}{\left\{(2x+1)^2+x^2\right\}x^2} \\ &= \frac{-1}{(2x+1)^2+x^2} \\ \iff f(x) &= \frac{1}{2\pi}\frac{-1}{(2x+1)^2+x^2} \end{aligned} \tag{3.13}$$

$\Theta = \frac{\pi}{2}$ において, つまり $X = 0$ の時, 式 (3.12) より確率密度関数 $f(x)$ は変数変換の公式を用いて以下のようになる

$$\begin{aligned} \Theta = h(0) &= \frac{\pi}{2} \\ \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} &= 0 \\ \iff f(0) &= 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

よって, 式 (3.13),(3.14) より, 求める確率密度関数 $f(x)$ は以下のようになる.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{-1}{2\pi\left\{(2x+1)^2+x^2\right\}} & -1 \le x < 0 \end{cases}$$

(中田解)

辺 BC 上を通る直線の式は $y = 2x + 1$ である. ここで辺 BC 上に点 Q が存在する確率密度関数は Θ の範囲が $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5}{4}\pi\right]$ であるから,

$$g(x) = \frac{4}{3\pi}$$

$X, \ \Theta$ の関係について $Y = 2X + 1$ であることと, $X = r\cos\Theta, \ Y = r\sin\Theta$ であることから,

$$\tan\Theta X = 2X + 1$$

となる. $X = 0$ のとき, $\Theta = \dfrac{\pi}{2}$ である. $X \neq 0$ のときは

$$\begin{aligned} &\tan\Theta X = 2X + 1 \\ \iff &\tan\Theta = 2 + \frac{1}{X} \\ \iff &\Theta = \mathrm{Arctan}\left(2 + \frac{1}{X}\right) \end{aligned}$$

ゆえに

$$h(X) = \mathrm{Arctan}\left(2 + \frac{1}{X}\right)$$

よって,

$$\begin{aligned} f(x) &= g(h(x)) \left|\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}(x)\right| \\ &= \frac{4}{3\pi}\left|\frac{1}{1 + \left(2 + \frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right| \\ &= \left|\frac{4}{3\pi} \cdot \frac{1}{5x^2 + 4x + 1}\right| \\ &= -\frac{4}{3\pi} \cdot \frac{1}{5x^2 + 4x + 1} \end{aligned}$$

$x = 0$ に関しても連続であるから同様の答えとなる.

(4) 設問 (3) より辺 BC 上に点 Q が存在する時の X の期待値 α は以下のようになる.

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{t \to -0} \int_{-1}^{t} xf(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{t \to -0} \int_{-1}^{t} \frac{-x}{2\pi\left\{(2x+1)^2 + x^2\right\}}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{t \to -0} \frac{-1}{20\pi} \int_{-1}^{t} \frac{10x + 4 - 4}{(2x+1)^2 + x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{t \to -0} \frac{-1}{20\pi} \left\{\left[\log\left\{(2x+1)^2 + x^2\right\}\right]_{-1}^{t} - \int_{-1}^{t} \frac{4}{(2x+1)^2 + x^2}\,\mathrm{d}x\right\} \\ &= \lim_{t \to -0} \left(\frac{-1}{20\pi}\left[\log\left\{(2t+1)^2 + t^2\right\} - \log 2\right] + \frac{1}{5\pi}\int_{-1}^{t} \frac{1}{\frac{1}{5}\left\{(5x+2)^2 + 1\right\}}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{\log 2}{20\pi} + \lim_{t \to -0} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{t} \frac{1}{(5x+2)^2 + 1}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

ここで $5x + 2 = \tan u$ と置換し, β, γ を $\tan\beta = -3, \tan\gamma = 5t + 2$ を満たすとものとしておくと以下のようになる.

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\log 2}{20\pi} + \lim_{t \to -0} \frac{1}{\pi} \int_{\beta}^{\gamma} \frac{1}{\tan^2 u + 1} \frac{1}{5\cos^2 u}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{\log 2}{20\pi} + \lim_{t \to -0} \frac{1}{5\pi}(\gamma - \beta) \\ &= \frac{\log 2}{20\pi} + \lim_{t \to -0} \frac{1}{5\pi}\left\{(\pi + \arctan(5t+2)) - (\pi + \arctan(-3))\right\} \\ &= \frac{\log 2}{20\pi} + \frac{1}{5\pi}(\arctan 2 + \arctan 3) \end{aligned}$$

よって, 期待値 α について以下のようになる.

$$\alpha = \frac{\log 2}{20\pi} + \frac{1}{5\pi}(\arctan 2 + \arctan 3) \tag{3.15}$$

(中田解)

(3) の結果を用いて以下のように期待値は表せる.

$$\begin{aligned}
\alpha &= \int_{-1}^{0} xf(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{0} \left(-\frac{4}{3\pi}\cdot\frac{1}{5x^2+4x+1}\right)\cdot x\ \mathrm{d}x \\
&= -\frac{4}{3\pi}\int_{-1}^{0} \frac{x}{5x^2+4x+1}\ \mathrm{d}x \\
&= -\frac{4}{3\pi}\int_{-1}^{0} \frac{1}{10}\left(\frac{10x+4}{5x^2+4x+1} - \frac{4}{5x^2+4x+1}\right)\ \mathrm{d}x \\
&= -\frac{2}{15\pi}\left(\Big[\log\left|5x^2+4x+1\right|\Big]_{-1}^{0} - 4\int_{-1}^{0}\frac{1}{5x^2+4x+1}\ \mathrm{d}x\right) \\
&= -\frac{2}{15\pi}\left(-\log 2 - 4\int_{-1}^{0}\frac{1}{5\left(x^2+\frac{4}{5}x\right)+1}\ \mathrm{d}x\right) \\
&= -\frac{2}{15\pi}\left(-\log 2 - 4\int_{-1}^{0}\frac{1}{5\left\{\left(x+\frac{2}{5}\right)^2-\frac{4}{25}\right\}+1}\ \mathrm{d}x\right) \\
&= -\frac{2}{15\pi}\left(-\log 2 - 4\int_{-1}^{0}\frac{1}{5\left(x+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}}\ \mathrm{d}x\right) \\
&= -\frac{2}{15\pi}\left(-\log 2 - 4\int_{-1}^{0}5\cdot\frac{1}{25\left(x+\frac{2}{5}\right)^2+1}\ \mathrm{d}x\right) \\
&= -\frac{2}{15\pi}\left(-\log 2 - \left[4\cdot 5\cdot\frac{1}{5}\cdot\mathrm{Arctan}\left\{5\cdot\left(x+\frac{2}{5}\right)\right\}\right]_{-1}^{1}\right) \\
&= -\frac{2}{15\pi}\Big\{-\log 2 - 4\cdot(\mathrm{Arctan}2 + \mathrm{Arctan}3)\Big\} \\
&= -\frac{2}{15\pi}\left\{-\log 2 - 4\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\} \\
&= \frac{2}{15\pi}\log 2 - \frac{2}{15}
\end{aligned}$$

(5) まず, 点 Q が辺 AC 上にある時の X の期待値 δ を求める.

設問 (4), (3) と同様にして確率密度関数を求めてから期待値を求める.

この時, 確率変数 X について以下のことが成り立つ.

辺 AC の方程式:

$$(y-0) = \frac{0+1}{1+1}(x-1) \ \therefore y = \frac{1}{2}(x-1)$$

よって点 Q が AC 上にあるので $-1 \leq X \leq 1$ において

$$Y = \frac{1}{2}(X-1) \tag{3.16}$$

点 Q は半直線 ℓ 上の点でもあるので, 式 (3.4), (3.16) より $-1 \leq X \leq 1$ において

$$\begin{aligned}
X\sin\Theta &= \frac{1}{2}(X-1)\cos\Theta \\
\therefore &\begin{cases} \Theta = \frac{3\pi}{2} & X = 0 \\ \sin\Theta = \frac{X-1}{2X}\cos\Theta & -1 \leq X < 0,\ 0 < X \leq 1 \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

よって,$X \neq 0$ の時 $\Theta \neq \frac{3\pi}{2}$ であるので $\cos\Theta \neq 0$ であり, 式 (3.17) より Θ について点 Q が辺 AC に存在する場合, つまり,$-1 \le X \le 1$ において以下が成り立つ.

$$\begin{cases} \Theta = \frac{3\pi}{2} & X = 0 \\ \tan\Theta = \frac{X-1}{2X} & -1 \le X < 0,\, 0 < X \le 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \Theta = \frac{3\pi}{2} & X = 0 \\ \Theta = \pi + \arctan\left(\frac{X-1}{2X}\right) & 0 < X \le 1 \\ \Theta = 2\pi + \arctan\left(\frac{X-1}{2X}\right) & -1 \le X < 0 \end{cases} \tag{3.18}$$

ここで Θ は区間 $[0, 2\pi)$ において一様分布に従うので確率密度関数 $g(\Theta)$ は式 (3.3) であるため, 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} g(\Theta) &= \frac{\frac{1}{2\pi}}{\frac{3}{8}} \\ &= \frac{4}{3\pi} \end{aligned}$$

よって,$\frac{5\pi}{4} \le \Theta < \frac{3\pi}{2}$ において, つまり $0 < X \le 1$ の時, 式 (3.18) より, 確率密度関数 $f(x)$ は変数変換の公式を用いて以下のようになる.

$$\begin{aligned} \Theta = h(X) &= \pi + \arctan\left(\frac{X-1}{2X}\right) \\ \therefore \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}(x) &= \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{2x}\right)^2}\frac{x-(x-1)}{2x^2} \\ &= \frac{4x^2}{\left\{(x-1)^2+4x^2\right\}2x^2} \\ &= \frac{2}{(x-1)^2+4x^2} \\ \iff f(x) &= \frac{4}{3\pi}\frac{2}{(x-1)^2+4x^2} \end{aligned} \tag{3.19}$$

$\frac{3\pi}{2} < \Theta < 2\pi$ において, つまり $-1 \le X < 0$ の時, 式 (3.18) より, 確率密度関数 $f(x)$ は変数変換の公式を用いて以下のようになる.

$$\Theta = h(X) = 2\pi + \arctan\left(\frac{X-1}{2X}\right)$$

$0 < X \le 1$ の時と同様にして

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}(x) &= \frac{2}{(x-1)^2+4x^2} \\ \iff f(x) &= \frac{4}{3\pi}\frac{2}{(x-1)^2+4x^2} \end{aligned} \tag{3.20}$$

よって, 式 (3.19), (3.20) から確率密度関数 $f(x)$ は $x = 0$ の時も連続である。よって以下のようになる.

$$f(x) = \frac{8}{3\pi\left\{(x-1)^2+4x^2\right\}} \quad -1 \le x \le 1$$

従って期待値 δ は以下のようになる.

$$\begin{aligned} \delta &= \int_{-1}^{1} xf(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{8x}{3\pi\left\{(x-1)^2+4x^2\right\}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{8}{3\pi}\int_{-1}^{1} \frac{x}{\left\{(x-1)^2+4x^2\right\}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{8}{3\pi}\int_{-1}^{1} \frac{10x-2}{\left\{(x-1)^2+4x^2\right\}}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

ここで $5x-1=2\tan u$ と置換し, β, $\gamma_1(<\frac{3\pi}{2})$, $\gamma_2(>\frac{3\pi}{2})$, η を $\tan\beta=-3, \tan\gamma_1=\tan\gamma_2=\frac{5t-1}{2}, \tan\eta=2$ を満たすとものとしておくと以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
\delta &= \frac{-\log 2}{10\pi}+\lim_{t\to-0}\frac{1}{\pi}\int_{\beta}^{\gamma_1}\frac{1}{4\tan^2 u+4}\frac{2}{5\cos^2 u}\,\mathrm{d}u+\lim_{t\to+0}\frac{1}{\pi}\int_{\gamma_2}^{\eta}\frac{1}{4\tan^2 u+4}\frac{2}{5\cos^2 u}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{-\log 2}{10\pi}+\lim_{t\to-0}\frac{1}{\pi}\int_{\beta}^{\gamma_1}\frac{1}{10}\,\mathrm{d}u+\lim_{t\to+0}\frac{1}{\pi}\int_{\gamma_2}^{\eta}\frac{1}{10}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{-\log 2}{10\pi}+\lim_{t\to-0}\frac{1}{10\pi}(\gamma_1-\beta)+\lim_{t\to-0}\frac{1}{\pi}(\eta-\gamma_2) \\
&= \frac{-\log 2}{10\pi}+\frac{1}{10\pi}\left\{\left(\pi+\arctan\left(\frac{-1}{2}\right)\right)-(\pi+\arctan(-3))+(2\pi+\arctan 2)-\left(2\pi+\arctan\left(\frac{-1}{2}\right)\right)\right\} \\
&= \frac{-\log 2}{10\pi}+\frac{1}{10\pi}(\arctan 2+\arctan 3)
\end{aligned}
$$

よって, 期待値 δ について以下のようになる.

$$
\delta=\frac{-\log 2}{10\pi}+\frac{1}{10\pi}(\arctan 2+\arctan 3) \tag{3.21}
$$

よって, 設問 (2), 式 (3.15), (3.21) より点 Q が辺 AB にある状態, 辺 AC にある状態, 辺 BC にある状態での X の期待値をそれぞれの状態における離散的な確率変数として考えるとそれぞれの出現確率が $\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}$ であるので X の期待値 μ は以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
\mu &= \frac{1}{4}E_X+\frac{3}{8}\alpha+\frac{3}{8}\delta \\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\left\{\frac{\log 2}{20\pi}+\frac{1}{5\pi}(\arctan 2+\arctan 3)\right\}+\frac{3}{8}\left\{\frac{-\log 2}{10\pi}+\frac{1}{10\pi}(\arctan 2+\arctan 3)\right\} \\
&= \frac{1}{8}\left\{1-\frac{3\log 2}{20\pi}+\frac{9}{10\pi}(\arctan 2+\arctan 3)\right\}
\end{aligned}
$$