東大 2017 年度数学解答例

文殊の知恵
高橋那弥

目次

第 1 問

第 1 問　問題文

3 次元ベクトル $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ は式

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

を満たすものとする。但し、x_0, y_0, z_0, α は実数とし、

$$A = \begin{pmatrix} 1-2\alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}, \qquad 0 < \alpha < \frac{1}{3}$$

とする。以下の問いに答えよ。

(1) $x_n + y_n + z_n$ を x_0, y_0, z_0 を用いて表せ。

(2) 行列 A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ と、それぞれの固有値に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ を求めよ。

(3) 行列 A を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ を用いて表せ。

(4) $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ を x_0, y_0, z_0, α を用いて表せ。

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ を求めよ。

(6) 以下の式

$$f(x_0, y_0, z_0) = \frac{(x_n \ y_n \ z_n) \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}}{(x_n \ y_n \ z_n) \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}}$$

を x_0, y_0, z_0 の関数とみなして、$f(x_0, y_0, z_0)$ の最大値及び最小値を求めよ。但し、$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \neq 0$

第 1 問　解答

(1) 題意より以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1-2\alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (1-2\alpha)x_n + \alpha y_n + \alpha z_n \\ \alpha x_n + (1-\alpha) y_n \\ \alpha x_n + (1-\alpha) z_n \end{pmatrix} \\
\therefore x_{n+1} + y_{n+1} + z_{n+1} &= (1-2\alpha)x_n + \alpha y_n + \alpha z_n + \alpha x_n + (1-\alpha)y_n + \alpha x_n + (1-\alpha)z_n \\
&= x_n + y_n + z_n \\
\therefore x_n + y_n + z_n &= x_0 + y_0 + z_0
\end{aligned}$$

(2) まず A の固有値を求める。

$$\begin{aligned}
\left| \lambda I - A \right| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 + 2\alpha & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & \lambda - 1 + \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & \lambda - 1 + \alpha \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\alpha} \begin{vmatrix} (\lambda - 1 + 2\alpha) & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & \lambda - 1 + \alpha & 0 \\ -\alpha^2 + (\lambda - 1 + 2\alpha)(\lambda - 1 + \alpha) & -\alpha(\lambda - 1 + \alpha) & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+3}(-1) \begin{vmatrix} -\alpha & \lambda - 1 + \alpha \\ -\alpha^2 + (\lambda - 1 + 2\alpha)(\lambda - 1 + \alpha) & -\alpha(\lambda - 1 + \alpha) \end{vmatrix} \\
&= -\left\{ \alpha^2(\lambda - 1 + \alpha) - (\lambda - 1 + \alpha)(-\alpha^2 + (\lambda - 1 + 2\alpha)(\lambda - 1 + \alpha)) \right\} \\
&= -(\lambda - 1 + \alpha) \left\{ \alpha^2 - (-\alpha^2 + (\lambda - 1 + 2\alpha)(\lambda - 1 + \alpha)) \right\} \\
&= -(\lambda - 1 + \alpha) \left\{ 2\alpha^2 - (\lambda - 1)^2 - 2\alpha^2 - 3\alpha(\lambda - 1)) \right\} \\
&= (\lambda - 1 + \alpha)(\lambda - 1)(\lambda - 1 + 3\alpha)
\end{aligned}$$

よって、$\lambda = \alpha - 1, 1, 1 - 3\alpha$ より、$\lambda_1 = -1 + \alpha, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1 - 3\alpha$

従って固有空間 $W(\lambda; A) = \{\boldsymbol{v} | \left(\lambda I - A\right) \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\}$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
W(\alpha - 1; A) &= \left\{ \boldsymbol{v} \middle| \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ -s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{よって、} \boldsymbol{v}_1 = s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
W(1; A) &= \left\{ \boldsymbol{v} \middle| \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} s \\ s \\ s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{よって、} \boldsymbol{v}_2 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
W(1 - 3\alpha; A) &= \left\{ \boldsymbol{v} \middle| \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -2s \\ s \\ s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{よって、} \boldsymbol{v}_3 = u \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

よって、$\lambda_1 = -1 + \alpha, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1 - 3\alpha, \boldsymbol{v}_1 = s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = u \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

但し、s, t, u は 0 でない任意の実数とする。

(3) 題意より、A は対称行列であるため、直交行列で対角化できる。また、異なる固有値の基底ベクトルは互いに直交する。よって、以下は正規直交基底ベクトル集合 W となる。

$$W = \left\{ \frac{\boldsymbol{v}_1}{|\boldsymbol{v}_1|}, \frac{\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_2|}, \frac{\boldsymbol{v}_3}{|\boldsymbol{v}_3|} \right\}$$

よって、この集合の要素を並べたものは直交行列となり、その直交行列 P を $P = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{v}_1}{|\boldsymbol{v}_1|} & \frac{\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_2|} & \frac{\boldsymbol{v}_3}{|\boldsymbol{v}_3|} \end{pmatrix}$ とおくと、P は

直交行列より、$P^{-1} = P^{\top} = \begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{v_1}}{|\boldsymbol{v_1}|}^{\top} \\ \dfrac{\boldsymbol{v_2}}{|\boldsymbol{v_2}|}^{\top} \\ \dfrac{\boldsymbol{v_3}}{|\boldsymbol{v_3}|}^{\top} \end{pmatrix}$ となる。よって、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}
A &= P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1} \\
\Leftrightarrow A &= P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{\top} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{v_1}}{|\boldsymbol{v_1}|} & \dfrac{\boldsymbol{v_2}}{|\boldsymbol{v_2}|} & \dfrac{\boldsymbol{v_3}}{|\boldsymbol{v_3}|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{v_1}}{|\boldsymbol{v_1}|}^{\top} \\ \dfrac{\boldsymbol{v_2}}{|\boldsymbol{v_2}|}^{\top} \\ \dfrac{\boldsymbol{v_3}}{|\boldsymbol{v_3}|}^{\top} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 \dfrac{\boldsymbol{v_1}}{|\boldsymbol{v_1}|} & \lambda_2 \dfrac{\boldsymbol{v_2}}{|\boldsymbol{v_2}|} & \lambda_3 \dfrac{\boldsymbol{v_3}}{|\boldsymbol{v_3}|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{v_1}}{|\boldsymbol{v_1}|}^{\top} \\ \dfrac{\boldsymbol{v_2}}{|\boldsymbol{v_2}|}^{\top} \\ \dfrac{\boldsymbol{v_3}}{|\boldsymbol{v_3}|}^{\top} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_2}{\sqrt{3}} \dfrac{\boldsymbol{v_2}}{|\boldsymbol{v_2}|} - \dfrac{2\lambda_3}{\sqrt{6}} \dfrac{\boldsymbol{v_3}}{|\boldsymbol{v_3}|} & \dfrac{\lambda_1}{\sqrt{2}} \dfrac{\boldsymbol{v_1}}{|\boldsymbol{v_1}|} + \dfrac{\lambda_2}{\sqrt{3}} \dfrac{\boldsymbol{v_2}}{|\boldsymbol{v_2}|} + \dfrac{\lambda_3}{\sqrt{6}} \dfrac{\boldsymbol{v_3}}{|\boldsymbol{v_3}|} & -\dfrac{\lambda_1}{\sqrt{2}} \dfrac{\boldsymbol{v_1}}{|\boldsymbol{v_1}|} + \dfrac{\lambda_2}{\sqrt{3}} \dfrac{\boldsymbol{v_2}}{|\boldsymbol{v_2}|} + \dfrac{\lambda_3}{\sqrt{6}} \dfrac{\boldsymbol{v_3}}{|\boldsymbol{v_3}|} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(4) 題意より、以下が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

但し、A^n は A を A に対して右から n 回かけたことを意味する。また、以下も同様の意味を表す。

ここで、(3) より、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}
P^{\top}AP &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \\
\Longleftrightarrow (P^{\top}AP)^n &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}^n \\
\Longleftrightarrow P^{\top}A^nP &= \begin{pmatrix} {\lambda_1}^n & 0 & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^n & 0 \\ 0 & 0 & {\lambda_3}^n \end{pmatrix} \\
\Longleftrightarrow A^n &= P \begin{pmatrix} {\lambda_1}^n & 0 & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^n & 0 \\ 0 & 0 & {\lambda_3}^n \end{pmatrix} P^{\top}
\end{aligned}$$

$$\therefore A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{{\lambda_2}^n}{\sqrt{3}} \dfrac{\boldsymbol{v_2}}{|\boldsymbol{v_2}|} - \dfrac{2{\lambda_3}^n}{\sqrt{6}} \dfrac{\boldsymbol{v_3}}{|\boldsymbol{v_3}|} & \dfrac{{\lambda_1}^n}{\sqrt{2}} \dfrac{\boldsymbol{v_1}}{|\boldsymbol{v_1}|} + \dfrac{{\lambda_2}^n}{\sqrt{3}} \dfrac{\boldsymbol{v_2}}{|\boldsymbol{v_2}|} + \dfrac{{\lambda_3}^n}{\sqrt{6}} \dfrac{\boldsymbol{v_3}}{|\boldsymbol{v_3}|} & -\dfrac{{\lambda_1}^n}{\sqrt{2}} \dfrac{\boldsymbol{v_1}}{|\boldsymbol{v_1}|} + \dfrac{{\lambda_2}^n}{\sqrt{3}} \dfrac{\boldsymbol{v_2}}{|\boldsymbol{v_2}|} + \dfrac{{\lambda_3}^n}{\sqrt{6}} \dfrac{\boldsymbol{v_3}}{|\boldsymbol{v_3}|} \end{pmatrix}$$

ここで $\boldsymbol{u}_{1_n} = \dfrac{{\lambda_2}^n}{\sqrt{3}} \dfrac{\boldsymbol{v_2}}{|\boldsymbol{v_2}|} - \dfrac{2{\lambda_3}^n}{\sqrt{6}} \dfrac{\boldsymbol{v_3}}{|\boldsymbol{v_3}|}$, $\boldsymbol{u}_{2_n} = \dfrac{{\lambda_1}^n}{\sqrt{2}} \dfrac{\boldsymbol{v_1}}{|\boldsymbol{v_1}|} + \dfrac{{\lambda_2}^n}{\sqrt{3}} \dfrac{\boldsymbol{v_2}}{|\boldsymbol{v_2}|} + \dfrac{{\lambda_3}^n}{\sqrt{6}} \dfrac{\boldsymbol{v_3}}{|\boldsymbol{v_3}|}$, $\boldsymbol{u}_{3_n} = -\dfrac{{\lambda_1}^n}{\sqrt{2}} \dfrac{\boldsymbol{v_1}}{|\boldsymbol{v_1}|} + \dfrac{{\lambda_2}^n}{\sqrt{3}} \dfrac{\boldsymbol{v_2}}{|\boldsymbol{v_2}|} + \dfrac{{\lambda_3}^n}{\sqrt{6}} \dfrac{\boldsymbol{v_3}}{|\boldsymbol{v_3}|}$ と置くと、以下のようになる。

$$A^n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_{1_n} & \boldsymbol{u}_{2_n} & \boldsymbol{u}_{3_n} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

よって、式 (1.1), (1.2) より、題意は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_{1_n} & \boldsymbol{u}_{2_n} & \boldsymbol{u}_{3_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \\
&= x_0 \boldsymbol{u}_{1_n} + y_0 \boldsymbol{u}_{2_n} + z_0 \boldsymbol{u}_{3_n} \\
&= x_0 \left(\frac{{\lambda_2}^n}{\sqrt{3}} \frac{\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_2|} - \frac{2{\lambda_3}^n}{\sqrt{6}} \frac{\boldsymbol{v}_3}{|\boldsymbol{v}_3|} \right) + y_0 \left(\frac{{\lambda_1}^n}{\sqrt{2}} \frac{\boldsymbol{v}_1}{|\boldsymbol{v}_1|} + \frac{{\lambda_2}^n}{\sqrt{3}} \frac{\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_2|} + \frac{{\lambda_3}^n}{\sqrt{6}} \frac{\boldsymbol{v}_3}{|\boldsymbol{v}_3|} \right) \\
&+ z_0 \left(-\frac{{\lambda_1}^n}{\sqrt{2}} \frac{\boldsymbol{v}_1}{|\boldsymbol{v}_1|} + \frac{{\lambda_2}^n}{\sqrt{3}} \frac{\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_2|} + \frac{{\lambda_3}^n}{\sqrt{6}} \frac{\boldsymbol{v}_3}{|\boldsymbol{v}_3|} \right) \\
&= \frac{{\lambda_1}^n}{\sqrt{2}} (y_0 - z_0) \frac{\boldsymbol{v}_1}{|\boldsymbol{v}_1|} + \frac{{\lambda_2}^n}{\sqrt{3}} (x_0 + y_0 + z_0) \frac{\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_2|} + \frac{{\lambda_3}^n}{\sqrt{6}} (-2x_0 + y_0 + z_0) \frac{\boldsymbol{v}_3}{|\boldsymbol{v}_3|} \\
&= \frac{{\lambda_1}^n}{\sqrt{2}} (y_0 - z_0) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \frac{{\lambda_2}^n}{\sqrt{3}} (x_0 + y_0 + z_0) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} + \frac{{\lambda_3}^n}{\sqrt{6}} (-2x_0 + y_0 + z_0) \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{{\lambda_2}^n (x_0+y_0+z_0)}{3} - \frac{2{\lambda_3}^n (-2x_0+y_0+z_0)}{6} \\ \frac{{\lambda_1}^n (y_0-z_0)}{2} + \frac{{\lambda_2}^n (x_0+y_0+z_0)}{3} + \frac{{\lambda_3}^n (-2x_0+y_0+z_0)}{6} \\ -\frac{{\lambda_1}^n (y_0-z_0)}{2} + \frac{{\lambda_2}^n (x_0+y_0+z_0)}{3} + \frac{{\lambda_3}^n (-2x_0+y_0+z_0)}{6} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2x_0 \left\{ 1 + 2(1-3\alpha)^n \right\} + 2y_0 \left\{ 1 - (1-3\alpha)^n \right\} + 2z_0 \left\{ 1 - (1-3\alpha)^n \right\} \\ 2x_0 \left\{ 1 - (1-3\alpha)^n \right\} + y_0 \left\{ 3(-1+\alpha)^n + 2 + (1-3\alpha)^n \right\} + z_0 \left\{ -3(-1+\alpha)^n + 2 + (1-3\alpha)^n \right\} \\ 2x_0 \left\{ 1 - (1-3\alpha)^n \right\} + y_0 \left\{ -3(-1+\alpha)^n + 2 + (1-3\alpha)^n \right\} + z_0 \left\{ 3(-1+\alpha)^n + 2 + (1-3\alpha)^n \right\} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(5) (4) より、題意は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n \to \infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \\
&= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2x_0 \left\{ 1 + 2(1-3\alpha)^n \right\} + 2y_0 \left\{ 1 - (1-3\alpha)^n \right\} + 2z_0 \left\{ 1 - (1-3\alpha)^n \right\} \\ 2x_0 \left\{ 1 - (1-3\alpha)^n \right\} + y_0 \left\{ 3(-1+\alpha)^n + 2 + (1-3\alpha)^n \right\} + z_0 \left\{ -3(-1+\alpha)^n + 2 + (1-3\alpha)^n \right\} \\ 2x_0 \left\{ 1 - (1-3\alpha)^n \right\} + y_0 \left\{ -3(-1+\alpha)^n + 2 + (1-3\alpha)^n \right\} + z_0 \left\{ 3(-1+\alpha)^n + 2 + (1-3\alpha)^n \right\} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ここで、題意より $0 < \alpha < \frac{1}{3}$ より、$-1 < -1 + \alpha < -\frac{2}{3}$, $0 < 1 - 3\alpha < 1$ である。よって、

$$
\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2x_0 + 2y_0 + 2z_0 \\ 2x_0 + 2y_0 + 2z_0 \\ 2x_0 + 2y_0 + 2z_0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x_0 + y_0 + z_0 \\ x_0 + y_0 + z_0 \\ x_0 + y_0 + z_0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる。

(6)

第 2 問

第 2 問　問題文

実数値関数 $u(x,t)$ が $0 \le x \le 1,\ t \ge 0$ で定義されている。ここで x と t は互いに独立である。偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (*)$$

の解を次の条件

$$\text{境界条件：}\quad u(0,t) = u(1,t) = 0$$
$$\text{初期条件：}\quad u(x,0) = x - x^2$$

のもとで求める。但し、定数関数 $u(x,t) = 0$ は明らかに解であるから、それ以外の解を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 次の式を計算せよ。ここで, n, m はともに正の整数とする。

$$\int_0^1 \sin(n\pi x)\ \sin(m\pi x)\,\mathrm{d}x$$

(2) x のみの関数 $\xi(x)$ 及び t のみの関数 $\tau(t)$ を用いて、$u(x,t) = \xi(x)\tau(t)$ と置けるとする。任意の定数 C を用いて、ξ および τ が満たす常微分方程式をそれぞれ表せ。関数 $f(x)$ と関数 $g(t)$ が任意の x と t について $f(x) = g(t)$ を満たす場合は、$f(x)$ と $g(t)$ が定数関数となることを用いてもよい。

(3) 設問 (2) の常微分方程式を解け。次に、境界条件を満たす偏微分方程式 $(*)$ の解の一つが次の式で表される $u_n(x,t)$ で与えられることを示し、α, β を正の整数 n を用いて表せ。

$$u_n(x,t) = e^{\alpha t} \sin(\beta x)$$

(4) 境界条件と初期条件を満たす偏微分方程式 $(*)$ の解は $u_n(x,t)$ の線形結合として次の式で表される。c_n を求めよ。設問 (1) の結果を用いてもよい。

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t)$$

第 2 問　解答

(1) 題意の式より以下が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \frac{1}{2}\int_0^1 \cos(n\pi x - m\pi x) - \cos(n\pi x + m\pi x)\,\mathrm{d}x \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^1 1 - \cos(2n\pi x)\,\mathrm{d}x & n = m \\ \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n-m)\pi x)}{(n-m)\pi}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+m)\pi x)}{(n+m)\pi}\right]_0^1 & n \neq m \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi}\right]_0^1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2} & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}
\end{aligned}
$$

(2) 偏微分方程式 $(*)$ より $u(x,t) = \xi(x)\tau(t)$ と表せるとすると以下が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
(*) &\iff \frac{\partial\{\xi(x)\tau(t)\}}{\partial t} = \frac{\partial^2\{\xi(x)\tau(t)\}}{\partial x^2} \\
&\iff \xi(x)\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \tau(t)\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}x^2} \\
&\iff \begin{cases} 0 = \tau(t)\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}x^2} & \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

(3) ここで、初期条件より $u(x,0) = \xi(x)\tau(0) = x - x^2$ より、$\xi(x) = x - x^2, \tau(0) = 1$ と置ける。これは境界条件 $u(0,t) = u(1,t) = 0$ も満たす。よって、以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
&\xi(x) = x(1-x),\ \frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}x^2} = -2 \\
&\Longrightarrow (*) \iff x(1-x)\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = -2\tau(t) \\
&\therefore \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = 0
\end{aligned}
$$

(4)

第 3 問

第 3 問　問題文

(1) 連続確率変数 T の確率密度関数 $f(t)$ が λ を正の定数として

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

で表されるとき、T はパラメータ λ の指数分布に従うという。この確率変数の平均値を求めよ。またこの指数分布の確率分布関数 $F(t) = P(T \leq t)$ を求めよ。なお、$P(X)$ は事象 X が起こる確率である。

(2) 設問 (1) の分布が無記憶であること、すなわち任意の $s > 0, t > 0$ に対して

$$P(T > s + t | T > s) = P(T > t)$$

が成立することを示せ。なお、$P(X|Y)$ は事象 Y が起こった条件のもとで事象 X が起こる確率である。

(3) 問題の解答を始めてから解答を終えるまでの時間を解答所要時間と呼ぶことにする。ある問題に対して n 人の学生の解答所要時間が全て同じパラメータ λ_0 の指数分布に従うものとする。n 人が同時に解答を始めた時最も早く解答を終える学生の解答所要時間はそれぞれ独立であるとする。

(4) 学生 A, B の解答所要時間がパラメータ λ_A, λ_B の指数分布にそれぞれ従うものとする。この二人が同時に解答を開始した時に、学生 A のほうが学生 B より先に解答を終える確率を求めよ。

(5) 優秀な学生である秀夫君と、他 10 名の学生に問題を同時に解かせる。各学生の解答所要時間は指数分布に従うものとし、また秀夫君以外の各学生の平均解答所要時間は、全て秀夫君の平均解答所要時間の 10 倍であるとする。秀夫君が 1 番目に解答を終える確率、及び 4 番目に解答を終える確率をそれぞれ求めよ。

第 3 問　解答