# 東大 2018 年度数学解答例

文殊の知恵
中田昌輝

# 目次

# 第 1 問

## 第 1 問　問題文

次の連立一次方程式を解く問題を考える.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

ここで, $\boldsymbol{A} \in \mathcal{R}^{m\times n}$, $b \in \mathcal{R}^{m}$ は与えられた定数の行列とベクトルであり, $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^{n}$ は未知ベクトルである. 以下の問いに答えよ.

(1) $\overline{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})$ のように, 行列 $\boldsymbol{A}$ の最後の列の後ろに 1 列追加した $m \times (n+1)$ 行列を作る. 例えば, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ の場合には, $\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ となる. この例の $\overline{\boldsymbol{A}}$ の第 $i$ 列ベクトルを $\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ とする.

(i) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ のうち線形独立なベクトルの最大個数を求めよ.

(ii) $\boldsymbol{a}_4$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の線形和で表されることを, $\boldsymbol{a}_4 = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a_3}$ となるスカラー $x_1, x_2$ を求めることで示せ.

(iii) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ のうち線形独立なベクトルの最大個数を求めよ.

(2) 任意の $m, n, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}$ に対して, $\mathrm{rank}\overline{\boldsymbol{A}} = \mathrm{rank}\boldsymbol{A}$ のとき連立一次方程式の解が存在することを示せ.

(3) $\mathrm{rank}\overline{\boldsymbol{A}} > \mathrm{rank}\boldsymbol{A}$ ならば解は存在しない. $m > n$, $\mathrm{rank}\boldsymbol{A} = n$ で, $\mathrm{rank}\overline{\boldsymbol{A}} > \mathrm{rank}\boldsymbol{A}$ のとき, 連立一次方程式の右辺と左辺の差のノルムの 2 乗 $\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^2$ を最小にする $\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(4) $m < n$, $\mathrm{rank}\boldsymbol{A} = m$ のとき, どのような $\boldsymbol{b}$ に対しても連立一次方程式を満たす解が複数存在する. 解のうちで $\|\boldsymbol{x}\|^2$ を最小にする $\boldsymbol{x}$ を, 連立一次方程式の制約条件として, ラグランジュ乗数法を用いて求めよ.

(5) 任意の $m, n, \boldsymbol{A}$ に対して, 以下の 4 つの式を満たす $\boldsymbol{P} \in \mathcal{R}^{n\times m}$ が唯一に決まることを示せ.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{APA} &= \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{PAP} &= \boldsymbol{P} \\ (\boldsymbol{AP})^T &= \boldsymbol{AP} \\ (\boldsymbol{PA})^T &= \boldsymbol{PA} \end{aligned}$$

(6) (3) で求めた $\boldsymbol{x}$ と (4) で求めた $\boldsymbol{x}$ が, いずれも $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Pb}$ の形で表せることを示せ.

# 第 1 問　解答例

(1)　(i) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ が線形従属の関係にある場合, 実数 $c$ $(\neq 0, \in \mathbb{R})$ を用いて

$$\boldsymbol{a}_1 = c\,\boldsymbol{a}_2$$

と表すことができる．しかし, $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ であることから, これを満たす実数 $c$ は存在しないので, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ は線形独立なベクトルである．次に, $\boldsymbol{a}_3$ が $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ の線形従属の関係にある場合, 実数 $c_1$, $c_2$ $(\neq 0, \in \mathbb{R})$ を用いて

$$\boldsymbol{a}_3 = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2$$

と表すことが出来る．$\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるので, $c_1 = -1$, $c_2 = 1$ とすればこの式は満たされる．ゆえに $\boldsymbol{a}_3$ は線形従属の関係にあるので, 線形独立なベクトルの最大個数は 2 個である.

(ii) $\boldsymbol{a}_4$ について $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ の線形和で表されることを $x_1$, $x_2$ を求めることで示す.

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}_4 = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 \\
\Longleftrightarrow\ &\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\Longleftrightarrow\ &\begin{cases} 2 = x_1 - 1 \\ 4 = x_1 + x_2 \\ 2 = x_2 + 1 \end{cases} \\
\Longleftrightarrow\ &\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

したがって, $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ というスカラーの組が求まったので, $\boldsymbol{a}_4$ は $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ の線形和で表される.

(iii) $\boldsymbol{a}_4$ は $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ の線形和で表されることから $\boldsymbol{a}_4$ は $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ と線形従属な関係であるので, 線形独立なベクトルの最大個数は 2 個である.

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ の第 $i$ 列ベクトルを $\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ とする．$\mathrm{rank}\overline{\boldsymbol{A}} = \mathrm{rank}\boldsymbol{A}$ のとき, 実数 $c_i$ $(\neq 0, \in \mathbb{R})$ を用いて

$$\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} c_i\boldsymbol{a}_i$$

と表すことができる．この $c_i$ を 1 から順に $n$ まで縦に並べた $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ をつくると

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$$

となるので, $\boldsymbol{c}$ は連立方程式の解 $\boldsymbol{x}$ となる．ゆえに題意は示された.

(3) 以下のように変形することができる.

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^2 &= (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) \\
&= (\boldsymbol{b}^T - \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T)(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) \\
&= \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{b}
\end{aligned}$$

これを $\boldsymbol{x}$ で微分すると

$$\frac{\partial\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^2}{\partial\boldsymbol{x}} = 2\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$$

となる．ゆえに最小となる必要条件は

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$$

である．$\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=n$ かつ $\mathrm{rank}\overline{\boldsymbol{A}}>\mathrm{rank}\boldsymbol{A}$ のとき, $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})=n$ となる．ゆえに $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ は正則であるので, 逆行列が存在して

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}&=(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}\\ \iff \boldsymbol{x}&=(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

となる．

(4) 目的関数 $\|\boldsymbol{x}\|^2$ は二次関数であるので微分可能で凸性をもつ．制約条件は $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ であるのでラグランジュ関数は以下のようにおける．

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}\|^2-\boldsymbol{\lambda}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})$$

ゆえに $\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}$ それぞれで偏微分して $\boldsymbol{0}$ とおくと

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})}{\partial\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{0}\\ \dfrac{\partial L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})}{\partial\boldsymbol{\lambda}}=-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\end{cases}\tag{1.1}$$

式 (1.1) の上式について整理すると

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\lambda}$$

となる．$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})=m$ であるから 逆行列が存在することを考慮して, 式 (1.1) に代入すると,

$$\begin{aligned}-\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\lambda}\right)+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}&\iff\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T\right)\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{b}\\ &\iff\boldsymbol{\lambda}=\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

ゆえに, 求める解は

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^T\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{b}$$

(5) この問題のメインテーマは一般逆行列である [1].
まず存在性について述べる．
全ての行列には特異値分解することができ, $m\times m$ の直交行列を $\boldsymbol{U}$, $m\times n$ の対角線上に非負の実数, それ以外が 0 である行列を $\boldsymbol{\Sigma}$, $n\times n$ の直交行列を $\boldsymbol{V}$ とする．すると $\boldsymbol{A}$ について

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^T$$

と因数分解することができる．ここで, $\boldsymbol{\Sigma}$ の対角成分, $i$ 行 $i$ 列目を $\sigma_{ii}$ と表す．$\boldsymbol{\Sigma}^T$ を $n\times m$ の対角成分 $i$ 行 $i$ 列目を $\sigma_{ii}^{-1}$, それ以外を 0 である行列とする．ここで $\boldsymbol{P}$ を以下のように定める．

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}^+\boldsymbol{U}^T$$

$\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^+$ と $\boldsymbol{\Sigma}^+\boldsymbol{\Sigma}$ について, $\boldsymbol{D}_n=\begin{pmatrix}\sigma_{11}&0&0&0\\0&\sigma_{22}&0&0\\0&0&\dots&0\\0&0&0&\sigma_{nn}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{D}_n^+=\begin{pmatrix}\sigma_{11}^{-1}&0&0&0\\0&\sigma_{22}^{-1}&0&0\\0&0&\dots&0\\0&0&0&\sigma_{nn}^{-1}\end{pmatrix}$ とすると

- $n\leq m$ のとき
  $\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^+$ は $m\times m$ 行列, $\boldsymbol{\Sigma}^+\boldsymbol{\Sigma}$ は $n\times n$ 行列になる．ゆえにそれぞれ計算すると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^+&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}_n\\ \boldsymbol{0}_{m-n\times n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}_n^+&\boldsymbol{0}_{m-n\times n}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{0}_{m-n\times n}\\ \boldsymbol{0}_{m-n\times n}&\boldsymbol{0}_{m-n\times m-n}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

同様にして,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma}^+\boldsymbol{\Sigma} &= \begin{pmatrix}\boldsymbol{D}_n^+ & \boldsymbol{0}_{m-n\times n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}_n \\ \boldsymbol{0}_{m-n\times n}\end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{E}\end{aligned}$$

- $n > m$ のとき

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^+ &= \begin{pmatrix}\boldsymbol{D}_m & \boldsymbol{0}_{n-m\times m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}_m^+ \\ \boldsymbol{0}_{n-m\times m}\end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{E}\end{aligned}$$

同様にして,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma}^+\boldsymbol{\Sigma} &= \begin{pmatrix}\boldsymbol{D}_m^+ \\ \boldsymbol{0}_{n-m\times m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}_m & \boldsymbol{0}_{m-n\times m}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0}_{n-m\times m} \\ \boldsymbol{0}_{n-m\times m} & \boldsymbol{0}_{n-m\times n-m}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

このことから定めた $\boldsymbol{P}$ が与式を満たすことを示す.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{APA} &= \boldsymbol{U\Sigma V}^T\boldsymbol{V\Sigma}^+\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U\Sigma V}^T = \boldsymbol{U\Sigma\Sigma}^+\boldsymbol{\Sigma V}^T = \boldsymbol{U\Sigma V}^T = \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{PAP} &= \boldsymbol{V\Sigma}^+\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U\Sigma V}^T\boldsymbol{V\Sigma}^+\boldsymbol{U}^T = \boldsymbol{V\Sigma}^+\boldsymbol{\Sigma\Sigma}^+\boldsymbol{U}^T = \boldsymbol{V\Sigma}^+\boldsymbol{U}^T = \boldsymbol{P} \\ (\boldsymbol{AP})^T &= \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}^T = (\boldsymbol{V\Sigma}^+\boldsymbol{U}^T)^T(\boldsymbol{U\Sigma V}^T)^T = (\boldsymbol{U\Sigma}^+\boldsymbol{V}^T)(\boldsymbol{V\Sigma U}^T) \\ &= \boldsymbol{UU}^T = \boldsymbol{U\Sigma\Sigma}^+\boldsymbol{U}^T = \boldsymbol{U\Sigma V}^T\boldsymbol{V\Sigma}^+\boldsymbol{U}^T = \boldsymbol{AP} \\ (\boldsymbol{PA})^T &= (\boldsymbol{V\Sigma}^+\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U\Sigma V}^T)^T = (\boldsymbol{V\Sigma}^+\boldsymbol{\Sigma V})^+ = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\Sigma}^+\boldsymbol{\Sigma})\boldsymbol{V}^T = \boldsymbol{V\Sigma}^+\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U\Sigma V}^T = \boldsymbol{PA}\end{aligned}$$

次に唯一性について示す. $\boldsymbol{A}$ に対して与式を満たす $\boldsymbol{P}$ が複数存在すると仮定し, これらのうち 2 つを $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2$ とする. すると

$$\boldsymbol{AP}_1 = (\boldsymbol{AP}_2\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}_1 = (\boldsymbol{AP}_2)(\boldsymbol{AP}_1) = (\boldsymbol{AP}_2)^T(\boldsymbol{AP}_1)^T = \boldsymbol{P}_2^T(\boldsymbol{AP}_1\boldsymbol{A})^T = \boldsymbol{P}_2^T\boldsymbol{A}^T = (\boldsymbol{AP}_2)^T = \boldsymbol{AP}_2$$

同様にして, $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}$ がいえる. よって,

$$\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{AP}_1 = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{AP}_2 = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{AP}_2 = \boldsymbol{P}_2$$

となり, $\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{P}_2$ であるから $\boldsymbol{P}$ は一つのみである.
以上のことから題意は示された.

(6) まず, (3) について $\boldsymbol{P}' = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T$ とおけば, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}'\boldsymbol{b}$ となる. この $\boldsymbol{P}'$ が (5) の与式を満たすことを示す.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AP}'\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{P}'\boldsymbol{AP}' &= (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{P}' \\ (\boldsymbol{AP}')^T &= \boldsymbol{P}'^T\boldsymbol{A}^T = ((\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T)^T\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{AP}' \\ (\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A})^T &= \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}'^T = \boldsymbol{A}^T((\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T)^T = \boldsymbol{E} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

となり, 満たされている.
次に, (4) の場合について $\boldsymbol{P}'' = \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{AA}^T)^{-1}$ とおけば

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AP}''\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{AA}^T(\boldsymbol{AA}^T)^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{P}''\boldsymbol{AP}'' &= \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{AA}^T)^{-1}\boldsymbol{AA}^T(\boldsymbol{AA}^T)^{-1} = \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{AA}^T)^{-1} = \boldsymbol{P}'' \\ (\boldsymbol{AP}'')^T &= (\boldsymbol{AA}^T(\boldsymbol{AA}^T)^{-1})^T = E = \boldsymbol{AA}^T(\boldsymbol{AA}^T)^{-1} = \boldsymbol{AP}'' \\ (\boldsymbol{P}''\boldsymbol{A})^T &= (\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{AA}^T)^{-1}\boldsymbol{A})^T = \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{AA}^T)^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}''\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

よって, 題意は示された.

# 第 2 問

## 第 2 問　問題文

関数 $f_1$ を $[0,1]$ 上で定義される正値の定数関数とし, $f_1(x)=c$ とおく. また, 正の実数 $p,q$ を $1/p+1/q=1$ を満たすものとする. これらに対し, $[0,1]$ 上で定義される関数の列 $\{f_n\}$ を

$$f_{n+1}(x)=p\int_0^x (f_n(t))^{1/q}\,\mathrm{d}t$$

で定める. 以下の問いに答えよ.

(1) $a_1=0$, $c_1=c$ かつ

$$a_{n+1}=q^{-1}a_n+1 \qquad (n=1,2,...),$$
$$c_{n+1}=\frac{p\,(c_n)^{1/q}}{a_{n+1}} \qquad (n=1,2,...)$$

で定まる実数列 $\{a_n\}$ と $\{c_n\}$ を用いて $f_n(x)=c_nx^{a_n}$ と表されることを示せ.

(2) $n\geq 2$ に対し $[0,1]$ 上で定義される関数 $g_n$ を $g_n(x)=x^{a_n}-x^p$ とおく. $n\geq 2$ に対し $a_n\geq 1$ となることに注意して, $g_n$ がある点 $x=x_n$ で最大値をとることを示し, この $x_n$ を求めよ.

(3) 任意の $x\in[0,1]$ に対して $\lim_{n\to\infty} g_n(x)=0$ となることを示せ.

(4) $d_n=(c_n)^{q^n}$ とおく. $d_{n+1}/d_n$ が $n\to\infty$ のとき有限な正の値に収束することを示せ.
なお, $\lim_{t\to\infty}(1-1/t)^t=1/\mathrm{e}$ となることは用いて良い.

(5) $\lim_{n\to\infty} c_n$ の値を求めよ.

(6) 任意の $x\in[0,1]$ に対して $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=x^p$ となることを示せ.

# 第 2 問　解答例

(1) 数学的帰納法によって示す.

(i) $n=1$ のとき,

$$f_1(x)=c=c\cdot x^0=c_1x^{a_0}$$

となるので, 成立する.

(ii) $n=k$ のとき $f_n(x)=c_nx^{a_n}$ であると仮定すると, $n=k+1$ のときは

$$\begin{aligned}f_{k+1}(x)&=p\int_0^x((f_k(t))^{1/q}\,\mathrm{d}t\\&=p\int_0^x(c_kx^{a_k})^{1/q}\,\mathrm{d}t\\&=p\left[c_k^{1/q}\cdot\frac{q}{a_k+q}x^{\frac{a_k+q}{q}}\right]_0^x\\&=p\,c_k^{1/q}\cdot\frac{1}{q^{-1}a_k+1}x^{q^{-1}a_k+1}\\&=\frac{p\,c_k^{1/q}}{a_{k+1}}x^{a_{k+1}}\\&=c_{k+1}x^{a_{k+1}}\end{aligned}$$

となり, 成立する.

(i),(ii) より, 数学的帰納法より, 題意は示された.

(2) $n\geq 2$ のとき,

$$g_n'(x)=a_nx^{a_n-1}-px^{p-1}$$

ここで, $a_n$ の一般項を求める. 特性方程式 $\alpha=q^{-1}\alpha+1$ を解くことによって, $\alpha=p$ となる. ゆえに

$$\begin{aligned}a_n-p&=q^{-1}\left(a_n-p\right)\\a_n&=p\left(1-q^{1-n}\right)<p\end{aligned}$$

ゆえに, $g_n'(x)=0$ となるときは

$$\begin{aligned}&g_n'(x)=0\\\iff&a_nx^{a_n-1}-p\,x^{p-1}=0\\\iff&x^{a_n-1}\Big(a_n-p\,x^{p-a_n}\Big)=0\\\iff&x=0,\left(\frac{a_n}{p}\right)^{\frac{1}{p-a_n}}\end{aligned}$$

$g_n'(1)=a_n-p<0$ より増減表は以下のように書くことができる.

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\left(\frac{a_n}{p}\right)^{\frac{1}{p-a_n}}$ | $\cdots$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g_n'(x)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $a_n-p$ |
| $g_n(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | $0$ |

よって, $x_n=\left(\dfrac{a_n}{p}\right)^{\frac{1}{p-a_n}}$ のとき最大値をとることが示された.

(3) まず,

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{p(1-q^{1-n})\right\}=p$$

より,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} g_n'(x) &= \lim_{n\to\infty} a_n x^{a_n-1} - px^{p-1} \\ &= px^{p-1} - px^{p-1} \\ &= 0\end{aligned}$$

これより関数 $g_n'(x)$ は区間 $[0,1]$ において増減がなく, $n \to \infty$ において $g_n(0) = g_n(1) = 0$ であるから, 任意の $x \in [0,1]$ に対しても $n \to \infty$ において $g_n(x) = 0$ となる. よって, 題意は示された.

(4) $q$ の大きさについて

$$\begin{aligned}\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 &\Longrightarrow \frac{1}{q} < 1 \\ &\Longleftrightarrow q > 1\end{aligned}$$

となる. $d_{n+1}/d_n$ について整理すると

$$\begin{aligned}\frac{d_{n+1}}{d_n} &= \frac{\left(\dfrac{p(c_n)^{1/q}}{a_{n+1}}\right)^{q^{n+1}}}{(c_n)^{q^n}} \\ &= \frac{\dfrac{p^{q^{n+1}}(c_n)^{q^n}}{(a_{n+1})^{q^{n+1}}}}{(c_n)^{q^n}} \\ &= \frac{p^{q^{n+1}}}{(a_{n+1})^{q^{n+1}}} \\ &= \left(\frac{p}{p(1-q^{-n})}\right)^{q_{n+1}} \\ &= \left(\frac{1}{1-q^{-n}}\right)^{q^{n+1}} \\ &= \left\{\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q^n}}\right)^{q^n}\right\}^q\end{aligned}$$

$q > 1$ より, $n \to \infty$ のとき $q^n \to \infty$ であることを用いて

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} &= \lim_{n\to\infty} \left\{\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q^n}}\right)^{q^n}\right\}^q \\ &= \mathrm{e}^q\end{aligned}$$

(5) はさみうちの原理で示す. まず, $(1-q^{1-n}) < 1$ であることより

$$c_n > (c_{n-1})^{1/q} > (c_{n-2})^{(1/q)^2} > \cdots > c^{(1/q)^{n-1}}$$

となるので,

$$\lim_{n\to\infty} c_n > 1$$

である. 次に上に有界であることを示す.

$$g(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$$

とおく. ここで $x > 1$ で $g(x) > 0$ であるので, 対数をとって

$$h(x) = x \log\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

としてこれが単調増加であることをいう．

$$\begin{aligned} h'(x) &= \log\left(1-\frac{1}{x}\right) + x\cdot\frac{x}{x-1}\cdot\frac{1}{x^2} \\ &= \log\left(1-\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x-1} \\ h''(x) &= \frac{x}{x-1}\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{(x-1)^2} \\ &= -\frac{1}{x(x-1)} < 0 \end{aligned}$$

また，$\lim_{x\to\infty} h'(x) = 0$ であるから，$h(x) > 0$ である．ゆえに $h(x)$ が単調増加であるので，$g(x)$ も単調増加である．したがって，$\left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{q^n}}\right)^{q^n}$ は単調減少関数である．ゆえに，

$$e^q \leq \frac{d_{n+1}}{d_n} \leq \frac{d_2}{d_1} = \left(\frac{q}{q-1}\right)^{q^2}$$

であることがいえる．ゆえに

$$\begin{aligned} &\log\left(\frac{d_n}{d_{n-1}}\right) \leq \log\left(\frac{q}{q-1}\right)^{q^2} \\ \Longleftrightarrow\ &\log d_n - \log d_{n-1} \leq q^2\log\left(\frac{q}{q-1}\right) \\ \Longleftrightarrow\ &\log d_n \leq \log d_{n-1} + q^2\log\left(\frac{q}{q-1}\right) \\ \Longrightarrow\ &\log d_n \leq \log d_{n-2} + 2q^2\log\left(\frac{q}{q-1}\right) \\ \Longrightarrow\ &\log d_n \leq \log d_1 + nq^2\log\left(\frac{q}{q-1}\right) \\ \Longrightarrow\ &\log (c_n)^{q^n} \leq \log c^q + q^2\log\left(\frac{q}{q-1}\right) \\ \Longrightarrow\ &q^n \log c_n \leq q\log c + q^2\log\left(\frac{q}{q-1}\right) \\ \Longrightarrow\ &\log c_n \leq \frac{1}{q^{n-1}}\log c + \frac{1}{q^{n-2}}\log\left(\frac{q}{q-1}\right) \end{aligned}$$

となる．$q > 1$ であることを考慮して

$$\lim_{n\to\infty} \log c_n \leq 0$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty} c_n \leq 1$$

ゆえにはさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 1$$

(6) (1) より，$f_n(x) = c_n x^{a_n}$ である．$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left\{p(1-q^{1-n})\right\} = p$ と (5) より

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x^p$$

# 第 3 問

## 第 3 問　問題文

赤いカードが 2 枚と白いカードが 1 枚入った袋および複素数 $z_n$, $w_n$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ について考える．まず, 袋から 1 枚のカードを取り出し袋に戻す．このとき取り出されたカードの色に応じて $z_{k+1}$ $(k = 0, 1, 2, ...)$ を以下のルールで生成する．

$$z_{k+1} = \begin{cases} iz_k & \text{赤いカードが取り出された場合} \\ -iz_k & \text{白いカードが取り出された場合} \end{cases}$$

次に, 袋からもう一度 1 枚のカードを取り出し袋に戻す．このとき取り出したカードの色に応じて $w_{k+1}$ を以下のルールで生成する．

$$w_{k+1} = \begin{cases} -iw_k & \text{赤いカードが取り出された場合} \\ iw_k & \text{白いカードが取り出された場合} \end{cases}$$

ここで, 各カードは独立に等確率で取り出されるものとする．また初期状態を $z_0 = 1$, $w_0 = 1$ とする．すなわち, $z_n$, $w_n$ は, $z_0 = 1$, $w_0 = 1$ の状態から始め, 上記の一連の二つの操作を $n$ 回繰り返した後の値である．なお, ここでは $i$ は虚数単位とする．

以下の問いに答えよ．

(1) $n$ が奇数のとき $\mathrm{Re}(z_n) = 0$, 偶数のとき $\mathrm{Im}(z_n) = 0$ であることを示せ．ただし, $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$ はそれぞれ $z$ の実部, 虚部を表すものとする．

(2) $z_n = 1$ である確率を $P_n$, $z_n = i$ である確率を $Q_n$ とする．$P_n$, $Q_n$ についての漸化式を立てよ．

(3) $z_n = 1$, $z_n = i$, $z_n = -1$, $z_n = -i$ である確率をそれぞれ求めよ．

(4) $z_n$ の期待値が $(i/3)^n$ であることを示せ．

(5) $z_n = w_n$ である確率を求めよ．

(6) $z_n + w_n$ の期待値を求めよ．

(7) $z_n w_n$ の期待値を求めよ．

# 第 3 問　解答例

(1) 赤いカードが 2 回連続で出されたら

$$z_{k+2} = -z_k$$

となり, これは白いカードが 2 回連続で出された場合も同様である. 赤いカードが取り出され, 白いカードが取り出された場合

$$z_{k+2} = z_k$$

となり, これは白いカードが取り出され, 赤いカードが取り出された場合も同様である. ゆえに,

$$z_{k+2} = \begin{cases} -z_k & \text{同じカードが 2 回連続で取り出された場合} \\ z_k & \text{異なるカードが取り出された場合} \end{cases}$$

ここで, $n = 0$ のとき $z_0 = 1$ であるので, $z_2$ は 1 または $-1$ の値をとる. 帰納的に $n = 2k$ のとき $z_n$ は 1 または $-1$ の値をとるので, $\mathrm{Im}(z_n) = 0$ となる. 一方で, $n = 1$ のとき, $z_1$ は $i$ または $-i$ である. 帰納的に $n = 2k+1$ のとき $z_n$ は $i$ または $-i$ の値をとるので, $\mathrm{Re}(z_n) = 0$ となる. よって, 題意は示された.

(2) (1) の結果から $n$ が偶数のとき 1 となる確率は $P_n$ であり, $-1$ となる確率は $1 - P_n$ である. 同様に奇数の時 $i$ となる確率は $Q_n$ であ, $-i$ となる確率は $1 - Q_n$ である. したがって, $P_n, Q_n$ の漸化式について偶奇で場合分けして求めることができ,

$n$ が偶数のとき $(n \geq 2)$

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{1}{3}Q_{n-1} + \frac{2}{3}(1 - Q_{n-1}) \\ &= -\frac{1}{3}Q_{n-1} + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$n$ が奇数のとき

$$\begin{aligned} Q_n &= \frac{2}{3}P_{n-1} + \frac{1}{3}(1 - P_{n-1}) \\ &= \frac{1}{3}P_{n-1} + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

よって, まとめると

$$P_n = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 0 & (n \text{ は奇数}) \\ -\frac{1}{3}Q_{n-1} + \frac{2}{3} & (n \text{ は 2 以上の偶数}) \end{cases}$$

$$Q_n = \begin{cases} \frac{2}{3} & (n = 1) \\ 0 & (n \text{ は偶数}) \\ \frac{1}{3}P_{n-1} + \frac{1}{3} & (n \text{ は 3 以上の奇数}) \end{cases}$$

(3) $P_n, Q_n$ のそれぞれについて $n$ の偶奇で値が変わるので, 漸化式も偶奇で場合分けを行う.

$z_{k+2} = -z_k$ となる確率は同じカードが 2 回連続で取り出された場合なので

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$$

一方で, $z_{k+2} = z_k$ となる確率は異なるカードが取り出された場合であるので

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

(1) の結果を合わせて, $n$ が奇数のときは $P_n = 0$, $n$ が偶数のときは $Q_n = 0$ であることがわかる. また, $Q_1 = \dfrac{2}{3}$ であることを考慮して漸化式は以下のように書くことができる.

$$P_n = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 0 & (n \text{ は奇数}) \\ \dfrac{5}{9} - \dfrac{1}{9}P_{n-2} & (n \text{ は } 2 \text{ 以上の偶数}) \end{cases}$$

$$Q_n = \begin{cases} \dfrac{2}{3} & (n = 1) \\ 0 & (n \text{ は偶数}) \\ \dfrac{5}{9} - \dfrac{1}{9}Q_{n-2} & (n \text{ は } 3 \text{ 以上の奇数}) \end{cases}$$

$P_n$ について, $n$ が 2 以上の偶数の場合の漸化式を整理して解く. すると以下のようになる.

$$\begin{aligned} & P_n = \frac{5}{9} - \frac{1}{9}P_{n-2} \\ \iff & \left(P_n - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{9}\left(P_{n-2} - \frac{1}{2}\right) \\ \iff & P_n - \frac{1}{2} = \left(-\frac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \left(P_0 - \frac{1}{2}\right) \\ \iff & P_n = \frac{1}{2}\left\{1 + \left(-\frac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}}\right\} \end{aligned}$$

同様にして, $Q_n$ について $n$ が 3 以上の奇数の場合の漸化式を整理して解く. すると以下のようになる.

$$\begin{aligned} & Q_n = \frac{5}{9} - \frac{1}{9}Q_{n-2} \\ \iff & \left(Q_n - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{9}\left(Q_{n-2} - \frac{1}{2}\right) \\ \iff & Q_n - \frac{1}{2} = \left(-\frac{1}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(Q_1 - \frac{1}{2}\right) \\ \iff & Q_n = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right\} \end{aligned}$$

よって,
$z_n = 1$ となる確率は

$$\begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数}) \\ \dfrac{1}{2}\left\{1 + \left(-\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}}\right\} & (n \text{ が偶数}) \end{cases}$$

$z_n = i$ となる確率は

$$\begin{cases} 0 & (n \text{ が偶数}) \\ \dfrac{1}{2}\left\{1 + \dfrac{1}{3} \cdot \left(-\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right\} & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

$z_n = -1$ となる確率は $n$ が奇数のときは $z_n = 1$ と同様に 0 である. $n$ が偶数のときは $z_n = 1, -1$ であることを考慮して

$$\begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数}) \\ 1 - \dfrac{1}{2}\left\{1 + \left(-\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}}\right\} & (n \text{ が偶数}) \end{cases} \iff \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数}) \\ \dfrac{1}{2}\left\{1 - \left(-\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}}\right\} & (n \text{ が偶数}) \end{cases}$$

$z_n=-i$ となる確率は $n$ が偶数のときは $z_n=i$ と同様に 0 である．$n$ が奇数のときは $z_n=i,-i$ であることを考慮して

$$\begin{cases} 0 & (n\text{ が偶数}) \\ 1-\dfrac{1}{2}\left\{1+\dfrac{1}{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right\} & (n\text{ が奇数}) \end{cases} \iff \begin{cases} 0 & (n\text{ が偶数}) \\ \dfrac{1}{2}\left\{1-\dfrac{1}{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right\} & (n\text{ が奇数}) \end{cases}$$

(4) 偶奇で場合分けをする．すると

$$\begin{aligned} & 1\cdot(z_n=1\text{ である確率})+(-1)\cdot(z_n=-1\text{ である確率}) \\ \iff & \frac{1}{2}\left\{1+\left(-\frac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}-\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}}\right\} \\ \iff & \left(-\frac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}} \\ \iff & \left(\frac{i}{3}\right)^{n} \end{aligned}$$

同様にして奇数の場合も整理すると，

$$\begin{aligned} & i\cdot(z_n=i\text{ である確率})+(-i)\cdot(z_n=-i\text{ である確率}) \\ \iff & \frac{i}{2}\left\{1+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right\}-\frac{i}{2}\left\{1-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right\} \\ \iff & \frac{i}{3}\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}} \\ \iff & \frac{i}{3}\cdot\left(-\frac{i}{3}\right)^{n-1} \\ \iff & \left(\frac{i}{3}\right)^{n} \end{aligned}$$

よって，題意は示された．

(5) $z_n=w_n$ である確率はそれぞれが $1,i,-1,-i$ である確率の積の和である．ゆえにこの確率の和を求めればよい．このためにまず $w_n$ についての確率を求める．$z_0$ と同様に $w_0=1$ であり，色の変化による値の変化は確率が変わるだけで (1) についてのことは $w_n$ についても当てはまる．ここで 2 回カードを引く時異なる色が出たら

$$w_{k+2}=w_k$$

となる．一方で 2 回とも同じ色のカードを引いたときは

$$w_{k+2}=-w_k$$

となることは，次のようにまとめることができる．

$$\begin{cases} P(z_n=1)=P(w_n=1) \\ P(z_n=-1)=P(w_n=-1) \\ P(z_n=i)=P(w_n=-i) \\ P(z_n=-i)=P(w_n=i) \end{cases}$$

したがって，偶奇で場合分けして確率を求めると以下のようになる．

まず, 偶数のときとりうる値はどちらも 1, $-1$ であるから

$$
\begin{aligned}
P(z_n = w_n) &= P(z_n = 1)P(w_n = 1) + P(z_n = -1)P(w_n = -1) \\
&= P_n^2 + (1 - P_n)^2 \\
&= 2P_n^2 - 2P_n + 1 \\
&= 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left\{1 + \left(-\frac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}\right]^2 - 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left\{1 + \left(-\frac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}\right] + 1 \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left\{1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}} + \left(-\frac{1}{9}\right)^n\right\} - \left\{1 + \left(-\frac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}}\right\} + 1 \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left\{1 + \left(-\frac{1}{9}\right)^n\right\}
\end{aligned}
$$

奇数のときはとりうる値はどちらも $i$, $-i$ であるから

$$
\begin{aligned}
P(z_n = w_n) &= P(z_n = i)P(w_n = i) + P(z_n = -i)P(w_n = -i) \\
&= Q_n(1 - Q_n) + (1 - Q_n)Q_n \\
&= 2Q_n(1 - Q_n) \\
&= 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left\{1 + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right\}\right] \left[\frac{1}{2} \cdot \left\{1 - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right\}\right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left\{1 - \frac{1}{9} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right\} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left\{1 + \left(-\frac{1}{9}\right)^n\right\}
\end{aligned}
$$

まとめると,

$$
\frac{1}{2} \cdot \left\{1 + \left(-\frac{1}{9}\right)^n\right\}
$$

(6) $w_n$ について考える. 偶数のときは確率が同じなので $z_n$ と同じである. 一方で奇数のときは次のようになる.

$$
\begin{aligned}
& i \cdot (w_n = i \text{ である確率}) + (-i) \cdot (w_n = -i \text{ である確率}) \\
\iff & \frac{i}{2}\left\{1 - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right\} - \frac{i}{2}\left\{1 + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right\} \\
\iff & \frac{i}{3} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}} \\
\iff & -\frac{i}{3} \cdot \left(-\frac{i}{3}\right)^{n-1} \\
\iff & -\left(\frac{i}{3}\right)^n
\end{aligned}
$$

よって,

$$
E(z_n + w_n) = E(z_n) + E(w_n)
$$

であるから,

$$
E(z_n + w_n) = \begin{cases} 2 \cdot \left(\dfrac{i}{3}\right)^n & (n \text{ が偶数}) \\ 0 & (n \text{ が奇数}) \end{cases}
$$

(7) 期待値について,

$$
E(z_n w_n) = E(z_n)E(w_n)
$$

であるから,

$$E(z_n + w_n) = \begin{cases} \left(-\dfrac{1}{9}\right)^n & (n \text{ が偶数}) \\ -\left(-\dfrac{1}{9}\right)^n & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

[1] Proofs involving the Moore-Penrose inverse. https://en.wikipedia.org/wiki/Proofs_involving_the_Moore%E2%80%93Penrose_inverse