第1章　積分

微分法は，関数の増減や曲がり具合など，ある点付近の詳細を調べるために用いられた．本章で学ぶ積分は，微分により得られているある点付近の情報をつなぎ合わせ，元の関数の全体像を知るための手法である．そのため，積分法を用いると，ある特定の観察時間で得られた現象の特性から，まだ観察していない将来予測をすることが可能となる．積分法のこのような応用については第2章で学習する. 先立って本章では, 積分の一般的な概念を理解し, 代表的な関数について積分の計算ができるようになることを目標とする.

1.1 数列の和とその極限

数列とその和

ある規則にしたがって順に並べられた数の列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ を**数列 (numerical sequence)** といい $\{a_n\}$ と表す．数列 $\{a_n\}$ において，各々の数を**項 (term)** といい，数列のはじめから順に第1項 (first term)，第2項 (second term)，第3項 (third term)，・・・，第 n 項 (n-th term)，・・・という．また，第1項は**初項 (initial term)** とも呼ばれ，数列の第 n 項を表す式を**一般項 (general term)** と呼ぶ．数列 $\{a_n\}$ に対して，各項を初項から順に第 n 項まで加えた和

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \tag{1.1}$$

を

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{1.2}$$

と表す. 和を表す記号 Σ は, アルファベットの S に対応するギリシャ文字でシグマと読む.

例：$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{10} = \displaystyle\sum_{k=1}^{9} \frac{1}{k+1}$ ，　$1 + 3 + 5 + \cdots + 11 = \displaystyle\sum_{k=1}^{6} (2k-1)$

一般的には，数列の和は初項からの和である必要はなく，その場合には，Σ 記号の上下の数や一般項を表す式を変更して表現すればよい．また，数列の順序を示す文字 (index) 自体には意味はなく，そのほかの文字を用いて表しても良い．

例：$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{10} = \displaystyle\sum_{i=2}^{10} \frac{1}{i}$ ，　$1 + 3 + 5 + \cdots + 11 = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{5} (2\ell+1)$

問 1. 1 次の数列の和を書き下し（例の左辺の形)，Σ を用いて第1項からの和として書き直せ.

(1) $\displaystyle\sum_{k=3}^{12} \frac{1}{2k-5}$　(2) $\displaystyle\sum_{k=2}^{6} (4k+4)^2$　(3) $\displaystyle\sum_{k=4}^{7} (3k^3+4k-2)$　(4) $\displaystyle\sum_{k=5}^{9} 2^{3k-10}$

数（スカラー）の足し算は順序によらないので，数列の和（Σ）に対して，以下の線形性が成り立つ．

Σ の性質

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$　　（複号同順）

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$　　（c は定数）

また，代表的な数列の和の公式を以下に挙げておく．

数列の和の公式

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = nc$　　（c は定数）

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$　　(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$　　(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$　　（$r \neq 1$）

略証　(1) k によらない同じ数 c を n 個足し合せるので，nc である．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ は，$1+2+3+\cdots+(n-1)+n$ という和であるが，足す順序を逆にした $n+(n-1)+\cdots+3+2+1$ も，その計算結果には変わりはない．これら 2 式を，この順序のまま足し合せると，同じ数 $(n+1)$ を n 個足し合せるので，$n(n+1)$ となり，これを 2 で割ったものが求めたい和である．

(3) 恒等式 $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ について，$k = 1, 2, 3, \cdots, n$ の和をとると，

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

さらに，右辺の第 2 項と第 3 項については，公式 (1)，(2) を用いる．

問 1．2　公式の (4)，(5) を証明せよ．

【ヒント : (4) では，公式 (3) を示したときのような恒等式を考えよ．(5) では，公式 (3) の恒等式の和の左辺のように，$k = 1, 2, 3, \cdots, n$ の途中が打ち消し合うようなものを考えよ．】

例題 1.1 数列の和の公式を用いて，次の数列の和を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=3}^{12}(2k+1)^2$ (2) $\displaystyle\sum_{k=4}^{6}3^{2k-7}$

$\boxed{\text{解答}}$ (1) $\ell=k-2$ とおくことで，初項からの和に書き直すことができ，

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{12}(2k+1)^2 &= \sum_{\ell=1}^{10}\{2(\ell+2)+1\}^2\\ &= \sum_{\ell=1}^{10}(2\ell+5)^2\\ &= \sum_{\ell=1}^{10}(4\ell^2+20\ell+25)\end{aligned}$$

後は，Σ の線形性と数列の和の公式を用いればよい．

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= 4\times\sum_{\ell=1}^{10}\ell^2+20\times\sum_{\ell=1}^{10}\ell+\sum_{\ell=1}^{10}25\\ &= 4\times\frac{1}{6}\cdot 10\cdot(10+1)\cdot(2\cdot 10+1)+20\times\frac{1}{2}\cdot 10\cdot(10+1)+25\cdot 10\\ &= 2890\end{aligned}$$

(2) $\ell=k-3$ とおくことで，初項からの和に書き直すことができる．

$$\sum_{k=4}^{6}3^{2k-7}=\sum_{\ell=1}^{3}3^{2(\ell+3)-7}=\sum_{\ell=1}^{3}3^{2\ell-1}$$

次に，Σ の線形性と数列の和の公式を用いるが，各等号における式変形を，十分に理解すること．

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \sum_{\ell=1}^{3}3^{2(\ell-1)+1}=3\times\sum_{\ell=1}^{3}3^{2(\ell-1)}=3\times\sum_{\ell=1}^{3}9^{\ell-1}\\ &= 3\times\frac{1-9^3}{1-9}=3\times\frac{-728}{-8}=3\times 91=273\end{aligned}$$

問 1. 3 数列の和の公式を用いて，次の数列の和を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=3}^{12}(3k+1)$ (2) $\displaystyle\sum_{k=3}^{12}k^3$ (3) $\displaystyle\sum_{k=4}^{6}2^k$

問 1. 4 数列の和の公式を用いて，次の数列の和を n の式で表せ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k-2)$ (3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^{3k-1}$

コラム： 代表的な数列

数列 $\{a_n\}$ の数の並びに規則性があるとき，隣り合う 2 項の間や 3 項の間の関係で表現される場合がある．これらの関係を表す等式を，数列の**漸化式 (recursion; recurrence relation)** という．漸化式が与えられると，これを用いて，数列の一般項を表すことも可能である．例えば，漸化式が $a_{n+1} = a_n + f(n)$ のように与えられるとき，初項を a_1 として，一般項は，

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

と表せる．もし，Σ に関して，和の公式を用いることができるような $f(k)$ の式であれば，さらに計算を進め，一般項を具体的な n の式で表現することもできる．
以下では，いくつかの漸化式について考えてみる．

1) 漸化式が $a_{n+1} = pa_n + q$（p，q は定数）のように与えられる場合

a) $p = 1$ のとき, どんな n に対しても 2 項間の差は一定である（$a_{n+1} - a_n = q$）.
このような数列を**等差数列 (arithmetic progression)** と呼び，一般項は，

$$a_n = a_1 + q(n-1)$$

と表される．また，一定の差を公差 (common difference) と呼ぶ.

b) $p \neq 1$ のとき，次のような λ についての方程式の解を利用する．

$$\lambda = p\lambda + q \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{q}{1-p}$$

これを漸化式の両辺から引いて整理すると，

$$a_{n+1} - \frac{q}{1-p} = p\left(a_n - \frac{q}{1-p}\right)$$

となる．ここで，新しい数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_n - \dfrac{q}{1-p}$ のように定める．この数列は一定の数 p（公比; common ratio）をかけることで，次の項になるような数列であり，**等比数列 (geometric progression)** と呼ぶ．一般項は，

$$b_n = b_1 \cdot p^{n-1}$$

と表される．従って，$a_n = p^{n-1}a_1 + \dfrac{q(1-p^{n-1})}{1-p}$ となる．

2) 漸化式が $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$（$p$，$q$ は定数）のように与えられる場合
λ についての方程式 $\lambda^2 = p\lambda + q$ の解 α，β を用いて，一般項は，

$$a_n = \frac{1}{\beta - \alpha}\{\beta^{n-1}(a_2 - a_1) - \alpha^{n-1}(a_2 - a_1)\}$$

のように表すことができる．