UNIVERZA NA PRIMORSKEM
Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije

# ANALIZA I

Zapiski predavanj

doc. dr. Nina Chiarelli

2022/2023

# Kazalo vsebine

**1 Številske množice** **2**
1.1 Osnovne lastnosti realnih števil . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2
1.1.1 Naravna števila . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2
1.1.2 Cela števila in racionalna števila . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4
1.1.3 Realna števila . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5
1.1.4 Dedekindov aksiom . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 10
1.1.5 Iracionalna števila . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12
1.1.6 Decimalni zapis realnega števila . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14
1.1.7 Absolutna vrednost . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15
1.1.8 Prikaz realnih števil na številski premici . . . . . . . . . . . . . . 16
1.2 Kompleksna števila . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 17
1.3 $\varepsilon$-okolica in okolica točke . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 22

# 1
# ŠTEVILSKE MNOŽICE

Vsi že poznamo nekaj različnih številskih množic, npr. naravna števila, cela števila, racionalna števila, ... in znamo s temi števili tudi računati. Kljub temu bomo za začetek navedli nekaj značilnih lastnosti - *aksiomov*, iz katerih lahko samo z logičnim sklepanjem deduciramo vso aritmetiko, pa tudi matematično analizo. Na splošno imenujemo *sistem aksiomov* tak sistem osnovnih zakonov neke teorije, iz katerih se dajo dokazati vsi zakoni in trditve te teorije z logičnim sklepanjem.

Danes v uporabi prevladujejo arabske številke, ki izvirajo iz stare Indije. $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ in $9$ so *števke* (ali *cifre*), iz njih sestavljamo *številke*, s katerimi zapisujemo *števila*. Ko ne povemo, katero število imamo v mislih (ali pa števila še ne poznamo), ga označimo s kakšno malo latinsko ali grško črko, npr. $a, x, t, \alpha, \beta$ itd. Različna števila označimo z različnimi črkami. Če sta števili $a$ in $b$ enaki, pišemo $a = b$, če sta različni pa $a \neq b$.

S števili računamo. Poznamo več računskih operacij, osnovni pa sta seštevanje in množenje. *Seštevanje* je neko pravilo, po katerem pripada vsakemu paru realnih števil $a$ in $b$ neko natančno določeno število, ki ga imenujemo *vsota* in pišemo $a + b$. Števili $a$ in $b$ sta *sumanda*. *Množenje* je neko drugo pravilo, po katerem pripada vsakemu paru števil $a$ in $b$ natančno določeno število, ki ga imenujemo *produkt* in pišemo $a \cdot b$ ali krajše $ab$. Števili $a$ in $b$ sta *faktorja*.

## 1.1 Osnovne lastnosti realnih števil

### 1.1.1 Naravna števila

Naravna števila so števila s katerimi smo se najprej seznanili. Sledijo si po velikosti v natanko določenem vrstnem redu, za vsakim številom pride število, ki ga imenujemo *naslednik* prejšnjega števila. V splošnem naslednika števila $n$ označimo z $n^+$. Tako je npr. $2^+ = 3$, $5^+ = 6$ itd.

Lastnosti naravnih števil dobimo iz nekaj preprostih aksiomov. Te je prvi formuliral italijanski matematik Giuseppe Peano (1858-1932) in so zato po njem dobili ime *Peanovi aksiomi*.

**Peanovi aksiomi**

1. 1 je naravno število.

2. Vsakemu naravnemu številu $n$ sledi natanko določeno naravno število, ki ga imenujemo naslednik števila $n$ in pišemo $n^+$.

3. Različni naravni števili imata različna naslednika.

4. Število 1 ni naslednik nobenega naravnega števila.

5. Vsaka množica naravnih števil, ki vsebuje število 1 in je v njej obenem s številom $n$ vselej tudi njegov naslednik $n^+$, vsebuje vsa naravna števila.

*Opomba.* Včasih se tudi število 0 šteje za naravno število. V tem primeru se v prvem, četrtem in petem Peanovem aksiomu število 1 nadomesti s številom 0.

S Peanovimi aksiomi lahko definiramo osnovni operaciji: seštevanje in množenje naravnih števil. Iz njih lahko prav tako izpeljemo lastnosti in pravila, ki veljajo za ti dve operaciji.

Posebno pomembno vlogo ima peti aksiom, ki ga imenujemo *princip popolne indukcije* in je velikokrat zelo uporaben pripomoček pri dokazovanju. Recimo, da bi radi dokazali neko trditev $T$ za vsa naravna števila $n$. S popolno indukcijo je postopek sledeč: Najprej moramo ugotoviti, da velja trditev $T$ za število 1. Ko se nam je to posrečilo, skušamo dokazati, da velja trditev $T$ tudi za število $n+1 = n^+$, kakor hitro velja za $n$. Ko je tudi to dokazano, smo gotovi.

**Primer 1.1.** *Z uporabo popolne indukcije dokažimo, da je izraz $4^n - 3n - 1$ deljiv z 9 za vsako naravno število $n$.*

*Dokaz poteka v dveh korakih:*

**1. korak:** *Preverimo, da trditev velja za $n = 1$.*

$$4^1 - 3 \cdot 1 - 1 = 4 - 3 - 1 = 0 = 9 \cdot 0.$$

*Za $n = 1$ je izraz $4^n - 3n - 1$ res deljiv z 9.*

**2. korak:** *Predpostavimo, da je izraz $4^n - 3n - 1$ deljiv z 9 za neko vrednost $n = t$, torej*

$$4^t - 3t - 1 = 9m,$$

*kjer je $m$ neko celo število in dokažimo, da je izraz deljiv z 9 tudi za $n = t + 1$.*

*Za $n = t + 1$ ima dan izraz vrednosti:*

$$\begin{aligned} 4^{t+1} - 3(t+1) - 1 &= 4^t \cdot 4^1 - 3t - 4 \\ &= 4(4^t - 3t - 1) + 9t \\ &= 4 \cdot 9m + 9t \\ &= 9(4m + t). \end{aligned}$$

*Torej je deljiv z 9, tako da velja trditev tudi za $n = t + 1$, če velja za $n = t$. S tem smo dokazali, da je število $4^n - 3n - 1$ deljivo z 9 za vsako naravno število $n$.* ▲

Število $1+1+1+1+\cdots+1$, ki je vsota samih sumandov 1, imenujemo *celo pozitivno število.* Množico, ki sestoji iz vseh števil te oblike in števila 1, bomo označili z $\mathbb{N}$. Ta množica ustreza vsem Peanovim aksiomom, če pomeni $n^+$ celo pozitivno število $n+1$, ki ima en sumand 1 več kot število $n$. Zato so cela pozitivna števila zastopniki naravnih števil v obsegu realnih števil. In sicer je vsota $1 + 1 + \cdots + 1$, kjer je $n$ sumandov, zastopnik naravnega števila $n$. Ker je torej vseeno, ali računamo z naravnimi števili ali z ustreznimi zastopniki med realnimi števili, lahko cela pozitivna števila identificiramo z naravnimi števili.

*Opomba.* V literaturi so v uporabi različne oznake. Ko se za množico naravnih števil upošteva množico $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, je $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ko pa se za množico naravnih števil upošteva $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, je $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

### 1.1.2 Cela števila in racionalna števila

Nasprotno število celega pozitivnega števila je $n$ je negativno število $-n$. Število $-n$ je enako vsoti $(-1) + (-1) + \cdots + (-1)$, kjer je $n$ sumandov. Pozitivna in negativna cela števila in število 0 sestavljajo *množico celih števil*. Vsota, razlika in produkt celih števil so cela števila, zato pravimo, da je množica celih števil *kolobar*. Ta kolobar označimo z $\mathbb{Z}$.

Kvocient dveh celih števil ni nujno celo število. Število, ki je kvocient dveh celih števil, imenujemo *racionalno število*. Vsako racionalno število ima obliko $\frac{a}{b}$, pri čemer sta $a$ in $b$ celi števili ter $b \neq 0$. Množico vseh takšnih števil označujemo z $\mathbb{Q}$.

Naj bosta $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ poljubni racionalni števili. Ker je

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{ad+bc}{bd} \\ \frac{a}{b} - \frac{c}{d} &= \frac{ad-bc}{bd} \\ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= \frac{ac}{bd} \\ \frac{a}{b} : \frac{c}{d} &= \frac{ad}{bc} \end{aligned}$$

so vsota, razlika, produkt in kvocient racionalnih števil tudi racionalna števila. To pomeni, da je množica racionalnih števil tudi kolobar, ker pa je v njem tudi deljenje izvedljivo, je to poseben kolobar. Pravimo, da je množica racionalnih števil *obseg*.

Da bi lahko z logičnim sklepanjem prišli do lastnosti in pravil, ki veljajo za množici celih in racionalnih števil, Peanovi aksiomi ne zadoščajo. Lastnosti teh števil in operacij med njimi določa sistem aksiomov, ki ga imenujemo *aksiomi urejenega obsega* in ga bomo spoznali v naslednjem poglavju.

### 1.1.3 Realna števila

Osnovne lastnosti realnih števil pri seštevanju izražajo naslednji aksiomi:

**Aksiom I.** *(Zakon asociativnosti)* Za poljubna tri števila $a, b, c$ je

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

**Aksiom II.** *(Zakon komutativnosti)* Za poljubni števili $a$ in $b$ je

$$a + b = b + a.$$

Zgornja aksioma povesta, da smemo števila seštevati v poljubnem vrstnem redu. Zato pri vsoti treh ali več števil oklepaje običajno izpuščamo in pišemo vsoto treh števil $a, b, c$ kar $a + b + c$.

**Aksiom III.** Obstaja število 0 (nič). Vsota poljubnega števila $a$ s številom nič je enaka $a$, torej

$$a + 0 = a.$$

**Aksiom IV.** Vsakemu številu $a$ pripada nasprotno število, ki ga označimo z $-a$. Vsota števil $a$ in $-a$ je enaka nič:

$$a + (-a) = 0.$$

S pomočjo navedenih aksiomov lahko dokažemo še nekaj drugih **lastnosti** in **pravil**, ki veljajo pri **seštevanju**:

a) *(Pravilo krajšanja za seštevanje)* Iz enakosti $a + x = a + y$ sledi $x = y$.

b) Nasprotno število števila nič je enako nič: $(-0) = 0$.

c) Nasprotno število vsote je vsota nasprotnih števil sumandov: $-(a + b) = (-a) + (-b)$.

d) Nasprotno število števila $-a$ je število $a$: $-(-a) = a$.

Oglejmo si sedaj, kako pokazati veljavnost nekaterih naštetih lastnosti in pravil s pomočjo aksiomov $I - IV$.

*Opomba.* Naj bosta $A$ in $B$ taki trditvi, da sledi iz trditve $A$ trditev $B$, da torej velja $B$, kakor hitro velja $A$. Potem to na kratko zapišemo: $A \Rightarrow B$. Torej lahko zapišemo pravilo krajšanja tako:

$$a + x = a + y \Rightarrow x = y.$$

*Dokaz za a) (Pravilo krajšanja za seštevanje).* Po aksiomu $IV$ obstaja nasprotno število številu $a$, to je $-a$ in če ga prištejemo obem stranem začetne enačbe, dobimo

$$(-a) + a + x = (-a) + a + y$$

Po aksiomu $IV$ je $a + (-a) = 0$ in po aksiomu $II$ je seštevanje komutativno, zato dobimo

$$0 + x = 0 + y$$

Sedaj upoštevamo še aksiom $III$, da dobimo ravno, kar smo želeli dokazati:

$$x = y.$$

□

*Dokaz za d).* Po aksiomu $IV$ obstaja nasprotno število številu $-(-a)$, to je $-a$ in nasprotno število številu $a$, to je $-a$. Od tod dobimo enakosti

$$-(-a) + (-a) = 0 \text{ in } a + (-a) = 0.$$

Torej je

$$-(-a) + (-a) = a + (-a).$$

Sedaj uporabimo še pravilo krajšanja, da dobimo ravno, kar smo želeli dokazati:

$$-(-a) = a.$$

□

Nasprotna operacija od seštevanja je *odštevanje.* Dani sta števili $a$ in $b$. Iščemo tako število $x$, da je

$$b + x = a.$$

Recimo, da je ta enačba rešljiva in prištejmo na obeh straneh nasprotno število $-b$. Dobimo:

$$\begin{aligned}(-b) + (b + x) &= (-b) + a \\ ((-b) + b) + x &= a + (-b) \\ 0 + x &= a + (-b) \\ x &= a + (-b)\end{aligned}$$

Dosedanji izračun pove, da je rešitev kvečjemu ena, da dobljeni $x$ res ustreza enačbi pa se lahko prepričamo s preizkusom

$$b + x = b + a + (-b) = b + (-b) + a = 0 + a = a.$$

Rešitev dobimo torej tako, da številu $a$ prištejemo nasprotno vrednost števila $b$ oz. tako, da število $b$ *odštejemo* od števila $a$. *Razlika* števil $a$ in $b$ je torej enaka

$$a - b = a + (-b).$$

Opazimo, da pri vseh zgornjih dokazih nismo nikjer uporabljali nobene druge lastnosti realnih števil razen tistih, ki smo jih navedli v aksiomih. To vedenje je koristno zato, ker če imamo neko računsko operacijo, za katero ugotovimo, da ustreza aksiomom $I - IV$, potem za to operacijo veljajo ista pravila, kot za seštevanje realnih števil.

Nadaljujmo z aksiomi, ki izražajo snovne lastnosti realnih števil pri množenju:

**Aksiom V.** *(Zakon asociativnosti)* Za poljubna tri števila $a, b, c$ je

$$(ab)c = a(bc).$$

**Aksiom VI.** *(Zakon komutativnosti)* Za poljubni števili $a$ in $b$ je

$$ab = ba.$$

**Aksiom VII.** Obstaja število 1. Produkt poljubnega števila $a$ s številom 1 je enak številu $a$, torej

$$a \cdot 1 = a.$$

**Aksiom VIII.** Vsako od nič različno število $a$ ima obratno število, ki ga označimo z $\frac{1}{a}$ ali z $a^{-1}$. Produkt števila $a$ in njegovega obrata $a^{-1}$ je enak 1:

$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

Ker veljata aksioma $V$ in $VI$, lahko množimo števila v poljubnem vrstnem redu. Zato zapišemo produkt treh števil $a, b, c$ na kratko kar $abc$ brez oklepajev.

S pomočjo navedenih aksiomov lahko dokažemo še nekaj nadaljnjih **lastnosti** in **pravil**, ki veljajo pri **množenju**:

e) Produkt poljubnega števila $a$ s številom 0 je enak nič: $a \cdot 0 = 0$.

f) *(Pravilo krajšanja za množenje)* Če je $a \neq 0$ in $ax = ay \Rightarrow x = y$.

g) Produkt od nič različnih števil je od nič različno število.

h) Produkt nasprotnega števila $-a$ s številom $b$ je nasprotno število produkta $ab$, torej $(-a)b = -(ab)$.

i) Vsakemu od nič različnemu številu $a$ pripada eno samo obratno število $a^{-1}$ in $(a^{-1})^{-1} = a$.

*Dokaz za g).* Predpostavimo, da je $ab = 0$ in $a \neq 0$. Ker je tudi $a \cdot 0 = 0$ dobimo

$$ab = a \cdot 0$$

in z uporabo pravila krajšanja dobimo $b = 0$. Torej je produkt enak 0 le, če je vsaj en faktor enak nič. □

Naj bo $A$ poljubna množica realnih števil. Če je vsota dveh poljubnih števil iz množice $A$ spet število iz množice $A$ pravimo, da je je množica $A$ *zaprta za seštevanje*. Če pa je produkt števil iz množice $A$ število iz množice $A$, je množica $A$ *zaprta za množenje*. Po lastnosti $g$) je množica od nič različnih števil zaprta za množenje.

*Dokaz za i).* Dokažimo najprej enoličnost obratnega števila. Recimo, da sta $x^{-1}$ in $y^{-1}$ obratni števili števila $a$. Torej je

$$ax^{-1} = 1 \text{ in } ay^{-1} = 1.$$

Od tod dobimo, da je $ax^{-1} = ay^{-1}$ in z uporabo pravila krajšanja dobimo $x^{-1} = y^{-1}$. Torej je obratno število števila $a$ res eno samo, označimo ga z $a^{-1}$. Dokažimo sedaj še drugi del lastnosti, tj. $(a^{-1})^{-1} = a$. Po aksiomu $VIII$ obstaja obratno število številu $a^{-1}$, ki je enako $(a^{-1})^{-1}$ in obstaja obratno število številu $a$, ki je enako $a^{-1}$. Od tod dobimo enakosti

$$(a^{-1})^{-1} \cdot a^{-1} = 1 \text{ in } a^{-1} \cdot a = 1.$$

Torej je

$$(a^{-1})^{-1} \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a$$

in z uporabo pravila krajšanja dobimo

$$(a^{-1})^{-1} = a.$$

□

*Deljenje* je nasprotna računska operacija od množenja. Če delimo $b$ z $a$, iščemo tako število $x$, da je

$$ax = b.$$

Deljenje je izvedljivo, če je delitelj različen od nič. Recimo torej, da je enačba $ax = b$ rešljiva in pomnožimo obe strani z $a^{-1}$. Dobimo:

$$\begin{aligned} a^{-1}(ax) &= a^{-1}b \\ (a^{-1}a)x &= ba^{-1} \\ 1 \cdot x &= ba^{-1} \\ x &= ba^{-1} \end{aligned}$$

Rešitev je kvečjemu ena, da dobljeni $x$ res ustreza enačbi pa se lahko zopet prepričamo s preizkusom

$$ax = a(ba^{-1}) = (aa^{-1})b = 1 \cdot b = b.$$

Število $ba^{-1}$ imenujemo *kvocient* števil $b$ in $a$ in ga zapišemo tudi z $\frac{b}{a}$ ali $b : a$.

Naslednja dva aksioma pa povežeta operaciji seštevanja in množenja:

**Aksiom IX.** 1 in 0 sta različni števili:

$$1 \neq 0.$$

**Aksiom X.** *(Zakon distributivnosti)* Za poljubna tri števila $a, b, c$ velja

$$(a + b)c = ac + bc.$$

Zaradi aksioma $VI$ seveda velja tudi $a(b+c) = ab+ac$. Zakon distributivnosti velja tudi pri odštevanju. Pri definiciji razlike je namreč

$$(a-b)+b=a$$

in če to enakost pomnožimo s $c$ ter upoštevamo distributivnost, dobimo

$$(a-b)c+bc=ac$$

od koder sledi

$$(a-b)c=ac-bc$$

kar je ravno distributivnostni zakon za odštevanje.

Ugotovili smo, da so v okviru realnih števil izvedljive štiri operacije: seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje (razen deljenja z nič).Ker za te operacije veljajo aksiomi $I-X$ pravimo, da je množica realnih števil obseg.

Realna števila lahko razdelimo na pozitivna števila, negativna števila in število nič. Nasprotno število od pozitivnega števila je negativno število. Lastnosti te delitve določata naslednja dva aksioma:

**Aksiom XI.** Če je število $a \neq 0$, je eno in samo eno izmed števil $a$ in $-a$ pozitivno. Število nič ni niti pozitivno niti negativno.

**Aksiom XII.** Vsota $a+b$ in produkt $ab$ pozitivnih števil $a$ in $b$ sta pozitivni števili. Množica pozitivnih števil je torej zaprta za seštevanje in množenje.

Na podlagi aksioma $XI$ za poljubno realno število $a$ velja ena in samo ena od naslednjih možnosti:

- $a$ je pozitivno število,
- $a$ je negativno število (v tem primeru je $-a$ pozitivno število),
- $a$ je enak nič.

Nadaljnje **lastnosti pozitivnih in negativnih** števil lahko dokažemo iz aksiomov $XI$ in $XII$ in iz predhodnih lastnosti in pravil:

j) Produkt pozitivnega in negativnega števila je negativno število.

k) Produkt dveh negativnih števil je pozitivno število.

l) Kvadrat od nič različnega števila je vedno pozitivno število.

*Dokaz za j).* Naj bo $a$ pozitivno število. Potem je $-a$ negativno število in če ga pomnožimo s poljubnim pozitivnim številom $b$, dobimo

$$(-a)b=-ab.$$

Ker sta $a$ in $b$ pozitivni števili, je njun produkt po aksiomu $XII$ pozitivno število in posledično lahko sklepamo, da je $-ab$ negativno število. $\square$

Vzemimo poljubni števili $a$ in $b$.

Če je razlika $a - b$ pozitivna pravimo, da je $a$ večji kakor $b$ in pišemo $a > b$. Torej

$$a > b \Leftrightarrow a - b \text{ je pozitivno število.}$$

Če je $b = 0$, potem pomeni $a > 0$, da je število $a$ pozitivno.

Če je razlika $a - b$ negativno število, pišemo $a < b$. Ker je v tem primeru $b - a$ pozitivno število, je $b > a$. Zato dobimo naslednjo ekvivalenco

$$a < b \Leftrightarrow b > a.$$

Če je v tem primeru $b = 0$, potem pomeni $a < 0$, da je število $a$ negativno.

Ker v množici realnih števil veljajo aksiomi $I - XII$ pravimo, da je množica realnih števil *urejen obseg*. Realna števila so namreč urejena po velikosti in zanje veljata še naslednja dva **zakona**:

m) *(Zakon trihotomije)* Pri poljubnih številih $a$ in $b$ nastopi samo ena izmed treh možnost:

- $a > b$
- $a < b$
- $a = b$

n) *(Zakon tranzitivnosti)* Iz $a > b$ in $b > c$ sledi $a > c$.

*Dokaz za n).* Ker je $a > b$ je $a - b > 0$ in ker je $b > c$ je $b - c > 0$. Če obe enačbi seštejemo, dobimo $(a - b) + (b - c) > 0$ oz. $a - c > 0$, kar pa pomeni, da je $a > c$. □

Če je število $a$ enako ali večje od števila $b$, zapišemo $a \geq b$. Podobno zapišemo $a \leq b$, če je $a$ manjši ali enak številu $b$.

### 1.1.4 Dedekindov aksiom

Doslej smo obravnavali več množic realnih števil: množico naravnih števil $\mathbb{N}$, množico celih števil $\mathbb{Z}$, množico racionalnih števil $\mathbb{Q}$ itd. Pogosto pa se bomo srečali s takimi množicami števil, ki vsebujejo vsa števila med $a$ in $b$, pri čemer sta $a$ in $b$ dani števili in je $a < b$. Tako množico imenujemo *interval*, števili $a$ in $b$ pa *krajišči*. Če krajišči $a$ in $b$ ne pripadata tej množici, imenujemo interval *odprt* in ga označimo z $(a, b)$. Število $x$ je v tej množici, če je $a < x < b$. Kadar sta tudi krajišči $a$ in $b$ v množici, imenujemo interval *zaprt* in ga označimo z $[a, b]$. Število $x$ pripada zaprtemu intervalu $[a, b]$, če je $a \leq x \leq b$. Interval je *polodprt* (ali polzaprt), če je eno krajišče v množici in drugo ne. Tako pripada intervalu $[a, b)$ krajišče $a$, intervalu $(a, b]$ pa krajišče $b$. Številu $b - a$ pravimo *dolžina intervala*.

Ker smo vzeli za $a$ in $b$ realni števili, so bili vsi do sedaj našteti intervali *omejeni* (ali *končni*). Poznamo pa tudi *neomejene* (ali *neskončne*) intervale, npr. $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

**Definicija 1.2.** *Naj bo $M$ neka neprazna množica realnih števil. Če obstaja tako realno število $A$, da velja*

$$x \leq A \text{ za } \forall x \in M$$

*imenujemo množico $M$* navzgor omejeno*, $A$ pa njeno* zgornjo mejo*. Če obstaja tako realno število $B$, da velja*

$$x \geq B \text{ za } \forall x \in M,$$

*je množica $M$* navzdol omejena*, število $B$ pa je* spodnja meja *množice $M$.*

**Primer 1.3.**

- *Množica pozitivnih števil je navzdol omejena. Vsako negativno število je zanjo spodnja meja. Navzgor pa ni omejena.*
- *Množica negativnih števil je navzgor omejena, navzdol pa ne.*
- *Končni interval je zgled za množico, ki je na obe strani omejena.*

▲

Naj bo $M$ navzgor omejena množica števil in $A$ njena zgornja meja. Vsako število $B > A$ je tudi zgornja meja množice $M$. Zato je zgornjih mej neskončno mnogo, če je množica $M$ navzgor omejena. Najmanjšo zgornjo mejo imenujemo *natančna zgornja meja* ali *supremum* in jo označimo $\sup M$. Natančna zgornja meja $m$ ima dve lastnosti:

1. Neenačba $x \leq m$ velja za vsako število $x$ iz množice $M$.
2. Če je število $c < m$, je neenačba $x > c$ izpolnjena za vsaj en $x$ iz množice $M$. Drugače povedano, nobeno število $c$, ki je manjše od $m$ ni zgornja meja.

Na podoben način definiramo tudi *natančno spodnjo mejo* ali *infimum*, z oznako $\inf M$. Število $u$ je natančna spodnja meja, če ima naslednji dve lastnosti:

1. Neenačba $u \leq x$ velja za vsako število $x$ iz množice $M$.
2. Če je $c > u$, je neenačba $x < c$ izpolnjena vsaj za en $x$ iz množice $M$.

Sedaj poznamo že vse potrebne pojme, da lahko podamo še zadnji aksiom, ki karakterizira obseg realnih števil.

**Dedekindov aksiom**

**Aksiom XIII.** Vsaka neprazna navzgor omejena množica realnih števil ima natančno zgornjo mejo.

**Izrek 1.4.** *Vsaka neprazna navzdol omejena množica realnih števil ima natančno spodnjo mejo.*

*Dokaz.* Naj bo $M$ neprazna navzdol omejena množica realnih števil. Označimo z $L$ množico vseh njenih spodnjih mej. Ker je $M$ navzdol omejena, množica $L$ zagotovo ni prazna in je navzgor omejena, saj je vsako število iz $M$ zgornja meja za množico $L$. Po Dedekindovem aksiomu ima množica $L$ natančno zgornjo mejo, recimo $\sup L = u$. Pokažimo sedaj, da je $u$ tudi natančna spodnja meja množice $M$. Najprej opazimo, da za vsako število $a > u$ velja, da $a$ ne pripada množici $L$ in zato $a$ ne more biti spodnja meja množice $M$. Predpostavimo sedaj, da $u$ ni spodnja meja množice $M$ in da obstaja v množici $M$ število $x$, za katero velja $x < u$. Ker je $x < u$ in ker je $u = \sup L$, so tudi vsa števila med $x$ in $u$ v množici $L$. Števila iz $L$ pa so spodnje meje množice $M$ in so zato niso večja od $x$. Prišli smo do protislovja, ki dokazuje, da v $M$ ni števila, ki bi bilo manjše od $u$. Zato je $u = \inf M$. □

V nadaljevanju bomo podali še nekaj **lastnosti** realnih števil, ki jih dobimo na podlagi Dedekindovega aksioma:

**Izrek 1.5.** *Množica celih števil ni navzgor omejena.*

*Dokaz.* Da bi prišli do protislovja predpostavimo, da je množica celih števil $\mathbb{Z}$ navzgor omejena in je $\sup \mathbb{Z} = m$. Iz pomena natančne zgornje meje sklepamo, da število $m - 1$, ki je manjše od $m$, ni zgornja meja množice $\mathbb{Z}$. Zato obstaja vsaj eno celo število $n > m - 1$. Od tod sledi, da je $n + 1 > m$, s čimer smo prišli do protislovja. Torej $m$ ni zgornja meja množice $\mathbb{Z}$ in zaključimo, da $\sup \mathbb{Z}$ ne obstaja. □

**Posledica 1.6.** *Za vsako realno število $a$ obstaja celo število, ki je večje od $a$.*

*Dokaz.* Če bi bilo neko realno število $a$ tako veliko, da ne bi bilo nobenega večjega celega števila, bi bil $a$ zgornja meja množice celih števil, kar pa ni mogoče glede na izrek 1.5. □

**Posledica 1.7** (Arhimedov aksiom)**.** *Naj bosta $a$ in $b$ poljubni pozitivni števili. Potem obstaja tako naravno število $n$, da je $na > b$.*

*Dokaz.* Po posledici 1.6 obstaja celo število $n$, ki je večje od kvocienta $\frac{b}{a}$. Če neenakost $n > \frac{b}{a}$ pomnožimo s pozitivnim številom $a$, dobimo $na > b$. Torej smo našli ustrezno število $n$. □

**Posledica 1.8.** *Naj bo $a > 0$. Tedaj obstaja tako celo pozitivno število $n$, da je $\frac{1}{n} < a$.*

*Dokaz.* Po posledici 1.6 obstaja celo število $n$, ki je večje od števila $\frac{1}{a} > 0$. Ker je $n > 0$ iz neenakosti $n > \frac{1}{a}$ dobimo $a > \frac{1}{n}$, kar smo želeli dokazati. □

### 1.1.5 Iracionalna števila

**Trditev 1.9.** *Obseg racionalnih števil $\mathbb{Q}$ ne zadošča aksiomu XIII.*

*Dokaz.* Vzemimo množico $M$, ki sestoji iz vseh pozitivnih racionalnih števil, katerih kvadrat je manjši od 2. Pokazali bomo, da je množica $M$ neprazna in da v obsegu $\mathbb{Q}$ nima natančne zgornje meje.

Opazimo, da je množica $M$ navzgor omejena, ker nobeno število v njej ni večje od 2. Ker je $1^2 = 1 < 2$, množica $M$ zagotovo ni prazna.

Predpostavimo sedaj nasprotno, torej, da ima množica $M$ natančno zgornjo mejo in recimo, da je $\sup M = u$. Zagotovo je $u \geq 1$ in $u < 2$. Upoštevati moramo tri možnosti:

a) $u^2 = 2$

   Zapišimo $u = \frac{p}{q}$ kot okrajšani ulomek. Pokazali bomo, da tako število $u$ ne obstaja. Iz enačbe $\frac{p^2}{q^2} = 2$ dobimo $p^2 = 2q^2$. Ker je število na desni strani enakosti sodo, mora biti tudi število na levi strani enakosti sodo, še več, ker je kvadrat lihega števila liho število, mora biti $p$ sodo število. Zapišimo $p = 2r$, pri čemer je $r$ celo število. Če to ustavimo v našo enačbo dobimo $4r^2 = 2q^2$, kar lahko pokrajšamo z 2, da dobimo $2r^2 = q^2$. Sepaj pa lahko, enako kot prej, sklepamo, da je $q$ sodo število, kar pa ni mogoče, ker smo $u$ zapisali kot okrajšani ulomek in nimata $p$ in $q$ nobenega od 1 večjega skupnega faktorja.

b) $u^2 < 2$

Preverimo, ali v množici $M$ lahko obstaja število, ki je večje od $u$. Naj bo $b = u + h$, za nek $h > 0$ tako, da velja $b^2 < 2$. Če bi tako število $b$ obstajalo, potem je $b$ v množici $M$ in $b > u$, iz česar bomo lahko sklepali, da $u$ ni natančna zgornja meja množice $M$.

Predpostavimo lahko, da je $h \leq 1$. Potem je $(u+h)^2 = u^2 + 2uh + h^2$ in ker je $h^2 = h \cdot h \leq h \cdot 1 = h$, velja $u^2 + 2uh + h^2 \leq u^2 + 2uh + h = u^2 + h(2u+1)$. Če naj bo $b^2 < 2$, mora torej biti $u^2 + h(2u+1) < 2$ oz. $h < \frac{2-u^2}{2u+1}$. Kateri koli $h$, ki zadošča tej enakosti, nam poda $b = u + h$, ki je večji od $u$ in za katerega velja $b^2 < 2$. Torej je $b$ zgornja meja množice $M$, ki je večja od $u$ in zato $u$ ne more biti $\sup M$.

c) $u^2 > 2$

Pokazali bomo, da $u$ ni natančna zgornja meja množice $M$. Vzemimo $x$ iz množice $M$. Ker je $x^2 < 2 < u^2$, je $x^2 < u^2$ in zato je $u^2 - x^2 > 0$. Če levo stran razstavimo, dobimo $(u-x)(u+x) > 0$, ker sta števili $x$ in $u$ pozitivni, je $u + x > 0$ in lahko sklepamo, da je tudi $u - x > 0$. Iz tega sledi, da je $x < u$ in je $u$ res zgornja meja množice $M$. Sedaj lahko (na podoben način kot v prejšnji točki) pokažemo, da obstaja število $b = u - h$, za katerega velja $b^2 > 2$ in ker je $b < u$, je $b$ zgornja meja, ki je manjša od $u$, torej $u$ ni natančna zgornja meja.

Pokazali smo, da $\sup M$ ne obstaja in s tem je trditev dokazana. □

V množici realnih števil pa natančna meja za takšno množico $M$ obstaja. Kot v pravkar podanem dokazu lahko ugotovimo, da natančna zgornja meja $u$ ne more zadoščati neenačbama $u^2 < 2$ in $u^2 > 2$, zato ostane samo možnost $u^2 = 2$. V obsegu realnih števil torej obstaja število, katerega kvadrat je enak 2. Iz tega sklepamo, da obstajajo realna števila, ki niso racionalna. Vsako realno število, ki ni racionalno, imenujemo *iracionalno število*. Primer takega števila je $\sqrt{2}$, ki je ravno natančna zgornja meja množice $M$ iz dokaza trditve 1.9.

Naslednji izrek nam pove, da je med vsakima dvema različnima realnima številoma tudi neko racionalno število.

**Izrek 1.10.** *Vsak odprt interval vsebuje kako racionalno število.*

*Dokaz.* Imejmo interval $(a, b)$ in privzemimo najprej, da je $0 < a < b$. Naj bo $n$ tako naravno število, da velja

$$\frac{1}{n} < b - a. \tag{1.1}$$

Ideja dokaza je v tem, da se iz točke 0 s koraki velikosti $\frac{1}{n}$ premikamo v pozitivni smeri. Zaradi lastnosti 1.1 s takimi koraki ne moremo preskočiti intervala $(a, b)$.

Naj bo $m$ tako naravno število, da velja

$$m - 1 \leq na < m.$$

Iz druge neenakosti takoj sledi, da je

$$a < \frac{m}{n}.$$

Iz neenakosti 1.1 pa sledi, da je $a < b - \frac{1}{n}$ in tako s pomočjo prve neenakosti dobimo

$$m \leq na + 1 < n(b - \frac{1}{n}) + 1 = nb,$$

torej

$$\frac{m}{n} < b$$

in s tem smo pokazali, da leži $\frac{m}{n}$ na intervalu $(a, b)$.

V primeru, da je $a < b \leq 0$, z zgornjim dokazom dobimo za $c = -b$ in $d = -a$ racionalno število $q$, da je $c < q < d$ in tedaj za racionalno število $-q$ velja, da leži na intervalu $(a, b)$. Če pa je $a < 0 < b$, pa je 0 racionalno število, ki ustreza izreku. □

Zaradi zgornje trditve pravimo, da je množica $\mathbb{Q}$ *gosta* v $\mathbb{R}$. Enako velja tudi za iracionalna števila (tudi ta so gosta v $\mathbb{R}$).

**Izrek 1.11.** *Vsak odprt interval vsebuje kako iracionalno število.*

*Dokaz.* Pokažimo najprej, da je vsota racionalnega in iracionalnega števila iracionalno število. Da bi prišli do protislovja predpostavimo, da je vsota racionalnega in iracionalnega števila racionalno število. Naj bosta $p, q$ racionalni števili in $c$ tako iracionalno število, da velja $p + c = q$. Potem je $c = q - p$, s čimer pridemo do protislovja, saj vemo, da je množica racionalnih števil zaprta za odštevanje.

Imejmo sedaj interval $(a, b)$. Po izreku 1.10 obstaja racionalno število $q$, da velja

$$a - \sqrt{2} < q < b - \sqrt{2}.$$

Tedaj pa velja tudi

$$a < q + \sqrt{2} < b.$$

Torej je $q + \sqrt{2}$ iracionalno število, ki leži na intervalu $(a, b)$. □

### 1.1.6 Decimalni zapis realnega števila

Realna števila je mogoče izraziti v decimalni obliki:

Naj bo $x$ poljubno pozitivni realno število. Če je $x$ celo število, je to že v decimalni obliki in smo zaključili. Če pa $x$ ni celo število, obstaja tako (nenegativno) celo število $C$, da velja

$$C < x < C + 1.$$

Sedaj si pogledamo števila oblike $C + \frac{n}{10}$ za $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Če je $x$ enak enemu izmed njih, recimo številu $C + \frac{c_1}{10}$, je decimalni zapis za $x$ kar $C, c_1$. Sicer pa obstaja tak $c_1 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, da velja

$$C + \frac{c_1}{10} < x < C + \frac{c_1 + 1}{10}.$$

Dalje si sedaj pogledamo števila oblike $C, c_1 + \frac{n}{100}$ za $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Če je $x$ enak enemu izmed njih, je decimalni zapis za $x$ kar $C, c_1 c_2$. Sicer pa obstaja tak $c_2 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, da velja

$$C, c_1 + \frac{c_2}{100} < x < C, c_1 + \frac{c_2 + 1}{100}.$$

Ta postopek nadaljujemo, včasih se ustavi, včasih pa ne. Na ta način priredimo številu $x$ natanko določen končen ali neskončen decimalni zapis

$$x = C, c_1 c_2 c_3 \ldots$$

in dve različni števili imata različna decimalna zapisa. Tudi vsakemu decimalnemu zapisu pripada natanko določeno realno število.

Izkaže se, da ulomkom pripadajo ali končni decimalni zapisi ali pa neskončni in od nekje naprej periodični decimalni zapisi. Iracionalna števila pa so ravno tista, ki imajo neskončne in neperiodične decimalne zapise.

Če je $x$ negativno število, potem je $-x$ pozitivno število. Njegov decimalni zapis dobimo po zgornjem postopku in velja $x = -C, c_1 c_2 \ldots$.

**Primer 1.12.** *Določimo nekaj decimalk za iracionalno število* $\sqrt{2}$.
*Ker je* $1^2 = 1$ *in* $2^2 = 4$, *je*

$$1 < \sqrt{2} < 2.$$

*S poskušanjem ugotovimo, da je* $1,4^2 = 1,96$ *in* $1,5^2 = 2,25$. *Torej je*

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5.$$

*Dalje, ker je* $1,41^2 = 1,9881$ *in* $1,42^2 = 2,0164$ *je*

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$$

*in tako naprej...* ▲

**Primer 1.13.** *Katero racionalno število pripada decimalnemu zapisu* $7,35555555\ldots$*?*
*Naj bo* $x = 7,35555\ldots$. *Potem je*

$$10x = 73,5555\ldots \tag{1.2}$$

*in*

$$100x = 735,5555\ldots \tag{1.3}$$

*Opazimo, da se števili na desni strani enačb 1.2 in 1.3 po decimalni vejici povsem ujemata. Če torej odštejemo enačbo 1.2 od enačbe 1.3 dobimo*

$$90x = 662$$

*in od tod* $x = \frac{662}{90} = \frac{331}{45}$. ▲

### 1.1.7 Absolutna vrednost

**Definicija 1.14.** *Poljubnemu realnemu številu $x$ priredimo njegovo* absolutno vrednost $|x| \in \mathbb{R}$ *s predpisom*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{če je } x \geq 0 \\ -x & \text{če je } x < 0 \end{cases}$$

Lastnosti absolutne vrednosti so podane v naslednji trditvi:

**Trditev 1.15.** *Za poljubni realni števili $a$ in $b$ velja* *a) (trikotniška neenakost)* $|a+b| \leq |a| + |b|$

*b)* $|a+b| \geq |a| - |b|$

*c)* $|ab| = |a||b|$

*d)* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, *če je le* $b \neq 0$

*Dokaz.* Podrobno bomo podali dokaza za lastnosti a) in b). Iz definicije 1.14 vidimo, da veljata za vsak $a \in \mathbb{R}$ neenakosti

$$a \leq |a| \qquad \text{in} \qquad -a \leq |a|.$$

V primeru, da je $a+b \geq 0$, dobimo torej

$$|a+b| = a+b \leq |a| + |b|.$$

V primeru, da je $a+b < 0$ pa podobno

$$|a+b| = -(a+b) \leq |a| + |b|.$$

V trikotniški neenakosti enačaj velja, če sta števili enako predznačeni ali pa je vsaj eno enako 0. Sicer velja neenačaj.

Za dokaz lastnosti b) si oglejmo naslednji izračun:

$$|a| = |(a+b) + (-b)| \leq |a+b| + |-b| = |a+b| + |b|.$$

Od tod pa sledi

$$|a| - |b| \leq |a+b|.$$

Ostali lastnosti (tj. c) in d)) preverimo za vse možne primere predznakov števil $a$ in $b$. □

Z indukcijo lahko dokažemo tudi, da lastnosti a) in c) veljata za poljubna mnogo realnih števil $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Torej

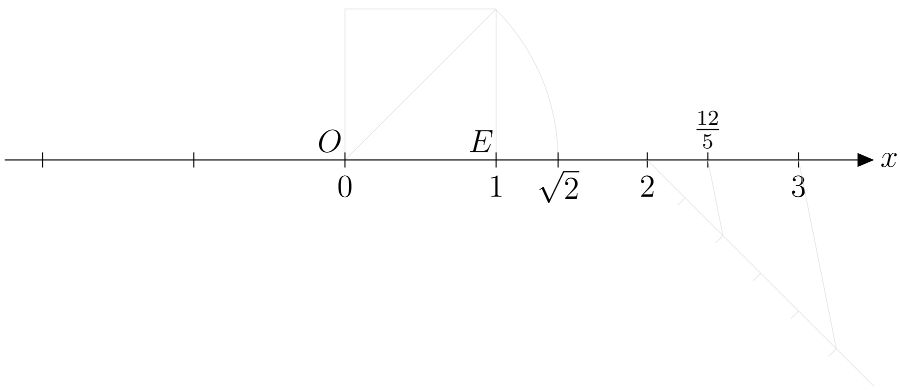
$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$
$$|a_1 \cdot a_2 \cdots a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdots |a_3|$$

### 1.1.8 Prikaz realnih števil na številski premici

Če narišemo premico, na njej določimo izhodišče (točko z oznako 0 ali $O$) in enoto (točko z oznako 1 ali $E$, ta je običajno desno od točke $O$), imamo za vsako realno število natanko eno točko na premici in za vsako točko na premici natanko eno realno število. Pri tem za števili $a < b$ velja, da je točka, ki ustreza številu $a$, levo od točke, ki ustreza številu $b$.

Če nanašamo daljico $OE$ na premico levo in desno od izhodišča, dobimo slike celih števil. Točko, ki predstavlja racionalno število $\frac{p}{q}$ dobimo tako, da daljico $OE$ razdelimo na $q$ enakih delov in nato nanesemo $p$ teh delov od točke $O$ na levo ali desno (skladno s predznakom ulomka), ali pa si pomagamo s pomožnim poltrakom.

Nekoliko težje je dobiti slike iracionalnih števil. Pri številih, ki so kvadratni koreni iz racionalnih števil si lahko pomagamo s Pitagorovim izrekom. Sliko števila $\sqrt{2}$ dobimo npr. tako, da narišemo kvadrat, ki ima za stranico daljico $OE$ in nanesemo dolžino diagonale od točke $O$ na desno.




Slika 1.1: Številska premica z označenima izhodiščem $O$ in enoto $E$ ter števili $1, \sqrt{2}, 2, \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$ in 3. Narisana sta tudi kvadrat s stranico dolžine $OE$ ter pomožni poltrak.

**Izrek 1.16.** *Vsakemu realnemu številu pripada ena in samo ena točka na številski premici. Vsaka točka na številski premici je slika enega in le enega števila.*

Čeprav ima vsako realno število sliko na številski premici, pa slike ni vedno možno narisati samo z uporabo ravnila in šestila. Takšna so npr. števila $\sqrt[3]{2}$, $\pi$ itd.

## 1.2 Kompleksna števila

V množici realnih števil še vedno ne moremo rešiti nekaterih enačb, na primer

$$x^2 = -1.$$

Podobno, kot smo naravnim številom dodali negativna cela števila in celim številom racionalna števila, lahko množici realnih števil dodamo element $i$, za katerega velja $i^2 = -1$ in tako je $\mathbb{R} \cup \{i\}$ polje, ki ga označimo s $\mathbb{C}$ in mu rečemo polje *kompleksnih števil*. V tako dobljeni množici so rešljive vse polinomske enačbe.

Da bo $\mathbb{C}$ polje, mora vsebovati vse produkte $ai$, kjer je $a$ poljubno realno število in tudi vse vsote $a + bi$, kjer sta $a, b$ poljubni realni števili. Formalno je torej

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

**Definicija 1.17.** *Za kompleksno število $z = a+bi$ pravimo, da je $a$ njegova* realna komponenta *in zapišemo $\mathcal{R}e(z) = a$ ter $b$ njegova* imaginarna komponenta*, kar zapišemo $\mathcal{I}m(z) = b$.*

S kompleksnimi števili, katerih imaginarna komponenta je 0, računamo enako kot z realnimi števili. Če imaginarna komponenta ni enaka nič, pa tako kot z binomi, le da upoštevamo, da je

$$i^2 = -1 \qquad i^3 = -i \qquad i^4 = 1$$

Če sta $z = a + bi$ in $w = c + di$ kompleksni števili, je torej vsota

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Produkt pa je

$$z \cdot w = (a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac-bd) + (ad+bc)i.$$

Veljajo tudi

- asociativnost: Za poljubna kompleksna števila $a+bi$, $c+di$ in $e+fi$ velja

$$\begin{aligned}(a+bi) + \big((c+di)+(e+fi)\big) &= (a+bi) + \big((c+e)+(d+f)i\big)\\ &= (a+c+e)+(b+d+f)i\\ &= \big((a+c)+(b+d)i\big)+(e+fi)\\ &= \big((a+bi)+(c+di)\big)+(e+fi)\end{aligned}$$

  in

$$\begin{aligned}(a+bi)\big((c+di)(e+fi)\big) &= (a+bi)\big((ce-df)+(cf+de)i\big)\\ &= (ace-adf-bcf-bde)+(acf+ade+bce-bdf)i\\ &= \big((ac-bd)+(ad+bc)i\big)(e+fi)\\ &= \big((a+bi)(c+di)\big)(e+fi)\end{aligned}$$

- komutativnost: Za poljubni kompleksni števili $a+bi$ in $c+di$ velja

$$\begin{aligned}(a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(b+d)i\\ &= (c+di)+(a+bi)\end{aligned}$$

  in

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di) &= (ac-bd)+(ad+bc)i\\ &= (c+di)(a+bi)\end{aligned}$$

- distributivnost: Za poljubna kompleksna števila $a+bi$, $c+di$ in $e+fi$ velja

$$\begin{aligned}(a+bi)\big((c+di)+(e+fi)\big) &= (a+bi)\big((c+e)+(d+f)i\big)\\ &= a(c+e)-b(d+f)+\big(a(d+f)+b(d+f)\big)i\\ &= (a+bi)(c+di)+(a+bi)(e+fi)\end{aligned}$$

Nevtralen element za seštevanje je $0+0i$, za množenje pa $1+0i$. Vsako število $a+bi$ ima tudi nasprotno število $-a-bi$ in obratno število $(a+bi)^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$, pa tudi *konjugirano* število $\overline{z} = a-bi$.

**Lastnosti** konjugacije:

a) $\overline{\overline{z}} = z$

b) $z \cdot \overline{z} = a^2+b^2 \geq 0$

c) za poljubni kompleksni števili $z, w$ je $\overline{z+w} = \overline{z}+\overline{w}$

d) za poljubni kompleksni števili $z, w$ je $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

e) za poljubni kompleksni števili $z, w \neq 0$ je $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$

**Trditev 1.18.** *Če ima polinomska enačba z realnimi koeficienti*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$$

*kompleksno rešitev $z$, je tudi njena konjugirana vrednost $\overline{z}$ rešitev iste enačbe.*

*Dokaz.* Če je $z$ rešitev enačbe potem velja

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n = 0.$$

Enakost je veljavna tudi, če obe strani konjugiramo. V tem primeru dobimo

$$a_0 + a_1 \overline{z} + a_2 \overline{z}^2 + \cdots + a_n \overline{z}^n = 0,$$

kar pa ravno pomeni, da je tudi $\overline{z}$ rešitev začetne enačbe. □

*Absolutna vrednost* kompleksnega števila $z = a + bi$ je kvadratni koren iz produkta konjugirano kompleksnih števil

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Opazimo, da je ta enaka tudi za konjugirano vrednost $\overline{z}$.

Veljajo še naslednje relacije:

**Trditev 1.19.** *Za poljubna kompleksna števila $z_1, z_2, \ldots, z_n$ velja*

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$$
$$|z_1 \cdot z_2 \cdots z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdots |z_3|$$

*in za poljubni kompleksni števili $z_1$ in $z_2 \neq 0$ velja*

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

*Dokaz.* Za produkt dveh kompleksnih števili $z_1, z_2$ je dokaz enostaven:

$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{(z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1 \cdot z_2})} = \sqrt{(z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1} \cdot \overline{z_2})} = \sqrt{z_1 \overline{z_1} \cdot z_2 \overline{z_2}} = |z_1| \cdot |z_2|$$

Da enakost velja za poljubna števila $z_1, z_2, \ldots, z_n$ lahko pokažemo z indukcijo.

Za dokazati veljavnost neenakosti, ki zadeva vsoto pa se najprej prepričajmo, da za $z = a + bi$ velja $z + \overline{z} \leq 2|z|$. Res,

$$z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a \leq 2\sqrt{a^2 + b^2} = 2|z|.$$

Z enostavnim izračunom se lahko prepričamo tudi, da če je $z = z_1 \overline{z_2}$, je $\overline{z} = \overline{z_1} z_2$.

Dokažimo sedaj prvo neenakost za dve kompleksni števili $z_1, z_2$:

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2| &= \sqrt{(z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2})} = \sqrt{(z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2})} \\
&= \sqrt{z_1 \overline{z_1} + z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2}} \\
&\leq \sqrt{|z_1|^2 + 2|z_1 \overline{z_2}| + |z_2|^2} = \sqrt{|z_1|^2 + 2|z_1||\overline{z_2}| + |z_2|^2} \\
&= \sqrt{|z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2} = \sqrt{(|z_1| + |z_2|)^2} \\
&= |z_1| + |z_2|
\end{aligned}$$

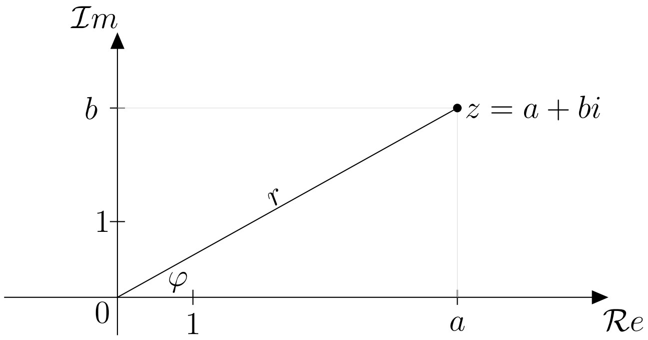
Za dokaz, da neenakost velja za poljubna števila $z_1, z_2, \ldots, z_n$ lahko ponovno uporabimo indukcijo. □

**Definicija 1.20.** *Za množico $M \subset \mathbb{C}$ rečemo, da je* omejena*, če je množica*

$$\{|z| \mid z \in M\}$$

*omejena v* $\mathbb{R}$*.*

Realna števila smo upodobili na številski premici. Ker pa je vsako kompleksno število določeno z dvema realnima številoma (z realno in imaginarno komponento), množica $\mathbb{C}$ ustreza ravno točkam v ravnini. Ravnina z imaginarno in realno osjo in enotama na njih se imenuje *kompleksna ravnina*.




Slika 1.2: Kompleksna ravnina z označeno točko $z = a + bi$.

Podobno kot za realna števila tudi tokrat velja, da vsakemu kompleksnemu številu ustreza natanko ena točka na ravnini in vsaki točki na ravnini ustreza natanko eno kompleksno število. Sliki konjugiranih kompleksnih števil sta simetrični glede na realno os. Absolutna vrednost kompleksnega števila pa pomeni razdaljo njegove slike od izhodišča in jo včasih označimo tudi z $r$. Kot, ki ga s pozitivno smerjo realne osi oklepa daljica, ki poteka od 0 do slike kompleksnega števila $z$, se imenuje *argument* kompleksnega števila in se označi s $\varphi$ ali $\mathrm{Arg}(z)$. Iz slike lahko razberemo, da je $a = r\cos\varphi$ in $b = r\sin\varphi$; zato je

$$z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

To je *polarni zapis* kompleksnega števila.

Množica točk v kompleksni ravnini, katerih absolutna vrednost je manjša od $r$ je torej krog s središčem v 0 in polmerom $r$. Množica $m \subset \mathbb{C}$ pa je omejena natanko tedaj, ko je vsebovana v nekem krogu s središčem v 0.

Oglejmo si sedaj kako množimo s pomočjo kompleksne ravnine. Vzemimo kompleksni števili $z_1$ in $z_2$, za kateri velja $|z_1| = |z_2| = 1$, tako da imamo

$$z_1 = \cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1 \text{ in } z_2 = \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2.$$

Potem je

$$z_1 z_2 = (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)$$

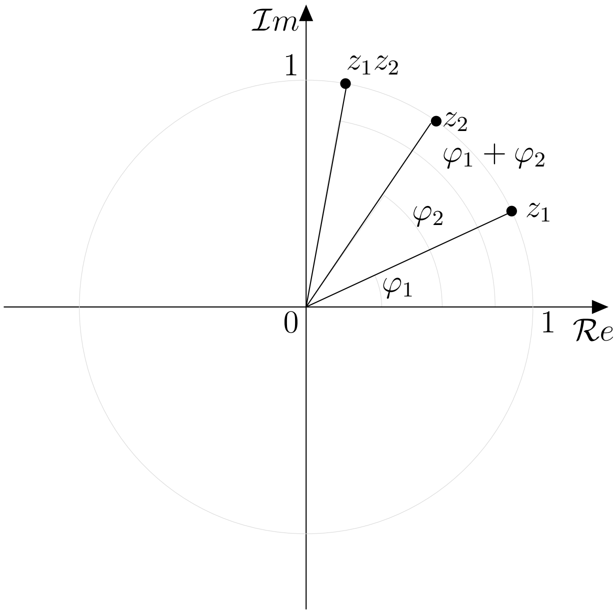
in z uporabo adicijskih izrekov za kotne funkcije

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$$
$$\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2 = \sin(\varphi_1 + \varphi_2),$$

dobimo

$$z_1 z_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Produkt dveh kompleksnih števil z enotske krožnice je tisto število na enotski krožnici, katerega argument je vsota argumentov faktorjev.




Slika 1.3: Prikaz množenja kompleksnih števil s pomočjo enotske krožnice in kompleksne ravnine.

Poglejmo še splošen primer. Imejmo kompleksni števili

$$w_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1) \text{ in } w_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2).$$

Pri množenju dobimo

$$w_1 w_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i(\sin\varphi_1 + \varphi_2)\right).$$

Tako smo ugotovili, da se pri množenju kompleksnih števil absolutne vrednosti množijo, argumenti pa seštevajo. Na podoben način ugotovimo tudi, da se pri deljenju kompleksnih števil absolutni vrednosti delita, argumenta pa odštejeta. V posebnem primeru, ko je $z = z_1 = z_2$ število na enotski krožnici, dobimo

$$z^2 = \cos(2\varphi) + i \sin(2\varphi)$$

in od tod še naslednji izrek.

**Izrek 1.21** (Moivrova formula)**.**

$$(\cos\varphi + i \sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi).$$

*Dokaz.* Trditev bomo dokazali s pomočjo indukcije. Za $n = 1$ je enakost očitna. Predpostavimo sedaj, da enakost velja za $n$ in dokažimo, da velja tudi za $n + 1$.

$$\begin{aligned}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{n+1} &= (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)\\ &= (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))(\cos\varphi + i\sin\varphi)\\ &= \cos(n\varphi + \varphi) + i\sin(n\varphi + \varphi)\\ &= \cos((n+1)\varphi) + i\sin((n+1)\varphi)\end{aligned}$$

□

## 1.3 $\varepsilon$-okolica in okolica točke

V poglavju 1.1.8 smo spoznali, da vsakemu realnemu številu ustreza neka točka na realni premici in podobno smo v poglavju 1.2 spoznali, da vsakemu kompleksnemu številu ustreza neka točka v kompleksni ravnini. V luči tega bomo na množici realnih in kompleksnih števil včasih gledali tudi iz geometrijskega vidika. V takem primeru bomo včasih namesto o številih govorili kar o točkah.

**Definicija 1.22.** *Naj bo $\varepsilon$ neko pozitivno realno število in $a \in \mathbb{R}$. Tedaj intervalu $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, v katerem so natanko vsa števila $x$, za katera velja*

$$|a - x| < \varepsilon,$$

*tj. tiste točke $x$, ki so od $a$ oddaljene za manj kot $\varepsilon$, rečemo* $\varepsilon$-okolica *točke $a$. Za poljubno množico $A \subset \mathbb{R}$, ki vsebuje vsaj eno $\varepsilon$-okolico točke $a$, pa rečemo, da je* okolica *točke $a$.*

Vsaka točka $x$ odprtega intervala $(a, b)$ ima pozitivno razdaljo do obeh krajišč tega intervala. Če definiramo

$$\varepsilon = \min\{|a - x|, |b - x|\},$$

interval $(a, b)$ vsebuje $\varepsilon$-okolico točke $x$. To pomeni, da je vsak odprti interval okolica vsake svoje točke. Očitno pa zaprti interval ni okolica svojih krajišč. Očitno velja tudi naslednja lastnost: če je $A$ okolica točke $x$ je tudi $B$, za katero velja $A \subset B$, okolica točke $x$.

**Primer 1.23.** *Množica $U = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ni okolica točke $0$ v $\mathbb{R}$, saj ne vsebuje prav nobenega odprtega intervala okoli točke $0$.* ▲

Podobno kot v $\mathbb{R}$ definiramo okolice tudi v $\mathbb{C}$.

**Definicija 1.24.** *Naj bo $\varepsilon > 0$ in $w \in \mathbb{C}$. Tedaj množici*

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |w - z| < \varepsilon\}$$

*rečemo* $\varepsilon$-okolica *točke $w$. Za poljubno množico točk $V \subset \mathbb{C}$, ki vsebuje vsaj eno $\varepsilon$-okolico točke $w$, pa rečemo, da je* okolica *točke $w$.*

Medtem, ko je $\varepsilon$-okolica točke v $\mathbb{R}$ interval dolžine $2\varepsilon$, je $\varepsilon$-okolica točke v $\mathbb{C}$ krog s polmerom $\varepsilon$ okrog te točke.