

# 1 Линейная интерполяция

## 1.1 $lerp_{v1}$

$$a \oplus t \otimes (b \ominus a) = a \oplus t \otimes (b - a)(1 + \delta_1) \quad (1)$$

1. Если  $a = b$ ,  $(b - a)(1 + \delta_1) = 0$ , а тогда 1 равно  $a + 0 = a$ , то есть результат точный
2. Если  $t = 1.0$ , умножение на  $t$  происходит без погрешности. Перепишем выражение 1:

$$\begin{aligned} a \oplus t \otimes (b - a)(1 + \delta_1) &= a \oplus (b - a)(1 + \delta_1) = \\ &= (a + (b - a)(1 + \delta_1))(1 + \delta_2) = \\ &= (a + b - a + (b - a)\delta_1)(1 + \delta_2) = \\ &= (b + (b - a)\delta_1)(1 + \delta_2) \end{aligned}$$

Пусть  $a = (1 - k)b$ ,  $k > 0$  и  $b \neq 0$ . Подставим:

$$(b + kb\delta_1)(1 + \delta_2) = b(1 + k\delta_1)(1 + \delta_2) \quad (2)$$

В полученном выражении 2 обе скобки строго больше 1 и  $b$  не равно нулю, поэтому 2 строго больше  $b$ , а должно быть равно.

## 1.2 $lerp_{v2}$

$$(1.0 \ominus t) \otimes a \oplus t \otimes b = (1.0 - t)(1 + \delta_1) \otimes a \oplus t \otimes b \quad (3)$$

1. Если  $t = 1.0$ , выражение 3 принимает вид  $0 \oplus 1.0 \otimes b = b$ , то есть результат точный
2. Если  $a = b$ , рассмотрим случай, когда  $t = 0.5$  и  $a \neq 0$ , и перепишем 3

$$\begin{aligned} (1.0 - t)(1 + \delta_1) \otimes a \oplus t \otimes b &= 0.5a(1 + \delta_1)(1 + \delta_1)(1 + \delta_2) \oplus 0.5a(1 + \delta_3) = \\ &= 0.5a \left( (1 + \delta_1)(1 + \delta_2) + (1 + \delta_3) \right) (1 + \delta_4) = \\ &= 0.5a(2 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_1\delta_2)(1 + \delta_4) \end{aligned}$$

Получили произведение ненулевых чисел, следовательно, есть погрешность.

## 2 Вычисление полиномов

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x_1 + a_0$$

Пусть погрешность одной операции fma равна  $\delta$ . Тогда

$$\begin{aligned} \text{fma}(x, \text{fma}(x, \text{fma}(x, a_3, a_2), a_1), a_0) &= \\ &= \text{fma}(x, \text{fma}(x, (a_3x + a_2)(1 + \delta), a_1), a_0) = \\ &= \text{fma}(x, ((a_3x^2 + a_2x)(1 + \delta) + a_1)(1 + \delta), a_0) = \\ &= (((a_3x^3 + a_2x^2)(1 + \delta) + a_1x)(1 + \delta) + a_0)(1 + \delta) = \\ &= p(x) + \\ &+ \delta(3a_3x^3 + 3a_2x^2 + 2a_1x_1 + a_0) + \\ &+ \delta^2(2a_3x^3 + 2a_2x^2 + a_1x_1) + \\ &+ \delta^3(a_3x^3 + a_2x^2) \end{aligned}$$