

# Simítás, spline-regresszió, additív modellek

Ferenci Tamás, [tamas.ferenci@medstat.hu](mailto:tamas.ferenci@medstat.hu)

2021. február 26.

- 1 A LOESS simító
- 2 Spline fogalma, lineáris regressziótól a spline-regresszióig
- 3 Spline-regresszió becslése bázisfüggvényekkel, penalizáltan
- 4 Additív modellek

## 1 A LOESS simító

- Motiváció
- A LOESS simító alapgondolata
- Lokalitás
- Polinomiális regresszió
- Összerakva az építőelemeket: lokális polinomiális regressziókkal közelítés
- A paraméterek megválasztásának hatása: lokalitás
- A paraméterek megválasztásának hatása: a polinom fokszáma
- A paraméterek megválasztása

## 2 Spline fogalma, lineáris regressziótól a spline-regresszióig

- A regresszió
- Regresszió becslése mintából
- Paraméteres és nem-paraméteres regresszió
- A lineáris regresszió kibővítése, nemlinearitások
- Egy példa
- Regresszió ötödfokú polinommal
- Módosítás
- Regresszió tizedfokú polinommal
- Mi a jelenség oka?
- Mi lehet a megoldás?
- Természetes köbös spline

# Tartalom

- A példa regressziója természetes köbös spline-nal
- Mi az előbbiben a fantasztikus?
- A spline-regresszió ereje

## 3 Spline-regresszió becslése bázisfüggvényekkel, penalizáltan

- Bázisfüggvényekkel felírás
- Modellmátrix előállítása
- Penalizálás
- Simítási paraméter meghatározása

## 4 Additív modellek

- Több magyarázó változó

Téma: simítás, spline-regresszió, additív modellek

Minden visszajelzést örömmel veszek a [tamas.ferenci@medstat.hu](mailto:tamas.ferenci@medstat.hu) email-címen

## 1 A LOESS simító

- Motiváció
- A LOESS simító alapgondolata
- Lokalitás
- Polinomiális regresszió
- Összerakva az építőelemeket: lokális polinomiális regressziókkal közelítés
- A paraméterek megválasztásának hatása: lokalitás
- A paraméterek megválasztásának hatása: a polinom fokszáma
- A paraméterek megválasztása

## 2 Spline fogalma, lineáris regressziótól a spline-regresszióig

# Tartalom 2.

- A regresszió
- Regresszió becslése mintából
- Paraméteres és nem-paraméteres regresszió
- A lineáris regresszió kibővítése, nemlinearitások
- Egy példa
- Regresszió ötödfokú polinommal
- Módosítás
- Regresszió tizedfokú polinommal
- Mi a jelenség oka?
- Mi lehet a megoldás?
- Természetes köbös spline



# Tartalom 3.

- A példa regressziója természetes köbös spline-nal
- Mi az előbbiben a fantasztikus?
- A spline-regresszió ereje

## 3 Spline-regresszió becslése bázisfüggvényekkel, penalizáltan

- Bázisfüggvényekkel felírás
- Modellmátrix előállítása
- Penalizálás
- Simítási paraméter meghatározása

## 4 Additív modellek

- Több magyarázó változó

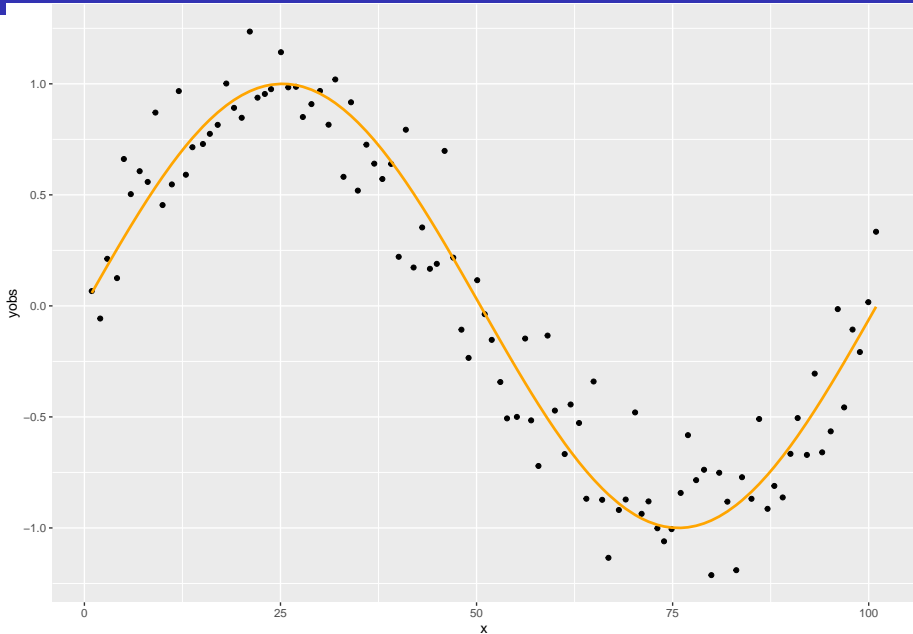
A LOESS simítóról lesz szó

## Subsection 1

### Motiváció

# Motiváció 1.

# Motiváció

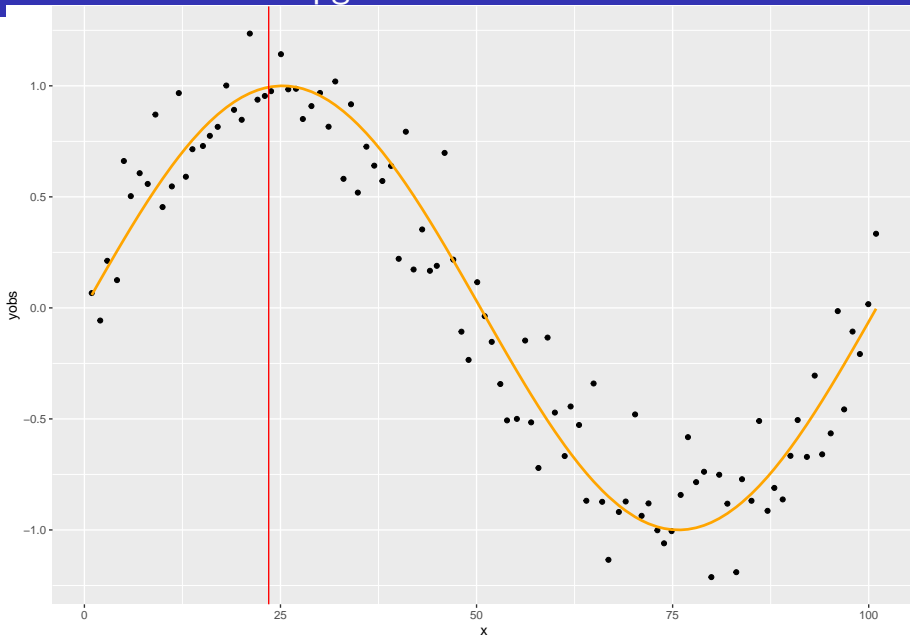


## Subsection 2

### A LOESS simító alapgondolata

# A LOESS simító alapgondolata 1.

# A LOESS simító alapgondolata

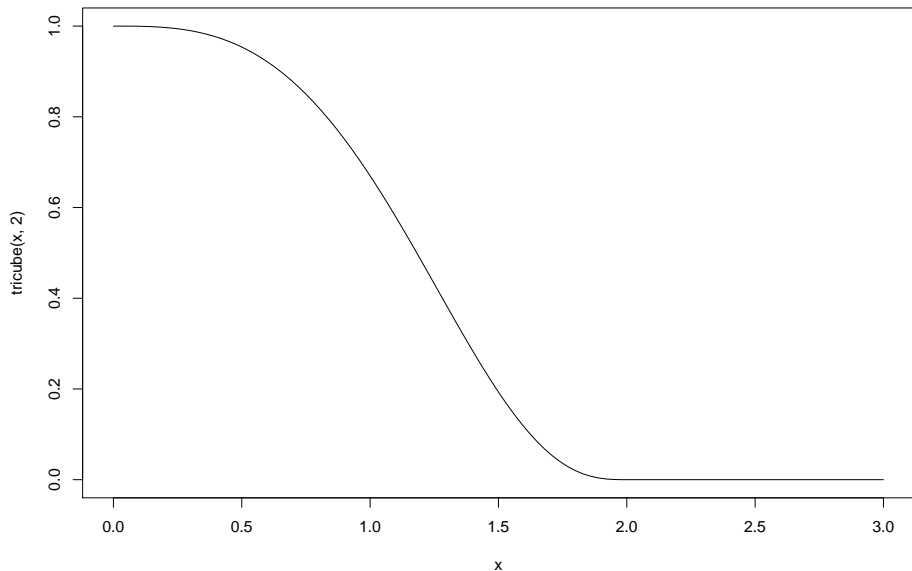




## Subsection 3

### Lokális

# Lokalitás 1.

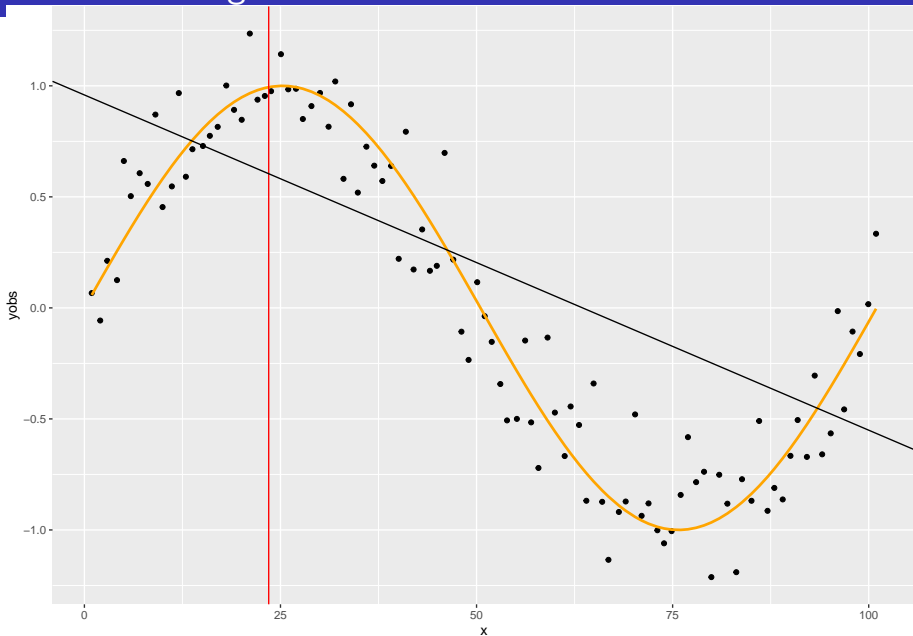


## Subsection 4

### Polinomiális regresszió

# Polinomiális regresszió 1.

# Polinomiális regresszió



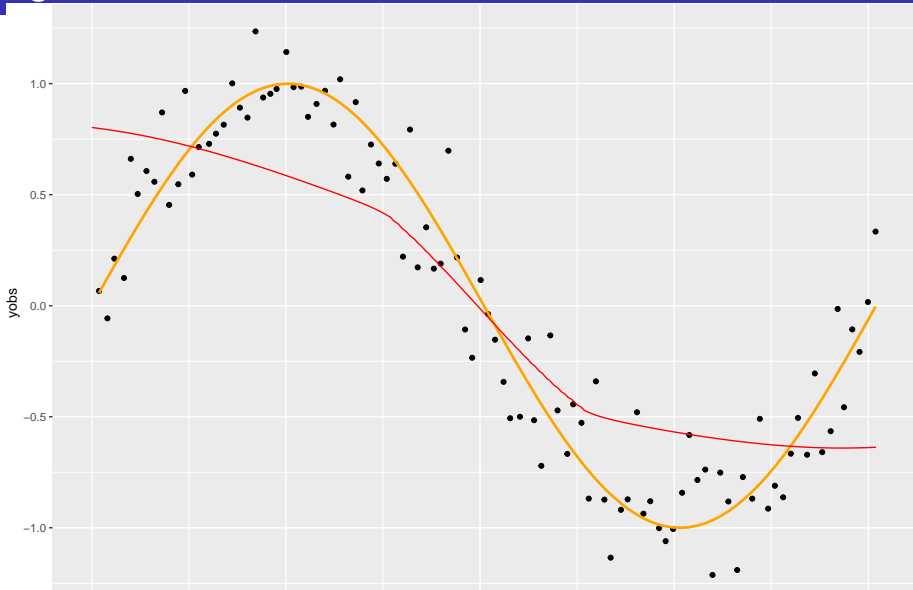
## Subsection 5

Összerakva az építőelemeket: lokális polinomiális regressziókkal  
közelítés

# Összerakva az építőelemeket: lokális polinomiális regressziókkal közelítés 1.



# Összerakva az építőelemeket: lokális polinomiális regressziókkal közelítés

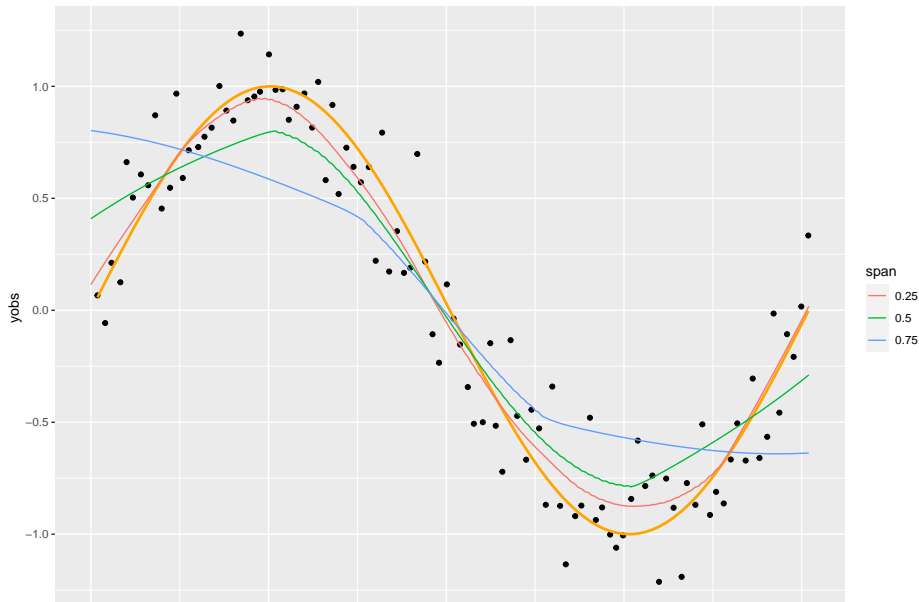


## Subsection 6

A paraméterek megválasztásának hatása: lokáltság

# A paraméterek megválasztásának hatása: lokális 1.

## A paraméterek megválasztásának hatása: lokalizás 2.



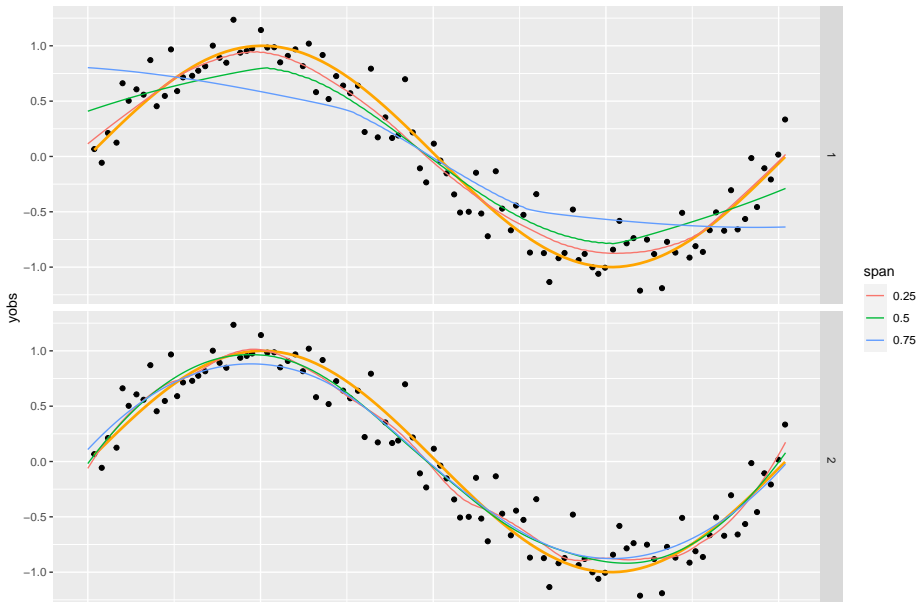
## Subsection 7

A paraméterek megválasztásának hatása: a polinom fokszáma

Kitérő: polinomiális regresszió illesztésének szintaktikája R alatt 1.

# Polinom fokszámának változtatása 1.

# Polinom fokszámának változtatása



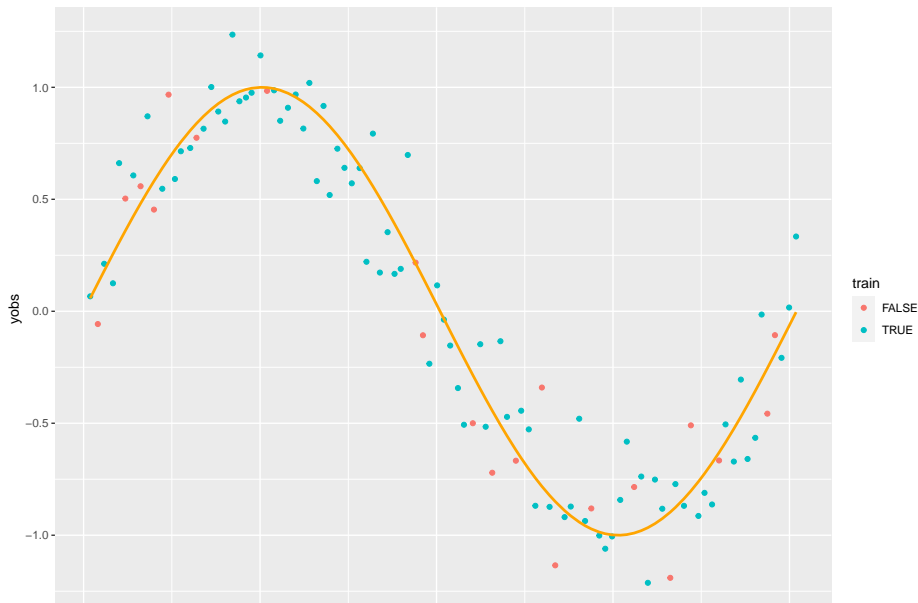


## Subsection 8

### A paraméterek megválasztása

# A paraméterek megválasztása

# A paraméterek megválasztása



## 1 A LOESS simító

- Motiváció
- A LOESS simító alapgondolata
- Lokalitás
- Polinomiális regresszió
- Összerakva az építőelemeket: lokális polinomiális regressziókkal közelítés
- A paraméterek megválasztásának hatása: lokalitás
- A paraméterek megválasztásának hatása: a polinom fokszáma
- A paraméterek megválasztása

## 2 Spline fogalma, lineáris regressziótól a spline-regresszióig

- A regresszió
- Regresszió becslése mintából
- Paraméteres és nem-paraméteres regresszió
- A lineáris regresszió kibővítése, nemlinearitások
- Egy példa
- Regresszió ötödfokú polinommal
- Módosítás
- Regresszió tizedfokú polinommal
- Mi a jelenség oka?
- Mi lehet a megoldás?
- Természetes köbös spline

# Tartalom

- A példa regressziója természetes köbös spline-nal
- Mi az előbbiben a fantasztikus?
- A spline-regresszió ereje

## 3 Spline-regresszió becslése bázisfüggvényekkel, penalizáltan

- Bázisfüggvényekkel felírás
- Modellmátrix előállítása
- Penalizálás
- Simítási paraméter meghatározása

## 4 Additív modellek

- Több magyarázó változó

## Subsection 1

### A regresszió

A regresszió legtöbb alkalmazott statisztikai terület talán legfontosabb eszköze

**Regresszió:** változók közti kapcsolat (illetve annak becslése minta alapján)

„Kapcsolat” formalizálása: függvény a matematikai fogalmával, tehát keressük az

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_p) + \varepsilon = f(\mathbf{X})$$

függvényt

( $Y$  eredményváltozó,  $X_i$ -k a magyarázó változók)



## Subsection 2

### Regresszió becslése mintából

# Regresszió becslése mintából 1.

**Paraméteres regresszió:** ha *a priori* feltételezzük, hogy az  $f$  függvény valamilyen – paraméterek erejéig meghatározott – függvényformájú (az „alakja” ismert), és így a feladat e paraméterek becslésére redukálódik

Tipikus példa a **lineáris regresszió**:

$$f(\mathbf{X}) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_p X_p = \mathbf{X}^T \boldsymbol{\beta}, \text{ így } Y = \mathbf{X}^T \boldsymbol{\beta} + \varepsilon$$

Ha rendelkezésre állnak az  $\{y_i, \mathbf{x}_i\}_{i=1}^n$  megfigyeléseink a háttéreloszlásra, akkor e mintából megbecsülhetjük a paramétereket például **hagyományos legkisebb négyzetek (OLS)** módszerével:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \arg \min_{\mathbf{b}} \sum_{i=1}^n [Y_i - \mathbf{x}_i^T \mathbf{b}]^2 = \|\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{b}\|^2$$

Itt tehát  $\mathbf{X}$  az a mátrix, amiben a magyarázó változók elé egy csupa 1 oszlopot szúrtunk, a neve **modellmátrix** vagy design mátrix

## Subsection 3

### Paraméteres és nem-paraméteres regresszió

De cserében mindig ott lebeg felettünk a kérdés, hogy a függvényformára *jó feltételezést* tettünk-e (hiszen ez nem az adatokból következik, ezt „ráerőszakoljuk” az adatokra)

(Persze ezért van a modelldiagnosztika)

A nem-paraméteres regresszió *flexibilis*, olyan értelemben, hogy minden a priori megkötés nélkül követi azt, ami az adatokból következik (a valóság ritkán lineáris?)

Cserében nehezebb becsülni, és nem kapunk analitikus – jó esetben valamire hasznosítható – regressziós függvényt, nem lehet értelmesen interpolálni és extrapolálni („fordul a kocka” a paraméteres esethez képest)

## Subsection 4

### A lineáris regresszió kibővítése, nemlinearitások

# A lineáris regresszió kibővítése, nemlinearitások 1.

Maradva a paraméteres keretben, arra azért mód van, hogy a függvényformát kibővítsük (és így flexibilisebbé tegyük)

Ezzel a különféle **nemlineáris regressziókhoz** jutunk el

E nemlinearitásoknak két alaptípusa van

- Változójában nemlineáris modell (pl.  $\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$ ): csak a szó „matematikai értelmében” nemlineáris, ugyanúgy becsülhető OLS-sel
- Paraméterében nemlineáris modell (pl.  $\beta_0 x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2}$ ): felrúgja a lineáris struktúrát, így érdemileg más, csak linearizálás után, vagy NLS-sel becsülhető

Mi most az első esettel fogunk foglalkozni

Az itt látott „polinomiális regresszió” valóban nagyon gyakori módszer a flexibilitás növelésére

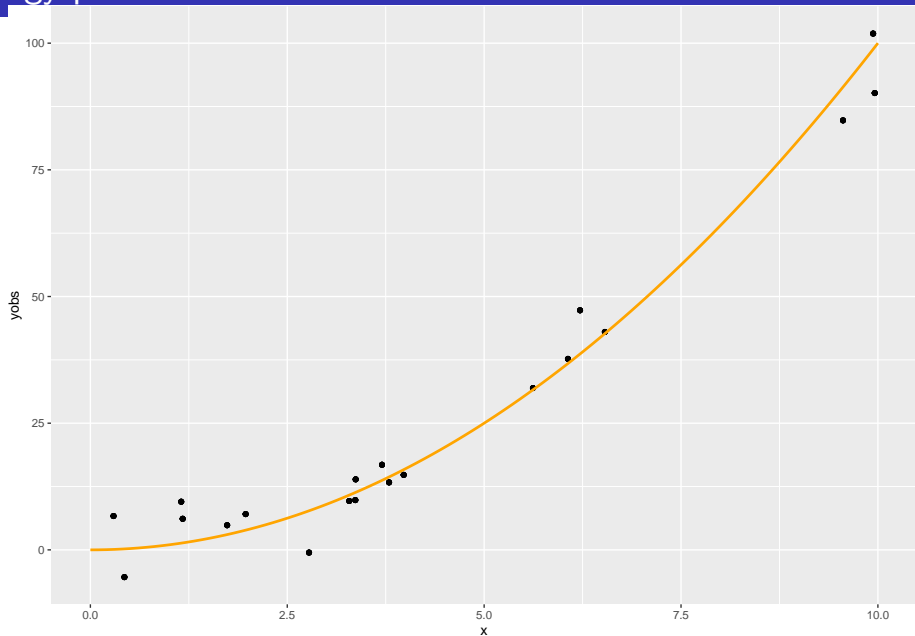
## Subsection 5

Egy példa

Tekintsünk most egy másik példát, egy zajos másodfokú függvényt, kevesebb pontból:



# Egy példa

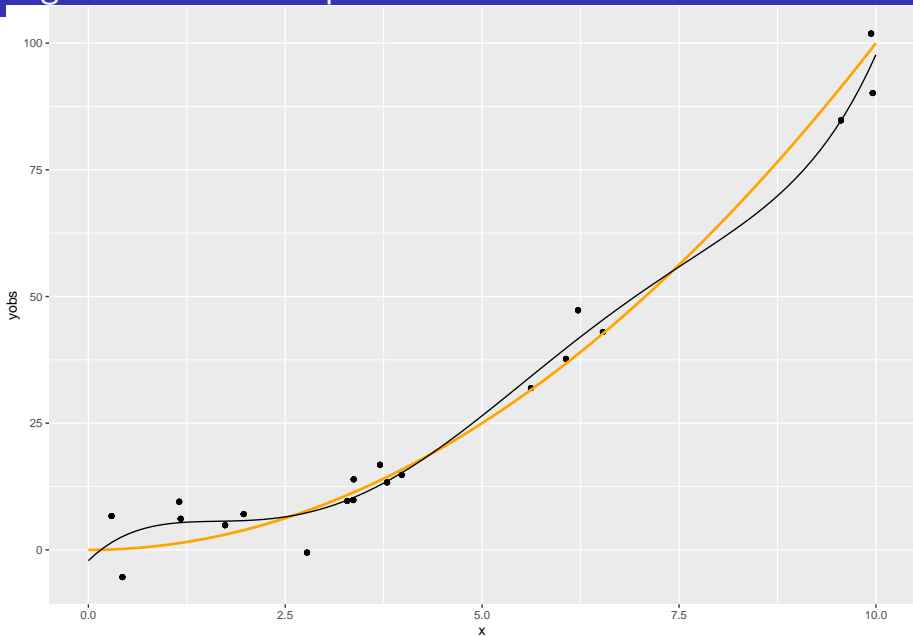


## Subsection 6

### Regresszió ötödfokú polinommal

# Regresszió ötödfokú polinommal 1.

# Regresszió ötödfokú polinommal



## Subsection 7

### Módosítás

Mondjuk, hogy nagyobb flexibilitásra vágyunk

- Például figyelembe akarjuk venni, hogy ez nem tűnik teljesen lineárisnak, vagy meg akarjuk ragadni a finomabb tendenciákat is

Emeljük a polinom fokszámát (ez nyilván növeli a flexibilitást, hiszen a kisebb fokszám nyilván speciális eset lesz), például 10-re

Szokás azt mondani, hogy a rang 5 illetve 10 (a polinom fokszáma, a becslendő paraméterek száma nyilván egyezik a modellmátrix rangjával, de ez a fogalom később, amikor nem is polinomunk van, akkor is használható)

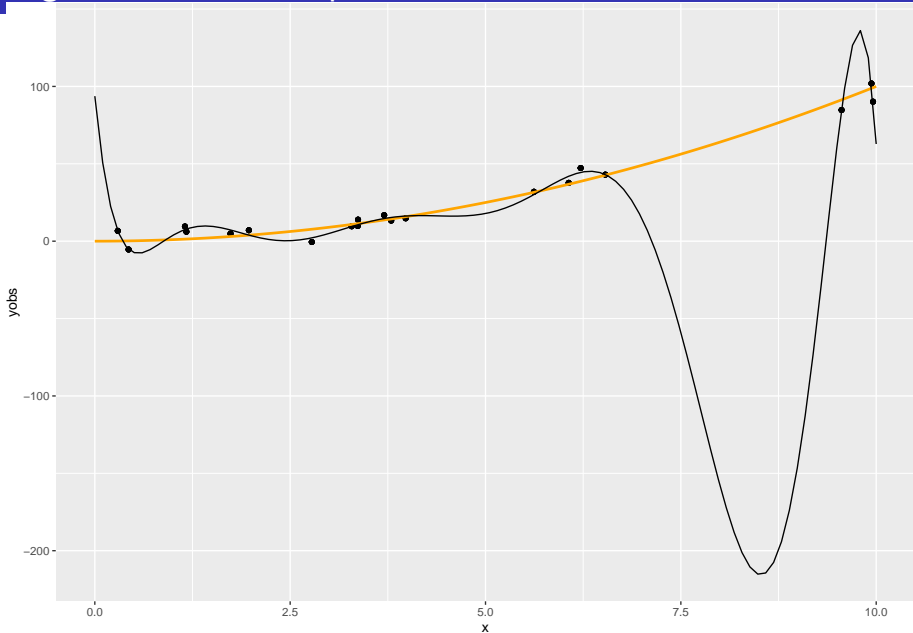
## Subsection 8

### Regresszió tizedfokú polinommal

# Regresszió tizedfokú polinommal 1.



# Regresszió tizedfokú polinommal



## Subsection 9

Mi a jelenség oka?

# Mi a jelenség oka? 1.

Szokás azt mondani, hogy *túlilleszkedés*, ami persze igaz is, de itt többről van szó

A polinomok elsősorban *lokálisan* tudnak jól közelíteni (a Taylor-sorfejtéses érvelés miatt), de nekünk arra lenne szükségünk, hogy *globálisan* jól viselkedő függvényformát találjunk

Pedig a polinomokat amúgy szeretjük, többek között azért is, mert szép sima görbét írnak le (matematikai értelemben véve a simaságot: végtelenszer folytonosan deriválhatóak,  $C^\infty$ -beliek)

Mi lehet akkor a megoldás?

## Subsection 10

Mi lehet a megoldás?

# Mi lehet a megoldás? 1.

Egy lehetséges megközelítés: „összerakjuk a globálisat több lokálisból”

Azaz szakaszokra bontjuk a teljes intervallumot, és mindegyiket *külön-külön* polinommal igyekszünk modellezni

Így próbáljuk kombinálni a két módszer előnyeit

Persze a szakaszosan definiált polinomok önmagában még nem jók: a szakaszhatárokon találkozniuk kell (e találkozóponthoz neve: **knot**, „csomópont”, a számukat  $q - 2$ -vel jelöljük, a pozíciójukat  $x_i^*$ -vel)

Sőt, ha a simasági tulajdonságokat is át akarjuk vinni, akkor az érintkezési pontokban a deriváltaknak (magasabbrendűeknek is) is egyezniük kell

Ha  $p$ -edfokú polinomokat használunk, akkor az első  $p - 1$  derivált – és persze a függvényérték – egyezését kell kikötnünk a knot-okban (és esetleg még valamit a végpontokra)

## Mi lehet a megoldás? 2.

Ez így már jó konstrukció lesz, a neve: **spline**

## Subsection 11

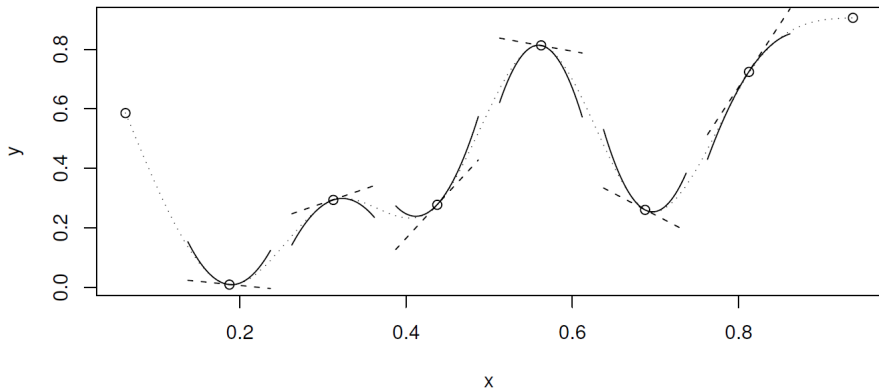
### Természetes köbös spline

# Természetes köbös spline 1.

(Azért köbös, mert harmadfokúak a polinomok, és azért természetes, mert azt kötöttük ki, hogy a végpontokban nulla legyen a második derivált)



## Természetes köbös spline 2.



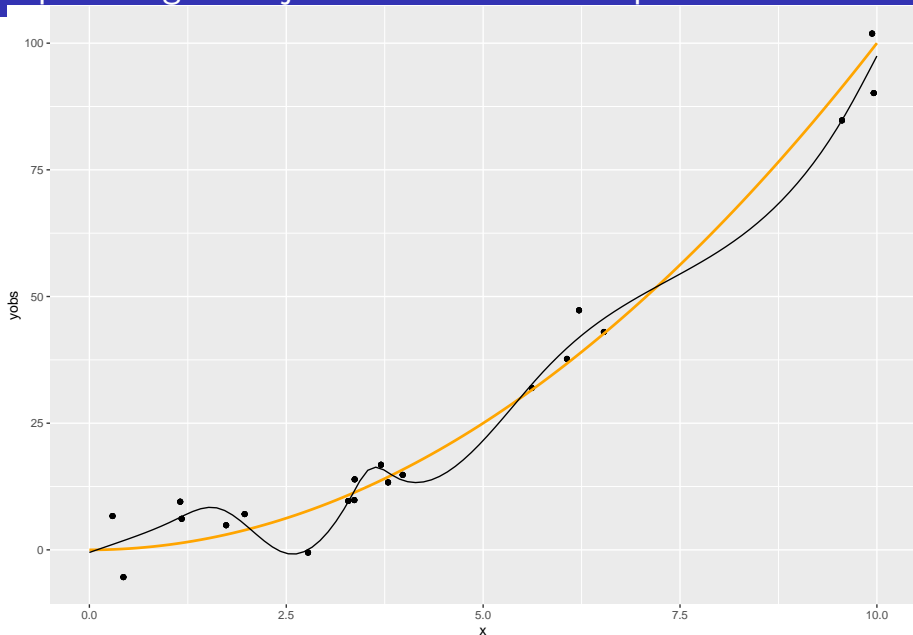
ábra 1: Természetes köbös spline

## Subsection 12

A példa regressziója természetes köbös spline-nal

# A példa regressziója természetes köbös spline-nal

# A példa regressziója természetes köbös spline-nal

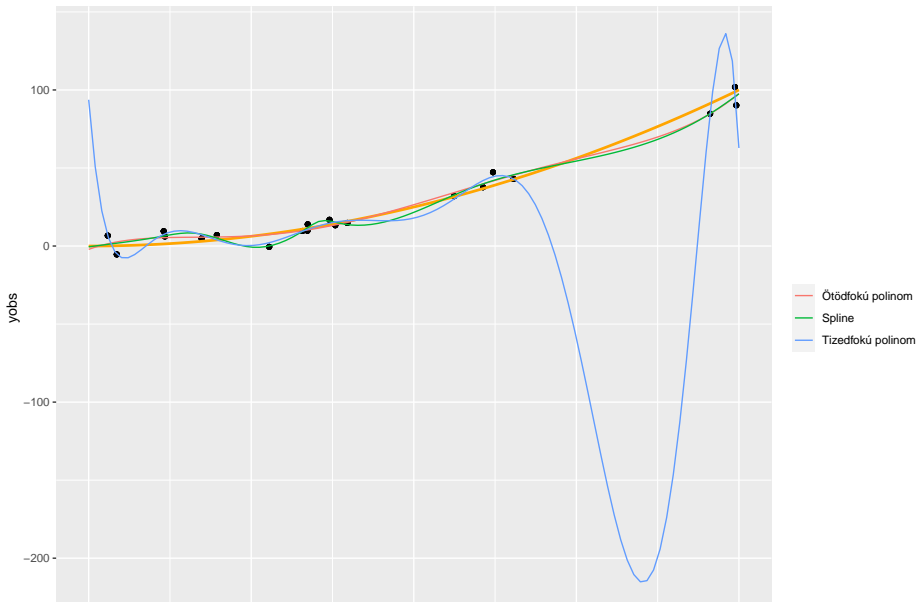


## Subsection 13

Mi az előbbiben a fantasztikus?

# Mi az előbbiben a fantasztikus?

# Mi az előbbiben a fantasztikus?



## Subsection 14

### A spline-regresszió ereje



# A spline-regresszió ereje

Nem csak az a jó, hogy szépen illeszkedik (tulajdonképpen még annál is jobban, mint a tizedfokú polinom, még ott is, ahol az jól illeszkedik amúgy)

...hanem, hogy – most már elárulhatom – *ez is ugyanúgy 10 rangú* mint a tizedfokú polinom!

Mégis: nyoma nincs túlilleszkedésnek

## 1 A LOESS simító

- Motiváció
- A LOESS simító alapgondolata
- Lokalitás
- Polinomiális regresszió
- Összerakva az építőelemeket: lokális polinomiális regressziókkal közelítés
- A paraméterek megválasztásának hatása: lokalitás
- A paraméterek megválasztásának hatása: a polinom fokszáma
- A paraméterek megválasztása

## 2 Spline fogalma, lineáris regressziótól a spline-regresszióig

# Tartalom 2.

- A regresszió
- Regresszió becslése mintából
- Paraméteres és nem-paraméteres regresszió
- A lineáris regresszió kibővítése, nemlinearitások
- Egy példa
- Regresszió ötödfokú polinommal
- Módosítás
- Regresszió tizedfokú polinommal
- Mi a jelenség oka?
- Mi lehet a megoldás?
- Természetes köbös spline

# Tartalom 3.

- A példa regressziója természetes köbös spline-nal
- Mi az előbbiben a fantasztikus?
- A spline-regresszió ereje

## 3 Spline-regresszió becslése bázisfüggvényekkel, penalizáltan

- Bázisfüggvényekkel felírás
- Modellmátrix előállítása
- Penalizálás
- Simítási paraméter meghatározása

## 4 Additív modellek

- Több magyarázó változó

## Subsection 1

### Bázisfüggvényekkel felírás

# Hogyan becsüljük meg a spline-regressziót?

Amiről nem beszéltünk eddig: ez mind szép, de hogyan tudunk ténylegesen is megbecsülni egy ilyen spline-regressziót?

Ehhez visszalépünk pár lépést, és bevezetünk egy első kicsit absztraktnak tűnő, de később rendkívül jó szolgálatot tevő megközelítést

Bár a célunk a spline-regresszió becslésének a megoldása, de a dolog – értelemszerűen – alkalmazható polinomiális regresszióra is (legfeljebb nincs sok értelme, mert az hagyományos módszerekkel is jól kézbentartható), úgyhogy először azon fogjuk illusztrálni

# Polinomok tere mint függvénytér

A másodfokú polinomok – mint függvények – összessége **függvényteret** alkot

Ez egy olyan *vektortér*, aminek az elemei a függvények, a skalárok a valós számok, a két művelet pedig

- Skalárral szorzás:  $(cf)(x) = cf(x)$
- Vektorok (azaz függvények) összeadása:  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ , tehát pontonkénti összeadás

Belátható, hogy ez teljesíti a vektortéraxiómákat, mert zárt a két műveletre (másodfokú polinomok összege másodfokú polinom és másodfokú polinom konstansszorosa másodfokú polinom), és a többi követelményt is teljesíti

Szuper, de mindez mire jó?

Ha vektortér, akkor létezik **bázisa**, azaz olyan vektorok halmaza, melyekből lineáris kombinációval minden vektor – egyértelműen – előállítható (bázis: lineárisan független generátorrendszer)

A bázis nem feltétlenül egyértelmű, de az elemszáma igen, ez a vektortér **dimenziója**

Például a másodfokú polinomok jó bázisa  $\{1, x, x^2\}$ , nyilvánvaló, hogy ebből tényleg minden  $ax^2 + bx + c$  másodfokú polinom előállítható lineáris kombinációval (triviálisan, a súlyok  $c$ ,  $b$  és  $a$ )

Függvényterek esetében a bázis elemeit **bázisfüggvényeknek** is szokás nevezni, az  $\{1, x, x^2\}$  tehát a másodfokú polinomok bázisfüggvényei



# A polinomok terének dimenziója

Mivel mutattunk egy konkrét bázist, így a dimenzió nyilván 3, de a későbbiek szempontjából jól jön egy másik módszer is

Azzal, hogy az  $ax^2 + bx + c$  polinomot megfeleltettük az  $(a, b, c)$  valós számhármashoz, a polinomok tere és a valós számhármastér (az  $\mathbb{R}^3$ ) között létesítettünk egy izomorfizmust (a leképezés művelettartó és kölcsönösen egyértelmű)

Emiatt a polinomok terének ugyanaz a dimenziója, mint az  $\mathbb{R}^3$ -nak, ami viszont természetesen 3

Ez a módszer általában is használható: a dimenzió a felíráshoz szükséges paraméterek száma (feltéve, hogy ezek valós számok, valamint mindegyikhez tartozik egy polinom és viszont)

Mindez a spline-okra is igaz!

Érthető: minden pontban két polinomot adunk össze, vagy polinomot szorzunk skalárral, az eredmény polinom (már láttuk) – így tud spline adott pontja lenni!

Azaz: spline-okat is elő tudunk állítani bázisfüggvények lineáris kombinációjaként!

# Hány dimenziós a spline-ok tere? 1.

Mielőtt megkeressük a spline-ok terének egy bázisát (azaz a konkrét bázisfüggvényeket), tisztázni kellene, hogy hány bázisfüggvényt keresünk egyáltalán, azaz hány dimenziós a spline-ok függvénytere

Naiv ötlet (köbös spline-okat használva példaként): van  $q - 1$  szakasz ( $q - 2$  knot, ami meghatároz  $q - 3$  szakaszt meg a két vége; úgy is felfogható, hogy a két végével együtt  $q$  knot van, ami meghatároz  $q - 1$  szakaszt) és mindegyiken egy harmadfokú polinom (aminek 4 paramétere van), akkor az  $4q - 4$  paraméter

Igen ám, de vannak megkötések: a knotokban a függvényérték és az első két derivált egyezik

Minden megkötés minden pontban 1 egyenlet, az 1-gyel csökkenti a paraméterek számát: van  $q - 2$  knot és 3 megkötés, az  $3q - 6$  csökkentés, marad  $q + 2$  paraméter

## Hány dimenziós a spline-ok tere? 2.

De mivel természetes, így a végpontokban is van 1-1 megkötés: marad  $q$  paraméter, azaz  $q$  dimenziós a természetes köbös spline-ok tere (ezért neveztük a knot-ok számát  $q - 2$ -nek!)

# Mik a spline-ok bázisfüggvényei? 1.

Természetesen itt is igaz, hogy adott, rögzített spline-osztályra (pl. természetes köbös) is végtelen sok bázis van

Köztük célszerűség alapján választhatunk

A részletek nélkül két példa:

- $b_1(x) = 1, b_2(x) = x, b_i(x) = |x - x_{i-2}^*|^3 \ (i = 3, 4, \dots, q)$
- $b_1(x) = 1, b_2(x) = x, b_i(x) = R(x, x_{i-2}^*) \ (i = 3, 4, \dots, q)$ , ahol  $R$  egy nevezetes – elég hosszú, bár nem túl bonyolult – függvény (hamar látni fogjuk, hogy ez miért előnyös), annyi fontos, hogy  $x$  a  $[0, 1]$  intervallumban essen (egyszerű átskálázssal mindig elérhető)

Most már csak a regresszió kivitelezését kell kitalálnunk

## Subsection 2

### Modellmátrix előállítás

A bázisfüggvények használatának két hatalmas előnye van:

- A probléma visszavezethető velük a sima lineáris regresszióra
- Sőt, ehhez a modellmátrix is könnyen előállítható

# Bázisfüggvények használata másodfokú polinomnál

Legyen  $b_1(x) = 1$ ,  $b_2(x) = x$  és  $b_3(x) = x^2$  a bázisunk

Az eredeti regresszió:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 x_i^2 + \varepsilon_i$$

Átírva bázisokra (lényegében transzformált magyarázó változók):

$$y_i = \beta_1 b_1(x_i) + \beta_2 b_2(x_i) + \beta_3 b_3(x_i) + \varepsilon_i$$

Ez már tiszta lineáris regresszió



# Bázisfüggvények használatának előnye

Ez úgy tűnik, hogy csak egy nagyon nyakatekert felírás egy amúgy egyszerű problémára

Valójában viszont egy elképesztően erőteljes dolgot nyertünk: *minden* olyan függvény, legyen bármilyen komplikált is, ami felírható bázisfüggvényekkel (azaz az osztálya függvényosztályt alkot), az berakható egy *kutyaközönséges* regresszióba (azaz lehet ő a regressziós függvény) a fenti transzformációval, tehát

$$\sum_{i=1}^q \beta_i b_i(x)$$

alakban

(Azaz minden függvény, ami egy függvénytér eleme)

# A bázisfüggvények ereje, 1. felvonás

Még egyszer: *minden* függvény, ami felírható bázisfüggvényekkel

Azaz: *minden*

...és az összesnek *pontosan ugyanúgy* az lesz az alakja, hogy

$$\sum_{i=1}^q \beta_i b_i(x),$$

egyedül a bázisfüggvényt kell az adott esetnek megfelelően megválasztani

Tehát a spline is mehet ugyanígy (csak megfelelő  $b_i$ -kkel)!

És ha ez az alak megvan, akkor onnantól természetesen *sima lineáris regresszióval* elintézhető

## A bázisfüggvények ereje, 2. felvonás

Ráadásul az  $\mathbf{X}$  modellmátrix (design mátrix) előállítás is nagyon könnyű lesz: az  $i$ -edik sora

$$[b_1(x_i), b_2(x_i), \dots, b_q(x_i)]$$

Így maga a mátrix az  $\mathbf{x}$  és az  $[1, 2, \dots, q]$  vektor *külső szorzata* (tenzorszorzata), ha a művelet alatt az oszlopban szereplő érték által meghatározott bázisfüggvény sorbeli elemre történő alkalmazását értjük, tehát  $i \otimes j := b_j(x_i)$ , és így

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & q \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} b_1(x_1) & b_2(x_1) & \dots & b_q(x_1) \\ b_1(x_2) & b_2(x_2) & \dots & b_q(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1(x_n) & b_2(x_n) & \dots & b_q(x_n) \end{bmatrix}$$

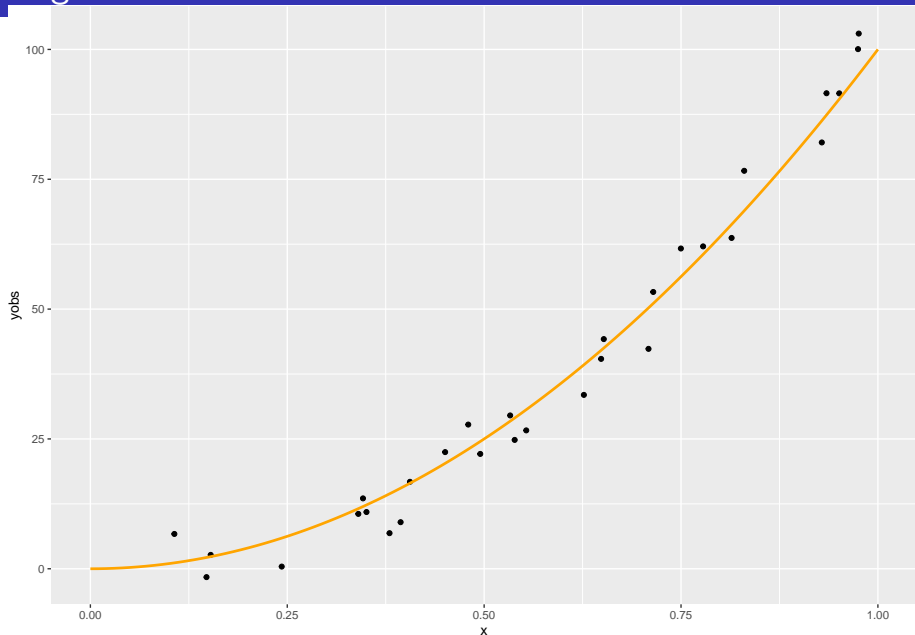
Így, a teljes modellmátrix egy lépésben megkapható...

... majd közvetlenül rakható is bele a sima lineáris regresszióba (ld. 1. előny):

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

# Megvalósítás R alatt 1.

## Megvalósítás R alatt 2.



## Subsection 3

### Penalizálás

# Dimenzió meghatározása 1.

A  $q$  dimenzió tehát az illeszkedés szabadságát határozza meg

Valahogy ezt is meg kellene határozni

Jön a fő kérdéskör: a túlilleszkedés elleni védekezés

Milyen legyen a „simítás foka”?



# Simítás fokának meghatározása 1.

Tehát  $q$ -t kellene valahogy jól belőni

Egyszerű *modellszelekció*?

- Vagy nem beágyazott modellek szelekciója, vagy nem ekvidisztáns knot-ok, egyik sem túl szerencsés

Alternatív ötlet:  $q$  legyen inkább rögzített (elég nagy értéken, kicsit a várható fölé löve), de a függvényformát nem engedjük teljesen szabadon alakulni

Hogyan? Büntetjük a túl „zizegős” függvényt!

Ez épp a **penalizált regresszió** alapötlete

És ami rendkívül fontos: így már jellemzően sem  $q$  pontos megválasztása, sem a knot-ok pontos helye nem bír nagy jelentőséggel (választhatjuk például egyenletesen)!

# Penalizált regresszió 1.

Klasszikus megoldás: a második derivált jelzi adott pontban a „zizegősséget”, ezt kiintegrálva kapunk egy összesített mértéket az egész függvényre

Valamilyen súllyal ezt vegyük figyelembe:

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta\|^2 + \lambda \int_0^1 [f''(x)]^2 dx$$

A  $\lambda$  a *simítási paraméter*, ez határozza meg a trade-off-ot a jó illeszkedés és a simaság között

- $\lambda = 0$ : penalizálatlan becslés,  $\lambda \rightarrow \infty$ : egyenes regressziós függvény

# A simasági büntetőtag meghatározása

A regressziós függvény alakja:  $f(x) = \sum_{i=1}^q \beta_i b_i(x)$

Kétszer deriválva:  $f''(x) = \sum_{i=1}^q \beta_i b_i''(x)$

Négyzetre emelve:  $[f''(x)]^2 = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \beta_i b_i''(x) b_j''(x) \beta_j$

Kiintegrálva:  $\int_0^1 [f''(x)]^2 dx = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \beta_i \left( \int_0^1 b_i''(x) b_j''(x) dx \right) \beta_j$

De hát ez épp egy *kvadratikus alak*!  $(\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q x_i a_{ij} x_j = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x})$

Legyen  $S_{ij} = \int_0^1 b_i''(x) b_j''(x) dx$  és  $\mathbf{S}$  az ezekből alkotott mátrix, akkor tehát a simítási büntetőtag:

$$\lambda \beta^T \mathbf{S} \beta$$

Az előbb definiált  $R$ -rel  $\mathbf{S}$  alakja nagyon egyszerű lesz:

$S_{i+2,j+2} = R(x_i^*, x_j^*)$ , az első két oszlop és sor pedig csupa nulla

# Megvalósítás R alatt

# A simítási büntetőtag beépítése a regressziós célfüggvénybe

Kényelmes lenne, ha  $\|\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta\|^2 + \lambda\beta^T \mathbf{S}\beta$  helyett írhatnánk egyetlen normát célfüggvényként

Ez nem nehéz, ha a második tagot át tudjuk normává alakítani, hiszen (innentől némi blokkmátrix műveletekre szükség lesz)

$$\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \right\|^2$$

Legyen  $\mathbf{B}$  olyan, hogy  $\mathbf{B}^T \mathbf{B} = \mathbf{S}$  (pl. spektrális dekompozícióval, vagy Cholesky-dekompozícióval megtalálható a mátrix ilyen „négyzetgyöke”), ekkor

$$\lambda\beta^T \mathbf{S}\beta = \lambda\beta^T \mathbf{B}^T \mathbf{B}\beta = \lambda (\mathbf{B}\beta)^T \mathbf{B}\beta = \left( \sqrt{\lambda} \mathbf{B}\beta \right)^T \left( \sqrt{\lambda} \mathbf{B}\beta \right)$$

# A simítási büntetőtag beépítése a regressziós célfüggvénybe

Ezzel meg is vagyunk, hiszen a norma egyszerűen  $\|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{a}^T \mathbf{a}$ , így

$$\lambda \beta^T \mathbf{S} \beta = \left\| \sqrt{\lambda} \mathbf{B} \beta \right\|^2$$

ahonnan

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta\|^2 + \lambda \beta^T \mathbf{S} \beta = \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta\|^2 + \left\| \sqrt{\lambda} \mathbf{B} \beta \right\|^2$$

és így, az előzőek szerint

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta\|^2 + \left\| \sqrt{\lambda} \mathbf{B} \beta \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{y} - \mathbf{X}\beta \\ \sqrt{\lambda} \mathbf{B} \beta \end{pmatrix} \right\|^2$$

Jó lenne  $\beta$ -t kiemelni; ez nem is túl nehéz, hiszen  $\mathbf{a}$  és  $-\mathbf{a}$  normája ugyanaz:

$$\left\| \begin{pmatrix} \mathbf{y} - \mathbf{X}\beta \\ \sqrt{\lambda} \mathbf{B} \beta \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \sqrt{\lambda} \mathbf{B} \end{pmatrix} \beta \right\|^2$$

# Regresszió megoldása a penalizálással 1.

Innentől a regresszió játszani könnyedséggel (értsd: a szokványos, nem is penalizált eszköztárral) megoldható, csak  $\mathbf{X}$  szerepét  $\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \sqrt{\lambda}\mathbf{B} \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{y}$  szerepét  $\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$  játssza

Így az „ $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ ” épp  $\mathbf{X}^T\mathbf{X} + \lambda\mathbf{B}^T\mathbf{B} = \mathbf{X}^T\mathbf{X} + \lambda\mathbf{S}$  lesz

Az „ $\mathbf{X}^T\mathbf{y}$ ” pedig  $\mathbf{X}^T\mathbf{y}$  (a kiegészített eredményváltozóban lévő nullák épp a magyarázó változók kiegészítését ütik ki)

Így az OLS megoldás:

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X} + \lambda\mathbf{S})^{-1} \mathbf{X}^T\mathbf{y}$$

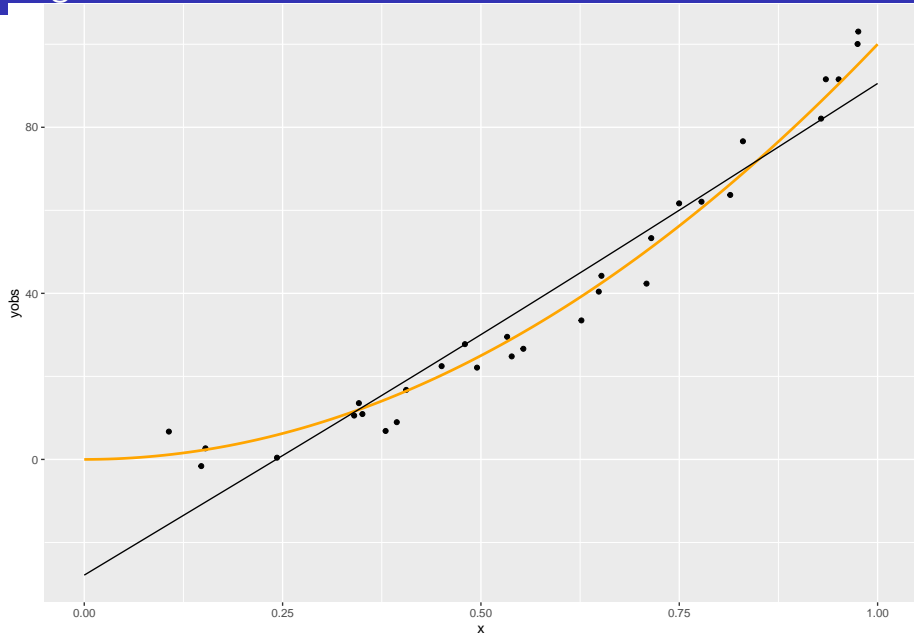
## Regresszió megoldása a penalizálással 2.

(Persze a gyakorlatban ennek közvetlen számítása helyett célszerűbb az augmentált eredmény- és magyarázóváltozókat berakni egy hatékonyabb lineáris regressziót megoldó módszerbe)



# Megvalósítás R alatt

# Megvalósítás R alatt



## Subsection 4

### Simítási paraméter meghatározása

# A simítási paraméter meghatározása

Kérdés még a  $\lambda$  értéke

Sima OLS-jellegű eljárással, tehát a reziduális négyzetösszeg minimalizálást tűzve ki célul nyilván nem határozható meg (hiszen az mindig 0-t adna)

Épp az a lényeg, hogy a túlilleszkedésre is tekintettel legyünk

Ötlet: keresztvalidáció

Mindig egy pontot hagyunk ki, és így számolunk hibát: OCV

(Szokták egy-kihagyásos keresztvalidációnak, LOOCV-nek is nevezni)

Tehát:

$$E_{OCV} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \hat{f}_i^{[-i]} - y_i \right)^2$$

Szerencsére nem kell ténylegesen  $n$ -szer lefuttatni a regressziót mert belátható, hogy

$$E_{OCV} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( y_i - \hat{f}_i \right)^2 / (1 - A_{ii})^2,$$

ahol  $\mathbf{A}$  az influence mátrix

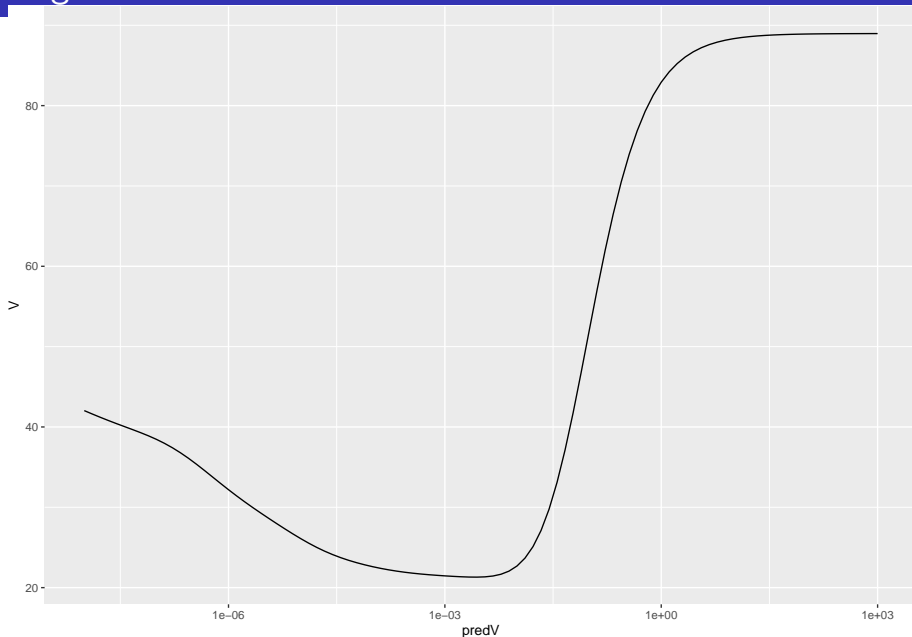
Ha az  $A_{ii}$ -ket az átlagukkal helyettesítjük, akkor az általánosított keresztvalidációhoz jutunk (GCV)

Tehát:

$$E_{GCV} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( y_i - \hat{f}_i \right)^2 / [\text{tr}(\mathbf{I} - \mathbf{A})]^2$$

# Megvalósítás R alatt

# Megvalósítás R alatt





## 1 A LOESS simító

- Motiváció
- A LOESS simító alapgondolata
- Lokalitás
- Polinomiális regresszió
- Összerakva az építőelemeket: lokális polinomiális regressziókkal közelítés
- A paraméterek megválasztásának hatása: lokalitás
- A paraméterek megválasztásának hatása: a polinom fokszáma
- A paraméterek megválasztása

## 2 Spline fogalma, lineáris regressziótól a spline-regresszióig

- A regresszió
- Regresszió becslése mintából
- Paraméteres és nem-paraméteres regresszió
- A lineáris regresszió kibővítése, nemlinearitások
- Egy példa
- Regresszió ötödfokú polinommal
- Módosítás
- Regresszió tizedfokú polinommal
- Mi a jelenség oka?
- Mi lehet a megoldás?
- Természetes köbös spline

# Tartalom

- A példa regressziója természetes köbös spline-nal
- Mi az előbbiben a fantasztikus?
- A spline-regresszió ereje

## 3 Spline-regresszió becslése bázisfüggvényekkel, penalizáltan

- Bázisfüggvényekkel felírás
- Modellmátrix előállítás
- Penalizálás
- Simítási paraméter meghatározása

## 4 Additív modellek

- Több magyarázó változó

## Subsection 1

### Több magyarázó változó

Eddig egy magyarázó változó esetével foglalkoztunk