A valószínűségszámítás és a statisztika alapvonalai

Ferenci Tamás, tamas.ferenci@medstat.hu

2019. december 7.

Tartalom

1. A valószínűségszámítás röviden
2. A következtető statisztika alapjai
3. A bizonytalanság jellemzése
4. Egy alapvető kutatásmódszertani kérdés

Tartalom

1 A valószínűségszámítás röviden

2 A következtető statisztika alapjai

3 A bizonytalanság jellemzése

4 Egy alapvető kutatásmódszertani kérdés

Előszó

- A valószínűségszámítást matematikai formalizmus nélkül fogjuk tárgyalni
- A formalizálás kell a mélyebb tárgyaláshoz, azonban sok hallgató (orvosok, szociológusok stb.) számára ezek a részek úgysem fontosak
- Viszont a matematikai formalizmus azt is megnehezíti, hogy az alapkérdéseket megértsék
- Minden visszajelzést örömmel veszek a tamas.ferenci@medstat.hu email-címen

Tartalom

1. A valószínűségszámítás röviden

2. A következtető statisztika alapjai

3. A bizonytalanság jellemzése

4. Egy alapvető kutatásmódszertani kérdés

A valószínűségszámítás röviden

- A valószínűségszámítás bizonyos értelemben a statisztika „alaptudománya”
- Éppen ezért a statisztika megértéséhez is fontos érteni az alapjait (és önmagában is érdekes!)

Mi az, hogy véletlen?

- A valószínűségszámítás alapfogalma a **véletlen kísérlet**: adott körülmények között akárhányszor megfigyelhető, de a kimenete nem mondható meg biztosan (csak az, hogy egyáltalán milyen kimenetek lehetségesek)
- Valójában nagyon sokszor nem a szó szokásos értelemben vett „kísérletről" van szó és az sem nyilvánvaló, hogy milyen értelemben figyelhető meg akárhányszor (pl. a beteg meggyógyul-e)
- Az is döntés kérdése, hogy mi véletlen, aminek „nem mondható meg biztosan" a kimenetet (pl. a kockadobás az? elvileg nem!) – közelítés kérdése

A valószínűségszámítás alapfogalmai

- A véletlen kísérlet lehetséges kimeneteleit **kimenetelnek** nevezzük (pl. kockadobásnál az, hogy ⚁)
- Az összes lehetséges kimenetet egybefogjuk egy halmazba (kockadobásnál {⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅}), ennek neve **eseménytér**

- Az eseménytér lehet véges (kockadobás) vagy végtelen, ez utóbbi esetben lehet megszámlálhatóan végtelen (hányszor járt egy véletlenszerűen választott magyar lakos külföldön) vagy nem megszámlálhatóan végtelen (mennyi a testtömege)
- A véges vagy legfeljebb megszámlálhatóan végtelen eseménytereket együtt **diszkrét** eseménytérnek, a nem megszámlálhatóan végtelent **folytonos** eseménytérnek nevezzük

- Valószínűségeket nem a kimenethez fogunk rendelni, mert szeretnénk bonyolultabb dolgokhoz (pl. „párosat dobtunk”) is valószínűségeket rendelni

A valószínűségszámítás alapfogalmai 2.

- Kimenetekből egyet vagy többet bepakolunk egy halmazba (pl. {⚁, ⚃, ⚅}), ezt **eseménynek** hívjuk, és úgy definiáljuk, hogy bekövetkezik, ha olyan kimenetel következik be, ami benne van ebben a halmazban
- (Lehet egyelemű halmaz is)
- Biztos esemény: az egész eseménytér, lehetetlen esemény: üres halmaz (gondoljuk végig, teljesen logikus elnevezések)

- Ilyen módon események „verbális" műveleteinek megfeleltethetünk halmaz-műveleteket
- Pl. „4-nél nem nagyobb és páros számot dobunk" a „4-nél nem nagyobb számot dobunk" és a „páros számot dobunk" halmazainak a metszete: az „és"-nek megfelel a metszet
- Hasonlóan a „vagy"-nak az unió

- Miért nem rendelünk egész egyszerűen az összes lehetséges eseményhez valószínűséget?

A valószínűségszámítás alapfogalmai 3.

- Diszkrét eseménytérnél működne, de folytonosnál nem, ott csúnya dolgok történnének, ha ezt megpróbálnánk
- Éppen ezért bevezetünk egy halmazt, mely azokat az eseményeket tartalmazza, amelyekhez egyáltalán szeretnénk valószínűséget rendelni, ezt hívjuk a **megfigyelhető események** halmazának

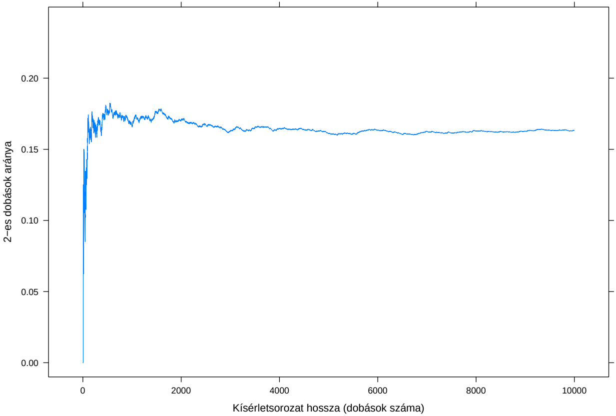
A valószínűség bevezetése

- A **valószínűség** egy függvény, amely a megfigyelhető események mindegyikéhez hozzárendel egy valós számot (pl. {⚂, ⚃, ⚅} $\mapsto$ 0,3, ekkor 0,3 valószínűséget rendeltünk ehhez az eseményhez, köznyelvileg ezt 30%-nak mondjuk)
- Jele $\mathbb{P}$, előbbi példánkban $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{$⚂, ⚃, ⚅$\}) = 0{,}3$
- De nem akárhogy rendeljük hozzá: a valószínűségek nemnegatívak, a biztos esemény valószínűsége 1, és kizáró események uniójának a valószínűsége a valószínűségeik összege (ez utóbbi is jól érthető, ha a valószínűségre mint pacák területére gondolunk egy festővásznon)
- Ezek axiómák (nem levezethetőek valamiből)

A valószínűség interpretációi

- Valószínűség interpretácója: a fenti matematikai konstrukciónak mi köze van valós jelenségekhez
- Legfontosabb interpretáció: elkezdünk kockát dobálgatni, és számoljuk a 2-es dobások relatív gyakoriságát
- Azt fogjuk tapasztalni, hogy ez konvergál valamihez – ez a valami legyen a valószínűség!
- Ez a valószínűség **frekventista interpretációja**
- Azért bőven van további interpretációknak is hely (pl. „30% a valószínűsége annak, hogy holnap esni fog az eső”)

A valószínűség interpretációi 2.

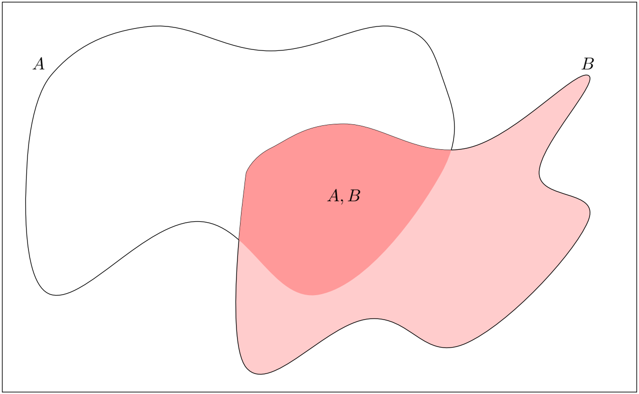


A feltételes valószínűség

- Alapkérdés: hogy tudunk valószínűségbe valamilyen információt beépíteni
- *Ha* tudjuk, hogy valami megtörtént, az hogyan módosítja a valószínűséget
- Pl. *feltéve*, hogy legfeljebb 3-ast dobtunk, mennyi annak a valószínűsége, hogy párosat dobtunk?

- Arra szűkítve a világunkat, ahol a „legfeljebb 3-at dobtunk” megtörtént, ezen a világon belül mekkora a páros dobás valószínűsége?
- Nagyon jól megérezhető a megoldás, ha a pacás analógiára gondolunk: az egyik pacán *belül* mekkora a másik paca területe?

A feltételes valószínűség 2.



- Így a **feltételes valószínűség** definíciója:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A, B)}{\mathbb{P}(B)},$$

A feltételes valószínűség 3.

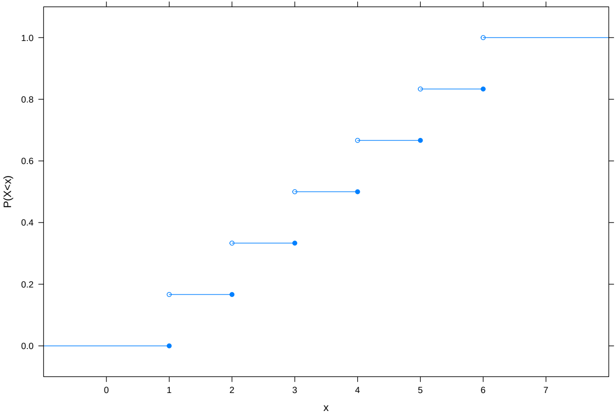
- Ismert információ (B) beépítésével „frissítettük” A valószínűségét
- $\mathbb{P}(A)$ a valószínűség a plusz-információ megismerése előtt, ezért neve **prior valószínűség**, $\mathbb{P}(A \mid B)$ a valószínűség a plusz-információ megismerése után, ezért neve **poszterior valószínűség**

- Átrendezve: $\mathbb{P}(A, B) = \mathbb{P}(A \mid B) \cdot \mathbb{P}(B)$
- „Együttes egyenlő feltételes, szorozva a feltétel valószínűségével”

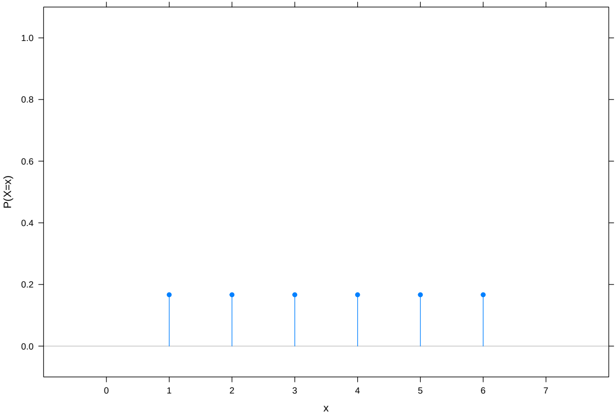
- Ha $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$: B ismerete nem változtatja meg A valószínűségét, ilyenkor azt mondjuk, hogy ezek **független** események
- Szimmetrikus: ha ez fennáll, akkor $\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$ is
- És mindezek egyenértékűek azzal, hogy $\mathbb{P}(A, B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

A Bayes-tétel

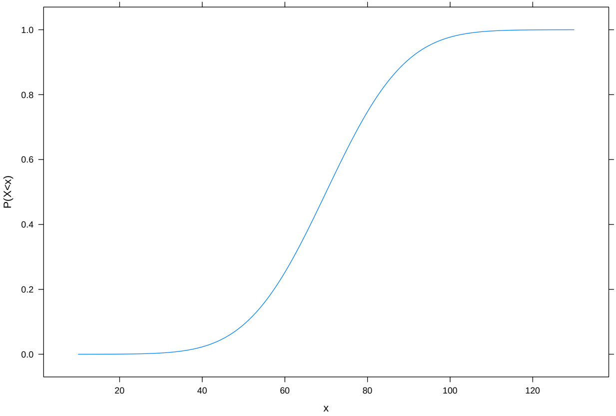
A valószínűségi változó



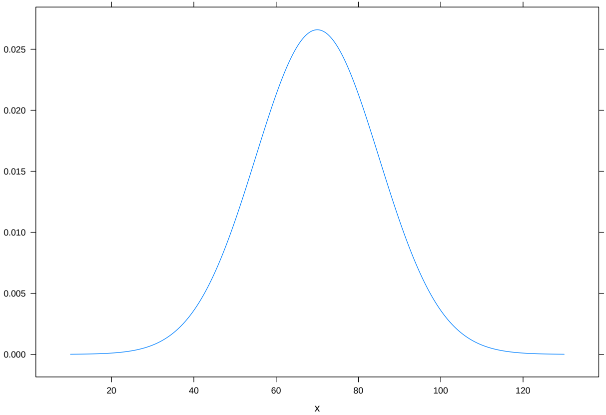
A valószínűségi változó 2.



A valószínűségi változó 3.



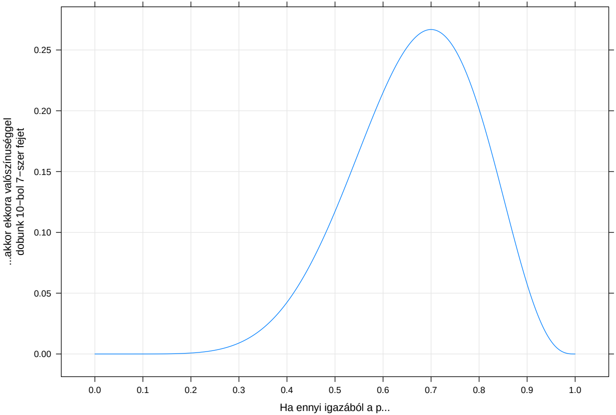
A valószínűségi változó 4.



Tartalom

1. A valószínűségszámítás röviden
2. A következtető statisztika alapjai
3. A bizonytalanság jellemzése
4. Egy alapvető kutatásmódszertani kérdés

Egy rávezető gyakorlat



Egy becslőfüggvény felé

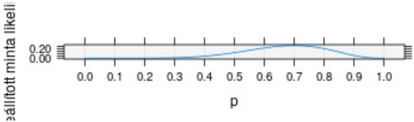
Likelihood különböző minták mellett

Dobások száma:

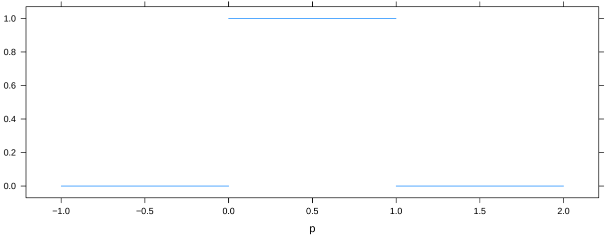
1 10 100

Fejek száma:

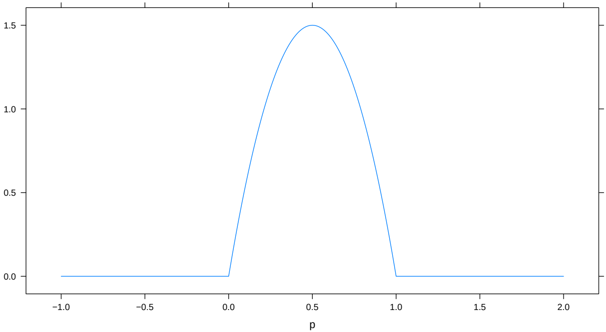
0 7 10



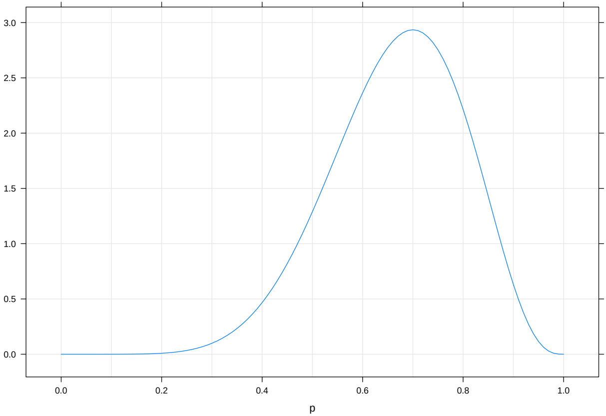
A bayes-i probléma



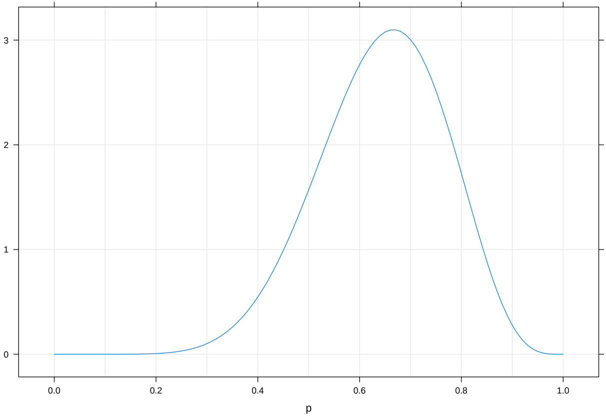
A bayes-i probléma 2.



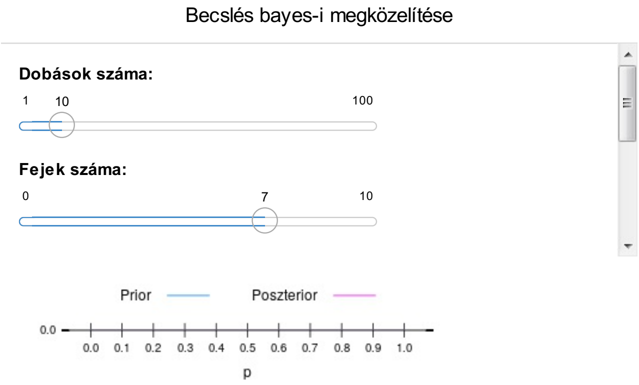
A bayes-i probléma 3.



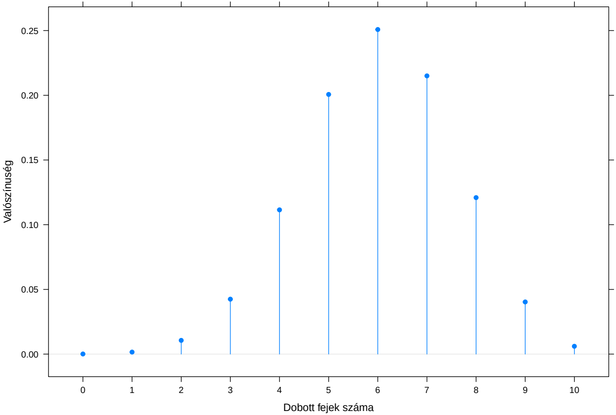
A bayes-i probléma 4.



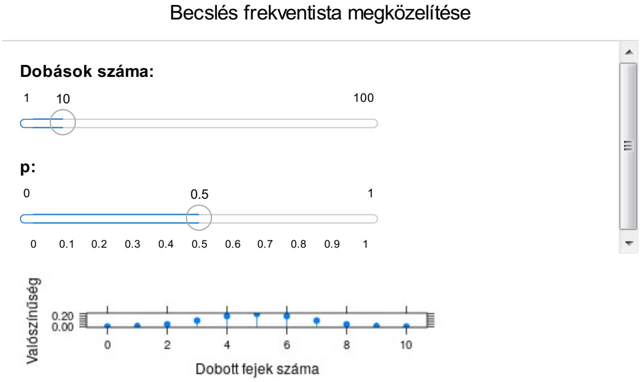
A bayes-i probléma 5.



A frekventista statisztika építménye



A frekventista statisztika építménye 2.



Tartalom

1 A valószínűségszámítás röviden

2 A következtető statisztika alapjai

3 A bizonytalanság jellemzése

4 Egy alapvető kutatásmódszertani kérdés

Intervallumbecslés

Hipotézisvizsgálat

Tartalom

1. A valószínűségszámítás röviden

2. A következtető statisztika alapjai

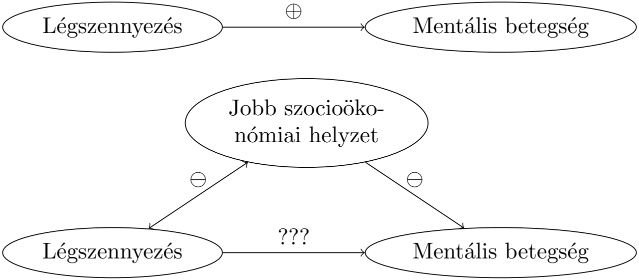
3. A bizonytalanság jellemzése

4. Egy alapvető kutatásmódszertani kérdés

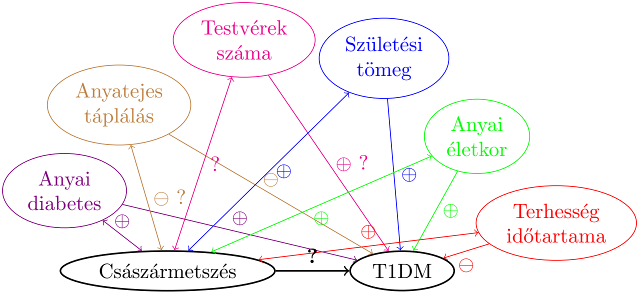
Az orvosi megismerés alapkérdései

Az okozatiság nyomában

A confounding problémája



A confounding problémája 2.



Zavaró változóktól a megzavart olvasókig

Egy aranyérmes megoldás

Megfigyelés és kísérlet

A jó, a rossz, és a közepesnél némileg gyengébben jó