József Attila egy matematikai kérdése

Ferenci Tamás, ferenci.tamas@nik.uni-obuda.hu

2020. október 7.

„Földtől eloldja az eget
a hajnal s tiszta, lágy szavára
a bogarak, a gyerekek
kipörögnek a napvilágra;
a levegőben semmi pára,
a csilló könnyűség lebeg!
Az éjjel rászálltak a fákra,
mint kis lepkék, a levelek."

(József Attila: Eszmélet I.)

Személyes motiváció (bevezetés helyett)

I. Majdnem tizenöt évvel ezelőtt hallgattam néhai Rózsa Pál professzor mátrixelmélet kurzusát. Könyvének (*Bevezetés a mátrixelméletbe* [1]) legelső hivatkozására máig emlékszem, Beke Manó: *Determinánsok*, 1915 [2]. Fennakadtam rajta, hogy egyrészt komolyan, valaki egy egész könyvet írt csak a determinánsokról, másrészt hogy egy 2000 utáni szakkönyv egy 1915-ösre hivatkozik, azért ez sem mindennapi, harmadrészt, hogy milyen vicces neve van a szerzőnek.

II. Nemrégiben olvastam Tverdota György irodalomtörténész *Tizenkét vers* című könyvét [3], mely József Attila *Eszmélet* költeményét vizsgálja. Az *Eszmélet* láthatóan az egyik legizgalmasabb verse József Attila életművének – és mellesleg az egész 20. századi magyar lírának – abban az értelemben feltétlenül, hogy párját ritkító módon több könyvet, könyvhosszúságú tanulmányt, és megszámlálhatatlan sok cikket írtak erről az egyetlen versről, a legkülönfélébb nézőpontokból elemezve, marxizmustól a pszichoanalízisen át a posztmodernig. Tverdota könyvének alapállítása, melyre a címe is utal, hogy az *Eszméletet* valójában nem egységes költeményként, hanem verseiklusként lehet (és célszerű) elemezni. A *Tizenkét vers* kapcsán a legérdekesebb, hogy bár én minden vagyok, csak irodalmár nem, mégis – miközben egyes részei kimondottan durva irodalmi részletkérdésekbe merülnek – számomra is kifejezetten olvasmányos, végig érdekes, és egyáltalán: tanulságos könyv volt.

III. Közel nincs olyan olvasottságom a szépirodalomban, hogy egyáltalán merjek olyat mondani, hogy ki a „kedvenc” költőm, de tény ami tény, a *Tiszta szívvel* az egyetlen vers, amit fejből tudok (akárhányat is próbált nekem memoriterként a közoktatás megtanítani). Megmondom őszintén, még a *Himnuszt* sem biztos, hogy elejétől végéig el tudnám mondani bármikor, de a „Nincsen apám versemet” igen.

Kérdésfelvetés

Tverdota a könyvének elején, az *Eszmélet* keletkezésének releváns életrajzi hátterét bemutatva, tesz egy apró megjegyzést: „*Olyanfajta barátság fűzhette össze József Attilát és Pákozdyt, amelyben az utóbbi elismeri társa költő és szellemi felsőbbségét. 1934. évi tavaszi együttlétüknek érdekes dokumentuma az 1934. június 20-án kelt, Beke Manó matematikusnak címzett, el nem küldött levél, amelyben a két barát egy vitatott matematikai kérdésben szeretné döntőbírónak felkérni az ismert szakembert.*” [3, pp. 26-27.].

Az olvasó most értheti meg, hogy mi szükség volt a hosszú, személyes bevezetőre: így válik azt hiszem azonnal világossá, hogy miért döbbentem meg a fenti sorokat olvasva (valószínűleg sokkal jobban, mint Tverdota könyvének bármely olvasója tette valaha is ennél a bekezdésnél).

De vajon mi lehet ez a kérdés? Az előbbiek alapján az is érthető, hogy miért kezdett azonnal nagyon furdalni a kíváncsiság, de ezt Tverdota György könyve sajnos nem közli. Szerencsére sikerült utánajárnom: az 1. ábra József Attila és Pákozdy Ferenc ominózus levelének facsimile oldala.

Noha a levél jól olvasható, a biztonság kedvéért közlöm a szöveghű átiratát is:

Hódmezővásárhely, 1934. június 20.

Méltóságos Uram!

Egy társaságban a következő kérdés merült föl:

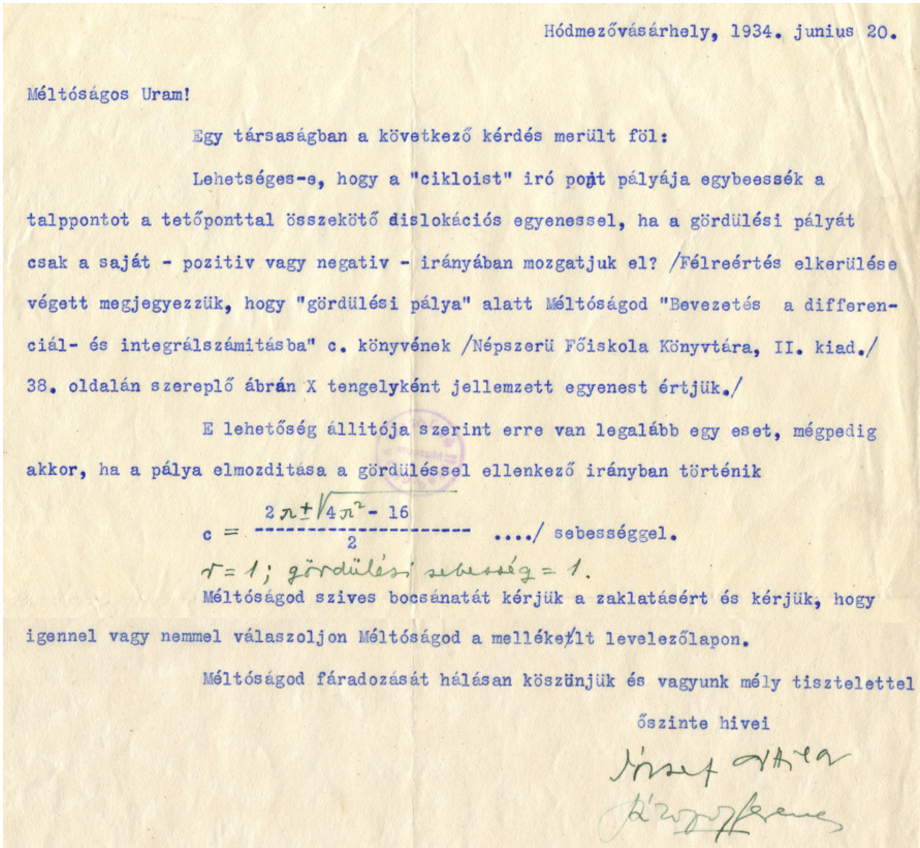
Lehetséges-e, hogy a „cikloist” író pont pályája egybeessék a talppontot a tetőponttal összekötő dislokációs egyenessel, ha a gördülési pályát csak a saját – pozitiv vagy negativ – irányába mozgatjuk el? (Félreértés elkerülése végett megjegyezzük, hogy „gördülési pálya” alatt Méltóságod „Bevezetés a differenciál- és integrálszámításba” c. könyvének (Népszerű Főiskola Könyvtára, II. kiad.) 38. oldalán szereplő ábrán X tengelyként jellemzett egyenest értjük.)

E lehetőség állitója szerint erre van legalább egy eset, mégpedig akkor, ha a pálya elmozditása a gördüléssel ellenkező irányba történik

$$c = \frac{2\pi \pm \sqrt{4\pi^2 - 16}}{2} \quad \text{..../ sebességgel;}$$

$r = 1$*; gördülési sebesség = 1.*

Méltóságod szives bocsánatát kérjük a zaklatásért és kérjük, hogy igennel vagy nemmel válaszoljon Méltóságod a mellékelt levelezőlapon.



Hódmezővásárhely, 1934. junius 20.

Méltóságos Uram!

Egy társaságban a következő kérdés merült föl:

Lehetséges-e, hogy a "cikloist" iró pont pályája egybeessék a talppontot a tetőponttal összekötő dislokációs egyenessel, ha a gördülési pályát csak a saját - pozitiv vagy negativ - irányában mozgatjuk el? /Félreértés elkerülése végett megjegyezzük, hogy "gördülési pálya" alatt Méltóságod "Bevezetés a differenciál- és integrálszámitásba" c. könyvének /Népszerü Főiskola Könyvtára, II. kiad./ 38. oldalán szereplő ábrán X tengelyként jellemzett egyenest értjük./

E lehetőség állitója szerint erre van legalább egy eset, mégpedig akkor, ha a pálya elmozditása a gördüléssel ellenkező irányban történik

$$c = \frac{2\pi \pm \sqrt{4\pi^2 - 16}}{2}$$ ..../ sebességgel.

$r = 1$; gördülési sebesség $= 1$.

Méltóságod szives bocsánatát kérjük a zaklatásért és kérjük, hogy igennel vagy nemmel válaszoljon Méltóságod a mellékelt levelezőlapon.

Méltóságod fáradozását hálásan köszönjük és vagyunk mély tisztelettel

őszinte hivei

József Attila

Pákozdy Ferenc

1. ábra. József Attila és Pákozdy Ferenc levele Beke Manónak, 1934-ből. Forrás: Petőfi Irodalmi Múzeum Kézirattár, JA. 708.

Méltóságod fáradozását hálásan köszönjük és vagyunk mély tisztelettel
őszinte hivei
József Attila
Pákozdy Ferenc

Megtudta József és Pákozdy a választ erre a kérdésre? Valószínűsíthetően nem, ugyanis a Fehér Erzsébet szerkesztésében 1976-ban az Akadémiai Kiadónál megjelent félezer oldalas *József Attila válogatott levelezése* című kiadvány [4] végjegyzetei között ezt írja a levélről: „*A közlés alapjául szolgáló levél nem látszik misszilisnek* [tényleges (értsd: nem költői) levélnek – FT]. *Nem is fogalmazványjellegű. Írói, valószínűleg, eredeti tervüktől elállottak és nem küldték el a címzettnek.*”[4, p. 466.].

Mi sem áll távolabb jelen sorok szerzőjétől, mint hogy Beke Manónak képzelje magát, de – noha végeredményben a kérdésfelvetés nem túl izgalmas válaszra vezet, és Józsefék jó eséllyel félreértettek valamit – nem minden tanulság nélküli megválaszolni a feltett problémát.

Eredmény és megbeszélés

A ciklos fogalma és alkalmazásai

Elöljáróban egy kis magyarázat azok számára, akik nem ismerik a ciklois fogalmát. Képzeljünk el egy vízszintes, egyenes úton gördülő kocsikereket! Képzeletben jelöljük meg az épp földdel érintkező pontját, és nézzük meg, hogy milyen pályát ír le, miközben a kerék tovagördül az úton. Azt látjuk, hogy szép szabályos ívet követ: a földhöz közeledve látszólag lelassul, szinte függőlegesen megy le-föl, a másik oldalon pedig gyorsan suhan vízszintesen. Ezt a görbét hívjuk cikloisnak. A 2. ábra mutatja a cikloist, szemléltetve annak kialakulását is (a `https://www.github.com/tamas-ferenci/JozsefAttilaEgyMatematikaiKerdese` oldalon mindez animáció formájában is megtekinthető).

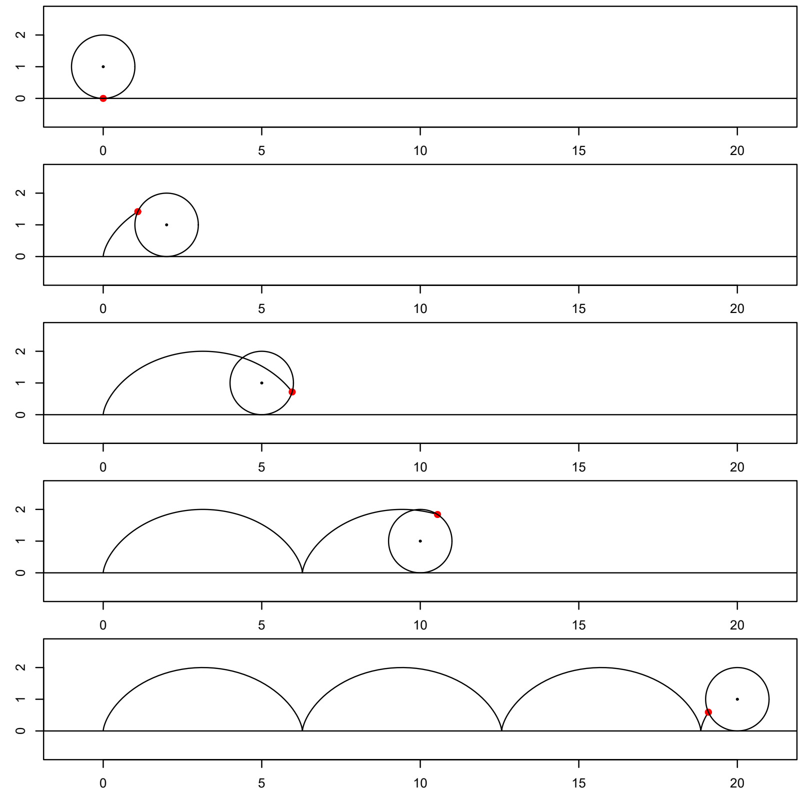
A ciklois több matematikai probléma kapcsán előjön, ezek közül a két leghíresebbet említem meg itt. Noha a megoldásuk mélyebb eszközöket igényel, maguk a problémák – és az eredmények – teljesen hétköznapi nyelven elmondhatóak (és elég érdekesek is!). A megértés szempontjából nem lényeges, és helyenként matematikailag mélyebb részeket lábjegyzetben közlöm.

A brachisztochron probléma

Az egyik a brachisztochron probléma: egy függőleges falon kijelölünk két, nem egymás felett lévő pontot. Kiterjedt barkácstudásunk lehetővé teszi, hogy tetszőleges alakú rámpát ácsoljunk a két pont között, melyen aztán a magasabban fekvő pontból legurítunk egy golyót az alacsonyabban fekvő pontba. Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy a gravitáció mindenhol azonos nagyságú, valamint, hogy a golyó súrlódás nélkül csúszik a rámpán. A kérdés: milyen alakú rámpán fog a legrövidebb idő alatt legurulni a feljebb fekvő pontból a lejjebb fekvő pontba a golyó? Érezhető, hogy az nem lesz jó, ha eleinte szinte vízszintes a rámpa és aztán esik gyorsan, hiszen így nagyon sok idő lesz, míg a gyors esésig „elcsorog” a golyó. Akkor talán pont a fordítottja lesz a jó, eleinte essen meredeken, aztán legyen hosszan vízszintes? Így először nagyon begyorsul, viszont cserében még sokat meg kell tenni egy szinte vízszintes szakaszon. Vagy inkább kössük őket egyszerűen össze egyenesen? Akár az az eretnek gondolat is az eszünkbe juthat, hogy engedjük a golyót a lejjebb fekvő pontnál is mélyebbre, hogy jó nagy lendületet vegyen, és a végén kicsit fordítsuk vissza.

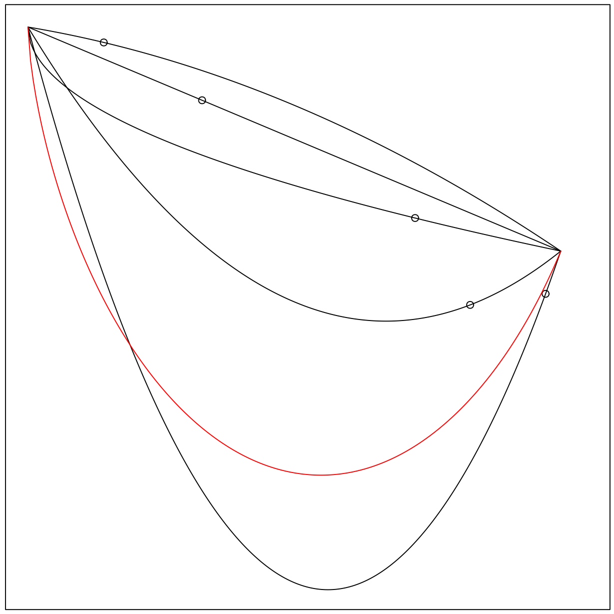
A 3. ábra szemlélteti[1], hogy mi lesz a megoldás: a ciklois! Egy ciklois alakú

[1] Azok számára, akik szeretnék saját kezűleg megvizsgálni ezt, a következő a fizikai levezetés. Vegyük fel a koordinátarendszerünk origóját a kezdőpontban, az x tengely mutasson vízszintesen jobbra, az y pedig függőlegesen lefelé. Mivel a golyó energiája kezdetben nulla, és a gravitáción kívül más nem hat rá, így y „magasságban” (mélységben) mgy helyzeti energiát nyer; a súrlódás hiánya miatt ez teljesen egészében az $\frac{1}{2}mv^2$ mozgási energiájává alakul. Azaz a sebessége, midőn a függőleges koordinátája y, épp $v = \sqrt{2gy}$. Másrészről,



2. ábra. A ciklois görbe és létrejötte.

egy piciny ds szakasz megtételéhez szükséges idő, ha épp $v(s)$ a golyó sebessége (ahol s az indulási ponttól a pályán mérve megtett út) természetesen $\frac{\mathrm{d}s}{v(s)}$, így az egész út megtételéhez szükséges idő $\int_A^B \frac{\mathrm{d}s}{v(s)}\,\mathrm{d}s$. Hogy áttérjünk s-ről x-re, kellene tudni, hogy x koordinátánál mennyi a pályán mért elmozdulás, ha egy kicsiny dx távolsággal odébb megyünk. Szerencsére ez analízisből ismert, hiszen lényegében egy ívhosszról van szó: $\mathrm{d}s = \sqrt{1 + \left[y'(x)\right]^2}\,\mathrm{d}x$, ahol $y(x)$ a rámpa alakja, mint függvény. Ezt behelyettesítve kapjuk, hogy a szükséges idő $\int_0^b \frac{1}{\sqrt{2gy(x)}}\sqrt{1 + \left[y'(x)\right]^2}\,\mathrm{d}x$, ha b a B pont vízszintes távolsága A-tól. Kihasználtuk, hogy a golyó vízszintesen csak szigorúan A-ból B fele tud haladni (egy csak alátámasztást nyújtó rámpával nem tudjuk visszafordítani vízszintesen), így a teljes út integrálása megfelel az x szerint 0-tól b-ig történő integrálásnak. (Ha a görbénk paraméteresen adott, akkor a $\int_{t_a}^{t_b} \frac{1}{\sqrt{2gy(t)}}\sqrt{\left[x'(t)\right]^2 + \left[y'(t)\right]^2}\,\mathrm{d}t$ alak használható, ahol t_a és t_b azok az értékek, amik között a paraméternek futnia kell, hogy megkapjuk a görbét A-ból B-be.) A feladat az, hogy megtaláljuk azt az $y(x)$ függvényt, ami ezt a kifejezést minimalizálja. Itt arról van tehát szó, hogy minden függvényhez hozzárendelünk egy számot, ezt szép néven funkcionálnak szokták hívni, és ezek körében minimalizálunk – keressük azt a függvényt, amihez rendelt szám a minimális. A matematika azon területét, ami ilyen szélsőérték-keresési feladatokkal foglalkozik, szokás variációszámításnak nevezni; a brachisztochron probléma a legelső történeti példák



3. ábra. A brachisztochron probléma: a fenti pontból azonos időpontban elindított golyók legurulása különböző alakú pályákon. Az ábra a ciklois mentén leguruló golyó beérkezése előtti pillanatot ábrázolja; jól látható, hogy a többi golyó többé vagy kevésbé, de mind le van maradva.

rámpát kell ácsolnunk, és azzal összekötnünk a két pontot, ezen fog a legrövidebb idő alatt eljutni a golyó egyik pontból a másikba. A `https://www.github.com/tamas-ferenci/JozsefAttilaEgyMatematikaiKerdese` oldalon még látványosabb formában, animációként látható ugyanez az ábra.

A bizonyítás messze meghaladja ezen írás kereteit[2], de a történetére egy gondolat erejéig érdemes kitérni. A problémát Johann Bernoulli (a Bernoulli család legelső tudós-generációjának Johann-ja) tűzte ki 1696-ban egy folyóiratcikkben, célirányosan a „világ briliáns matematikusait” megszólítva. Valóban elég erős mezőny gyűlt össze: egy évvel később Newton, Leibniz és l'Hospital megoldásait közölte, együtt a sajátjával és a bátyjáéval, Jakob Bernoulliével (aki testvéréhez hasonlóan foglalkozott analízissel, de mellette a valószínűségszámítás egyik első nagy alakja). Ők ketten aztán úgy össze is vitatkoztak a megoldásaikon, hogy az évek tartó konfliktushoz vezetett [9]. (A Bernoulli famíliában nem teljesen ismeretlen jelenség a családtagok közti irigykedés egymás tudományos eredmé-

egyike variációszámításos feladatra [5, 6, 7, 8].

[2]Mindazonáltal néhány egyszerű alakú függvényre, például egyenesre, különböző kitevőjű hatványokra, különböző gyökökre, vagy akár paraméteresen adott görbékre, például körre, ellipszisre stb. érdekes lehet kiszámolni – ha lehet, analitikusan, ha nem, numerikusan – az integrált, és megnézni mit kapunk!

nyeire: az itt is említett Johann kidobta a családi házból a saját fiát, Daniel Bernoulli-t – az áramlástan későbbi megalapítóját – annyira felhúzta magát azon, hogy megosztva kapták meg a Francia Tudományos Akadémia díját, amit érzése szerint egyedül érdemelt volna meg...)

A tautochron probléma

A másik problémánál is egy függőleges falunk van, rajta két, nem egymás fölött elhelyezkedő ponttal, közöttük ácsolandó rámpával és azon leguruló golyóval, csak itt a kérdés a következő: ácsolható-e olyan rámpa, hogy a golyó mindig ugyanannyi idő alatt ér le rajta az alsó ponthoz, *függetlenül attól*, hogy honnan indítjuk a rámpa mentén? Tehát akár a tejéről indítjuk a golyót, akár a közepéről, akár az aljához nagyon közel, mindig ugyanannyi időt vesz igénybe, hogy az alsó ponthoz érjen. (Úgy is megfogalmazhatjuk, hogy ha elindítunk tetszőleges számú golyót a rámpa tetszőleges pontjairól, akkor azok pontosan egy pillanatban érik utol egymást, mégpedig akkor, amikor mind épp az alsó ponthoz ér.) Megvalósítható ez?

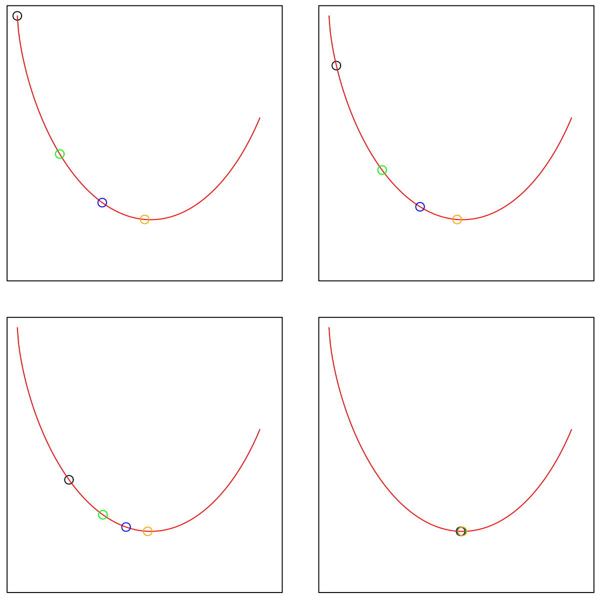
Első ránézésre meglepő lehet, hogy ilyen alakú rámpa egyáltalán létezhet. Sokan ugyanis arra gondolnak, hogy amit feljebbről indítunk, annak nagyobb utat kell megtennie, hogyan érhetné akkor utol egyáltalán a lejjebbről indulót?! Igen ám, de választhatunk olyan alakot, hogy feljebb egyúttal meredekebb is legyen a rámpa, így az onnan induló golyók nagyobb sebességet érjenek el! Tehát a kérdés lényegében az, hogy vajon létezik-e olyan alak, ahol a feljebb lévő nagyobb meredekség *pontosan* akkora előnyt ad a golyónak, mint amekkora hátrányt a nagyobb út.

A válasz a kérdésre pozitív, és a megfejtés: a ciklois.

Ciklois alakú rámpán ez megvalósul: ha ácsolunk egy kilométer hosszú cikloist és elindítunk egy golyót a végéből, akkor bármilyen nehéz is elhinni, de az pontosan akkor fog az aljára érni, mint az a golyó amit egy arasznyira indítottunk el az aljától. (Természetesen a súrlódástól ennél a feladatnál is eltekintünk.) A 4. ábra ezt szemlélteti, illetve a már említett oldalon ugyanezt még egyértelműbb animáció formájában is megtaláljuk.

Említsük meg egy érdekes alkalmazását ennek az eredménynek. Aki középiskolában végigszámolta fizikaórán az inga lengését, talán emlékszik rá, hogy a levezetés úgy indul, hogy „tegyük fel, hogy az ingát csak kicsit térítjük ki". Néhányan talán arra is emlékeznek, hogy ez azért fontos, hogy a számolásban megjelenő szögfüggvényekre a kis szögeknél működő közelítést[3] használni tudjuk. De mi történik, ha a kitérítés nem kicsi? A dolog persze ekkor is végigszámolható, az eredmény sokkal bonyolultabb alakú lesz, de most nekünk nem is ez fontos, hanem az, hogy amit kapunk, az nem csak számértékében fog eltérni a közelítőtől, hanem abban is, hogy a lengés periódusideje – szemben a közelítő számítással – függeni fog a kitérítés mértékétől! A dolog azért érdekes, mert van egy eszköz, ami több mint 200 éven keresztül alapvető fontosságú volt a társadalom és gazdaság működésében, és aminek a pontossága kritikusan függ

[3]Az ingánál konkrétan azt, hogy $\sin \alpha \approx \alpha$.



4. ábra. A tautochron probléma: a ciklois alakú pálya különböző pontjairól elindított golyók legurulásának néhány „pillanatfelvétele”. Jól látszik, hogy mindegy honnan indult a golyó, ugyanannyi idő kell, hogy leérjen, ezért pontosan az alsó pontban találkoznak, indítási helytől függetlenül.

egy inga periódusidejétől: az ingaóra. Az előzőekből látszik az ingaóra egyik problémája: a periódusidő a valóságban függeni fog attól, hogy mennyire tér ki az ingája, ami óhatatlanul változik időben, így ez elkerülhetetlenül hibához vezet.

Christiaan Huygens, aki magát az ingaórát is megvalósította 1656-ban, pár évtizeddel később rájött a megoldásra: olyan ingát kell szerkeszteni, aminek a súlya egy ciklois alakú pálya mentén leng! Hiszen a tautochron probléma megoldása épp azt mondja, hogy ez esetben a lengés periódusideje nem fog függeni a kitérítéstől. Kérdés persze, hogy hogyan lehet a gyakorlatban elérni, hogy a súly ne egy kör alakú pályán, hanem cikloison lengjen, de Huygens ezt is megoldotta: az inga felfüggesztése köré mindkét oldalra egy – fejjel lefelé fordított – ciklois alakú határolót kell rakni [10]. Miközben az inga leng, a tartó fonala felütközik ezekre a pofákra, és ez az inga súlyát egy ciklois alakú pályára kényszeríti[4]. Ez az ún. cikloidális inga. A dolog ugyan elméletben

[4]Fontos, hogy ez nem valamiféle triviálisan látható dolog, be kell bizonyítani, és az csak véletlen, hogy a ciklois alakú pályára kényszerítéshez épp ciklois alakú pofákra volt szükség. Azt, hogy adott alakú pofánál a rá felütköző fonál végpontja milyen görbét ír le, a pofa evolvensének nevezzük, megfordítva pedig azt mondjuk, hogy a pofa alakja az evolútája annak a görbének, amit a rá felütköző fonal végpontja leír. (Természetesen a matematikai definíciónál

valóban megjavította az ingaórát, de a gyakorlatban nem vált be. Egyrészt mert az ingaóra pontatlanságának összes egyéb forrása, pláne a 17. században, lényegesen nagyobb volt, mint a kitéréstől függő periódusidő jelentette hiba (különösen, ha biztosítjuk, hogy a kitérés ne lehessen túl nagy), másrészt mert a fonál pofára való felütközése mechanikai veszteségekkel jár, úgyhogy a megoldás igazából maga is teremt egy új hibaforrást.

A ciklois egyenlete

A tárgyalás pontosításához először is vezessünk be egy koordinátarendszert, ami a 2. ábrára ránézve teljesen kézenfekvő lesz: a nyomon követett pont kezdeti pozíciója legyen az origó, a függőleges tengely mutasson függőlegesen, pozitív iránnyal felfelé, a vízszintes pedig vízszintesen, pozitív iránnyal jobbra.

Azért, hogy a kérdést ne bonyolítsuk feleslegesen, a lényegen nem változtató paramétereket változtassuk egységnyire[5]. Azaz: a kerék sugara legyen 1, a gördülési sebessége pedig olyan, hogy egységnyi idő alatt $\frac{1}{2\pi}$ fordulatot tegyen meg a kerék. Ez utóbbi így kimondva egyáltalán nem tűnik egységnyinek, de valójában az, hiszen azt jelenti, hogy t idő alatt $\frac{t}{2\pi}$ fordulatot tesz meg a kerék, azaz a szögelfordulása épp t, ami egyúttal azt is megadja, hogy a középpont mennyit haladt jobbra[6]. A szögelfordulást úgy értjük, hogy a kerék középpontját a nyomon követett ponttal összekötő egyenes mennyit fordult el a függőlegeshez képest, a pozitív szög az óramutató járása szerinti elfordulást – jobbra gördülést – jelenti. (A szöget radiánban mérjük.)

A ciklois egyenletének az előállítása paraméteres formában egyszerű. Nézzük először a függőleges mozgást! Itt nem számít, hogy a kerék jobbra is gördül, csak annyi a fontos, hogy t szöget fordult el, ezért a pont $\cos t$-vel van a középpont alatt (ez persze lehet negatív is). Mivel a középpont 1-gyel van a talaj fölött, így a pont függőleges koordinátája $y = 1 - \sin t$. Vízszintes irányban a középpont t-t haladt jobbra, csak épp a pont $\sin t$-val van tőle balra (természetesen ez is lehet negatív), így a vízszintes koordinátája $t - \sin t$.

A ciklois paraméteres egyenletrendszere tehát:

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

a gravitációra meg a felütközésre nincs szükség: azt mondjuk, hogy a fonalat mindig megfeszítve tartjuk.) Evolvensből végtelen sok van, attól függően, hogy milyen hosszú a fonál, evolútából viszont csak egy. A kérdés tehát az, hogy melyik görbének lesz az evolvense a ciklois, avagy fordítva megfogalmazva, mi a ciklois evolútája – és a válasz az, hogy a ciklois! De ismét hangsúlyozni kell, hogy ez csak véletlen, például a kör evolútája egy pont (gondoljuk végig!), az $y = x^2$ parabola evolútája az $y = 3\left(x/4\right)^{2/3} + 1/2$ ún. Neil-parabola. Még csak az sem igaz, hogy a ciklois az egyetlen görbe ami saját maga evolútája, például a (logaritmikus) spirálnak szintén önmaga az evolútája.

[5]Igen, tudom, hogy a fizikus olvasók most a hajukat tépik, hiszen így dimenzionálisan elromlanak az egyenletek. Itt most legyünk picit matematikusak.

[6]Ami egységnyi itt, azt a fizikusok úgy hívnák, hogy a forgás körfrekvenciája: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$, ahol T a periódusidő, $f = 1/T$ a frekvencia.

(A matematikai leírás szempontjából nyugodtan el is felejthetjük, hogy a t-nek mi idő interpretációt adtunk, a lényeg, hogy a t egy nemnegatív valós szám.)

Elő lehet állítani ebből explicit alakot is? Érdekes módon az a válasz, hogy csak az egyik irányban lesz zárt alakú megoldásunk.

Ha ugyanis kifejezzük a t-t y-ból, akkor azt kapjuk, hogy $t = \arccos(1-y)$, így

$$x = \arccos(1-y) + \sin\arccos(1-y),$$

ami egyszerűsítés után

$$x = \arccos(1-y) + \sqrt{1-(1-y)^2} = \arccos(1-y) + \sqrt{y(2-y)},$$

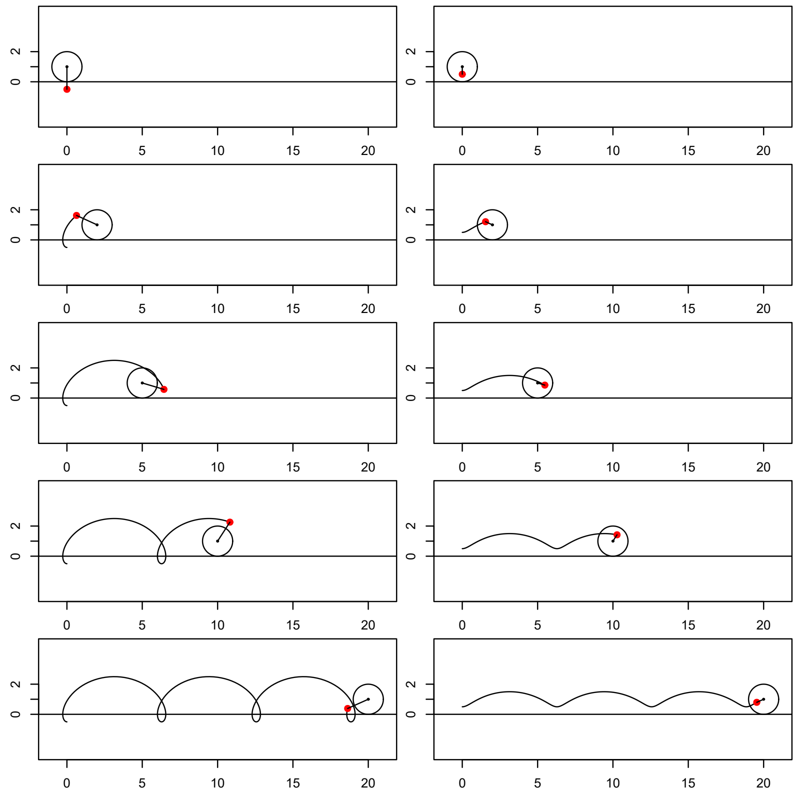
mivel[7] $\sin\arccos\beta = \sqrt{1-\beta^2}$. Természetesen így – szemben a paraméteres alakkal – csak a ciklos egy „ciklusát”, és annak is csak az első felét tudjuk megkapni (logikusan, hiszen utána egy adott y-hoz már több x is tartozhat).

Ha azonban fordítva akarjuk kifejezni a ciklost, tehát – természetesebb módon – y-t az x-ből, akkor hamar elakadunk: az $x = t - \sin t$ egyenletet kellene megoldanunk t-re, csakhogy ez egy transzcendens egyenlet, aminek nincs zárt alakú megoldása! A ciklost tehát általában nem lehet explicit formában felírni, még egy ciklusra, sőt, még egy fél ciklusra sem.

József Attila és Pákozdy Ferenc kérdésének megválaszolása

Térjünk most rá Józsefék kérdésére! Először is állapítsuk meg, hogy a kérdés nem úgy értendő, hogy akkor mi történik, ha a keréknek *az úthoz viszonyított* sebességét változtatjuk. Tudniillik ha a kereket magát úgy mozgatjuk, hogy egy körbefordulásnyi idő alatt nem egy kerületnyi (2π) utat halad a középpontja, akkor a kerék természetesen kénytelen lesz csúszni. (Pontosabb is lett volna, ha a definícióba belemondjuk, hogy „csúszás nélkül” gördül.) Természetesen az is érdekes matematikai probléma, hogy a csúszásos esetben mi történik, de a kérdés vélhetően nem erre irányult, hiszen úgy fogalmaz, hogy „*a gördülési pályát* [...] *mozgatjuk*”, tehát a kerék kényszerített mozgatásáról szó sincs. Ettől függetlenül egy gondolat erejéig térjünk erre is ki: ha a kerék csúszik, akkor a leírt pálya vagy hurkolt, vagy nyújtott ciklois lesz [11]. Hogy mik ezek? Rokonai a „szokásos” cikloisnak, olyannyira, hogy megkaphatjuk őket úgy is, hogy csúszásmentesen gördül a kerék, csak épp nem a kerék kerületén fekvő pontot nézünk, hanem egy „küllőjén” találhatót, tehát belső pontot (nyújtott ciklois), vagy a küllő képzeletbeli meghosszabbításában egy külső pontot (hurkolt ciklois). Az 5. ábra mutatja az ilyen görbéket. Ha tehát a kerék csúszását is megengedjük, akkor ilyet fogunk kapni (ha még azt is megengedjük, hogy az ellenkező irányba forogjon mint amerre csúszik, akkor esetleg ezeket tükrözve a vízszintes tengelyre); összefoglaló nevén ezeket a görbéken hívjuk trochoidnak. A dolog még tovább is általánosítható, ha nem egyenes mentén gördítjük

[7] Tudjuk, hogy $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Legyen $\beta = \cos\alpha$, és így $\alpha = \arccos\beta$, ezt az előző egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $(\sin\arccos\beta)^2 + \beta^2 = 1$, ahonnan már adódik a felhasznált összefüggés.

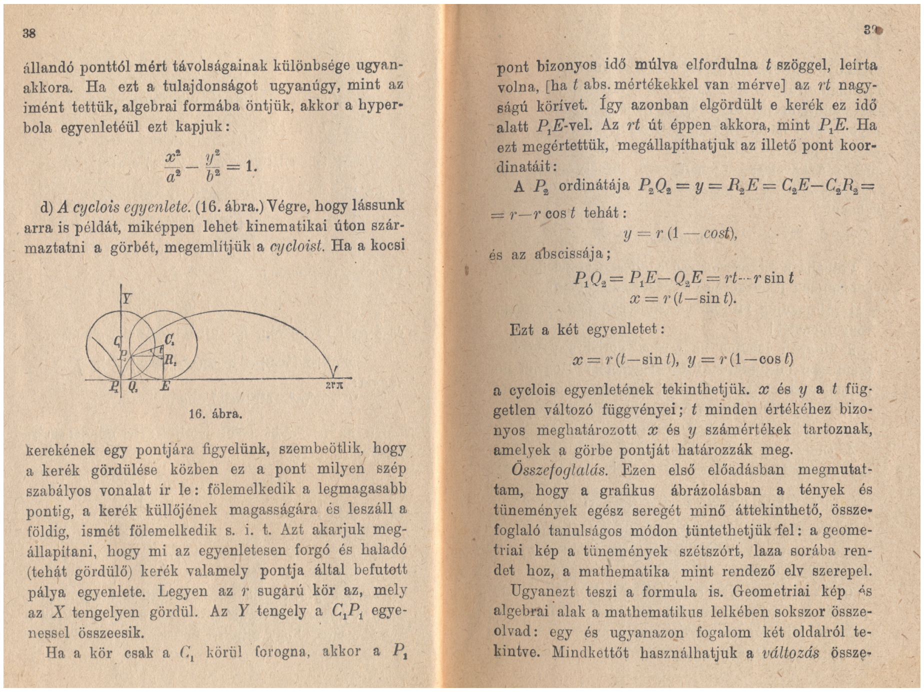


5. ábra. A hurkolt (balra) és a nyújtott (jobbra) ciklois görbék és létrejöttük. Ezeket, együtt a „szokásos” (szép nevén: csúcsos) cikloissal, szokás trochoid görbéknek nevezni.

a kört, vagy nem kört gördítünk, az így kapott görbéket rulettáknak szokás nevezni [12], de ez már végképp nem tartozik a mostani tárgyunkhoz.

De mi a helyzet Józsefék kérdésével? A megfogalmazás egyértelmű, a pályát magát mozgatjuk, a kerék szép nyugodtan gördül (csúszás nélkül), azt nem befolyásoljuk. Világos, hogy itt nincs a fentihez hasonló csúszási probléma: ha a pályát mozgatjuk (*magunkhoz képest*), akkor minden sebességnél csúszás nélkül tud haladni a kerék, hiszen annak gördülését a *pályához képest* értjük. Így már teljesen értelmes a kérdésfelvetés, a pályát húzzuk, azon pedig „szokásosan” gördül a kerék. (Vegyünk észre, hogy az így megfogalmazott feladat azonos azzal, mintha nem a pályát mozgatnánk, hanem saját magunkat, a megfigyelőt, tehát egy teljesen hagyományos cikloisról beszélnénk, csak épp úgy, hogy közben a megfigyelő is odébb megy.)

Nagyobb problémát jelent a kérdés megértésénél, hogy mégis pontosan mi kell, hogy egyenes legyen. A zavart elsősorban a „talppont”, „tetőpont” és –



38

állandó ponttól mért távolságainak különbsége ugyanakkora. Ha ezt a tulajdonságot ugyanúgy, mint az imént tettük, algebrai formába öntjük, akkor a hyperbola egyenletéül ezt kapjuk:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

d) *A cyclois egyenlete.* (16. ábra.) Végre, hogy lássunk arra is példát, miképpen lehet kinematikai úton származtatni a görbét, megemlítjük a *cycloist.* Ha a kocsi

16. ábra.

kerekének egy pontjára figyelünk, szembeötlik, hogy a kerék gördülése közben ez a pont milyen szép szabályos vonalat ír le: fölemelkedik a legmagasabb pontig, a kerék küllőjének magasságára és leszáll a földig, ismét fölemelkedik s. i. t. Azt akarjuk megállapitani, hogy mi az egyenletesen forgó és haladó (tehát gördülő) kerék valamely pontja által befutott pálya egyenlete. Legyen az r sugarú kör az, mely az X tengelyen gördül. Az Y tengely a C_1P_1 egyenessel összeesik.

Ha a kör csak a C_1 körül forogna, akkor a P_1

39

pont bizonyos idő múlva elfordulna t szöggel, leírta volna, [ha t abs. mértékekkel van mérve] az rt nagyságú körívet. Így azonban elgördült e kerék ez idő alatt P_1E-vel. Az rt út éppen akkora, mint P_1E. Ha ezt megértettük, megállapíthatjuk az illető pont koordinatáit:

A P_2 ordinátája $P_2Q_2 = y = R_2E = C_2E - C_2R_2 =$ $= r - r\cos t$ tehát:

$$y = r(1 - cost),$$

és az abscissája;

$$P_1Q_2 = P_1E - Q_2E = rt - r\sin t$$
$$x = r(t - \sin t).$$

Ezt a két egyenletet:

$$x = r(t - \sin t),\quad y = r(1 - \cos t)$$

a cyclois egyenletének tekinthetjük. x és y a t független változó függvényei; t minden értékéhez bizonyos meghatározott x és y számértékek tartoznak, amelyek a görbe pontját határozzák meg.

Összefoglalás. Ezen első előadásban megmutattam, hogy a grafikus ábrázolásban a tények és tünemények egész seregét minő áttekinthető, összefoglaló tanulságos módon tüntethetjük fel: a geometriai kép a tünemények szétszórt, laza sorába rendet hoz, a mathematika mint rendező elv szerepel.

Ugyanezt teszi a formula is. Geometriai kép és algebrai alak a mathematikus lelkében sokszor összeolvad: egy és ugyanazon fogalom két oldalról tekintve. Mindkettőt használhatjuk a *változás* össze-

6. ábra. Facsimile oldalak Beke Manó *Bevezetés a differenciál- és integrálszámításba* könyvének azon kiadásából, melyre József Attila és Pákozdy Ferenc levele hivatkozik.

különösen – a „dislokációs egyenes” szavak használata okozza, melyeket a levél sehol nem definiál. Első ránézésre az ember azt gondolhatná, hogy ezeket minden bizonnyal Beke Manó használta a levél által is hivatkozott könyvében [13]. Bár ez nagyon kézenfekvő magyarázat lenne, sajnos nem igaz: a 6. ábra mutatja Beke könyvének cikloisról szóló részét, pontosan abból az 1920-as második kiadásából, amit a levél alapján József Attiláék is olvastak. Jól látható, hogy a nem definiált kifejezések egyike sem szerepel benne.

Magunkra vagyunk tehát utalva, hogy kiválasszuk a megfelelő értelmezést. A legvalószínűbb talán a következő: a talppont a kerék talajjal érintkező pontja a gördülés megkezdésekor (tehát a ciklois kiindulópontja), a tetőpont a ciklois legmagasabb pontja, tehát a nyomon követett pont helye egy fél kerékfordulat után, a „dislokációs egyenes” pedig egyszerűen a kettőt összekötő egyenes.

Ha így definiáljuk, akkor a probléma nagyon egyszerűen megoldható, csak egy dologra kell odafigyelnünk.

Ha pálya a húzás révén t időben $s(t)$ távolsággal van eltolódva (a pozitív szám jelentse a koordinátarendszer előjelével egyezően a jobbra mozgatást), akkor a görbe paraméteres egyenletrendszere nyilván:

$$\begin{cases} x = t - \sin t + s(t) \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

Ahhoz, hogy ez épp egy egyenes legyen, az $y = x$ egyenlőségnek kell megvalósulnia. (Természetesen nyugodtan mondhattunk volna $y = Ax + B$ egyenlőséget is, de részint érezhető, hogy ez – pusztán lineáris átskálázás révén – érdemi újdonságot nem fog hozni, csak a jelöléseket bonyolítja, részint a kérdés pozitív megválaszolásához nekünk elég egy egyenest mutatnunk.) A megoldandó egyenlet tehát:

$$1 - \cos t = t - \sin t + s(t),$$

amiből

$$s(t) = 1 - \cos t - t + \sin t.$$

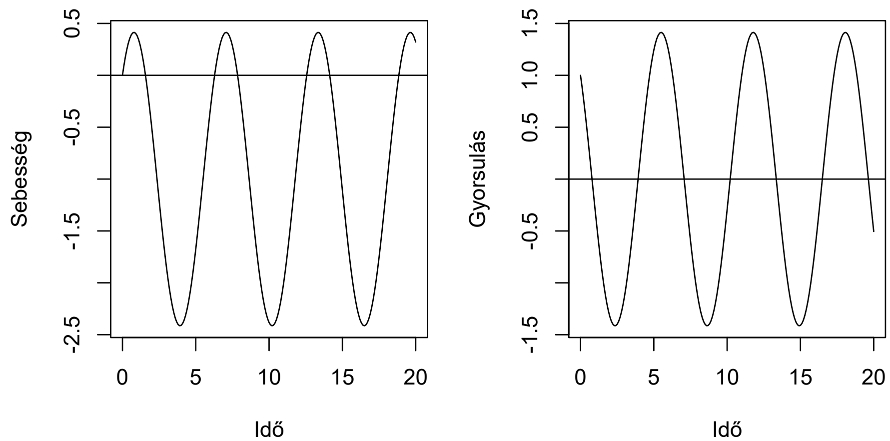
Ez egyáltalán nem volt nehéz, sőt, rögtön látszik, hogy minden létező paraméteres görbére egyszerűen megoldható ugyanilyen módon, a kérdés inkább csak az lehet, hogy ez a mozgás fizikailag realizálható-e. Ha például az $s(t)$ függvénynek szakadása van, akkor az nyilván nem lehet egy talaj tényleges mozgása, hiszen az nem tud pillanatszerűen „odébb ugrani”. Itt belefutunk abba, hogy mi a pontos definíciója annak, hogy „fizikailag realizálható”, de amellett is lehet érvelni, hogy mondjuk a sebesség sem tud pillanatszerűen megváltozni.

Szerencsénkre mind a szinusz, mind a koszinusz függvény nem csak, hogy folytonos, de mivel a deriváltjaik is szinuszok és koszinuszok lesznek, így elmondható, hogy *minden* deriváltjuk is folytonos[8]. Mivel $s(t)$ időbeli deriváltja lesz a talaj mozgatásának szükséges sebessége, annak deriváltja a szükséges gyorsulás, és így tovább, ha ez mind folytonos, akkor nyugodtak lehetünk afelől, hogy ez a mozgatása a talajnak – avagy, fordítva nézve, a megfigyelőnek – fizikailag realizálható.

A 7. ábra mutatja az ahhoz szükséges talaj-sebességet és -gyorsulást, hogy a pont pályája egyenes legyen. A sebesség jórészt negatív, de gondoljuk végig, hogy ez teljesen logikus: mivel a kerék jobbra (pozitív irányba) gördül, így a talajt nyilván balra (negatív irányba) kell húznunk, hogy egyáltalán esélye legyen az $y = x$ egyenesen maradnia a pontnak és ne „gördüljön ki” jobbra.

Ha ezt kicsit nehéz is elképzelni, a `https://www.github.com/tamas-ferenci/JozsefAttilaEgyMatematikaiKerdese` címen található animáció segít, mert megmutatja a dolgot működés közben (azzal, hogy megfigyelőt mozgatja $-s(t)$-t, nem a talajt $s(t)$-t, de mint már volt róla szó, ez természetesen egyenértékű).

[8]Analízises emberek úgy mondanák: végtelenszer folytonosan differenciálhatóak, avagy C^∞-beliek.



7. ábra. A József és Pákozdy levelében felvetett kérdésre választ adó talajmozgatás szükséges sebessége és gyorsulása.

Konklúzió

,,Vasútnál lakom. Erre sok
vonat jön-megy és el-elnézem,
hogy' szállnak fényes ablakok
a lengedező szösz-sötétben.
Igy iramlanak örök éjben
kivilágított nappalok
s én állok minden fülke-fényben,
én könyöklök és hallgatok.''

(József Attila: Eszmélet XII.)

József és Pákozdy kérdésére tehát egyfelől igenlő válasz adható, másrészt viszont a megvalósítás nem az, amit a levélben leírtak. Minden valószínűség szerint félreérthettek valamit, bár arra nem sikerült rájönnöm, hogy mit (az világos, hogy az $x^2 - 2\pi x + 4 = 0$ egyenletet megoldva keresték a választ).

Az is érdekes kérdés, hogy egyáltalán József Attila levelezésében ilyet találni – bár a legkevésbé sem vagyok a József Attila életmű teljes ismerője, más utalást nem láttam, hogy valaha bármilyen matematikai kérdéssel foglalkozott volna. Ilyen szempontból, tehát a kérdés felvetését illetően Pákozdy Ferenc a „gyanúsabb". Ő ugyanis, amellett, hogy maga is költő és műfordító volt, és – mint a Tverdota idézetből is kiderült – József Attila barátja és hódmezővásárhelyi körének tagja, meglehetősen polihisztor alkat volt: eredetileg orvosnak tanult, aztán jogot végzett, dolgozott jegyzőként, levéltárosként majd évtizedekig könyvtárosként, mindemellett kitűnő sakkozóként is ismerték [14, 15].

Kitérő megjegyzés: talán többen tudják, hogy történetesen – és teljesen véletlen egybeesésként – Pákozdy Ferencnek hívták azt a költőt is, akinek az 1933-ban a *Társadalmi Szemlében* megjelent kritikája, melyben azt írta, hogy a „magyar proletárirodalom sok problémája uj problémával szaporodott: József Attilával” szerepet játszott József Attila és az illegális kommunista párt kapcsolatának megromlásában. (Pákozdy, mármint a bántó kritikát író Pákozdy[9] számára érhető módon elég kellemetlenné vált később ez az írás, az ’50-es években azzal magyarázkodott Révai Józsefnek, hogy valójában nem gondolta így a leírtakat, csak az újság szerkesztőinek nyomására jelentette meg a kritikát, akik arra hivatkoztak, hogy József Attila elítélése „a párt kívánsága” [17].)

Ha az írásom elején nagyon szubjektív voltam, hadd legyek a végén is az. Az *Eszmélet* nem olyan, mint a többi – szerintem – nagyon szép József Attila vers, a *Tiszta szívvel*, a *Thomas Mann üdvözlése* vagy az *(Ime, hát megleltem hazámat)*. Sokszor kell elolvasni. Nem „érti” az ember elsőre, de ahogy újra és újra elolvassa, egyre közelebb kerül hozzá, míg egyszer csak azt nem veszi észre, hogy libabőrös lesz, ahogy az utolsó sorok végére ér.

Hivatkozások

[1] Rózsa Pál. *Bevezetés a mátrixelméletbe.* Typotex, 2009.

[2] Beke Manó. *Determinánsok.* Athenaeum Irodalmi és Nyomdai R.-T., 1915.

[3] Tverdota György. *Tizenkét vers. József Attila Eszmélet-ciklusának elemzése.* Gondolat, 2004.

[4] Fehér Erzsébet. *József Attila válogatott levelezése.* Akadémiai Kiadó, 1976.

[5] Gelfand Izrail Moiseevitch és Fomin Sergei Vasilyevich. *Calculus of variations.* Courier Corporation, 2000.

[6] Weinstock Robert. *Calculus of variations: with applications to physics and engineering.* Courier Corporation, 1974.

[7] Kósa András. *Variációszámítás.* Tankönyvkiadó, 1973.

[8] Járai Antal. *Modern alkalmazott analízis.* Typotex, 2007.

[9] Simmons George F. *Differential equations with applications and historical notes.* CRC Press, 2016.

[10] Grigorjevics Gingyikin Szemjon. *Történetek fizikusokról és matematikusokról.* Typotex, 2004.

[9] Érdekességként megjegyzem, hogy a Wikipedia e sorok írásának pillanatában is azt írja a kritika kapcsán, hogy József Attila tudta, hogy az írás nem Pákozdy gondolatait tükrözi, mert korábban Pákozdy a *Hétfői újságban* József Attila mellé állt. A bökkenő csak annyi, hogy a *Hétfői újság* egy hódmezővásárhelyi lap volt, így – bár ez vegytiszta spekuláció a részemről – de elég gyanúsnak tűnik, hogy ez a Pákozdy valójában a másik Pákozdy volt, és így persze az egész okfejtés bukik. A keveredés nem lenne teljesen példátlan, vicces módon még a 2004-es kiadású Új Magyar Életrajzi lexikon hódmezővásárhelyi Pákozdyról szóló szócikkébe is bekerült hivatkozásként egy olyan cikk, ami valójában a másik Pákozdyról szól [16].

[11] Johnston David C. „Cycloidal paths in physics as superpositions of translational and rotational motions”. *American Journal of Physics* 87.10 (2019), 802–814. old. DOI: 10.1119/1.5115340. URL: https://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.5115340.

[12] Reiman István. *A geometria és határterületei*. Gondolat, 1986.

[13] Beke Manó. *Bevezetés a differenciál-és integrálszámításba: a Népszerű Főiskolai Tanfolyam 1906-ik évi II. sorozatában tartott előadások*. 2. kiad. Franklin-Társulat, 1920.

[14] Kenyeres Ágnes. *Magyar életrajzi lexikon*. Akadémiai Kiadó, 1994.

[15] Bata Imre. „A vásárhelyi poéta. Pákozdy Ferenc emlékezete”. *Tiszatáj* 31.4 (1977), 72–76. old. URL: http://tiszataj.bibl.u-szeged.hu/9488/1/tiszataj_1977_004_072-076.pdf.

[16] Kőszegfalvi Ferenc. *Pákozdy Ferenc (1904-1970) bibliográfia*. 2003.

[17] Legát Tibor. *József Attila esete a két Pákozdy Ferenccel, akik szintén költők voltak*. Magyar Narancs. 2020. URL: https://magyarnarancs.hu/sorkoz/jozsef-attila-esete-a-ket-pakozdy-ferenccel-akik-szinten-koltok-voltak-128728 (elérés dátuma 2020. 10. 06.).