

1 Az $\mathbf{a} \succeq \mathbf{b}$ finomsági reláció

Két tetszőleges hosszúságú nem negatív számokból álló vektor között értelmezünk egy részbenrendezési relációt. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ vektor *finomabb* mint a $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ vektor (jelölése $\mathbf{a} \succeq \mathbf{b}$), ha a \mathbf{b} vektor megkapható az \mathbf{a} vektorból valahány „,” karakter „+” karakterre cserélésével. Például, $(2, 3, 1, 0, 2) \succeq (5, 1, 2)$, mert $(2 + 3, 1, 0 + 2) = (5, 1, 2)$, és $(2, 3, 1, 4) \succeq (2, 8)$, mert $(2, 3 + 1 + 4) = (2, 8)$. Könnyen megadható az \mathbf{a} vektornál *durvább* összes \mathbf{k} vektor $\{\mathbf{k} : \mathbf{k} \preceq \mathbf{a}\}$ halmaza. Egyszerűen minden lehetséges módon kicseréljük a „,” karaktereket „+” karakterekre. Mivel egy n elemű vektorban $n - 1$ vessző található, ezért $|\{\mathbf{k} : \mathbf{k} \preceq (a_1, a_2, \dots, a_n)\}| = 2^{n-1}$.

$$\{\mathbf{k} : \mathbf{k} \preceq (2, 3, 1)\} := \{(2, 3, 1), (2 + 3, 1), (2, 3 + 1), (2 + 3 + 1)\} = \{(2, 3, 1), (5, 1), (2, 4), (6)\}$$

Sokkal nehezebb megadni egy \mathbf{a} vektornál finomabb összes \mathbf{k} vektor $\{\mathbf{k} : \mathbf{a} \preceq \mathbf{k}\}$ halmazát. Az nyilvánvaló, hogy az n számot tartalmazó egyelemű (n) vektornál finomabb \mathbf{k} vektorok $\{\mathbf{k} : \mathbf{a} \preceq \mathbf{k}\}$ halmazát az n szám felbontásai alkotják.

$$\{\mathbf{k} : (n) \preceq \mathbf{k}\} = \left\{ \mathbf{k} : \sum \mathbf{k} = n \right\}$$

Például, $\{\mathbf{k} : (4) \preceq \mathbf{k}\} = \{\mathbf{k} : \sum \mathbf{k} = 4\} = \{(4), (1, 3), (3, 1), (2, 2), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}$. Közismert, hogy az n szám összes felbontásainak száma 2^{n-1} , és ezért $|\{\mathbf{k} : (n) \preceq \mathbf{k}\}| = 2^{n-1}$. Ezen egyszerű megállapítás segítségével tetszőleges \mathbf{a} vektorhoz kiszámíthatjuk a $\{\mathbf{k} : \mathbf{a} \preceq \mathbf{k}\}$ halmazt az alábbi (bizonyítás nélkül közölt) tétel alkalmazásával.

Tétel. Ha $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m)$ az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ vektorok egybefűzésével kapott vektor, akkor

$$\{\mathbf{k} : \mathbf{a} \preceq \mathbf{k}\} = \{\mathbf{k} : \mathbf{a}_1 \preceq \mathbf{k}\} \times \{\mathbf{k} : \mathbf{a}_2 \preceq \mathbf{k}\} \times \dots \times \{\mathbf{k} : \mathbf{a}_m \preceq \mathbf{k}\}$$

Ha ezt a tételt alkalmazzuk az egyelemű $\mathbf{a}_1 = (a_1), \mathbf{a}_2 = (a_2), \dots, \mathbf{a}_m = (a_m)$ vektorokra, akkor $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m) = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ és

$$\begin{aligned} \{\mathbf{k} : (a_1, a_2, \dots, a_m) \preceq \mathbf{k}\} &= \{\mathbf{k} : (a_1) \preceq \mathbf{k}\} \times \{\mathbf{k} : (a_2) \preceq \mathbf{k}\} \times \dots \times \{\mathbf{k} : (a_m) \preceq \mathbf{k}\} = \\ &= \left\{ \mathbf{k} : \sum \mathbf{k} = a_1 \right\} \times \left\{ \mathbf{k} : \sum \mathbf{k} = a_2 \right\} \times \dots \times \left\{ \mathbf{k} : \sum \mathbf{k} = a_m \right\} \end{aligned}$$

Ebből az is következik, hogy $|\{\mathbf{k} : (a_1, a_2, \dots, a_m) \preceq \mathbf{k}\}| = 2^{a_1-1} \cdot 2^{a_2-1} \dots 2^{a_m-1} = 2^{\sum \mathbf{a} - |\mathbf{a}|}$.

Példa: $\{\mathbf{k} : (2, 3, 1) \preceq \mathbf{k}\} = \{\mathbf{k} : \sum \mathbf{k} = 2\} \times \{\mathbf{k} : \sum \mathbf{k} = 3\} \times \{\mathbf{k} : \sum \mathbf{k} = 1\} = \{(2), (1, 1)\} \times \{(3), (1, 2), (2, 1), (1, 1, 1)\} \times \{(1)\} = \{(2, 3, 1), (2, 1, 2, 1), (2, 2, 1, 1), (2, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 3, 1), (1, 1, 1, 2, 1), (1, 1, 2, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1, 1)\}$.

Egyszerűen balátható, hogy a most bevezetett $\mathbf{a} \succeq \mathbf{b}$ reláció valóban részbenrendezés, azaz

- reflexív: $\mathbf{a} \succeq \mathbf{a}$
- antiszimmetrikus: Ha $\mathbf{a} \succeq \mathbf{b}$ és $\mathbf{b} \succeq \mathbf{a}$, akkor $\mathbf{a} = \mathbf{b}$
- tranzitív: Ha $\mathbf{a} \succeq \mathbf{b}$ és $\mathbf{b} \succeq \mathbf{c}$, akkor $\mathbf{a} \succeq \mathbf{c}$

2 Landen kapcsolat (Landen's connection)

Tétel (Landen's connection). Tetszőleges nem negatív számokból álló $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_r)$ vektorral

$$\text{Li}_{\mathbf{s}} \left(\frac{x}{x-1} \right) = (-1)^{|\mathbf{s}|} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{s}} \text{Li}_{\mathbf{k}}(x)$$

Néhány ekvivalens változat:

$$\text{Li}_{\mathbf{s}}(x) = (-1)^{|\mathbf{s}|} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{s}} \text{Li}_{\mathbf{k}} \left(\frac{x}{x-1} \right) \quad \left(0 < x < \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{Li}_{\mathbf{s}}(1-x) = (-1)^{|\mathbf{s}|} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{s}} \text{Li}_{\mathbf{k}} \left(\frac{x-1}{x} \right) \quad \left(\frac{1}{2} < x < 1 \right)$$

3 Általános integráloperátor

Definíció:

$$\mathcal{J}(a_1, \bar{b}_1, a_2, \bar{b}_2, \dots, a_n, \bar{b}_n) := \left(\int \frac{1}{x} \right)^{a_1} \left(\int \frac{1}{1-x} \right)^{b_1} \left(\int \frac{1}{x} \right)^{a_2} \left(\int \frac{1}{1-x} \right)^{b_2} \dots \left(\int \frac{1}{x} \right)^{a_n} \left(\int \frac{1}{1-x} \right)^{b_n}$$

Példák:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(2, \bar{3}, 4, \bar{1}) &= \left(\int \frac{1}{x} \right)^2 \left(\int \frac{1}{1-x} \right)^3 \left(\int \frac{1}{x} \right)^4 \left(\int \frac{1}{1-x} \right) \\ \mathcal{J}(\bar{2}, 3, \bar{4}) &= \left(\int \frac{1}{1-x} \right)^2 \left(\int \frac{1}{x} \right)^3 \left(\int \frac{1}{1-x} \right)^4 \\ \mathcal{J}(4, \bar{1}, 3) &= \left(\int \frac{1}{x} \right)^4 \left(\int \frac{1}{1-x} \right) \left(\int \frac{1}{x} \right)^3 \end{aligned}$$

Könnyen átgondolható, hogy $\mathcal{J}(2, 4, \bar{3}, \bar{1}, 2) = \mathcal{J}(2 + 4, \bar{3} + \bar{1}, 2) = \mathcal{J}(6, \bar{4}, 2)$, ezért mindig feltételezhető, hogy egy integráloperátorban a felülhúzott és sima számok felváltva követik egymást.

4 Az általános integráloperátor hatása az $\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(X)$ függvényeken. Polilogaritmikus integrálok redukciója.

Az $\mathcal{J}(a_1, \bar{b}_1, a_2, \bar{b}_2, \dots, a_n, \bar{b}_n)$ integráloperátort leggyakrabban $\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(X)$ általánosított polilogaritmus függvényekre alkalmazzuk, ahol az X argumentum legtöbbször az $x, 1-x, \frac{1}{x}, \frac{1}{1-x}, \frac{x}{x-1}, \frac{x-1}{x}, \dots$ kifejezések valamelyike. Sorra megvizsgáljuk az $\mathcal{J}(1)$, illetve $\mathcal{J}(\bar{1})$ integráloperátorok hatását a különböző argumentummal vett $\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(X)$ függvényeken.

$$1. \quad \mathcal{J}(1) [\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(x)] := \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(x)}{x} dx = \text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)}(x)$$

$$2. \quad \mathcal{J}(\bar{1}) [\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(x)] := \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(x)}{1-x} dx = \text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)}(x)$$

$$3. \quad \mathcal{J}(1) [\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(1-x)] := \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(1-x)}{x} dx = -\text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)}(1-x)$$

$$4. \quad \mathcal{J}(\bar{1}) [\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(1-x)] := \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(1-x)}{1-x} dx = -\text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)}(1-x)$$

$$5. \quad \mathcal{J}(1) [\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(\frac{1}{x})] := \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(\frac{1}{x})}{x} dx = -\text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)}(\frac{1}{x})$$

$$\begin{aligned} \text{Mert, } \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(\frac{1}{x})}{x} dx &= / u = \frac{1}{x}, x = \frac{1}{u}, dx = -\frac{du}{u^2} / = - \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{\frac{1}{u}} \frac{du}{u^2} = - \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u} du = \\ &= -\text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)}(u) = \text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)}(\frac{1}{x}) \end{aligned}$$

$$6. \quad \mathcal{J}(\bar{1}) \left[\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{1}{x} \right) \right] := \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{1}{x} \right)}{1-x} dx = \text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{1}{x} \right) + \text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Mert, } \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{1}{x} \right)}{1-x} dx &= / u = \frac{1}{x}, x = \frac{1}{u}, dx = -\frac{du}{u^2} / = -\int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{1-\frac{1}{u}} \frac{du}{u^2} = -\int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{\frac{u-1}{u}} \frac{du}{u^2} = \\ &= -\int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{(u-1)u} du = -\left(\int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u-1} du - \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u} du \right) = -\int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u-1} du + \\ &+ \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u} du = \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{1-u} du + \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u} du = \text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)}(u) + \text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)}(u) \end{aligned}$$

$$7. \quad \mathcal{J}(1) \left[\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{1}{1-x} \right) \right] := \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{1}{1-x} \right)}{x} dx = -\text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{1}{1-x} \right) - \text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{1}{1-x} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Mert, } \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{1}{1-x} \right)}{x} dx &= / u = \frac{1}{1-x}, x = \frac{u-1}{u}, dx = \frac{du}{u^2} / = \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{\frac{u-1}{u}} \frac{du}{u^2} = \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u(u-1)} du = \\ &= \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u-1} du - \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u} du = -\int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{1-u} du - \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u} du = \\ &= -\text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)}(u) - \text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)}(u) = -\text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{1}{1-x} \right) - \text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{1}{1-x} \right) \end{aligned}$$

$$8. \quad \mathcal{J}(\bar{1}) \left[\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{1}{1-x} \right) \right] := \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{1}{1-x} \right)}{1-x} dx = \text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{1}{1-x} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Mert, } \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{1}{1-x} \right)}{1-x} dx &= / u = \frac{1}{1-x}, x = \frac{u-1}{u}, dx = \frac{du}{u^2} / = \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{1-\frac{u-1}{u}} \frac{du}{u^2} = -\int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{\frac{1}{u}} \frac{du}{u^2} = \\ &= \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u} du = \text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)}(u) = \text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{1}{1-x} \right) \end{aligned}$$

$$9. \quad \mathcal{J}(1) \left[\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{x}{x-1} \right) \right] := \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{x}{x-1} \right)}{x} dx = \text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{x}{x-1} \right) + \text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{x}{x-1} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Mert, } \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{x}{x-1} \right)}{x} dx &= / u = \frac{x}{x-1}, x = \frac{u}{u-1}, dx = -\frac{du}{(u-1)^2} / = -\int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{\frac{u}{u-1}} \frac{du}{(u-1)^2} = \\ &= -\int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u(u-1)} du = -\left(\int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u-1} du - \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u} du \right) = \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{1-u} du + \\ &+ \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u} du = \text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)}(u) + \text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)}(u) = \text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{x}{x-1} \right) + \text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{x}{x-1} \right) \end{aligned}$$

$$10. \quad \mathcal{J}(\bar{1}) \left[\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{x}{x-1} \right) \right] := \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{x}{x-1} \right)}{1-x} dx = -\text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{x}{x-1} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Mert, } \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{x}{x-1} \right)}{1-x} dx &= / u = \frac{x}{x-1}, x = \frac{u}{u-1}, dx = -\frac{du}{(u-1)^2} / = -\int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{1-\frac{u}{u-1}} \frac{du}{(u-1)^2} = \\ &= \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u-1} du = -\int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{1-u} du = -\text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)}(u) = -\text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{x}{x-1} \right) \end{aligned}$$

$$11. \quad \mathcal{J}(1) [\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{x-1}{x} \right)] := \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{x-1}{x} \right)}{x} dx = \text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{x-1}{x} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Mert, } \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{x-1}{x} \right)}{x} dx &= / u = \frac{x-1}{x}, x = \frac{1}{1-u}, dx = \frac{du}{(1-u)^2} / = \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{\frac{1}{1-u}} \frac{du}{(1-u)^2} = \\ &= \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{1-u} du = \text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)}(u) = \text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{x-1}{x} \right) \end{aligned}$$

$$12. \quad \mathcal{J}(\bar{1}) [\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{x-1}{x} \right)] := \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{x-1}{x} \right)}{1-x} dx = -\text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{x-1}{x} \right) - \text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{x-1}{x} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Mert, } \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{x-1}{x} \right)}{1-x} dx &= / u = \frac{x-1}{x}, x = \frac{1}{1-u}, dx = \frac{du}{(1-u)^2} / = \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{1 - \frac{1}{1-u}} \frac{du}{(1-u)^2} = \\ &= - \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u(1-u)} du = - \left(\int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{1-u} du + \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u} du \right) = - \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{1-u} du - \\ &- \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u} du = -\text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)}(u) - \text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)}(u) = -\text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{x-1}{x} \right) - \text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{x-1}{x} \right) \end{aligned}$$

A fenti eredményekben az a közös, hogy polilogaritmus függvény indexvektorában az s_2, \dots, s_r elemek nem változnak meg. Ez azt jelenti, hogy egy általános integráloperátornak tetszőleges általánosított polilogaritmus függvényen vett hatása mindig megkapható az integráloperátornak egy (szimpla) polilogaritmus függvényen vett hatásából. Formálisan:

$$\text{Ha } \mathcal{J}(a_1, \bar{a}_2, a_3, \dots) [\text{Li}_{(s_1)}(X)] = \text{Li}_{(t_1, t_2, \dots, t_k)}(X), \text{ akkor } \mathcal{J}(a_1, \bar{a}_2, a_3, \dots) [\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(X)] = \text{Li}_{(t_1, t_2, \dots, t_k, s_2, \dots, s_r)}(X)$$

$$\text{Például, ha } \mathcal{J}(a_1, \bar{a}_2, a_3, \dots) [\text{Li}_{(2)}(X)] = \text{Li}_{(1, 2, 4, 1)}(X), \text{ akkor } \mathcal{J}(a_1, \bar{a}_2, a_3, \dots) [\text{Li}_{(2, 3, 2)}(X)] = \text{Li}_{(1, 2, 4, 1, 3, 2)}(X).$$

Ezzen rendkívül jelentős tétel hatásával találkozhatunk az $\int \frac{\text{Li}_{(2,3)}(x) \text{Li}_{(2,1,4)}(x)}{x} dx$ integrál kiszámításakor is.

$\frac{\text{Li}_a(x)}{\text{Li}_b(x)} \mid \begin{array}{c} (2, 3) \\ (2, 1, 4) \end{array}$	$\xrightarrow{\text{init}} \frac{+ (2, 3)}{+ (3, 1, 4)}$	$\xrightarrow{\text{std}} \frac{- (1, 3)}{+ (4, 1, 4)}$	$\xrightarrow{\text{aty}} \frac{+ (3)}{+ (1, 4, 1, 4)}$	$\xrightarrow{\text{std}} \frac{- (2)}{+ (2, 4, 1, 4)}$	$\xrightarrow{\text{std}} \frac{+ (1)}{+ (3, 4, 1, 4)}$	$\xrightarrow{\text{veg}} \frac{- ()}{+ (1, 3, 4, 1, 4)}$
---	--	---	---	---	---	---

A tétel szerint elegendő csak az $\int \frac{\text{Li}_{(2,3)}(x) \text{Li}_{(2,1,4)}(x)}{x} dx$ integrált kiszámítani majd minden vektor végéhez az 1, 4 elemeket fűzni.

$\frac{\text{Li}_a(x)}{\text{Li}_b(x)} \mid \begin{array}{c} (2, 3) \\ (2) \end{array}$	$\xrightarrow{\text{init}} \frac{+ (2, 3)}{+ (3)}$	$\xrightarrow{\text{std}} \frac{- (1, 3)}{+ (4)}$	$\xrightarrow{\text{aty}} \frac{+ (3)}{+ (1, 4)}$	$\xrightarrow{\text{std}} \frac{- (2)}{+ (2, 4)}$	$\xrightarrow{\text{std}} \frac{+ (1)}{+ (3, 4)}$	$\xrightarrow{\text{veg}} \frac{- ()}{+ (1, 3, 4)}$
---	--	---	---	---	---	---

Tetszőleges integrálnál ugyanezt tapasztalhatjuk. Ha az $\int \frac{\text{Le}_{(2,3)}(x) \cdot \text{Li}_{(5, 2, 1)}(1-x)}{1-x} dx$ integrált számítjuk ki, akkor

$\frac{\text{Le}_a(x)}{\text{Li}_b(1-x)} \mid \begin{array}{c} (2, 3) \\ (5, 2, 1) \end{array}$	$\xrightarrow{\text{init}} \frac{+ (2, 3)}{- (6, 2, 1)}$	$\xrightarrow{\text{std}} \frac{- (1, 3)}{+ (1, 6, 2, 1)}$	$\xrightarrow{\text{aty}} \frac{+ (3)}{- (1, 1, 6, 2, 1)}$	$\xrightarrow{\text{std}} \frac{- (2)}{+ (1, 1, 1, 6, 2, 1)}$	$\xrightarrow{\text{std}} \frac{+ (1)}{+ (1, 2, 6, 2, 1)}$	$\xrightarrow{\text{veg}} \frac{- ()}{- (1, 1, 2, 6, 2, 1)}$
$- ()$	$+ (2, 1, 1, 1, 6, 2, 1)$	$+ (2, 1, 2, 6, 2, 1)$	$- (1, 1, 1, 1, 6, 2, 1)$	$- (1, 1, 2, 6, 2, 1)$	$- (1, 1, 2, 6, 2, 1)$	$- (1, 1, 2, 6, 2, 1)$

Most is elegendő lenne csak az $\int \frac{\text{Le}_{(2,3)}(x) \cdot \text{Li}_{(5)}(1-x)}{1-x} dx$ integrált kiszámítani:

$\frac{\text{Le}_a(x)}{\text{Li}_b(1-x)} \mid \begin{array}{c} (2, 3) \\ (5) \end{array}$	$\xrightarrow{\text{init}} \frac{+ (2, 3)}{- (6)}$	$\xrightarrow{\text{std}} \frac{- (1, 3)}{+ (1, 6)}$	$\xrightarrow{\text{aty}} \frac{+ (3)}{- (1, 1, 6)}$	$\xrightarrow{\text{std}} \frac{- (2)}{+ (1, 1, 1, 6)}$	$\xrightarrow{\text{std}} \frac{+ (1)}{- (1, 1, 1, 1, 6)}$	$\xrightarrow{\text{veg}} \frac{- ()}{+ (2, 1, 1, 1, 6)}$
$- (2, 6)$	$+ (1, 2, 6)$	$- (1, 1, 2, 6)$	$+ (2, 1, 2, 6)$	$- (1, 1, 2, 6)$	$- (1, 1, 2, 6)$	$+ (2, 1, 2, 6)$

Sőt, még ennél is többet állíthatunk: az $\int \frac{\text{Le}_{(2,3)}(x) \cdot \text{Li}_{(5)}(1-x)}{1-x} dx$ integrál helyett elegendő az $\int \frac{\text{Le}_{(2,3)}(x) \cdot \text{Li}_{(0)}(1-x)}{1-x} dx$ integrált kiszámítani. Ebből ugyanis az $\int \frac{\text{Le}_{(2,3)}(x) \cdot \text{Li}_{(5)}(1-x)}{1-x} dx$ integrál megkapató úgy, hogy az integráló sorban **minden** vektor utolsó elemét (ibolya) 5-tel megnöveljük.

$\frac{\text{Le}_a(x)}{\text{Li}_b(1-x)}$	$\frac{(2, 3)}{(0)}$	$\xrightarrow{\text{init}}$	$\frac{+(2, 3)}{-(1)}$	$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{-(1, 3)}{+(1, 1)}$	$\xrightarrow{\text{atv}}$	$\frac{+(3)}{-(1, 1, 1)}$	$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{-(2)}{+(1, 1, 1, 1)}$	$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{+(1)}{-(1, 1, 1, 1, 1)}$	$\xrightarrow{\text{veg}}$	$\frac{-()}{+(2, 1, 1, 1, 1)}$
							$-(2, 1)$		$+(1, 2, 1)$		$-(1, 1, 2, 1)$		$+(2, 1, 2, 1)$

Az $\int \frac{\text{Le}_{(4,2,3)}(x) \cdot \text{Li}_{(4,3,5,3)}(1-x)}{1-x} dx =$

$\frac{\text{Le}_a(x)}{\text{Li}_b(1-x)}$	$\frac{(4, 2, 3)}{(4, 3, 5, 3)}$	$\xrightarrow{\text{init}}$	$\frac{+(4, 2, 3)}{-(5, 3, 5, 3)}$	$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{-(3, 2, 3)}{+(1, 5, 3, 5, 3)}$	$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{+(2, 2, 3)}{-(1, 1, 5, 3, 5, 3)}$	$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{-(1, 2, 3)}{+(1, 1, 1, 5, 3, 5, 3)}$	$\xrightarrow{\text{atv}}$
$\xrightarrow{\text{atv}}$	$\frac{+(2, 3)}{-(1, 1, 1, 1, 5, 3, 5, 3)}$		$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{-(1, 3)}{+(1, 1, 1, 1, 1, 5, 3, 5, 3)}$		$\xrightarrow{\text{atv}}$	$\frac{+(3)}{-(1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 3, 5, 3)}$	$\xrightarrow{\text{std}}$		
	$-(2, 1, 1, 5, 3, 5, 3)$			$+(1, 2, 1, 1, 5, 3, 5, 3)$			$-(1, 1, 2, 1, 1, 5, 3, 5, 3)$		$-(2, 1, 1, 1, 1, 5, 3, 5, 3)$	
							$-(2, 2, 1, 1, 5, 3, 5, 3)$			
$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{-(2)}{+(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 3, 5, 3)}$		$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{+(1)}{-(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 3, 5, 3)}$		$\xrightarrow{\text{veg}}$	$\frac{-()}{+(2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 3, 5, 3)}$			
	$+(1, 1, 1, 2, 1, 1, 5, 3, 5, 3)$			$-(1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 5, 3, 5, 3)$			$+(2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 5, 3, 5, 3)$			
	$+(1, 2, 1, 1, 1, 1, 5, 3, 5, 3)$			$-(1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 5, 3, 5, 3)$			$+(2, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 5, 3, 5, 3)$			
	$+(1, 2, 2, 1, 1, 5, 3, 5, 3)$			$-(1, 1, 2, 2, 1, 1, 5, 3, 5, 3)$			$+(2, 1, 2, 2, 1, 1, 5, 3, 5, 3)$			

integrál megkapható az $\int \frac{\text{Le}_{(4,2,3)}(x) \cdot \text{Li}_{(0)}(1-x)}{1-x} dx =$

$\frac{\text{Le}_a(x)}{\text{Li}_b(1-x)}$	$\frac{(4, 2, 3)}{(0)}$	$\xrightarrow{\text{init}}$	$\frac{+(4, 2, 3)}{-(1)}$	$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{-(3, 2, 3)}{+(1, 1)}$	$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{+(2, 2, 3)}{-(1, 1, 1)}$	$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{-(1, 2, 3)}{+(1, 1, 1, 1)}$	$\xrightarrow{\text{atv}}$	$\frac{+(2, 3)}{-(1, 1, 1, 1, 1)}$	$\xrightarrow{\text{std}}$	
											$-(2, 1, 1, 1)$		
$\frac{-(1, 3)}{+(1, 1, 1, 1, 1, 1)}$	$\xrightarrow{\text{atv}}$	$\frac{+(3)}{-(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)}$	$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{-(2)}{+(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)}$	$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{+(1)}{-(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)}$	$\xrightarrow{\text{veg}}$	$\frac{-()}{+(2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)}$					
$+(1, 2, 1, 1, 1)$		$-(1, 1, 2, 1, 1, 1)$		$+(1, 1, 1, 2, 1, 1, 1)$		$-(1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1)$		$+(2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1)$					
		$-(2, 1, 1, 1, 1, 1)$		$+(1, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$		$-(1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$		$+(2, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$					
		$-(2, 2, 1, 1, 1, 1)$		$+(1, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$		$-(1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$		$+(2, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$					

integrálból úgy, hogy az integráló sorban minden vektor utolsó eleméhez hozzáadunk 4-et és a kapott vektor végéhez az 3, 5, 3 elemeket fűzzük:

$\frac{\text{Le}_a(x)}{\text{Li}_b(1-x)}$	$\frac{(4, 2, 3)}{(0+4, 3, 5, 3)}$	$\xrightarrow{\text{init}}$	$\frac{+(4, 2, 3)}{-(1+4, 3, 5, 3)}$	$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{-(3, 2, 3)}{+(1, 1+4, 3, 5, 3)}$	$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{+(2, 2, 3)}{-(1, 1, 1+4, 3, 5, 3)}$	$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{-(1, 2, 3)}{+(1, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)}$	$\xrightarrow{\text{atv}}$	
$\xrightarrow{\text{atv}}$	$\frac{+(2, 3)}{-(1, 1, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)}$		$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{-(1, 3)}{+(1, 1, 1, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)}$		$\xrightarrow{\text{atv}}$	$\frac{+(3)}{-(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)}$	$\xrightarrow{\text{std}}$			
	$-(2, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)$			$+(1, 2, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)$			$-(1, 1, 2, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)$		$-(2, 1, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)$		$-(2, 2, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)$
$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{-(2)}{+(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)}$		$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{+(1)}{-(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)}$		$\xrightarrow{\text{veg}}$	$\frac{-()}{+(2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)}$				
	$+(1, 1, 1, 2, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)$			$-(1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)$			$+(2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)$				
	$+(1, 2, 1, 1, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)$			$-(1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)$			$+(2, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)$				
	$+(1, 2, 2, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)$			$-(1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)$			$+(2, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)$				

A fentieket az alábbi tételben foglalhatjuk össze:

Tétel. Az $L_a = \text{Li}/\text{Le}$, $L_b = \text{Li}/\text{Le}$ függvényekkel, illetve $X_a, X_b = x/1 - x/\frac{1}{x}/\frac{1}{1-x}/\frac{x}{x-1}/\frac{x-1}{x}, \dots$ változókkal felírt általános

$$\int \frac{L_a(X_a) \cdot L_b(X_b)}{X} dx$$

integrál, ahol L_a mindig az integrálsorba, L_b pedig a deriválsorba kerülő függvényt jelöli, egyszerűen megkapható az

$$\int \frac{L_a(X_a) \cdot L_{(0)}(X_b)}{X} dx$$

integrálból. Ezt nevezzük az *általános polilogaritmikus integrálok redukciójának*.

Példa: Az **(A)**

$$\int \frac{\text{Le}_{(5,3,2)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(2,4)}(x)}{1-x} dx \quad \left[\begin{array}{cc} +b & -(+b) \\ -(+b + +b) & -(+b) \end{array} \right]$$

általános integrálási feladat helyett elegendő az **(A0)**

$$\int \frac{\text{Le}_{(5,3,2)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(0)}(x)}{1-x} dx \quad \left[\begin{array}{cc} +b & -(+b) \\ -(+b + +b) & -(+b) \end{array} \right]$$

feladatot megoldani, majd az integrálsorban minden vektor utolsó elemét **5-tel megnövelni**, majd a **(3, 2)** vektorral a végén **megtoldani**. Az **(A0) megoldása**:

$\frac{\text{Le}_a(1-x)}{\text{Li}_b(x)} \mid \begin{pmatrix} 2, 4 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\xrightarrow{\text{init}} \frac{+(2, 4)}{+(1, 0)}$	$\xrightarrow{\text{std}} \frac{-(1, 4)}{-(1, 1, 0)}$	$\xrightarrow{\text{atv}} \frac{+(4)}{+(1, 1, 1, 0)}$	$\xrightarrow{\text{std}} \frac{-(3)}{-(1, 1, 1, 1, 0)}$	$\xrightarrow{\text{std}} \frac{+(2)}{+(1, 1, 1, 1, 1, 0)}$	$\xrightarrow{\text{std}}$
$\frac{-(1)}{-(1, 1, 1, 1, 1, 1, 0)}$	$\xrightarrow{\text{veg}} \frac{+()}{+(2, 1, 1, 1, 1, 1, 0)}$					
$\frac{-(1, 1, 1, 1, 1, 1, 0)}{-(1, 1, 1, 2, 1, 0)}$	$\frac{+(2, 1, 1, 1, 1, 1, 0)}{+(2, 1, 1, 2, 1, 0)}$					

A szükséges növeléssel és toldással megkapjuk **(A)** az megoldását:

$\frac{\text{Le}_a(1-x)}{\text{Li}_b(x)} \mid \begin{pmatrix} 2, 4 \\ 0+5, 3, 2 \end{pmatrix}$	$\xrightarrow{\text{init}} \frac{+(2, 4)}{+(1, 0+5, 3, 2)}$	$\xrightarrow{\text{std}} \frac{-(1, 4)}{-(1, 1, 0+5, 3, 2)}$	$\xrightarrow{\text{atv}} \frac{+(4)}{+(1, 1, 1, 0+5, 3, 2)}$	$\xrightarrow{\text{std}}$
$\frac{-(3)}{-(1, 1, 1, 1, 0+5, 3, 2)}$	$\xrightarrow{\text{std}} \frac{+(2)}{+(1, 1, 1, 1, 1, 0+5, 3, 2)}$	$\xrightarrow{\text{std}} \frac{-(1)}{-(1, 1, 1, 1, 1, 1, 0+5, 3, 2)}$	$\xrightarrow{\text{veg}} \frac{+()}{+(2, 1, 1, 1, 1, 1, 0+5, 3, 2)}$	
$\frac{-(1, 2, 1, 0+5, 3, 2)}{-(1, 2, 1, 2, 1, 0+5, 3, 2)}$	$\frac{+(1, 1, 1, 1, 1, 1, 0+5, 3, 2)}{+(1, 1, 2, 1, 0+5, 3, 2)}$	$\frac{-(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0+5, 3, 2)}{-(1, 1, 1, 2, 1, 0+5, 3, 2)}$	$\frac{+(2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0+5, 3, 2)}{+(2, 1, 1, 2, 1, 0+5, 3, 2)}$	

5 Az $\int_0^{\frac{1}{2}} x^n \text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(x) dx$ ($s_1, \dots, s_r \geq 1$) határozatlan integrál kiszámítása a $[0, \frac{1}{2}]$ intervallumon

Az $\int x^n \text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(x) dx$ integrál kiszámítása során használni fogjuk az $\text{Li}_{(\underbrace{a, \dots, a}_n, \underbrace{b, \dots, b}_m)}(x) = \text{Li}_{(a^n, b^m, \dots)}(x)$ jelölést,

illetve az alábbi azonosságokat

$$\text{Li}_{(0^m)}\left(\frac{x}{x-1}\right) = (-x)^m \quad \left(0 < x < \frac{1}{2}\right) \quad (1)$$

$$\text{Li}_{(0^m)}\left(\frac{x}{x-1}\right) \cdot \text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}\left(\frac{x}{x-1}\right) = \text{Li}_{(0^m, s_1, s_2, \dots, s_r)}\left(\frac{x}{x-1}\right) \quad \left(0 < x < \frac{1}{2}\right) \quad (2)$$

A fenti eredményekre támaszkodva a keresett határozatlan integrál egy lehetséges kiszámítása az alábbi:

$$\int x^n \text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(x) \, dx = \int \frac{x^{n+1}}{x} \text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(x) \, dx = \int \frac{(-1)^{n+1} \text{Li}_{(0^{n+1})} \left(\frac{x}{x-1} \right) (-1)^{|s|} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{s}} \text{Li}_{\mathbf{k}} \left(\frac{x}{x-1} \right)}{x} \, dx =$$

$$= (-1)^{|s|+n+1} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{s}} \int \frac{\text{Li}_{(0^{n+1})} \left(\frac{x}{x-1} \right) \text{Li}_{\mathbf{k}} \left(\frac{x}{x-1} \right)}{x} \, dx = (-1)^{|s|+n+1} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{s}} \int \frac{\text{Li}_{(0^{n+1}, \mathbf{k})} \left(\frac{x}{x-1} \right)}{x} \, dx = \int u = \frac{x}{x-1},$$

$$, x = \frac{u}{u-1}, \, dx = -\frac{du}{(u-1)^2} \int = (-1)^{|s|+n} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{s}} \int \frac{\text{Li}_{(0^{n+1}, \mathbf{k})}(u)}{\frac{u}{u-1}} \frac{du}{(u-1)^2} = (-1)^{|s|+n} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{s}} \int \frac{\text{Li}_{(0^{n+1}, \mathbf{k})}(u)}{u(u-1)} \, du =$$

$$= (-1)^{|s|+n} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{s}} \int \left(\frac{\text{Li}_{(0^{n+1}, \mathbf{k})}(u)}{u-1} - \frac{\text{Li}_{(0^{n+1}, \mathbf{k})}(u)}{u} \right) \, du = (-1)^{|s|+n} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{s}} \int \left(-\frac{\text{Li}_{(0^{n+1}, \mathbf{k})}(u)}{1-u} - \frac{\text{Li}_{(0^{n+1}, \mathbf{k})}(u)}{u} \right) \, du =$$

$$= (-1)^{|s|+n+1} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{s}} \int \left(\frac{\text{Li}_{(0^{n+1}, \mathbf{k})}(u)}{1-u} + \frac{\text{Li}_{(0^{n+1}, \mathbf{k})}(u)}{u} \right) \, du = (-1)^{|s|+n+1} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{s}} [\text{Li}_{(1, 0^{n+1}, \mathbf{k})}(u) + \text{Li}_{(1, 0^n, \mathbf{k})}(u)] =$$

$$= (-1)^{|s|+n+1} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{s}} \left[\text{Li}_{(1, 0^{n+1}, \mathbf{k})} \left(\frac{x}{x-1} \right) + \text{Li}_{(1, 0^n, \mathbf{k})} \left(\frac{x}{x-1} \right) \right]$$

6 Az $\int x^n \text{Li}_{(b_1, b_2, \dots, b_t)}(x) \text{Li}_{(a_1, a_2, \dots, a_r)}(1-x) \, dx$ ($a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_t \geq 1$) határozatlan integrál kiszámítása a $[0, \frac{1}{2}]$ intervallumon

Az alábbi azonosságokat használjuk

$$\text{Li}_{\mathbf{s}}(x) = (-1)^{|s|} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{s}} \text{Li}_{\mathbf{k}} \left(\frac{x}{x-1} \right) \quad \left(0 < x < \frac{1}{2} \right) \quad (\text{Landen's connection}) \quad (3)$$

$$\text{Li}_{(0^m)} \left(\frac{x}{x-1} \right) = (-x)^m \quad \left(0 < x < \frac{1}{2} \right) \quad (4)$$

$$\text{Li}_{(0^m)} \left(\frac{x}{x-1} \right) \cdot \text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{x}{x-1} \right) = \text{Li}_{(0^m, s_1, s_2, \dots, s_r)} \left(\frac{x}{x-1} \right) \quad \left(0 < x < \frac{1}{2} \right) \quad (5)$$

Az $x^n \text{Li}_{\mathbf{b}}(x) \text{Li}_{\mathbf{a}}(1-x)$ integranduszt a fenti azonosságok segítségével átalakítjuk.

$$x^n \text{Li}_{\mathbf{b}}(x) \text{Li}_{\mathbf{a}}(1-x) = \frac{x^{n+1}}{x} \text{Li}_{\mathbf{b}}(x) \text{Li}_{\mathbf{a}}(1-x) = \frac{(-1)^{n+1} \text{Li}_{(0^{n+1})} \left(\frac{x}{x-1} \right) (-1)^{|\mathbf{b}|} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{b}} \text{Li}_{\mathbf{k}} \left(\frac{x}{x-1} \right) \text{Li}_{\mathbf{a}}(1-x)}{x} =$$

$$= (-1)^{|\mathbf{b}|+n+1} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{b}} \frac{\text{Li}_{(0^{n+1})} \left(\frac{x}{x-1} \right) \text{Li}_{\mathbf{k}} \left(\frac{x}{x-1} \right) \text{Li}_{\mathbf{a}}(1-x)}{x} = (-1)^{|\mathbf{b}|+n+1} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{b}} \frac{\text{Li}_{(0^{n+1}, \mathbf{k})} \left(\frac{x}{x-1} \right) \text{Li}_{\mathbf{a}}(1-x)}{x} =$$

$$= (-1)^{|\mathbf{b}|+n+1} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{b}} \frac{\text{Li}_{(0^{n+1}, \mathbf{k})} \left(\frac{x}{x-1} \right) \text{Li}_{\mathbf{a}}(1-x)}{x}$$

Ezzel az $\int x^n \text{Li}_{\mathbf{b}}(x) \text{Li}_{\mathbf{a}}(1-x) dx$ integrált visszavezettük $\int \frac{\text{Li}_{(0^{t+1}, \mathbf{k})} \left(\frac{x}{x-1} \right) \text{Li}_{\mathbf{a}}(1-x)}{x} dx$ integrálokra, így elegendő az

$$\int \frac{\text{Li}_{\mathbf{a}}(1-x) \text{Li}_{\mathbf{b}} \left(\frac{x}{x-1} \right)}{x} dx$$

általános integrálokat megadni. Feladatunk az inicializálás, standard lépés, 1-átvitel és 1-ürítés kiszámítása lenne. Az alábbi indulást választjuk

\mathcal{D}	$\text{Li}_{(a_1, a_2, \dots, a_n)}(1-x)$	\dots	\dots
\mathcal{J}	$\frac{\text{Li}_{(b_1, b_2, \dots, b_m)} \left(\frac{x}{x-1} \right)}{x}$	\dots	\dots

Inicializálás

\mathcal{D}	$\text{Li}_{(a_1, a_2, \dots, a_r)}(1-x)$	\dots	\dots
\mathcal{J}	$\frac{\text{Li}_{(\textcolor{red}{b}_1, \textcolor{red}{b}_2, \dots, \textcolor{red}{b}_t)} \left(\frac{x}{x-1} \right)}{x}$	$\text{Li}_{(\textcolor{red}{1}, \textcolor{red}{b}_1, \textcolor{red}{b}_2, \dots, \textcolor{red}{b}_t)} \left(\frac{x}{x-1} \right) + \text{Li}_{(\textcolor{red}{1}+\textcolor{red}{b}_1, \textcolor{red}{b}_2, \dots, \textcolor{red}{b}_t)} \left(\frac{x}{x-1} \right)$	\dots

$\mathbf{b} \rightarrow {}^+\mathbf{b} + {}_+\mathbf{b}$, azaz $(\lfloor b_1, \dots \rfloor \xrightarrow{\text{init}} (\lfloor 1, b_1, \dots \rfloor$

Ez azt jelenti, hogy rögtön az inicializáláskor hasadás lép fel.

Standard lépés

$\textcolor{blue}{\text{Li}_{(a_1, a_2, \dots, a_n)}(1-x)}$	\dots	$\text{Li}_{(\textcolor{red}{3}, \dots)}(1-x)$	$-\frac{\text{Li}_{(2, \dots)}(1-x)}{1-x}$	$-\text{Li}_{(2, \dots)}(x)$	\dots	\dots
$\frac{\textcolor{blue}{\text{Li}_{(b_1, b_2, \dots, b_t)} \left(\frac{x}{x-1} \right)}}{x}$	\dots	\dots	$\text{Li}_{(\textcolor{red}{5}, \dots)} \left(\frac{x}{x-1} \right)$	$\frac{\text{Li}_{(5, \dots)} \left(\frac{x}{x-1} \right)}{1-x}$	$-\text{Li}_{(\textcolor{red}{1}, \textcolor{red}{5}, \dots)} \left(\frac{x}{x-1} \right)$	\dots

$\mathbf{b} \rightarrow {}^+\mathbf{b}$, azaz $(a, \dots \lfloor b, \dots \rfloor \xrightarrow{\text{std}} (a-1, \dots \lfloor 1, b, \dots \rfloor$

1-átvitel

$\text{Li}_{(a_1, a_2, \dots, a_n)}(1-x)$...	$\text{Li}_{(\mathbf{1}, \mathbf{3}, \dots)}(1-x)$	$-\frac{\text{Li}_{(3, \dots)}(1-x)}{x}$	$-\text{Li}_{(\mathbf{3}, \dots)}(x)$
$-\frac{\text{Li}_{(0)}\left(\frac{x}{x-1}\right)}{1-x}$	$\text{Li}_{(\mathbf{5}, \dots)}\left(\frac{x}{x-1}\right)$	$\frac{\text{Li}_{(5, \dots)}\left(\frac{x}{x-1}\right)}{x}$	$\text{Li}_{(\mathbf{1}, \mathbf{5}, \dots)}\left(\frac{x}{x-1}\right) + \text{Li}_{(\mathbf{1}+\mathbf{5}, \dots)}\left(\frac{x}{x-1}\right)$...
$\mathbf{b} \rightarrow -(\mathbf{+b} + \mathbf{+b})$, azaz $(1, a, \dots \lfloor b, \dots) \xrightarrow{\text{atv}} \begin{matrix} -(a, \dots \lfloor 1, b, \dots) \\ -(a, \dots \lfloor b+1, \dots) \end{matrix}$						

1-ürítés

$\text{Li}_{(a_1, a_2, \dots, a_n)}(1-x)$...	$\text{Li}_{(\mathbf{1})}(1-x)$	$-\frac{\text{Li}_{(0)}(1-x)}{1-x} = -\frac{1}{x}$	$-\text{Li}_{(\mathbf{0})}(x) = -1$	0
$-\frac{\text{Li}_{(0)}\left(\frac{x}{x-1}\right)}{1-x}$	$\text{Li}_{(\mathbf{5}, \dots)}\left(\frac{x}{x-1}\right)$	$\frac{\text{Li}_{(5, \dots)}\left(\frac{x}{x-1}\right)}{x}$	$\text{Li}_{(\mathbf{1}, \mathbf{5}, \dots)}\left(\frac{x}{x-1}\right) + \text{Li}_{(\mathbf{1}+\mathbf{5}, \dots)}\left(\frac{x}{x-1}\right)$
$\mathbf{b} \rightarrow -(\mathbf{+b} + \mathbf{+b})$, azaz $(1 \lfloor b, \dots) \xrightarrow{\text{atv}} \begin{matrix} -(\lfloor 1, b, \dots) \\ -(\lfloor b+1, \dots) \end{matrix}$					

Az $\int \frac{\text{Li}_{\mathbf{a}}(1-x) \text{Li}_{\mathbf{b}}\left(\frac{x}{x-1}\right)}{x} dx$ feladat fázisátmenet mátrixa

$$\begin{bmatrix} \xrightarrow{\text{init}} & \xrightarrow{\text{std}} \\ \xrightarrow{\text{atv}} & \xrightarrow{\text{veg}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{+b} + \mathbf{+b} & \mathbf{+b} \\ -(\mathbf{+b} + \mathbf{+b}) & -(\mathbf{+b} + \mathbf{+b}) \end{bmatrix}$$

1. Példa: $\int \frac{\text{Li}_{(2)}(1-x) \text{Li}_{(3)}\left(\frac{x}{x-1}\right)}{x} dx$

$$\frac{\text{Li}_a(1-x)}{\text{Le}_b\left(\frac{x}{x-1}\right)} \Big| \begin{matrix} (2) \\ (3) \end{matrix} \xrightarrow{\text{init}} \frac{(2)}{+(1,3)} \xrightarrow{\text{std}} \frac{-(1)}{+(1,1,3)} \xrightarrow{\text{veg}} \frac{()}{\begin{matrix} -(1,1,1,3) \\ -(1,1,4) \\ -(2,1,3) \\ -(2,4) \end{matrix}}$$

Ha redukciót alkalmazunk, akkor

$$\frac{\text{Li}_a(1-x)}{\text{Le}_b\left(\frac{x}{x-1}\right)} \Big| \begin{matrix} (2) \\ (0) \end{matrix} \xrightarrow{\text{init}} \frac{(2)}{+(1,0)} \xrightarrow{\text{std}} \frac{-(1)}{+(1,1,0)} \xrightarrow{\text{veg}} \frac{()}{\begin{matrix} -(1,1,1,0) \\ -(1,1,1) \\ -(2,1,0) \\ -(2,1) \end{matrix}}$$

Most már rátérhetünk $\int x^n \text{Li}_{(3)}(x) \text{Li}_{(2,2)}(1-x) dx$ kiszámítására

$$\text{I. } \int x^2 \text{Li}_{(3)}(x) \text{Li}_{(2,2)}(1-x) dx = (-1)^{1+2+1} \sum_{\mathbf{k} \succeq (3)} \int \frac{\text{Li}_{(0^2, \mathbf{k})}\left(\frac{x}{x-1}\right) \text{Li}_{(2,2)}(1-x)}{x} dx$$

$$\{\mathbf{k} : (3) \preceq \mathbf{k}\} = \{(3), (1, 2), (2, 1), (1, 1, 1)\}$$

II. Redukciót alkalmazva a $(0, \mathbf{k})$ vektorral az integrálsorban, elegendő az $\int \frac{\text{Li}_{(0)}\left(\frac{x}{x-1}\right) \text{Li}_{(2,2)}(1-x)}{x} dx$ integrált kiszámítani

$\text{Li}_a(1-x)$	$(2, 2)$	$\xrightarrow{\text{init}}$	$(2, 2)$	$\xrightarrow{\text{std}}$	$-(1, 2)$	$\xrightarrow{\text{atv}}$	(2)	$\xrightarrow{\text{std}}$	$-(1)$	$\xrightarrow{\text{veg}}$	$()$
$\text{Le}_b\left(\frac{x}{x-1}\right)$	(0)		$+(1, 0)$		$+(1, 1, 0)$		$-(1, 1, 1, 0)$		$-(1, 1, 1, 1, 0)$		$+(1, 1, 1, 1, 1, 0)$
			$+(1)$		$+(1, 1)$		$-(1, 1, 1)$		$-(1, 1, 1, 1)$		$+(1, 1, 1, 1, 1)$
							$-(2, 1, 0)$		$-(1, 2, 1, 0)$		$+(1, 1, 2, 1, 0)$
							$-(2, 1)$		$-(1, 2, 1)$		$+(1, 1, 2, 1)$
											$+(2, 1, 1, 1, 0)$
											$+(2, 1, 1, 1)$
											$+(2, 2, 1, 0)$
											$+(2, 2, 1)$

7 Az $\int x^n \text{Li}_{(b_1, b_2, \dots, b_t)}(x) \text{Li}_{(a_1, a_2, \dots, a_r)}(1-x) \, dx$ ($a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_t \geq 1$) határozatlan integrál kiszámítása az $[\frac{1}{2}, 1]$ intervallumon

Az alábbi azonosságokat használjuk

$$\text{Li}_s(1-x) = (-1)^{|s|} \sum_{\mathbf{k} \succ \mathbf{s}} \text{Li}_{\mathbf{k}}\left(\frac{x-1}{x}\right) \quad \left(\frac{1}{2} < x < 1\right) \quad (\text{Landen's connection}) \quad (6)$$

$$\frac{1}{x^n} = \frac{\text{Le}_{\underbrace{(0, \dots, 0)}_n}(1-x)}{1-x} \quad (0 < x < 1) \implies \frac{\text{Le}_{\underbrace{(0, \dots, 0)}_{n+1}}\left(\frac{x-1}{x}\right)}{x-1} = x^n \quad \left(\frac{1}{2} < x < 1\right) \quad (7)$$

$$\text{Le}_{(0^{n+1})} \left(\frac{x-1}{x} \right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \text{Li}_{(0^{k+1})} \left(\frac{x-1}{x} \right) \quad \left(\frac{1}{2} < x < 1 \right) \quad (8)$$

$$\text{Li}_{(0^m)}\left(\frac{x-1}{x}\right) \cdot \text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}\left(\frac{x-1}{x}\right) = \text{Li}_{(0^m, s_1, s_2, \dots, s_r)}\left(\frac{x-1}{x}\right) \quad \left(\frac{1}{2} < x < 1\right) \quad (9)$$

Most is átalakítjuk a $x^n \text{Li}_{\mathbf{b}}(x) \text{Li}_{\mathbf{a}}(1-x)$ integranduszt a fenti azonosságokat felhasználva.

$$x^n \text{Li}_{\mathbf{b}}(x) \text{Li}_{\mathbf{a}}(1-x) = \frac{\text{Le}_{(0^{n+1})}\left(\frac{x-1}{x}\right)}{x-1} \text{Li}_{\mathbf{b}}(x) (-1)^{|\mathbf{a}|} \sum_{\mathbf{k} \succ \mathbf{a}} \text{Li}_{\mathbf{k}}\left(\frac{x-1}{x}\right) = (-1)^{|\mathbf{a}|} \sum_{\mathbf{k} \succ \mathbf{a}} \frac{\text{Le}_{(0^{n+1})}\left(\frac{x-1}{x}\right) \text{Li}_{\mathbf{k}}\left(\frac{x-1}{x}\right) \text{Li}_{\mathbf{b}}(x)}{x-1} =$$

$$= (-1)^{|\mathbf{a}|} \sum_{\mathbf{k} \succ \mathbf{a}} \frac{\sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \text{Li}_{(0^{l+1})} \left(\frac{x-1}{x} \right) \text{Li}_{\mathbf{k}} \left(\frac{x-1}{x} \right) \text{Li}_{\mathbf{b}}(x)}{x-1} = (-1)^{|\mathbf{a}|+1} \sum_{\mathbf{k} \succ \mathbf{a}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \frac{\text{Li}_{(0^{l+1}, \mathbf{k})} \left(\frac{x-1}{x} \right) \text{Li}_{\mathbf{b}}(x)}{1-x} =$$

$$= (-1)^{|\mathbf{a}|+1} \sum_{\mathbf{k} \succ \mathbf{a}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \frac{\text{Li}_{(0^{l+1}, \mathbf{k})} \left(\frac{x-1}{x} \right) \text{Li}_{\mathbf{b}}(x)}{1-x} = (-1)^{|\mathbf{a}|+1} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \sum_{\mathbf{k} \succ \mathbf{a}} \frac{\text{Li}_{(0^{l+1}, \mathbf{k})} \left(\frac{x-1}{x} \right) \text{Li}_{\mathbf{b}}(x)}{1-x}$$

Ezzel az $\int x^n \text{Li}_{\mathbf{b}}(x) \text{Li}_{\mathbf{a}}(1-x) dx$ integrált visszavezettük $\int \frac{\text{Li}_{(\mathbf{0}^{t+1}, \mathbf{k})}(\frac{x}{x-1}) \text{Li}_{\mathbf{b}}(x)}{1-x} dx$ integrálokra, így elegendő az

$$\int \frac{\text{Li}_{\mathbf{a}}\left(\frac{x-1}{x}\right) \text{Li}_{\mathbf{b}}(x)}{1-x} dx$$

általános integrálokat megadni. Feladatunk az inicializálás, standard lépés, 1-átvitel és 1-ürítés kiszámítása lenne. Az alábbi indulást választjuk

\mathcal{D}	$\text{Li}_{(b_1, b_2, \dots, b_t)}(x)$	\dots	\dots
\mathcal{I}	$\frac{\text{Li}_{(a_1, a_2, \dots, a_r)}\left(\frac{x-1}{x}\right)}{1-x}$	\dots	\dots

Inicializálás

\mathcal{D}	$\text{Li}_{(b_1, b_2, \dots, b_t)}(x)$	\dots	\dots
\mathcal{I}	$\frac{\text{Li}_{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r)}\left(\frac{x-1}{x}\right)}{1-x}$	$-\text{Li}_{(\mathbf{1}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r)}\left(\frac{x-1}{x}\right) - \text{Li}_{(\mathbf{1}+\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r)}\left(\frac{x-1}{x}\right)$	\dots

$\mathbf{a} \rightarrow -({}^+\mathbf{a} + {}^+\mathbf{a})$, azaz $(\lfloor a_1, \dots) \xrightarrow{\text{init}} \begin{pmatrix} \lfloor 1, a_1, \dots \\ \lfloor 1 + a_1, \dots \end{pmatrix}$

Ez azt jelenti, hogy rögtön az inicializáláskor hasadás lép fel.

Standard lépés

$\text{Li}_{(b_1, b_2, \dots, b_t)}(x)$	\dots	$\text{Li}_{(\mathbf{3}, \dots)}(x)$	$\frac{\text{Li}_{(2, \dots)}(x)}{x}$	$\text{Li}_{(\mathbf{2}, \dots)}(x)$	\dots	\dots
$\frac{\text{Li}_{(a_1, a_2, \dots, a_n)}\left(\frac{x-1}{x}\right)}{1-x}$	\dots	\dots	$\text{Li}_{(\mathbf{5}, \dots)}\left(\frac{x-1}{x}\right)$	$\frac{\text{Li}_{(5, \dots)}\left(\frac{x-1}{x}\right)}{x}$	$\text{Li}_{(\mathbf{1}, \mathbf{5}, \dots)}\left(\frac{x-1}{x}\right)$	\dots

$\mathbf{a} \rightarrow {}^+\mathbf{a}$, azaz $(a, \dots \lfloor b, \dots) \xrightarrow{\text{std}} (a-1, \dots \lfloor 1, b, \dots)$

1-átvitel

$\text{Li}_{(b_1, b_2, \dots, b_t)}(x)$	\dots	$\text{Li}_{(\mathbf{1}, \mathbf{3}, \dots)}(x)$	$\frac{\text{Li}_{(3, \dots)}(x)}{1-x}$	$\text{Li}_{(\mathbf{3}, \dots)}(x)$	\dots	\dots
$\frac{\text{Li}_{(a_1, a_2, \dots, a_n)}\left(\frac{x-1}{x}\right)}{1-x}$	\dots	\dots	$\text{Li}_{(\mathbf{5}, \dots)}\left(\frac{x-1}{x}\right)$	$\frac{\text{Li}_{(5, \dots)}\left(\frac{x-1}{x}\right)}{1-x}$	$-\text{Li}_{(\mathbf{1}, \mathbf{5}, \dots)}\left(\frac{x-1}{x}\right) - \text{Li}_{(\mathbf{1}+\mathbf{5}, \dots)}\left(\frac{x-1}{x}\right)$	\dots

$\mathbf{a} \rightarrow -({}^+\mathbf{a} + {}^+\mathbf{a})$, azaz $(1, a, \dots \lfloor b, \dots) \xrightarrow{\text{aty}} \begin{pmatrix} -(a, \dots \lfloor 1, b, \dots) \\ -(a, \dots \lfloor b+1, \dots) \end{pmatrix}$

1-ürítés

$\text{Li}_{(b_1, b_2, \dots, b_t)}(x)$	\dots	$\text{Li}_{(\mathbf{1})}(x)$	$-\frac{\text{Li}_{(0)}(x)}{x} = \frac{1}{1-x}$	$\text{Li}_{(\mathbf{0})}(x) = 1$	0	\dots
$\frac{\text{Li}_{(a_1, a_2, \dots, a_n)}\left(\frac{x-1}{x}\right)}{1-x}$	\dots	\dots	$\text{Li}_{(\mathbf{5}, \dots)}\left(\frac{x-1}{x}\right)$	$\frac{\text{Li}_{(5, \dots)}\left(\frac{x-1}{x}\right)}{1-x}$	$-\text{Li}_{(\mathbf{1}, \mathbf{5}, \dots)}\left(\frac{x-1}{x}\right) - \text{Li}_{(\mathbf{1}+\mathbf{5}, \dots)}\left(\frac{x-1}{x}\right)$	\dots

$\mathbf{a} \rightarrow -({}^+\mathbf{a} + {}^+\mathbf{a})$, azaz $(1 \lfloor a, \dots) \xrightarrow{\text{aty}} \begin{pmatrix} -(1 \lfloor a, \dots) \\ -(1 \lfloor a+1, \dots) \end{pmatrix}$

Az $\int \frac{\text{Li}_{\mathbf{a}}\left(\frac{x-1}{x}\right) \text{Li}_{\mathbf{b}}(x)}{1-x} dx$ feladat fázisátmenet mátrixa

$$\begin{bmatrix} \xrightarrow{\text{init}} & \xrightarrow{\text{std}} \\ \xrightarrow{\text{aty}} & \xrightarrow{\text{veg}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(+\mathbf{a} + +\mathbf{a}\right) & +\mathbf{a} \\ -\left(+\mathbf{a} + +\mathbf{a}\right) & -\left(+\mathbf{a} + +\mathbf{a}\right) \end{bmatrix}$$

Megjegyzés: Az $\int \frac{\text{Li}_{\mathbf{a}}\left(\frac{x-1}{x}\right) \text{Li}_{\mathbf{b}}(x)}{1-x} dx$ integrálási feladat megkapható az $\int \frac{\text{Li}_{\mathbf{b}}\left(\frac{x}{x-1}\right) \text{Li}_{\mathbf{a}}(1-x)}{x} dx$ integrálási feladatból az $\mathbf{a} \leftrightarrow \mathbf{b}$ pozíciócserével, és $x \leftrightarrow 1-x$ tükrözés együttesével.