

1 Parciális integrálás módszere

Legyen \mathcal{D} egy differenciáloperátor, vagyis egy olyan *lineáris* $\mathcal{D} : f \longrightarrow \mathcal{D}[f]$ függvényoperátor, amelyre tetszőleges f és g függvényekkel teljesül a

$$\mathcal{D}[f \cdot g] = \mathcal{D}[f] \cdot g + f \cdot \mathcal{D}[g] \quad (*)$$

egyenlőség.

Ha a \mathcal{D} differenciáloperátor inverze az \mathcal{I} integráloperátor, akkor \mathcal{I} is egy *lineáris* operátor lesz (hiszen lineáris operátor inverze is lineáris), és definíció szerint

$$\mathcal{I}[\mathcal{D}[f]] = f, \text{ és } \mathcal{D}[\mathcal{I}[f]] = f$$

A parciális integrálás szabálya legegyszerűbben az $f \cdot \mathcal{I}[g]$ szorzattal felírt $(*)$ egyenlet integrálásával nyerhető

$$\mathcal{D}[f \cdot \mathcal{I}[g]] = \mathcal{D}[f] \cdot \mathcal{I}[g] + f \cdot \mathcal{D}[\mathcal{I}[g]] = \mathcal{D}[f] \cdot \mathcal{I}[g] + f \cdot g \quad / \mathcal{I}$$

$$\mathcal{I}[\mathcal{D}[f \cdot \mathcal{I}[g]]] = \mathcal{I}[\mathcal{D}[f] \cdot \mathcal{I}[g] + f \cdot g] \stackrel{\mathcal{I} \text{ lineáritása}}{=} \mathcal{I}[\mathcal{D}[f] \cdot \mathcal{I}[g]] + \mathcal{I}[f \cdot g]$$

$$f \cdot \mathcal{I}[g] = \mathcal{I}[\mathcal{D}[f] \cdot \mathcal{I}[g]] + \mathcal{I}[f \cdot g]$$

$$f \cdot \mathcal{I}[g] - \mathcal{I}[\mathcal{D}[f] \cdot \mathcal{I}[g]] = \mathcal{I}[f \cdot g]$$

A szabály táblázatos formában jegyezhető meg a legjobban:

$$\begin{array}{c|c} f & \mathcal{D}[f] \\ \hline g & \mathcal{I}[g] \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow = \searrow \uparrow \\ + \quad - \end{array} \quad \begin{array}{cc} f & \mathcal{D}[f] \\ \uparrow & \searrow \\ g & + \end{array} \quad \begin{array}{cc} \mathcal{I}[g] & \mathcal{I}[\mathcal{D}[f] \cdot \mathcal{I}[g]] \\ \uparrow & - \end{array}$$

$$\mathcal{I}[f \cdot g] = f \cdot \mathcal{I}[g] - \mathcal{I}[\mathcal{D}[f] \cdot \mathcal{I}[g]]$$

A szabály teljesindukcióval általánosítható. Egy kettő hosszú táblázat

$$\begin{array}{c|c|c} f & \mathcal{D}[f] & \mathcal{D}^2[f] \\ \hline g & \mathcal{I}[g] & \mathcal{I}^2[g] \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow = \searrow \searrow \uparrow \\ + \quad - \quad + \end{array} \quad \begin{array}{cc} f & \mathcal{D}[f] \\ \uparrow & \searrow \\ g & + \end{array} \quad \begin{array}{cc} \mathcal{I}[g] & \mathcal{I}[\mathcal{D}[f] \cdot \mathcal{I}[g]] \\ \uparrow & - \end{array} \quad \begin{array}{cc} \mathcal{D}^2[f] & \mathcal{I}^2[g] \\ \searrow & + \end{array}$$

$$\mathcal{I}[f \cdot g] = f \cdot \mathcal{I}[g] - \mathcal{D}[f] \cdot \mathcal{I}^2[g] + \mathcal{I}[\mathcal{D}^2[f] \cdot \mathcal{I}^2[g]]$$

Egy három hosszú táblázat

$$\begin{array}{c|c|c|c} f & \mathcal{D}[f] & \mathcal{D}^2[f] & \mathcal{D}^3[f] \\ \hline g & \mathcal{I}[g] & \mathcal{I}^2[g] & \mathcal{I}^3[g] \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow = \searrow \searrow \searrow \uparrow \\ + \quad - \quad + \quad - \end{array} \quad \begin{array}{cc} f & \mathcal{D}[f] \\ \uparrow & \searrow \\ g & + \end{array} \quad \begin{array}{cc} \mathcal{I}[g] & \mathcal{I}[\mathcal{D}[f] \cdot \mathcal{I}[g]] \\ \uparrow & - \end{array} \quad \begin{array}{cc} \mathcal{D}^2[f] & \mathcal{I}^2[g] \\ \searrow & + \end{array} \quad \begin{array}{cc} \mathcal{D}^3[f] & \mathcal{I}^3[g] \\ \searrow & - \end{array}$$

$$\mathcal{I}[f \cdot g] = f \cdot \mathcal{I}[g] - \mathcal{D}[f] \cdot \mathcal{I}^2[g] + \mathcal{D}^2[f] \cdot \mathcal{I}^3[g] - \mathcal{I}[\mathcal{D}^3[f] \cdot \mathcal{I}^3[g]]$$

Ha $\mathcal{D}^n[f] = 0$, valamely $n \in \mathbb{N}$ számra, akkor $\mathcal{I}[\mathcal{D}^n[f] \cdot \mathcal{I}^n[g]] = \mathcal{I}[0 \cdot \mathcal{I}^n[g]] = \mathcal{I}[0] = 0$.

f	$\mathcal{D}[f]$	$\mathcal{D}^2[f]$	$\mathcal{D}^3[f]$	\dots	$\mathcal{D}^{n-1}[f]$	$\mathcal{D}^n[f] = 0$	0	0	\dots
g	$\mathcal{I}[g]$	$\mathcal{I}^2[g]$	$\mathcal{I}^3[g]$	\dots	$\mathcal{I}^{n-1}[g]$	$\mathcal{I}^n[g]$			

$$\mathcal{I}[f \cdot g] = f \cdot \mathcal{I}[g] - \mathcal{D}[f] \cdot \mathcal{I}^2[g] + \mathcal{D}^2[f] \cdot \mathcal{I}^3[g] - \dots + (-1)^{n-1} \mathcal{D}^{n-1}[f] \cdot \mathcal{I}^n[g] + \overbrace{(-1)^n \mathcal{I}[\mathcal{D}^n[f] \cdot \mathcal{I}^n[g]]}^{=0}$$

(**A parciális integrálás szabálya**) Legyen \mathcal{D} egy differenciáloperátor, és inverze az \mathcal{I} integráloperátor. Ha $n \in \mathbb{N}$ a legkisebb természetes szám, amelyre $\mathcal{D}^n[f] = 0$ teljesül, akkor

$$\begin{aligned} \mathcal{I}[f \cdot g] &= f \cdot \mathcal{I}[g] - \mathcal{D}[f] \cdot \mathcal{I}^2[g] + \mathcal{D}^2[f] \cdot \mathcal{I}^3[g] - \dots + (-1)^{n-1} \mathcal{D}^{n-1}[f] \cdot \mathcal{I}^n[g] \\ \mathcal{I}[f \cdot g] &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot \mathcal{D}^k[f] \cdot \mathcal{I}^{k+1}[g] \end{aligned}$$

Jelölje \mathbf{D} a valós függvényeken értelmezett szokásos $\frac{d}{dx}$ differenciáloperátort, és \int annak inverzét. Azaz

$$\mathbf{D} : f \longrightarrow \mathbf{D}[f] = \frac{df}{dx}$$

$$\int : f \longrightarrow \int[f] = \int f \, dx$$

Ekkor $\mathcal{D} = x\mathbf{D}$ is egy differenciáloperátor, amelynek inverze az $\int \frac{1}{x}$ integráloperátor.

$$x\mathbf{D} : f \longrightarrow x\mathbf{D}[f] = x \cdot \frac{df}{dx}$$

$$\int \frac{1}{x} : f \longrightarrow \left(\int \frac{1}{x} \right) [f] = \int \frac{f}{x} \, dx$$

A továbbiakban ezt a differenciáloperátor, integráloperátor inverz páros fog előkerülni a leggyakrabban. A parciális integrálás szabályát erre az operátor párosra alkalmazva külön kimondjuk

Ha $n \in \mathbb{N}$ a legkisebb természetes szám, amelyre $(x\mathbf{D})^n[f] = 0$ teljesül, akkor

$$\left(\int \frac{1}{x} \right) [f \cdot g] = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot (x\mathbf{D})^k[f] \cdot \left(\int \frac{1}{x} \right)^{k+1}[g]$$

2 Az $I = \int \frac{\ln^p(x) \cdot \ln^q(1-x)}{(1-x)^n} dx$ integrál felírása (1. módszer)

Az $I = \int \frac{\ln^p(x) \cdot \ln^q(1-x)}{(1-x)^n} dx$ integrál kiszámítása során használni fogjuk az

$$\text{Li}_{(\underbrace{a, \dots, a}_n, \underbrace{b, \dots, b}_m)}(x) = \text{Li}_{(a^n, b^m, \dots)}(x) \text{ és } \text{Le}_{(\underbrace{a, \dots, a}_n, \underbrace{b, \dots, b}_m)}(x) = \text{Le}_{(a^n, b^m, \dots)}(x)$$

jelöléseket, illetve az alábbi eredményeket

$$\text{Li}_{(1^n)}(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \ln^n(1-x) \quad (1)$$

$$\text{Li}_{(1^n)}(1-x) = \frac{(-1)^n}{n!} \ln^n(x) \quad (2)$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \frac{\text{Le}_{(0^n)}(x)}{x} \quad (3)$$

$$\text{Le}_{(0^n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \text{Li}_{(0^{k+1})}(x) \quad (4)$$

$$\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r, 0^n)}(x) = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{n+1} s(n+1, k) \text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_{r-1}, s_r+1-k)}(x) \quad (5)$$

$$\sum_{m=\max(1,k)}^n \frac{\binom{n-1}{m-1} s(m, k)}{(m-1)!} = \frac{\left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]}{(n-1)!} \quad (6)$$

Az $I = \int \frac{\ln^p(x) \cdot \ln^q(1-x)}{(1-x)^n} dx$ integrálban az (1), (2), illetve (3) formulák segítségével mindent felírunk általánosított polilogaritmus függvényekkel:

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln^p(x) \cdot \ln^q(1-x)}{(1-x)^n} dx &= \int (-1)^p p! \text{Li}_{(1^p)}(1-x) \cdot (-1)^q q! \text{Li}_{(1^q)}(x) \frac{\text{Le}_{(0^n)}(x)}{x} dx = \\ &= (-1)^{p+q} p! q! \int \frac{\text{Li}_{(1^p)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1^q)}(x) \cdot \text{Le}_{(0^n)}(x)}{x} dx \end{aligned}$$

A (4) formulát felhasználva az $\text{Le}_{(0^n)}(x)$ általánosított polilogaritmus függvényt kicseréljük $\text{Li}_{(0^{m+1})}(x)$ függvények összegére, és az integrál linearitását kihasználva a szummázást kihozzuk az integráljel elé:

$$\begin{aligned} &(-1)^{p+q} p! q! \int \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \text{Li}_{(0^{m+1})}(x) \frac{\text{Li}_{(1^p)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1^q)}(x)}{x} dx = \\ &= (-1)^{p+q} p! q! \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \int \frac{\text{Li}_{(1^p)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1^q)}(x) \cdot \text{Li}_{(0^{m+1})}(x)}{x} dx \end{aligned}$$

A nyert

$$I = (-1)^{p+q} p! q! \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \int \frac{\text{Li}_{(1^p)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1^q)}(x) \cdot \text{Li}_{(0^{m+1})}(x)}{x} dx$$

eredmény szerint *elegendő az* $\int \frac{\text{Li}_{(1^p)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1^q)}(x) \cdot \text{Li}_{(0^{m+1})}(x)}{x} dx$ *integrálokat megadni tetszőleges* p, q *és* $m \leq n-1$ *paraméterekkel.*

Az $\int \frac{\text{Li}_{(1^p)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1^q)}(x) \cdot \text{Li}_{(0^{m+1})}(x)}{x} dx$ integrált pedig a parciális integrálás módszerével próbáljuk kiszámítani az

$$\left(\int \frac{1}{x} \right) [f \cdot g] = \sum_{t=0}^{N-1} (-1)^t (x\mathbf{D})^t [f] \left(\int \frac{1}{x} \right)^{t+1} [g], \text{ ahol } (x\mathbf{D})^N [f] = 0$$

egyenletet segítségével úgy, hogy $f = \text{Li}_{(1^p)}(1-x)$ és $g = \text{Li}_{(1^q)}(x) \cdot \text{Li}_{(0^{m+1})}(x)$ választással élünk. Elsőként a $x\mathbf{D}$ differenciáloperátornak az $f = \text{Li}_{(1^p)}(1-x)$ függvényen vett többszöri hatását vizsgáljuk.

$$x\mathbf{D} [\text{Li}_{(1^p)}(1-x)] = x \cdot \left(\text{Li}_{(0,1^{p-1})}(1-x) \frac{-1}{1-x} \right) = x \cdot \left(-\text{Li}_{(1^{p-1})}(1-x) \frac{1}{1-x} \frac{1-x}{x} \right) = -\text{Li}_{(1^{p-1})}(1-x)$$

Ebből már nagyon egyszerűen megadható az általános

$$(x\mathbf{D})^t [\text{Li}_{(1^p)}(1-x)] = (-1)^t \text{Li}_{(1^{p-t})}(1-x) \quad (t < p)$$

eredmény is. Mivel $(x\mathbf{D})^{p-1} [\text{Li}_{(1^p)}(1-x)] = (-1)^{p-1} \text{Li}_{(1)}(1-x)$, ezért

$$(x\mathbf{D})^p [\text{Li}_{(1^p)}(1-x)] = x\mathbf{D} [(-1)^{p-1} \text{Li}_{(1)}(1-x)] = (-1)^p x \frac{\text{Li}_{(0)}(1-x)}{1-x} = (-1)^p x \frac{1-x}{x(1-x)} = (-1)^p,$$

és így, $(x\mathbf{D})^{p+1} [\text{Li}_{(1^p)}(1-x)] = x \cdot \mathbf{D} [(-1)^p] = 0$. Lévén $N = p+1$ a legkisebb szám amellyel $(x\mathbf{D})^N [f] = 0$ teljesül, ezért a fentiek szerint

$$\begin{aligned} \left(\int \frac{1}{x} \right) [\text{Li}_{(1^p)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1^q)}(x) \cdot \text{Li}_{(0^{m+1})}(x)] &= \sum_{t=0}^{p+1-1} (-1)^t \cdot (-1)^t \text{Li}_{(1^{p-t})}(1-x) \cdot \left(\int \frac{1}{x} \right)^{t+1} [\text{Li}_{(1^q)}(x) \cdot \text{Li}_{(0^{m+1})}(x)] = \\ &= \sum_{t=0}^p \text{Li}_{(1^{p-t})}(1-x) \cdot \left(\int \frac{1}{x} \right)^{t+1} [\text{Li}_{(1^q)}(x) \cdot \text{Li}_{(0^{m+1})}(x)] \stackrel{(2)}{=} \sum_{t=0}^p (-1)^{p-t} \frac{\ln^{p-t}(x)}{(p-t)!} \cdot \left(\int \frac{1}{x} \right)^{t+1} [\text{Li}_{(1^q)}(x) \cdot \text{Li}_{(0^{m+1})}(x)] \end{aligned}$$

Az $x\mathbf{D}$ differenciáloperátornak az $f = \text{Li}_{1^p}(1-x)$ függvényen vett többszöri hatását kiszámítva most már az alábbi írhadjuk:

$$\int \frac{\text{Li}_{(1^p)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1^q)}(x) \cdot \text{Li}_{(0^{m+1})}(x)}{x} dx = (-1)^p \sum_{t=0}^p (-1)^t \frac{\ln^{p-t}(x)}{(p-t)!} \cdot \left(\int \frac{1}{x} \right)^{t+1} [\text{Li}_{1^q}(x) \cdot \text{Li}_{0^{m+1}}(x)]$$

Sokkal nehezebb az $\int \frac{1}{x}$ integráloperátornak a $g = \text{Li}_{1^q}(x) \cdot \text{Li}_{0^{m+1}}(x)$ függvényen vett többszöri hatását kiszámítani. Erre csak egy kipróbált eredményünk van, amit levezetés nélkül közlünk:

Tetszőleges K , illetve M nemnegatív számokkal

$$\left(\int \frac{1}{x} \right)^K [\text{Li}_{(1^q)}(x) \cdot \text{Li}_{(0^M)}(x)] = (-1)^q \sum_{s=0}^q \frac{\ln^{q-s}(1-x)}{(q-s)!} \cdot \sum_{\substack{C_1+\dots+C_{s+1}=K+s \\ 1 \leq C_1, \dots, C_{s+1}}}^n \text{Li}_{(C_1, \dots, C_{s+1}, 0^{M-1})}(x),$$

amiből a keresett $K = t+1$, illetve $M = m+1$ értékekkel

$$\left(\int \frac{1}{x} \right)^{t+1} [\text{Li}_{(1^q)}(x) \cdot \text{Li}_{(0^{m+1})}(x)] = (-1)^q \sum_{s=0}^q \frac{\ln^{q-s}(1-x)}{(q-s)!} \cdot \sum_{\substack{C_1+\dots+C_{s+1}=t+s+1 \\ 1 \leq C_1, \dots, C_{s+1}}}^n \text{Li}_{(C_1, \dots, C_{s+1}, 0^m)}(x)$$

Mind a két operátor kiszámított értékét beírva megkapjuk a kitűzött integrál értékét:

$$\begin{aligned} \int \frac{\text{Li}_{(1^p)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1^q)}(x) \cdot \text{Li}_{(0^{m+1})}(x)}{x} dx &= (-1)^{p+q} \sum_{t=0}^p (-1)^t \frac{\ln^{p-t}(x)}{(p-t)!} \cdot \sum_{s=0}^q \frac{\ln^{q-s}(1-x)}{(q-s)!} \sum_{\substack{C_1+\dots+C_{s+1}=t+s+1 \\ 1 \leq C_1, \dots, C_{s+1}}}^n \text{Li}_{(C_1, \dots, C_{s+1}, 0^m)}(x) = \\ &= (-1)^{p+q} \sum_{t=0}^p \sum_{s=0}^q (-1)^t \frac{\ln^{p-t}(x) \ln^{q-s}(1-x)}{(p-t)!(q-s)!} \sum_{\substack{C_1+\dots+C_{s+1}=t+s+1 \\ 1 \leq C_1, \dots, C_{s+1}}}^n \text{Li}_{(C_1, \dots, C_{s+1}, 0^m)}(x) \end{aligned}$$

Ez $p - t \rightarrow t$, illetve $q - s \rightarrow s$ cserékkel így alakul:

$$\int \frac{\text{Li}_{(1^p)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1^q)}(x) \cdot \text{Li}_{(0^{m+1})}(x)}{x} dx = (-1)^q \sum_{t=0}^p \sum_{s=0}^q (-1)^t \frac{\ln^t(x) \ln^s(1-x)}{t! s!} \sum_{\substack{C_1+\dots+C_{q+1-s}=p+q+1-t-s \\ 1 \leq C_1, \dots, C_{q+1-s}}}^n \text{Li}_{(C_1, \dots, C_{q+1-s}, 0^m)}(x)$$

A fentiek szerint ezzel az I integrál értékét is magadtuk:

$$\begin{aligned} I &= (-1)^{p+q} p! q! \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \int \frac{\text{Li}_{(1^p)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1^q)}(x) \cdot \text{Li}_{(0^{m+1})}(x)}{x} dx = \\ &= (-1)^p p! q! \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \sum_{t=0}^p \sum_{s=0}^q (-1)^t \frac{\ln^t(x) \ln^s(1-x)}{t! s!} \sum_{\substack{C_1+\dots+C_{q+1-s}=p+q+1-t-s \\ 1 \leq C_1, \dots, C_{q+1-s}}}^n \text{Li}_{(C_1, \dots, C_{q+1-s}, 0^m)}(x) \end{aligned}$$

Mivel a t és s összegzési indexek teljesen függetlenek az m összegzési indextől, így azok összegzése felcserélhető. A felcserélt összegzéssel nyert képlet pedig

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln^p(x) \cdot \ln^q(1-x)}{(1-x)^n} dx &= \\ &= (-1)^p p! q! \sum_{t=0}^p \sum_{s=0}^q (-1)^t \frac{\ln^t(x) \ln^s(1-x)}{t! s!} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \sum_{\substack{C_1+\dots+C_{q+1-s}=p+q+1-t-s \\ 1 \leq C_1, \dots, C_{q+1-s}}}^n \text{Li}_{(C_1, \dots, C_{q+1-s}, 0^m)}(x) \end{aligned}$$

A következőkben a

$$\Psi_{p,q,n}(t, s; x) := \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \sum_{\substack{C_1+\dots+C_{q+1-s}=p+q+1-t-s \\ 1 \leq C_1, \dots, C_{q+1-s}}}^n \text{Li}_{(C_1, \dots, C_{q+1-s}, 0^m)}(x)$$

összeget alakítjuk át. Az (5) formula szerint $\text{Li}_{(C_1, \dots, C_{q+1-s}, 0^m)}(x) = \frac{1}{m!} \cdot \sum_{k=0}^{m+1} s(m+1, k) \text{Li}_{(C_1, \dots, C_{q+1-s}+1-k)}(x)$, és így

$$\begin{aligned} \Psi_{p,q,n}(t, s; x) &= \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \sum_{\substack{C_1+\dots+C_{q+1-s}=p+q+1-t-s \\ 1 \leq C_1, \dots, C_{q+1-s}}}^n \frac{1}{m!} \cdot \sum_{k=0}^{m+1} s(m+1, k) \text{Li}_{(C_1, \dots, C_{q+1-s}+1-k)}(x) = \\ &= \sum_{\substack{C_1+\dots+C_{q+1-s}=p+q+1-t-s \\ 1 \leq C_1, \dots, C_{q+1-s}}}^n \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \frac{1}{m!} \cdot \sum_{k=0}^{m+1} s(m+1, k) \text{Li}_{(C_1, \dots, C_{q+1-s}+1-k)}(x) = \\ &= \sum_{\substack{C_1+\dots+C_{q+1-s}=p+q+1-t-s \\ 1 \leq C_1, \dots, C_{q+1-s}}}^n \sum_{k=0}^n \sum_{m=\max(0, k-1)}^{n-1} \frac{\binom{n-1}{m} s(m+1, k)}{m!} \text{Li}_{(C_1, \dots, C_{q+1-s}+1-k)}(x) \end{aligned}$$

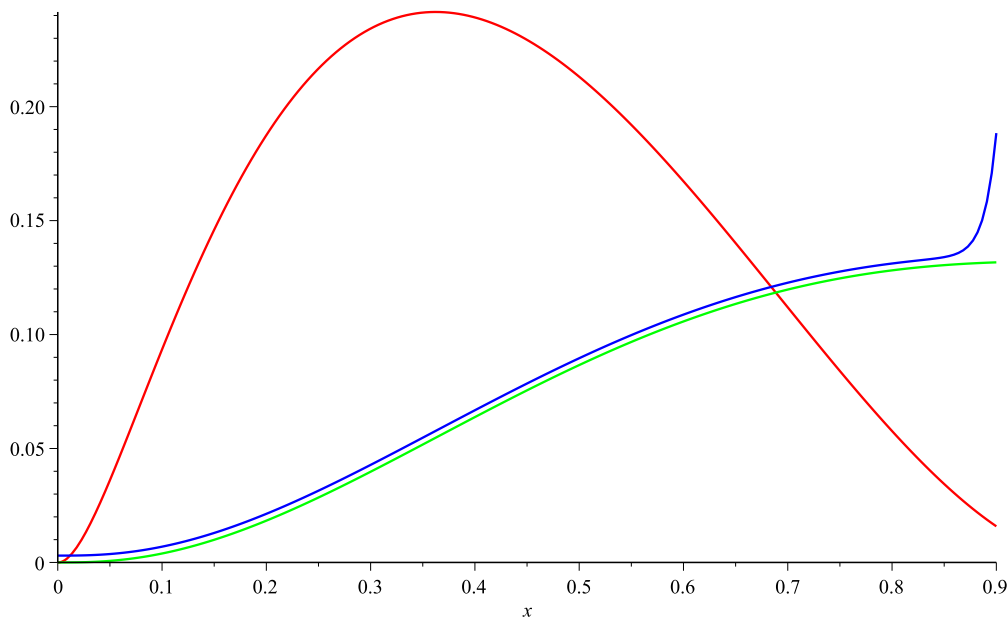
A legutolsó összegben $m \rightarrow m-1$ cserével és a (6) formula alkalmazásával egy igen tömör eredményt kapunk a $\Psi_{p,q,n}(t, s; x)$ kifejezésre.

$$\Psi_{p,q,n}(t, s; x) = \sum_{\substack{C_1+\dots+C_{q+1-s}=p+q+1-t-s \\ 1 \leq C_1, \dots, C_{q+1-s}}}^n \sum_{k=0}^n \sum_{m=\max(1, k)}^n \frac{\binom{n-1}{m-1} s(m, k)}{(m-1)!} \text{Li}_{(C_1, \dots, C_{q+1-s}+1-k)}(x) =$$

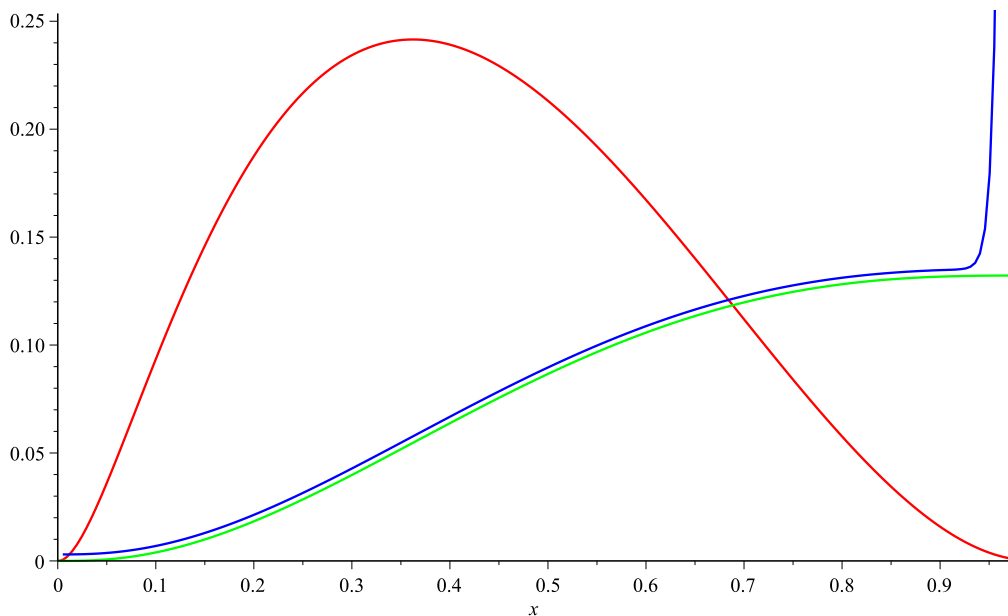
$3, 1]](x) + L[[1, 1, 4, 0]](x) + L[[1, 2, 1, 2]](x) + L[[1, 2, 2, 1]](x) + L[[1, 2, 3, 0]](x) + L[[1, 3, 1, 1]](x) + L[[1, 3, 2, 0]](x) + L[[1, 4, 1, 0]](x) + L[[2, 1, 1, 2]](x) + L[[2, 1, 2, 1]](x) + L[[2, 1, 3, 0]](x) + L[[2, 2, 1, 1]](x) + L[[2, 2, 2, 0]](x) + L[[2, 3, 1, 0]](x) + L[[3, 1, 1, 1]](x) + L[[3, 1, 2, 0]](x) + L[[3, 2, 1, 0]](x) + L[[4, 1, 1, 0]](x) + 120 \cdot \ln(x)^3 \cdot (L[[1, 1, 1, 2]](x) + L[[1, 1, 2, 1]](x) + L[[1, 1, 3, 0]](x) + L[[1, 2, 1, 1]](x) + L[[1, 2, 2, 0]](x) + L[[1, 3, 1, 0]](x) + L[[2, 1, 1, 1]](x) + L[[2, 1, 2, 0]](x) + L[[2, 2, 1, 0]](x) + L[[3, 1, 1, 0]](x)) - 30 \cdot \ln(x)^4 \cdot (L[[1, 1, 1, 1]](x) + L[[1, 1, 2, 0]](x) + L[[1, 2, 1, 0]](x) + L[[2, 1, 1, 0]](x)) + 6 \cdot \ln(x)^5 \cdot L[[1, 1, 1, 0]](x)$

Az alábbi ábrán a $[0, 0.9]$ intervallumon ábrázoltuk

pirossal az $f(x) = \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^2}$; zölddel az $\int \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^2} dx$ valódi értékét; kékkel pedig az $\int \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^2} dx$ integrálnak a fenti képlettel számított értékét **0.003-mal kicsit feltolva**. Láthatóan 0.85-ig a valódi határozatlan integrál, illetve a képlettel számított integrál értéke teljesen megegyezik. Az 1-hez közeledve az eltérést az okozza, hogy az $\text{Li}_{(s_1; \dots, s_n)}(x)$ függvényeket a végtelen helyett csak 90-ig összegezve tudjuk reprezentálni.

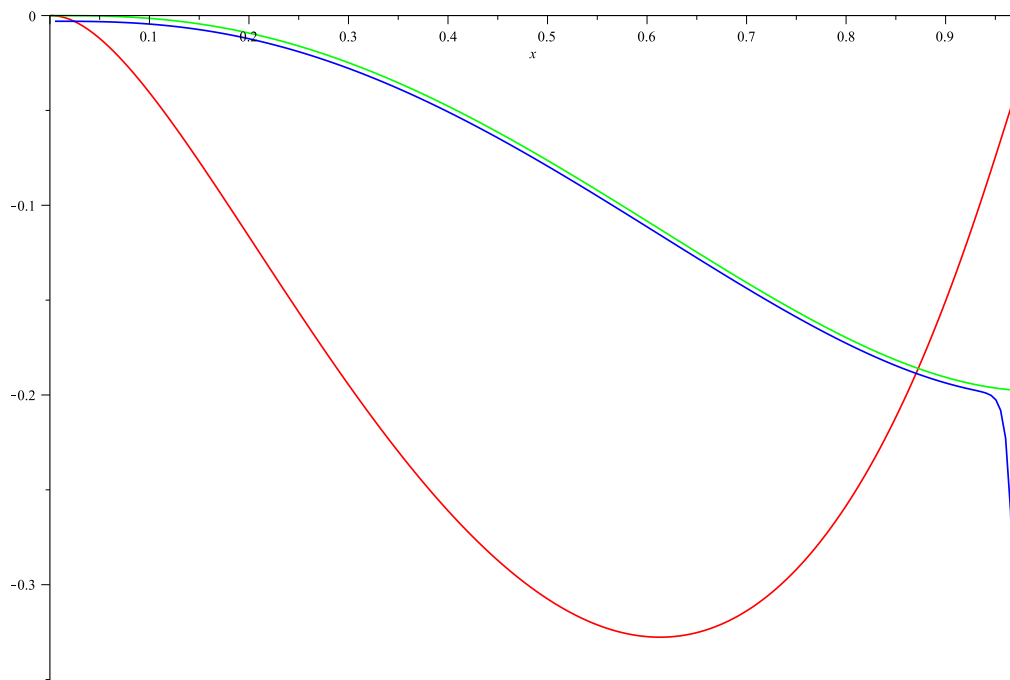


Ha az $\text{Li}_{(s_1; \dots, s_n)}(x)$ függvényeket 90 helyett 190-ig összegezve reprezentáljuk, akkor már 0.93-ig együttthalad a két függvény. Ehhez a számításhoz viszont már 1GB memória szükséges, maga a számítás pedig percekig vesz igénybe.



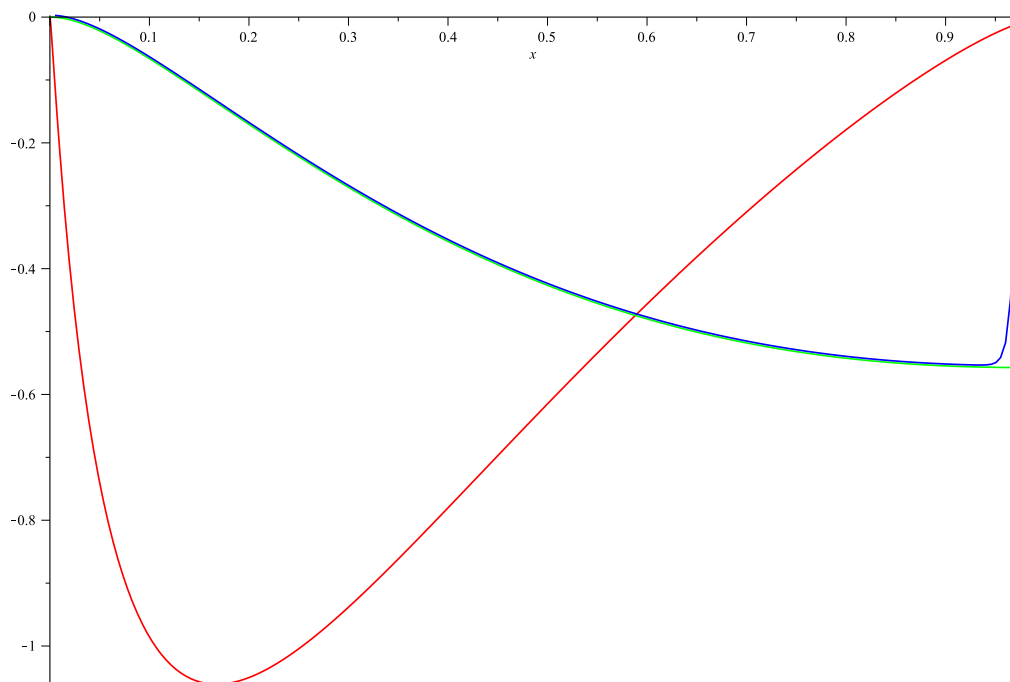
Az alábbi ábrán a $[0, 0.97]$ intervallumon ábrázoltuk

pirossal az $f(x) = \frac{\ln^4(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^2}$; zölddel az $\int \frac{\ln^4(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^2} dx$ valódi értékét; késsel pedig az $\int \frac{\ln^4(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^2} dx$ integrálnak a fenti képlettel számított értékét **0.003-mal kicsit letolva**.



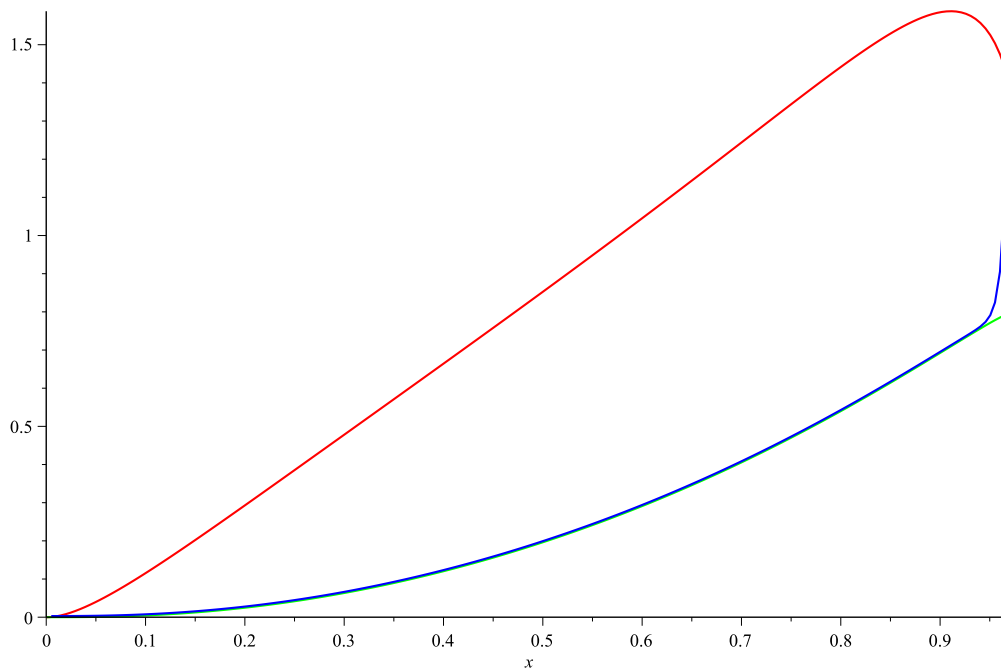
Az alábbi ábrán a $[0, 0.97]$ intervallumon ábrázoltuk

pirossal az $f(x) = \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^2(1-x)}{(1-x)^3}$; zölddel az $\int \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^2(1-x)}{(1-x)^3} dx$ valódi értékét; késsel pedig az $\int \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^2(1-x)}{(1-x)^3} dx$ integrálnak a fenti képlettel számított értékét **0.003-mal kicsit feltolva**.



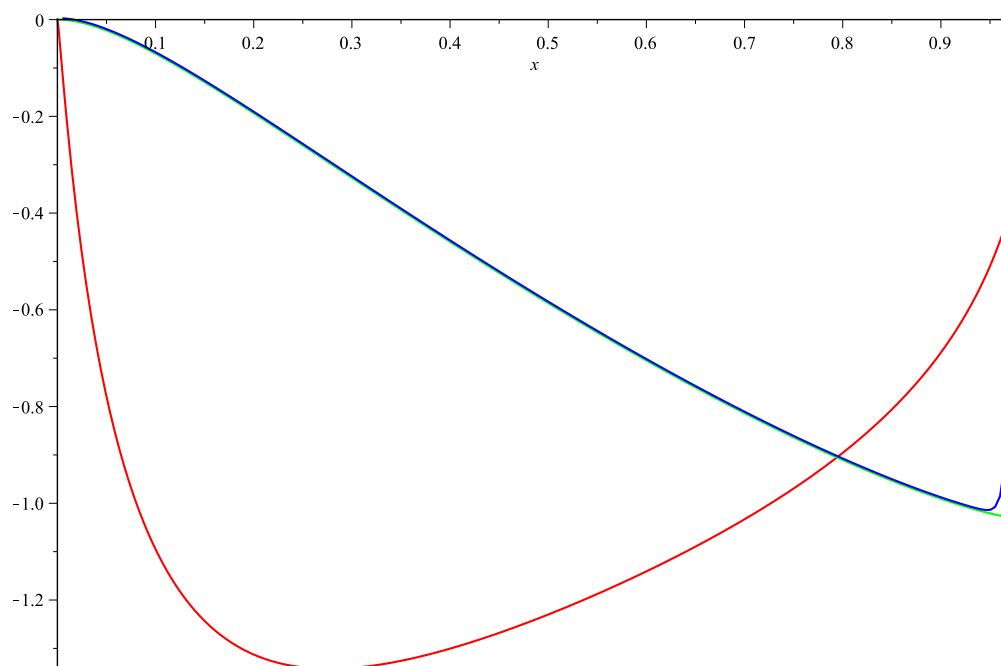
Az alábbi ábrán a $[0, 0.97]$ intervallumon ábrázoltuk

pirossal az $f(x) = \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^4}$; zölddel az $\int \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^4} dx$ valódi értékét; késsel pedig az $\int \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^4} dx$ integrálnak a fenti képlettel számított értékét **0.003-mal kicsit feltolva**.



Az alábbi ábrán a $[0, 0.97]$ intervallumon ábrázoltuk

pirossal az $f(x) = \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^2(1-x)}{(1-x)^4}$; zölddel az $\int \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^2(1-x)}{(1-x)^4} dx$ valódi értékét; késsel pedig az $\int \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^2(1-x)}{(1-x)^4} dx$ integrálnak a fenti képlettel számított értékét **0.003-mal kicsit feltolva**.



3 Az $I = \int \frac{\ln^p(x) \cdot \ln^q(1-x)}{(1-x)^n} dx$ integrál felírása (2. módszer)

Az $I = \int \frac{\ln^p(x) \cdot \ln^q(1-x)}{(1-x)^n} dx$ integrál ezen kiszámítása az alábbi azonosságon alapszik

$$\text{Li}_{(0^m)}(x) \cdot \text{Li}_{(1^n)}(x) = \text{Li}_{(0^m, 1^n)}(x) \quad (7)$$

Az $I = \int \frac{\ln^p(x) \cdot \ln^q(1-x)}{(1-x)^n} dx$ integrálban az (1), (2), illetve (3) formulák segítségével mindent felírunk általánosított polilogaritmus függvényekkel:

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln^p(x) \cdot \ln^q(1-x)}{(1-x)^n} dx &= \int (-1)^p p! \text{Li}_{(1^p)}(1-x) \cdot (-1)^q q! \text{Li}_{(1^q)}(x) \frac{\text{Le}_{(0^n)}(x)}{x} dx = \\ &= (-1)^{p+q} p! q! \int \frac{\text{Li}_{(1^p)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1^q)}(x) \cdot \text{Le}_{(0^n)}(x)}{x} dx \end{aligned}$$

A (4) formulát felhasználva az $\text{Le}_{(0^n)}(x)$ általánosított polilogaritmus függvényt kicseréljük $\text{Li}_{(0^{m+1})}(x)$ függvények összegére, és az integrál linearitását kihasználva a szummázást kihozzuk az integráljel elé:

$$\begin{aligned} &(-1)^{p+q} p! q! \int \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \text{Li}_{(0^{m+1})}(x) \frac{\text{Li}_{(1^p)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1^q)}(x)}{x} dx = \\ &= (-1)^{p+q} p! q! \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \int \frac{\text{Li}_{(1^p)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1^q)}(x) \cdot \text{Li}_{(0^{m+1})}(x)}{x} dx \end{aligned}$$

A (7) formula szerint $\text{Li}_{(1^q)}(x) \cdot \text{Li}_{(0^{m+1})}(x) = \text{Li}_{(0^{m+1}, 1^q)}(x)$, és ezzel az I integrált az alábbi formára hoztuk:

$$I = (-1)^{p+q} p! q! \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \int \frac{\text{Li}_{(1^p)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(0^{m+1}, 1^q)}(x)}{x} dx$$

A nyert formula szerint *elegendő* az $\int \frac{\text{Li}_{(1^p)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(0^{m+1}, 1^q)}(x)}{x} dx$ integrálokat megadni tetszőleges p, q és $m \leq n-1$ paraméterekkel.

Az $\int \frac{\text{Li}_{(1^p)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(0^{m+1}, 1^q)}(x)}{x} dx$ integrált pedig a parciális integrálás módszerével próbáljuk kiszámítani az

$$\left(\int \frac{1}{x} \right) [f \cdot g] = \sum_{t=0}^{N-1} (-1)^t (x\mathbf{D})^t [f] \left(\int \frac{1}{x} \right)^{t+1} [g], \text{ ahol } (x\mathbf{D})^N [f] = 0$$

egyenletet segítségével úgy, hogy $f = \text{Li}_{(1^p)}(1-x)$ és $g = \text{Li}_{(0^{m+1}, 1^q)}(x)$ választással élünk. Elsőként a $x\mathbf{D}$ differenciáloperátornak az $f = \text{Li}_{(1^p)}(1-x)$ függvényen vett többszöri hatását vizsgáljuk.

$$x\mathbf{D} [\text{Li}_{(1^p)}(1-x)] = x \cdot \left(\text{Li}_{(0, 1^{p-1})}(1-x) \frac{-1}{1-x} \right) = x \cdot \left(-\text{Li}_{(1^{p-1})}(1-x) \frac{1}{1-x} \frac{1-x}{x} \right) = -\text{Li}_{(1^{p-1})}(1-x)$$

Ebből már nagyon egyszerűen megadható az általános

$$(x\mathbf{D})^t [\text{Li}_{(1^p)}(1-x)] = (-1)^t \text{Li}_{(1^{p-t})}(1-x) \quad (t < p)$$

eredmény is. Mivel $(x\mathbf{D})^{p-1} [\text{Li}_{(1^p)}(1-x)] = (-1)^{p-1} \text{Li}_{(1)}(1-x)$, ezért

$$(x\mathbf{D})^p [\text{Li}_{(1^p)}(1-x)] = x\mathbf{D} [(-1)^{p-1} \text{Li}_{(1)}(1-x)] = (-1)^p x \frac{\text{Li}_{(0)}(1-x)}{1-x} = (-1)^p x \frac{1-x}{x(1-x)} = (-1)^p,$$

és így, $(x\mathbf{D})^{p+1} [\text{Li}_{(1^p)}(1-x)] = x \cdot \mathbf{D} [(-1)^p] = 0$. Lévén $N = p+1$ a legkisebb szám amellyel $(x\mathbf{D})^N [f] = 0$ teljesül, ezért a fentiek szerint

$$\begin{aligned} \left(\int \frac{1}{x} \right) [\text{Li}_{(1^p)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(0^{m+1}, 1^q)}(x)] &= \sum_{t=0}^{p+1-1} (-1)^t \cdot (-1)^t \text{Li}_{(1^{p-t})}(1-x) \cdot \left(\int \frac{1}{x} \right)^{t+1} [\text{Li}_{(0^{m+1}, 1^q)}(x)] = \\ &= \sum_{t=0}^p \text{Li}_{(1^{p-t})}(1-x) \cdot \left(\int \frac{1}{x} \right)^{t+1} [\text{Li}_{(0^{m+1}, 1^q)}(x)] \stackrel{(2)}{=} \sum_{t=0}^p (-1)^{p-t} \frac{\ln^{p-t}(x)}{(p-t)!} \cdot \left(\int \frac{1}{x} \right)^{t+1} [\text{Li}_{(0^{m+1}, 1^q)}(x)] \end{aligned}$$

Az $x\mathbf{D}$ differenciáloperátornak az $f = \text{Li}_{(1^p)}(1-x)$ függvényen vett többszöri hatását kiszámítva most már az alábbi írhatjuk:

$$\int \frac{\text{Li}_{(1^p)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(0^{m+1}, 1^q)}(x)}{x} dx = (-1)^p \sum_{t=0}^p (-1)^t \frac{\ln^{p-t}(x)}{(p-t)!} \cdot \left(\int \frac{1}{x} \right)^{t+1} [\text{Li}_{(0^{m+1}, 1^q)}(x)]$$

Az $\int \frac{1}{x}$ integráloperátornak a $g = \text{Li}_{(0^{m+1}, 1^q)}(x)$ függvényen vett többszöri hatásának kiszámításához csak az általánosított polilogaritmus függvények legalapvetőbb

$$\int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(x)}{x} dx = \text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)}(x)$$

azonosságát kell többször egymás után alkalmazni.

$$\begin{aligned} \int \frac{\text{Li}_{(0^{m+1}, 1^q)}(x)}{x} dx &= \int \frac{\text{Li}_{(0, 0^m, 1^q)}(x)}{x} dx = \text{Li}_{(1, 0^m, 1^q)}(x) \\ \left(\int \frac{1}{x} \right)^2 [\text{Li}_{(0^{m+1}, 1^q)}(x)] &= \int \frac{\text{Li}_{(1, 0^m, 1^q)}(x)}{x} dx = \text{Li}_{(2, 0^m, 1^q)}(x) \\ \left(\int \frac{1}{x} \right)^3 [\text{Li}_{(0^{m+1}, 1^q)}(x)] &= \int \frac{\text{Li}_{(2, 0^m, 1^q)}(x)}{x} dx = \text{Li}_{(3, 0^m, 1^q)}(x) \end{aligned}$$

Ebből már nagyon egyszerűen felírható az általános eredmény is:

Tetszőleges K nemnegatív számra

$$\left(\int \frac{1}{x} \right)^K [\text{Li}_{(0^{m+1}, 1^q)}(x)] = \text{Li}_{(K, 0^m, 1^q)}(x),$$

amiből a keresett $K = t+1$ értékkel

$$\left(\int \frac{1}{x} \right)^{t+1} [\text{Li}_{(0^{m+1}, 1^q)}(x)] = \text{Li}_{(t+1, 0^m, 1^q)}(x)$$

Mind a két operátor kiszámított értékét beírva megkapjuk a kitűzött integrál értékét:

$$\int \frac{\text{Li}_{(1^p)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(0^{m+1}, 1^q)}(x)}{x} dx = (-1)^{p+q} \sum_{t=0}^p (-1)^t \frac{\ln^{p-t}(x)}{(p-t)!} \cdot \text{Li}_{(t+1, 0^m, 1^q)}(x)$$

Ez $p-t \rightarrow t$ cserével így alakul:

$$\int \frac{\text{Li}_{(1^p)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(0^{m+1}, 1^q)}(x)}{x} dx = (-1)^q \sum_{t=0}^p (-1)^t \frac{\ln^t(x)}{t!} \cdot \text{Li}_{(p+1-t, 0^m, 1^q)}(x)$$

Most már az I integrál értékét is felírhatjuk:

$$I = (-1)^{p+q} p! q! \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \int \frac{\text{Li}_{(1^p)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(0^{m+1}, 1^q)}(x)}{x} dx = (-1)^p p! q! \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \sum_{t=0}^p (-1)^t \frac{\ln^t(x)}{t!} \cdot \text{Li}_{(p+1-t, 0^m, 1^q)}(x)$$

Mivel a t és m összegzési indexek teljesen függetlenek egymástól, így azok összegzése felcserélhető. A felcserélt összegzéssel nyert képlet pedig

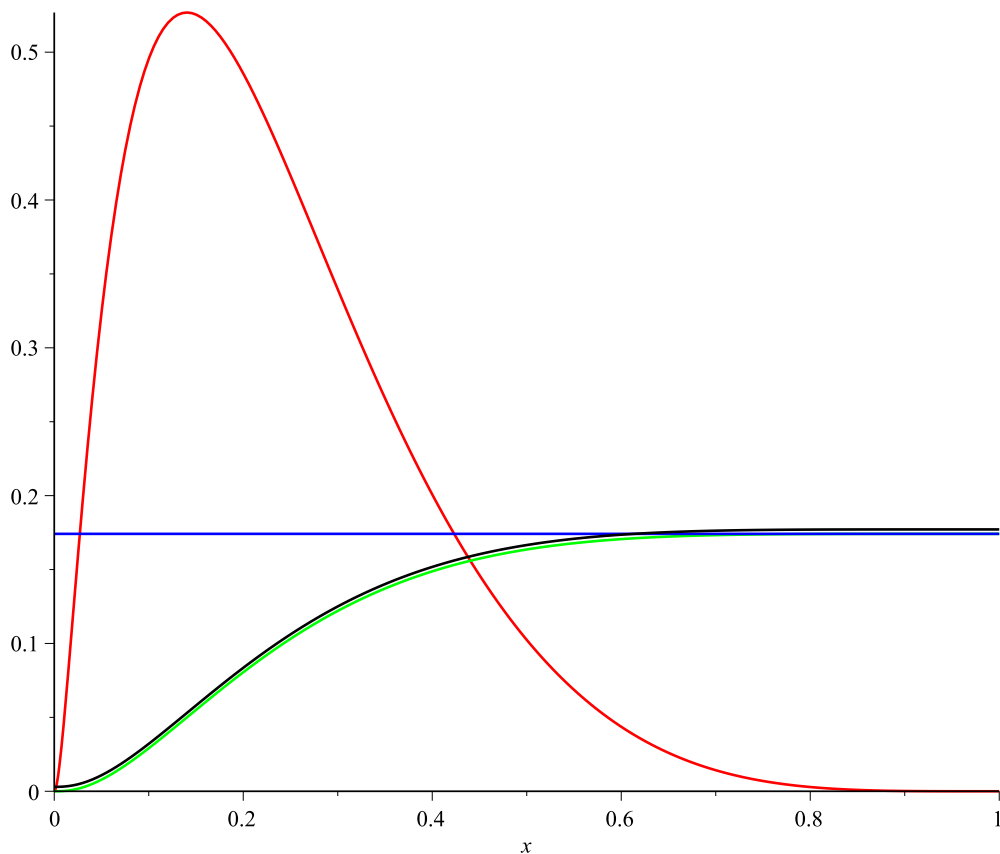
$$\int \frac{\ln^p(x) \cdot \ln^q(1-x)}{(1-x)^n} dx = (-1)^p p! q! \sum_{t=0}^p \frac{(-1)^t}{t!} \ln^t(x) \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \text{Li}_{(p+1-t, 0^m, 1^q)}(x)$$

Az $\int \frac{\ln^p(x) \cdot \ln^q(1-x)}{(1-x)^n} dx$ integrálban $\ln^t(x)$ együtthatója:

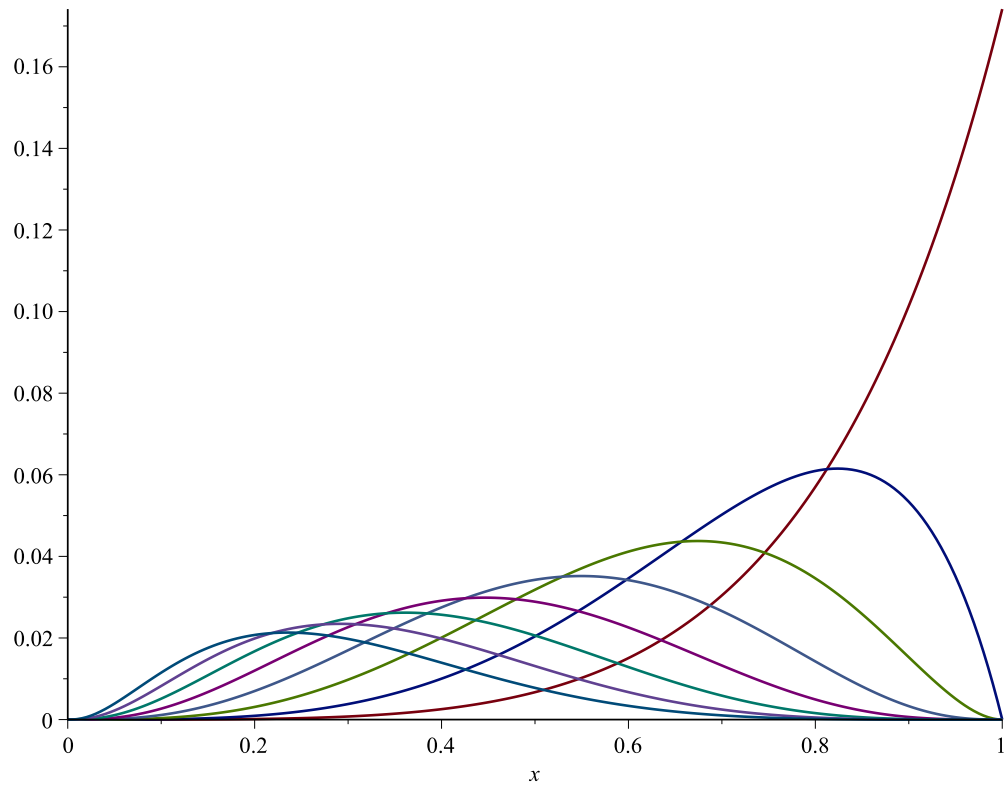
$$\Psi_{p,q,n}(t; x) := (-1)^{p+q+t} \frac{p! q!}{t!} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \text{Li}_{(p+1-t, 0^m, 1^q)}(x)$$

Az alábbi ábrán a $[0, 1]$ intervallumon ábrázoltuk

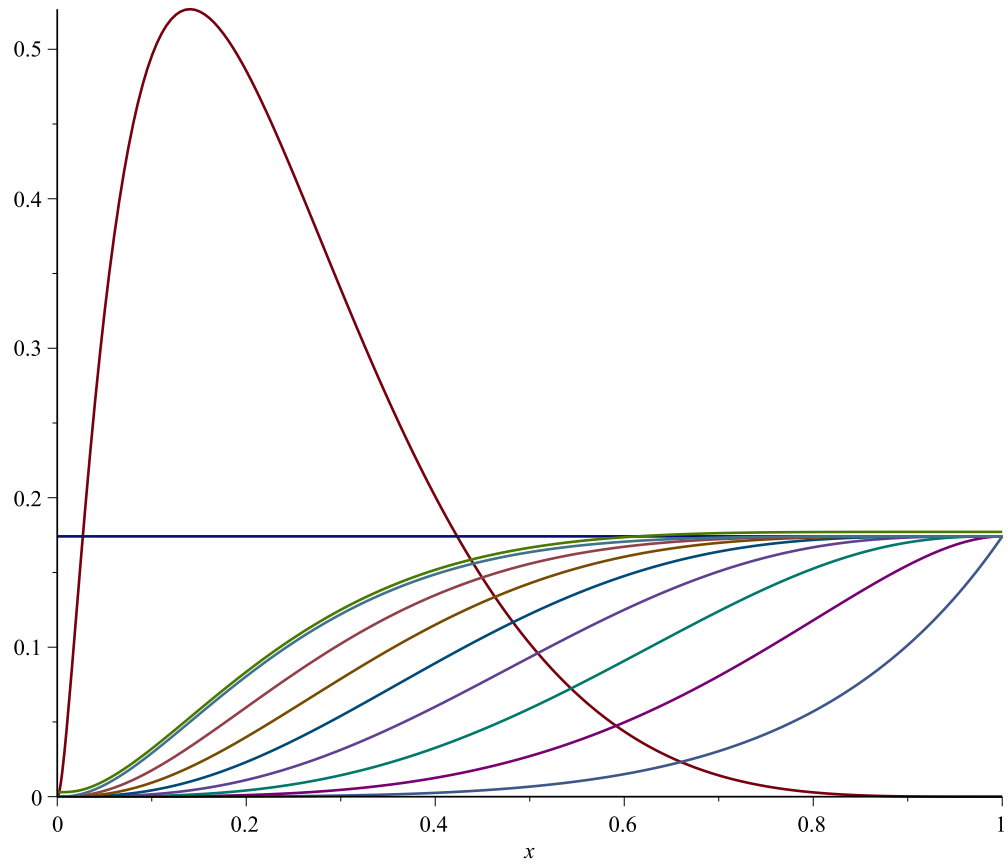
pirossal az $f(x) = \frac{\ln^7(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^2}$; zölddel az $\int \frac{\ln^7(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^2} dx$ valódi értékét; feketével pedig az $\int \frac{\ln^7(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^2} dx$ integrálnak a fenti képlettel számított értékét **0.0003-mal kicsit feltolva**.



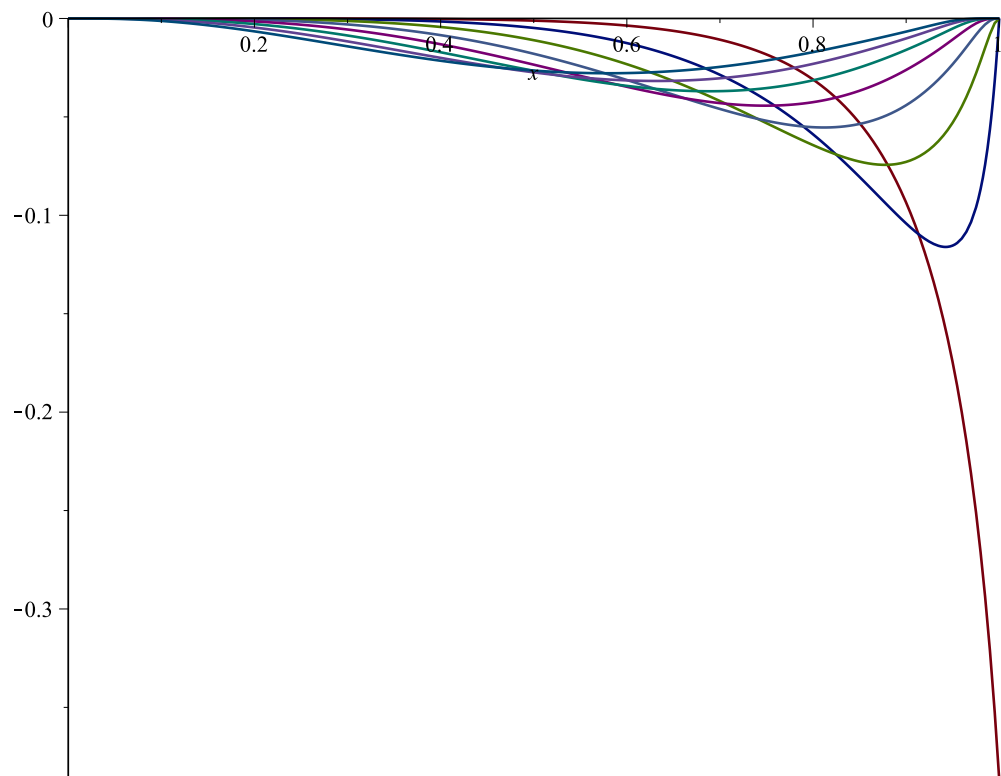
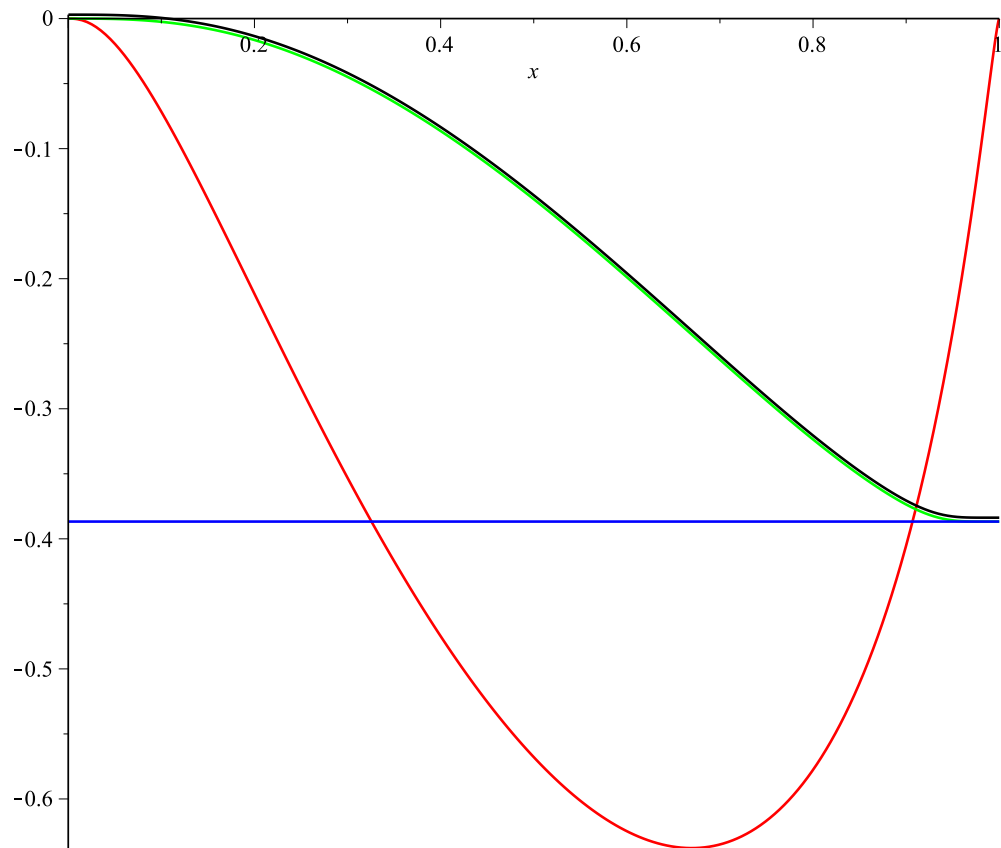
Az $\ln^t(x) \cdot \Psi_{7,3,2}(t; x)$ $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ függvények grafikonjait rajzoltuk meg a következő ábrán. A $t = 0$ értékhez tartozó $\Psi_{7,3,2}(0; x)$ az egyetlen, amely $x = 1$ -ben nem nullát vesz fel, hanem egy **véges** értéket. Ez az érték éppen a $[0, 1]$ intervallumon vett határozott integrált adja, és a későbbiekben azt is látni fogjuk, hogyan írható fel többszörös zeta értékekkel.

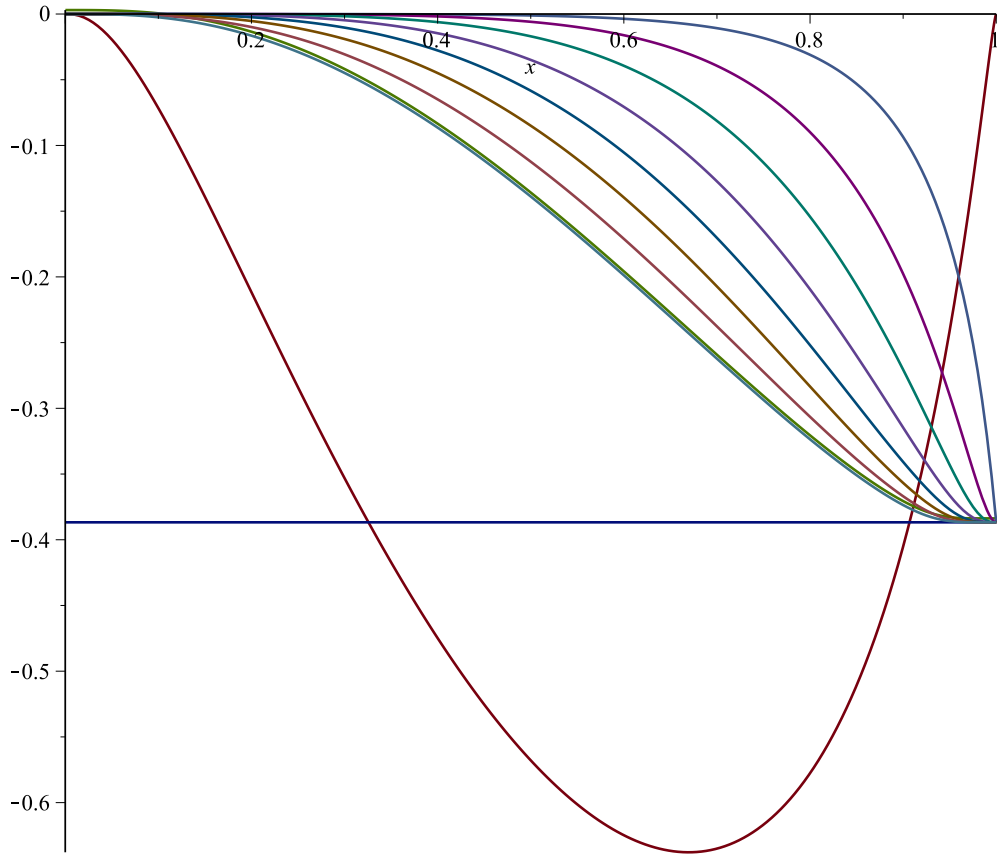


Végül az $F_k(x) := \sum_{t=0}^k \ln^t(x) \cdot \Psi_{7,3,2}(t; x)$ $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ kumulált függvényeket rajzoltuk fel az eredeti $f(x)$ függvénnyel együtt.



Ugyanezen grafikonokat láthatjuk az alábbiakban $p = 7$, $q = 4$ és $n = 5$ paraméterekkel.





A következőkben a $\int_0^1 \frac{\ln^p(x) \cdot \ln^q(1-x)}{(1-x)^n} dx$ határozott integrál értékét adjuk meg a legutóbbi formula segítségével.

Legyen $F(x) = \int \frac{\ln^p(x) \cdot \ln^q(1-x)}{(1-x)^n} dx$. Ekkor $\int_0^1 \frac{\ln^p(x) \cdot \ln^q(1-x)}{(1-x)^n} dx = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$

Egyszerű határérték vizsgálattal (később ezt részletesen le is írjuk) $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$ -re pedig az alábbi írható:

$$\begin{aligned} (-1)^p p! q! \sum_{t=0}^p \frac{(-1)^t}{t!} \ln^t(1) \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \text{Li}_{(p+1-t, 0^m, 1^q)}(1) &= (-1)^p p! q! \frac{(-1)^0}{0!} \ln^0(1) \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \text{Li}_{(p+1-0, 0^m, 1^q)}(1) = \\ &= (-1)^p p! q! \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \zeta(p+1, 0^m, 1^q) \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln^p(x) \cdot \ln^q(1-x)}{(1-x)^n} dx = (-1)^p p! q! \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \zeta(p+1, 0^m, 1^q)$$

Ugyanezen eszköztár segítségével a fenti logaritmushatványokat tartalmazó integráloknál sokkal általánosabb integrálokat is ki tudunk számítani. Valójában tetszőleges

$$\int \frac{L_{(a_1, a_2, \dots, a_r)}(u) \cdot L_{(b_1, b_2, \dots, b_s)}(v)}{u^n} dx$$

alakú integrál megadható, ahol $L = \text{Li}$, vagy $L = \text{Le}$, és az u, v argumentum, illetve nevező az x vagy $1-x$ kifejezés valamelyike. Az egyetlen kritérium az integrállal szemben, hogy az (a_1, a_2, \dots, a_r) indexsorban minden elem legalább 1 legyen.

4 Konkrét példák az $\int \frac{\mathbf{L}_{(a_1, a_2, \dots, a_r)}(x/1-x) \cdot \mathbf{L}_{(b_1, b_2, \dots, b_s)}(1-x/x)}{(x/1-x)^n} dx$ ($a_1, \dots, a_r \geq 1$) integrálok kiszámítására

A példák megoldásakor az alábbi azonosságokra támaszkodunk.

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \frac{\text{Le}_{(0^n)}(x)}{x} \quad (8)$$

$$\frac{1}{x} = \frac{\text{Le}_{(0^n)}(1-x)}{1-x} \quad (9)$$

$$\text{Le}_{(0^n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \text{Li}_{(0^{k+1})}(x) \quad (10)$$

$$\text{Li}_{(0^m)}(x) \cdot \text{Li}_{(1^n)}(x) = \text{Li}_{(0^m, 1^n)}(x) \quad (11)$$

1. példa

$$I = \int \frac{\text{Li}_{(2,3)}(1-x) \text{Li}_{(-2,1,2)}(x)}{(1-x)^3} dx$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\text{Li}_{(2,3)}(1-x) \text{Li}_{(-2,1,2)}(x)}{(1-x)^3} dx \stackrel{(8)}{=} \int \frac{\text{Li}_{(2,3)}(1-x) \text{Li}_{(-2,1,2)}(x) \text{Le}_{(0^3)}(x)}{x} dx \stackrel{(10)}{=} \\ &\stackrel{(10)}{=} \int \frac{\text{Li}_{(2,3)}(1-x) \text{Li}_{(-2,1,2)}(x) \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} \text{Li}_{(0^{k+1})}(x)}{x} dx = \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} \int \frac{\text{Li}_{(2,3)}(1-x) \text{Li}_{(-2,1,2)}(x) \text{Li}_{(0^{k+1})}(x)}{x} dx = \\ &= \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} \int \frac{\text{Li}_{(2,3)}(1-x) \text{Li}_{(0^{k+1}, -2, 1, 2)}(x)}{x} dx = \underbrace{\int \frac{\text{Li}_{(2,3)}(1-x) \text{Li}_{(0, -2, 1, 2)}(x)}{x} dx}_{I_1} + \\ &+ 2 \underbrace{\int \frac{\text{Li}_{(2,3)}(1-x) \text{Li}_{(0, 0, -2, 1, 2)}(x)}{x} dx}_{I_2} + \underbrace{\int \frac{\text{Li}_{(2,3)}(1-x) \text{Li}_{(0, 0, 0, -2, 1, 2)}(x)}{x} dx}_{I_3} \end{aligned}$$

Az I_1, I_2, I_3 integrálokat a számológéppel számítjuk. Az eredmények pedig az alábbiak:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{\text{Li}_{(2,3)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(0, -2, 1, 2)}(x)}{x} dx = \text{Li}_{(2,3)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1, -2, 1, 2)}(x) + \text{Li}_{(1,3)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1, 1, -2, 1, 2)}(x) + \text{Li}_{(3)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(2, 1, -2, 1, 2)}(x) + \\ &+ \text{Li}_{(2)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1, 2, 1, -2, 1, 2)}(x) + \text{Li}_{(1)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1, 1, 2, 1, -2, 1, 2)}(x) + \text{Li}_{(0)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(2, 1, 2, 1, -2, 1, 2)}(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= 2 \int \frac{\text{Li}_{(2,3)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(0, 0, -2, 1, 2)}(x)}{x} dx = 2 \text{Li}_{(2,3)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1, 0, -2, 1, 2)}(x) + 2 \text{Li}_{(1,3)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1, 1, 0, -2, 1, 2)}(x) + \\ &+ 2 \text{Li}_{(3)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(2, 1, 0, -2, 1, 2)}(x) + 2 \text{Li}_{(2)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1, 2, 1, 0, -2, 1, 2)}(x) + 2 \text{Li}_{(1)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1, 1, 2, 1, 0, -2, 1, 2)}(x) + \\ &+ 2 \text{Li}_{(0)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(2, 1, 2, 1, 0, -2, 1, 2)}(x). \end{aligned}$$

$$I_3 = \int \frac{\text{Li}_{(2,3)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(0, 0, 0, -2, 1, 2)}(x)}{x} dx = \text{Li}_{(2,3)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1, 0, 0, -2, 1, 2)}(x) + \text{Li}_{(1,3)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1, 1, 0, 0, -2, 1, 2)}(x) +$$

$$+ \text{Li}_{(3)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(2,1,0,0,-2,1,2)}(x) + \text{Li}_{(2)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1,2,1,0,0,-2,1,2)}(x) + \text{Li}_{(1)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1,1,2,1,0,0,-2,1,2)}(x) + \\ + \text{Li}_{()}(1-x) \cdot \text{Li}_{(2,1,2,1,0,0,-2,1,2)}(x).$$

Az $I = I_1 + I_2 + I_3$ integrál / a tagokat $\text{Li}_{(\dots)}(1-x)$ függvény szerint összegyűjtve /

$$I = \text{Li}_{(2,3)}(1-x) \{ \text{Li}_{(1,-2,1,2)}(x) + 2 \text{Li}_{(1,0,-2,1,2)}(x) + \text{Li}_{(1,0,0,-2,1,2)}(x) \} + \\ + \text{Li}_{(1,3)}(1-x) \{ \text{Li}_{(1,1,-2,1,2)}(x) + 2 \text{Li}_{(1,1,0,-2,1,2)}(x) + \text{Li}_{(1,1,0,0,-2,1,2)}(x) \} + \\ + \text{Li}_{(3)}(1-x) \{ \text{Li}_{(2,1,-2,1,2)}(x) + 2 \text{Li}_{(2,1,0,-2,1,2)}(x) + \text{Li}_{(2,1,0,0,-2,1,2)}(x) \} + \\ + \text{Li}_{(2)}(1-x) \{ \text{Li}_{(1,2,1,-2,1,2)}(x) + 2 \text{Li}_{(1,2,1,0,-2,1,2)}(x) + \text{Li}_{(1,2,1,0,0,-2,1,2)}(x) \} + \\ + \text{Li}_{(1)}(1-x) \{ \text{Li}_{(1,1,2,1,-2,1,2)}(x) + 2 \text{Li}_{(1,1,2,1,0,-2,1,2)}(x) + \text{Li}_{(1,1,2,1,0,0,-2,1,2)}(x) \} + \\ + \text{Li}_{()}(1-x) \{ \text{Li}_{(2,1,2,1,-2,1,2)}(x) + 2 \text{Li}_{(2,1,2,1,0,-2,1,2)}(x) + \text{Li}_{(2,1,2,1,0,0,-2,1,2)}(x) \}$$

2. példa

$$I = \int \frac{\text{Le}_{(2,1)}(1-x) \text{Li}_{(2,1,2)}(x)}{x^3} dx$$

$$I = \int \frac{\text{Le}_{(2,1)}(1-x) \text{Li}_{(2,1,2)}(x)}{x^3} dx \stackrel{(8)}{=} \int \frac{\text{Le}_{(2,1)}(1-x) \text{Li}_{(2,1,2)}(x) \text{Le}_{(0^3)}(1-x)}{1-x} dx \stackrel{(10)}{=} \\ \stackrel{(10)}{=} \int \frac{\text{Le}_{(2,1)}(1-x) \text{Li}_{(2,1,2)}(x) \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} \text{Li}_{(0^{k+1})}(1-x)}{1-x} dx = \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} \int \frac{\text{Le}_{(2,1)}(1-x) \text{Li}_{(2,1,2)}(x) \text{Li}_{(0^{k+1})}(1-x)}{1-x} dx = \\ = \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} \int \frac{(\text{Li}_{(2,1)}(1-x) + \text{Li}_{(3)}(1-x)) \text{Li}_{(2,1,2)}(x) \text{Li}_{(0^{k+1})}(1-x)}{1-x} dx = \\ = \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} \int \frac{\text{Li}_{(2,1)}(1-x) \text{Li}_{(2,1,2)}(x) \text{Li}_{(0^{k+1})}(1-x)}{1-x} dx + \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} \int \frac{\text{Li}_{(3)}(1-x) \text{Li}_{(2,1,2)}(x) \text{Li}_{(0^{k+1})}(1-x)}{1-x} dx = \\ = \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} \int \frac{\text{Li}_{(0^{k+1},2,1)}(1-x) \text{Li}_{(2,1,2)}(x)}{1-x} dx + \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} \int \frac{\text{Li}_{(0^{k+1},3)}(1-x) \text{Li}_{(2,1,2)}(x)}{1-x} dx = \\ = \underbrace{\int \frac{\text{Li}_{(0,2,1)}(1-x) \text{Li}_{(2,1,2)}(x)}{1-x} dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{\text{Li}_{(0,3)}(1-x) \text{Li}_{(2,1,2)}(x)}{1-x} dx}_{I_2} + 2 \underbrace{\int \frac{\text{Li}_{(0,0,2,1)}(1-x) \text{Li}_{(2,1,2)}(x)}{1-x} dx}_{I_3} + \\ + 2 \underbrace{\int \frac{\text{Li}_{(0,0,3)}(1-x) \text{Li}_{(2,1,2)}(x)}{1-x} dx}_{I_4} + \underbrace{\int \frac{\text{Li}_{(0,0,0,2,1)}(1-x) \text{Li}_{(2,1,2)}(x)}{1-x} dx}_{I_5} + \underbrace{\int \frac{\text{Li}_{(0,0,0,3)}(1-x) \text{Li}_{(2,1,2)}(x)}{1-x} dx}_{I_6}$$

Az $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$ integrálokat a számológéppel számítjuk. Az eredmények pedig az alábbiak:

$$I_1 = \int \frac{\text{Li}_{(2,1,2)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(0,2,1)}(x)}{1-x} dx = \text{Li}_{(2,1,2)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1,0,2,1)}(x) + \text{Li}_{(1,1,2)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1,1,0,2,1)}(x) + \\ + \text{Li}_{(1,2)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(2,1,0,2,1)}(x) + \text{Li}_{(2)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(3,1,0,2,1)}(x) + \text{Li}_{(1)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1,3,1,0,2,1)}(x) + \text{Li}_{()}(1-x) \cdot \text{Li}_{(2,3,1,0,2,1)}(x) \\ I_2 = \int \frac{\text{Li}_{(2,1,2)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(0,3)}(x)}{1-x} dx = \text{Li}_{(2,1,2)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1,0,3)}(x) + \text{Li}_{(1,1,2)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1,1,0,3)}(x) +$$

$$+\text{Li}_{(1,2)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(2,1,0,3)}(x) + \text{Li}_{(2)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(3,1,0,3)}(x) + \text{Li}_{(1)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1,3,1,0,3)}(x) + \text{Li}_{()}(1-x) \cdot \text{Li}_{(2,3,1,0,3)}(x)$$

$$I_3 = 2 \int \frac{\text{Li}_{(2,1,2)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(0,0,2,1)}(x)}{1-x} dx = 2 \text{Li}_{(2,1,2)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1,0,0,2,1)}(x) + 2 \text{Li}_{(1,1,2)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1,1,0,0,2,1)}(x) + \\ + 2 \text{Li}_{(1,2)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(2,1,0,0,2,1)}(x) + 2 \text{Li}_{(2)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(3,1,0,0,2,1)}(x) + 2 \text{Li}_{(1)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1,3,1,0,0,2,1)}(x) + 2 \text{Li}_{()}(1-x) \cdot \text{Li}_{(2,3,1,0,0,2,1)}(x)$$

$$I_4 = 2 \int \frac{\text{Li}_{(2,1,2)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(0,0,3)}(x)}{1-x} dx = 2 \text{Li}_{(2,1,2)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1,0,0,3)}(x) + 2 \text{Li}_{(1,1,2)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1,1,0,0,3)}(x) + \\ + 2 \text{Li}_{(1,2)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(2,1,0,0,3)}(x) + 2 \text{Li}_{(2)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(3,1,0,0,3)}(x) + 2 \text{Li}_{(1)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1,3,1,0,0,3)}(x) + 2 \text{Li}_{()}(1-x) \cdot \text{Li}_{(2,3,1,0,0,3)}(x)$$

$$I_5 = \int \frac{\text{Li}_{(2,1,2)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(0,0,0,2,1)}(x)}{1-x} dx = \text{Li}_{(2,1,2)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1,0,0,0,2,1)}(x) + \text{Li}_{(1,1,2)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1,1,0,0,0,2,1)}(x) + \\ + \text{Li}_{(1,2)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(2,1,0,0,0,2,1)}(x) + \text{Li}_{(2)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(3,1,0,0,0,2,1)}(x) + \text{Li}_{(1)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1,3,1,0,0,0,2,1)}(x) + \text{Li}_{()}(1-x) \cdot \text{Li}_{(2,3,1,0,0,0,2,1)}(x)$$

$$I_6 = \int \frac{\text{Li}_{(2,1,2)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(0,0,0,3)}(x)}{1-x} dx = \text{Li}_{(2,1,2)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1,0,0,0,3)}(x) + \text{Li}_{(1,1,2)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1,1,0,0,0,3)}(x) + \\ + \text{Li}_{(1,2)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(2,1,0,0,0,3)}(x) + \text{Li}_{(2)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(3,1,0,0,0,3)}(x) + \text{Li}_{(1)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(1,3,1,0,0,0,3)}(x) + \text{Li}_{()}(1-x) \cdot \text{Li}_{(2,3,1,0,0,0,3)}(x)$$

Az $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6$ integrál / a tagokat $\text{Li}_{(...)}(1-x)$ függvény szerint összegyűjtve /

$$I = \text{Li}_{(2,1,2)}(1-x) \{ \text{Li}_{(1,0,2,1)}(x) + \text{Li}_{(1,0,3)}(x) + 2 \text{Li}_{(1,0,0,2,1)}(x) + 2 \text{Li}_{(1,0,0,3)}(x) + \text{Li}_{(1,0,0,0,2,1)}(x) + \text{Li}_{(1,0,0,0,3)}(x) \} + \\ + \text{Li}_{(1,1,2)}(1-x) \{ \text{Li}_{(1,1,0,2,1)}(x) + \text{Li}_{(1,1,0,3)}(x) + 2 \text{Li}_{(1,1,0,0,2,1)}(x) + 2 \text{Li}_{(1,1,0,0,3)}(x) + \text{Li}_{(1,1,0,0,0,2,1)}(x) + \text{Li}_{(1,1,0,0,0,3)}(x) \} + \\ + \text{Li}_{(1,2)}(1-x) \{ \text{Li}_{(2,1,0,2,1)}(x) + \text{Li}_{(2,1,0,3)}(x) + 2 \text{Li}_{(2,1,0,0,2,1)}(x) + 2 \text{Li}_{(2,1,0,0,3)}(x) + \text{Li}_{(2,1,0,0,0,2,1)}(x) + \text{Li}_{(2,1,0,0,0,3)}(x) \} + \\ + \text{Li}_{(2)}(1-x) \{ \text{Li}_{(3,1,0,2,1)}(x) + \text{Li}_{(3,1,0,3)}(x) + 2 \text{Li}_{(3,1,0,0,2,1)}(x) + 2 \text{Li}_{(3,1,0,0,3)}(x) + \text{Li}_{(3,1,0,0,0,2,1)}(x) + \text{Li}_{(3,1,0,0,0,3)}(x) \} + \\ + \text{Li}_{(1)}(1-x) \{ \text{Li}_{(1,3,1,0,2,1)}(x) + \text{Li}_{(1,3,1,0,3)}(x) + 2 \text{Li}_{(1,3,1,0,0,2,1)}(x) + 2 \text{Li}_{(1,3,1,0,0,3)}(x) + \text{Li}_{(1,3,1,0,0,0,2,1)}(x) + \text{Li}_{(1,3,1,0,0,0,3)}(x) \} + \\ + \text{Li}_{()}(1-x) \{ \text{Li}_{(2,3,1,0,2,1)}(x) + \text{Li}_{(2,3,1,0,3)}(x) + 2 \text{Li}_{(2,3,1,0,0,2,1)}(x) + 2 \text{Li}_{(2,3,1,0,0,3)}(x) + \text{Li}_{(2,3,1,0,0,0,2,1)}(x) + \text{Li}_{(2,3,1,0,0,0,3)}(x) \}$$

Az alábbi grafikonon: $f(x) = \frac{\text{Le}_{(2,1)}(1-x) \text{Li}_{(2,1,2)}(x)}{x^3}$; $\int \frac{\text{Le}_{(2,1)}(1-x) \text{Li}_{(2,1,2)}(x)}{x^3} dx$ numerikusan számított; $I(x)$ a példa eredménye

