

1 Tetszőleges $w \in \mathfrak{h}$ szó különböző felbontásai

Shu OI and Kimio UENO; Fundamental Solutions of the Knizhnik-Zamolodchikov Equation of One Variable and the Riemann-Hilbert Problem, PROPOSITION 4 ([R]), TOKYO J. MATH. VOL. 41, NO. 1, 2018

The algebra (\mathfrak{h}, \sqcup) is a polynomialalgebra of x whose coefficients are in $\mathfrak{h}y$, and is a polynomial algebra of x, y whose coefficients are in $x\mathfrak{h}y$; $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}y[x]$, $\mathfrak{h} = xy\mathfrak{h}[x, y]$. That is, any word w in \mathfrak{h} can be written as $\sum_i w_i \sqcup x^j = \sum_{i,j} y^j \sqcup w_{i,j} \sqcup x^j$ uniquely,

where $w_j \in \mathfrak{h}y$ and $w_{i,j} \in x\mathfrak{h}y$.

A (\mathfrak{h}, \sqcup) algebra egy egylátozós polinomalgebra az x változóval, melynek együtthatói a $\mathfrak{h}y$ szavaiból kerülnek ki, és ugyanakkor egy kétváltozós polinomalgebra is x, y változókkal, melynek együtthatói az $x\mathfrak{h}y$ szavaiból kerülnek ki; $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}y[x]$, $\mathfrak{h} = xy\mathfrak{h}[x, y]$. Vagyis, minden \mathfrak{h} -beli w szó felírható

$$\sum_i w_i \sqcup x^j = \sum_{i,j} y^j \sqcup w_{i,j} \sqcup x^j$$

alakban, ahol $w_j \in \mathfrak{h}y$ és $w_{i,j} \in x\mathfrak{h}y$, és ez a felírás egyértelmű.

$\mathbb{Z}[x]$: Az egész együtthatós x válozós polinomok algebrája. Elemei a $p(x) = z_0x^0 + z_1x^1 + z_2x^2 + \dots + z_nx^n$ ($z_0, z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{Z}$) alakú polinomok. Azért algebra, mert az egész együtthatós x válozós polinomok vektorteret alkotnak, és értelmezve van egy szorzat a polinomokon.

$\mathbb{R}[x]$: A valós együtthatós x válozós polinomok algebrája. Elemei a $p(x) = r_0x^0 + r_1x^1 + r_2x^2 + \dots + r_nx^n$ ($r_0, r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{R}$) alakú polinomok. Azért algebra, mert a valós együtthatós x válozós polinomok vektorteret alkotnak, és értelmezve van egy szorzat a polinomokon.

A $\mathfrak{h} = (\mathfrak{h}, \sqcup) = \mathfrak{h}y[x]$ azt fejezi ki, hogy a

$$p(x) = w_0 \sqcup x^0 + w_1 \sqcup x^1 + w_2 \sqcup x^2 + \dots + w_n \sqcup x^n \in \mathfrak{h}y[x]$$

$(w_0, w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathfrak{h}y)$ alakú polinomok éppen a (\mathfrak{h}, \sqcup) algebrát adják. Vagyis, \mathfrak{h} minden w eleme egyértelműen felírható

$$w = w_0 \sqcup x^0 + w_1 \sqcup x^1 + \dots + w_n \sqcup x^n \quad (w_0, w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathfrak{h}y) \quad (1.1)$$

alakban.

Ezen egyértelmű felbontás segítségével definiálhatjuk tetszőleges $w \in \mathfrak{h}$ szó reg $^0_{\sqcup}(w)$ regularizáltját, ami nem más, mint az (1.1) felbontásban a w_0 konstans együttható. Azaz,

$$\text{reg}^0_{\sqcup}(w) = w_0 \iff w = w_0 \sqcup x^0 + w_1 \sqcup x^1 + \dots + w_n \sqcup x^n \in \mathfrak{h}y[x]$$

A definícióból rögtön következik, hogy tetszőleges $w \in \mathfrak{h}$ szóra $\text{reg}^0_{\sqcup}(w) \in \mathfrak{h}y$ és, hogy $\text{reg}^0_{\sqcup}(u) = u$ minden $u \in \mathfrak{h}y$ szóra. Egy nem $\mathfrak{h}y$ -beli w szó egyértelműen felírható ux^n , $u \in \mathfrak{h}y$, $n \geq 0$ alakban, melynek a regularizáltját az alábbi explicit képlet adja meg.

Tetszőleges $u \in \mathfrak{h}y$ y-ra végződő szóra, és tetszőleges $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ számra

$$\begin{aligned} \text{reg}^0_{\sqcup}(ux^n) &= \sum_{j=0}^n (-1)^j ux^{n-j} \sqcup x^j \in \mathfrak{h}y \\ \text{reg}^0_{\sqcup}(ux^n) &= ux^n - ux^{n-1} \sqcup x + ux^{n-2} \sqcup x^2 - \dots + (-1)^{n-1} ux \sqcup x^{n-1} + (-1)^n u \sqcup x^n \end{aligned} \quad (\text{A})$$

Példa: Legyen $w = xxyxyxxx \notin \mathfrak{h}y$. Ekkor $u = xxyxy$, és $n = 3$. A képlet szerint

$$\text{reg}^0_{\sqcup}(xxyxyxxx) = xxyxyxxx \sqcup - xxyxyxx \sqcup x + xxyxyx \sqcup xx - xxyxy \sqcup xxx$$

$(x^0 := () := \mathbf{1}$, és $w \sqcup \mathbf{1} = w$)

I. A kártya segítségével ezt kiszámíthatjuk tagonként.

1. w_1 input: $xxxyxyxxx$; w_2 input: (üres) \Rightarrow Calculate

$w_1 = \{ \quad \text{xxxyxyxxx} \quad \} \text{ reg}^0_{\omega} \square$
 $w_2 = \{ \quad \} \text{ reg}^0_{\omega} \square$

Calculate Clear *

xxxyxyxxx

2. w_1 input: $xxxyxyxx$; w_2 input: x \Rightarrow Calculate

$w_1 = \{ \quad \text{xxxyxyxx} \quad \} \text{ reg}^0_{\omega} \square$
 $w_2 = \{ \quad x \quad \} \text{ reg}^0_{\omega} \square$

Calculate Clear *

$3 \cdot \text{xxxyxyxxx} + 2 \cdot \text{xxxyxxxy} + 3 \cdot \text{xxxxyxyxx}$

3. w_1 input: $xxxyxyx$; w_2 input: xx \Rightarrow Calculate

$w_1 = \{ \quad \text{xxxyxyx} \quad \} \text{ reg}^0_{\omega} \square$
 $w_2 = \{ \quad \text{xx} \quad \} \text{ reg}^0_{\omega} \square$

Calculate Clear *

$3 \cdot \text{xxxyxyxxx} + 4 \cdot \text{xxxyxxxy} + 3 \cdot \text{xxxyxxxyx} + 6 \cdot \text{xxxxyxyxx} + 6 \cdot \text{xxxxyxxxy} + 6 \cdot \text{xxxxyxyx}$

4. w_1 input: $xxxyxy$; w_2 input: xxx \Rightarrow Calculate

$w_1 = \{ \quad \text{xxxyxy} \quad \} \text{ reg}^0_{\omega} \square$
 $w_2 = \{ \quad \text{xxx} \quad \} \text{ reg}^0_{\omega} \square$

Calculate Clear *

$\text{xxxyxyxxx} + 2 \cdot \text{xxxyxxxy} + 3 \cdot \text{xxxyxxxyx} + 4 \cdot \text{xxxyxxxxy} + 3 \cdot \text{xxxxyxyxx} + 6 \cdot \text{xxxxyxxxy} + 9 \cdot \text{xxxxyxxxxy} + 6 \cdot \text{xxxxyxyxy} + 12 \cdot \text{xxxxyxyxy} + 10 \cdot \text{xxxxxyxy}$

A kapott eredményeket pedig (a megfelelő előjellel ellátva) összevonhatjuk:

1.

$$\underline{\text{xxxyxyxxx}} - (\underline{3 \cdot \text{xxxyxyxxx}} + 2 \cdot \text{xxxyxxxy} + 3 \cdot \text{xxxxyxyxx}) + (\underline{3 \cdot \text{xxxyxyxxx}} + 4 \cdot \text{xxxyxxxy} + 3 \cdot \text{xxxyxxxyx} + 6 \cdot \text{xxxxyxyxx} + 6 \cdot \text{xxxxyxxxy} + 6 \cdot \text{xxxxyxyxy}) - (\underline{\text{xxxyxyxxx}} + 2 \cdot \text{xxxyxxxy} + 3 \cdot \text{xxxyxxxyx} + 4 \cdot \text{xxxyxxxxy} + 3 \cdot \text{xxxxyxyxx} + 6 \cdot \text{xxxxyxxxy} + 9 \cdot \text{xxxxyxxxxy} + 6 \cdot \text{xxxxyxyxy} + 12 \cdot \text{xxxxyxyxy} + 10 \cdot \text{xxxxxyxy}) =$$

2.

$$= -(2 \cdot \text{xxxyxyxxx} + 3 \cdot \text{xxxxyxyxx}) + (4 \cdot \text{xxxyxyxxx} + 3 \cdot \text{xxxyxxxy} + 6 \cdot \text{xxxxyxyxx} + 6 \cdot \text{xxxxyxxxy}) - (2 \cdot \text{xxxyxyxxx} + 3 \cdot \text{xxxyxxxy} + 4 \cdot \text{xxxyxxxxy} + 3 \cdot \text{xxxxyxyxx} + 6 \cdot \text{xxxxyxxxy} + 9 \cdot \text{xxxxyxxxxy} + 6 \cdot \text{xxxxyxyxy} + 12 \cdot \text{xxxxyxyxy} + 10 \cdot \text{xxxxxyxy}) =$$

3.

$$= -(3 \cdot \text{xxxxyxyxx}) + (3 \cdot \text{xxxyxxxxy} + 6 \cdot \text{xxxyxyxxx} + 6 \cdot \text{xxxxyxyx} + 6 \cdot \text{xxxxyxyxy}) - (3 \cdot \text{xxxyxxxxy} + 4 \cdot \text{xxxyxxxxy} + 3 \cdot \text{xxxxyxyxx} + 6 \cdot \text{xxxxyxyxy} + 9 \cdot \text{xxxxyxxxxy} + 6 \cdot \text{xxxxyxyxy} + 12 \cdot \text{xxxxyxyxy} + 10 \cdot \text{xxxxxyxy}) =$$

4.

$$= (3 \cdot \text{xxxyxxxxy} + 6 \cdot \text{xxxyxyxxx} + 6 \cdot \text{xxxxyxyx}) - (3 \cdot \text{xxxyxxxxy} + 4 \cdot \text{xxxyxxxxy} + 6 \cdot \text{xxxxyxyx} + 9 \cdot \text{xxxxyxxxxy} + 6 \cdot \text{xxxxyxyxy} + 12 \cdot \text{xxxxyxyxy} + 10 \cdot \text{xxxxxyxy}) =$$

5.

$$= (6 \cdot \text{xxxxyxyx}) - (4 \cdot \text{xxxyxxxxy} + 6 \cdot \text{xxxyxyxxx} + 9 \cdot \text{xxxxyxxxxy} + 6 \cdot \text{xxxxyxyx} + 12 \cdot \text{xxxxyxyx} + 10 \cdot \text{xxxxxyxy}) =$$

6.

$$= (6 \cdot \text{xxxxyxyx}) - (4 \cdot \text{xxxyxxxxy} + 9 \cdot \text{xxxxyxxxxy} + 6 \cdot \text{xxxxyxyx} + 12 \cdot \text{xxxxyxyx} + 10 \cdot \text{xxxxxyxy}) =$$

7.

$$= -(4 \cdot \text{xxxyxxxxy} + 9 \cdot \text{xxxxyxxxxy} + 12 \cdot \text{xxxxyxyx} + 10 \cdot \text{xxxxxyxy})$$

A végeredmény pedig: $\text{reg}_{\sqcup}^0(xxyxyxxx) = -4 \cdot xxyxxxxy - 9 \cdot xxxxyyyy - 12 \cdot xxxxxyyy - 10 \cdot xxxxyxyy$.

Egy fontos észrevétel: A megmaradó \mathfrak{h}_y -beli szavak mind az utolsó $xxyxy$ \sqcup xxx szorzatból kerülnek ki.

II. Ugyanezt az eredményt egyszerűbben is megkaphatjuk. A w_1 vagy w_2 beviteli mezők valamelyikébe bevisszük az $xxyxyxxx$ szót (a másik mezőbe bármi lehet) és a mögötte található reg_{\sqcup}^0 címkelv felíratozott jelölőnégyzetet kipipáljuk. Az alábbi ábrán a w_2 beviteli mezőbe írtuk be az $xxyxyxxx$ szót. **Arra ügyelni kell, hogy közben az (A) képlet legyen kijelölve (kattintással, piros háttér).** A szürke hátterű sorban csak a bevitt adatok láthatók, közvetlenül alatta pedig az (A) felbontási képlet, a megfelelő paraméterekkel tömören, illetve kibontva. A második sávban az egyes kiszámított előjeles shuffle szorzatok piros zárójellel csoportosítva jelennek meg. A harmadik sávban az összevont végeredmény, míg a negyedikben a végeredmény vektor tartójú multihalmaz megfelelője látható.

w₁ = { xxyy } reg_w⁰
w₂ = { xxyxyxxx } reg_w⁰
Calculate Clear *

w₁ \sqcup w₂ és w₁ * w₂

$\text{reg}_{\sqcup}^0(ux^n) = \sum_{0 \leq j \leq n} (-1)^j ux^{n-j} \omega x^j \in \mathfrak{h}_y \quad (\omega \in \mathfrak{h}_y)$ (A)

$ux^n = \sum_{0 \leq j \leq n} \text{reg}_{\sqcup}^0(ux^{n-j}) \omega x^j \quad (\omega \in \mathfrak{h}_y)$ (A')

(A)-ban: u = xxyxy $\in \mathfrak{h}_y$; n = 3

$\text{reg}_{\sqcup}^0(xxyxyxxx) = \sum_{0 \leq j \leq 3} (-1)^j xxyxyx^{3-j} \omega x^j = xxyxy\textcolor{red}{xxx}\omega() - xxyxy\textcolor{red}{xx}\omega\textcolor{blue}{x} + xxyxy\textcolor{red}{x}\omega\textcolor{blue}{xx} - xxyxy\omega\textcolor{red}{xxx} =$

$xxyxyxxx - (3 \cdot xxyxyxxx + 2 \cdot xxyxyxx + 3 \cdot xxyxyxyxx) + (3 \cdot xxyxyxxx + 4 \cdot xxyxyxx + 3 \cdot xxyxyxyx + 6 \cdot xxyxyxx + 6 \cdot xxyxyxyx + 6 \cdot xxyxyxyx) - (xxyxyxxx + 2 \cdot xxyxyxx + 3 \cdot xxyxyxyx + 4 \cdot xxyxyxyxx + 3 \cdot xxyxyxyxx + 6 \cdot xxyxyxyx + 9 \cdot xxyxyxyx + 6 \cdot xxyxyxyx + 12 \cdot xxyxyxyx + 10 \cdot xxyxyxyx) =$

$-4 \cdot xxy|xxxxx| - 9 \cdot xxy|xxxx| - 12 \cdot xxy|xxy| - 10 \cdot xxy|xy| =$

$-4(3,5) - 9(4,4) - 12(5,3) - 10(6,2)$

Toggle help

Ha a felbontás valamelyik tagjára kattintunk, akkor a hozzáartozó, kiszámított előjeles shuffle szorzatot kékkel kiemelve láthatjuk. A kapcsolat fordítva is működik: a második sávban egy tetszőleges tagra kattintva kijelöli a képlet azon szorzatát, amelyből a tag származik.

(A)-ban: u = xxyxy $\in \mathfrak{h}_y$; n = 3

$\text{reg}_{\sqcup}^0(xxyxyxxx) = \sum_{0 \leq j \leq 3} (-1)^j xxyxyx^{3-j} \omega x^j = xxyxy\textcolor{red}{xxx}\omega() - xxyxy\textcolor{red}{xx}\omega\textcolor{blue}{x} + xxyxy\textcolor{red}{x}\omega\textcolor{blue}{xx} - xxyxy\omega\textcolor{red}{xxx} =$

$xxyxyxxx - (3 \cdot xxyxyxxx + 2 \cdot xxyxyxx + 3 \cdot xxyxyxyxx) + (3 \cdot xxyxyxxx + 4 \cdot xxyxyxx + 3 \cdot xxyxyxyx + 6 \cdot xxyxyxx + 6 \cdot xxyxyxyx) - (xxyxyxxx + 2 \cdot xxyxyxx + 3 \cdot xxyxyxyx + 4 \cdot xxyxyxyxx + 3 \cdot xxyxyxyxx + 6 \cdot xxyxyxyx + 9 \cdot xxyxyxyx + 6 \cdot xxyxyxyx + 12 \cdot xxyxyxyx + 10 \cdot xxyxyxyx) =$

$-4 \cdot xxy|xxxxx| - 9 \cdot xxy|xxxx| - 12 \cdot xxy|xxy| - 10 \cdot xxy|xy| =$

$-4(3,5) - 9(4,4) - 12(5,3) - 10(6,2)$

Ha a kiszámított shuffle szorzatban egy tetszőleges tagra kattintunk, akkor az előbbi kék kijelöléssel együtt, az egymást kiejtő tagok sárga alpú kijelölése, illetve a képernyő tetején megjelenő kék alapú mezőben, ezen egymást kiejtő tagok, előjeles összege segíti a fenti összevonás elvégzését. Az utóbbi akkor tűnik el, ha tetszőleges olyan helyre kattintunk a képernyőn, amely nem a szóban forgó shuffle szorzat egy tagja. (Vagyis, nem a második sávba.)

$$\begin{aligned}
 & \text{xxxyxyxxxx} - 3\text{xxxyxyxxxx} + 3\text{xxxyxyxxxx} - \text{xxxyxyxxxx} \\
 & (\text{A})\text{-ban: } u = \text{xxxyxy is by; } n = 3 \\
 & \text{reg}_u^0(\text{xxxyxyxxxx}) = \sum_{0 \leq j \leq 3} (-1)^j \text{xxxyxy}^{3-j} u^j = \\
 & \text{xxxyxyxxxx } u^0 - \text{xxxyxyxxxx } u^1 + \text{xxxyxyxxxx } u^2 - \text{xxxyxyxxxx } u^3 = \\
 & \boxed{\text{xxxyxyxxxx} - (3\text{xxxyxyxxxx} + 2\text{xxxyxxxxxx} +} \\
 & \boxed{3\text{xxxxxyxyxx})} + \boxed{(3\text{xxxyxyxxxx} + 4\text{xxxxxyxyxx} +} \\
 & 3\text{xxxxxyxyxx} + 6\text{xxxxxyxyxx} + 6\text{xxxxxyxyxx} + \\
 & 6\text{xxxxxyxyxx}) - \boxed{(\text{xxxyxyxxxx} + 2\text{xxxyxxxxxx} +} \\
 & 3\text{xxxyxxxxxy} + 4\text{xxxyxxxxxy} + 3\text{xxxxxyxyxx} + \\
 & 6\text{xxxxxyxyxx} + 9\text{xxxxxyxyxx} + 6\text{xxxxxyxyxx} + \\
 & 12\text{xxxxxyxyxx} + 10\text{xxxxxyxyxx}) = \\
 & -4\text{xxxyxxxxxy} - 9\text{xxxxxyxxxxy} - \\
 & 12\text{xxxxxyxxxxy} - 10\text{xxxxxyxy} =
 \end{aligned}$$

A képernyő tetején kéken felugró sáv különösen akkor hasznos, ha az előjeles kiszámított shuffle szorzat olyan nagy, hogy az egymást kiejtő elemek közül csak néhány, esetleg csak egy látható.

zutzu