# 1 Alapvető vektorműveletek, lépések

Az alábbiakban definiálunk négy darab egyváltozós vektorműveletet, amelyek mindegyike egy vektor elejét változtatja meg.

$$
\begin{aligned}
{}^{+}(a_1, a_2, \ldots a_n) &= (1, a_1, a_2, \ldots a_n) \\
{}^{-}(1, a_2, \ldots a_n) &= (a_2, a_3, \ldots a_n) \\
{}_{+}(a_1, a_2, \ldots a_n) &= (a_1 + 1, a_2, \ldots a_n) \\
{}_{-}(a_1, a_2, \ldots a_n) &= (a_1 - 1, a_2, \ldots a_n)
\end{aligned}
$$

Ezen egyváltozós műveletek segítségével négy kétváltozós vektorműveletet definiálunk. Ezek mindegyike az általánosított polilogaritmusok integrálásakor alkalmazott lépések egyike. Az első kettő a sztandard lépés, illetve annak duálisa, míg a második kettő at 1-átvitel és annak duálisa.

$$
\begin{array}{ll}
(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow ({}_{-}\boldsymbol{a} \mid {}_{+}\boldsymbol{b}) & (a_1, a_2, \ldots a_n \mid b_1, b_2, \ldots, b_m) \longrightarrow (a_1 - 1, a_2, \ldots a_n \mid b_1 + 1, b_2, \ldots, b_m) \\
(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow \left({}_{-}\boldsymbol{a} \mid {}^{+}\boldsymbol{b}\right) & (a_1, a_2, \ldots a_n \mid b_1, b_2, \ldots, b_m) \longrightarrow (a_1 - 1, a_2, \ldots a_n \mid 1, b_1, b_2, \ldots, b_m) \\
(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow \left({}^{-}\boldsymbol{a} \mid {}^{+}\boldsymbol{b}\right) & (1, a_2, \ldots a_n \mid b_1, b_2, \ldots, b_m) \longrightarrow (a_2, \ldots a_n \mid 1, b_1, b_2, \ldots, b_m) \\
(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow \left({}^{-}\boldsymbol{a} \mid {}_{+}\boldsymbol{b}\right) & (1, a_2, \ldots a_n \mid b_1, b_2, \ldots, b_m) \longrightarrow (a_2, \ldots a_n \mid b_1 + 1, b_2, \ldots, b_m)
\end{array}
$$

Ha az $(a_1, a_2, \ldots a_n \mid b_1, b_2, \ldots, b_m)$ párosban $a_1 > 1$, akkor a sztandard lépés, ha pedig $a_1 = 1$ , akkor az 1-átvitel valamelyik változatát hajtjuk végre.

Szükségünk lesz még az alábbi két kétváltozós vektorműveletre, amelyek az általánosított polilogaritmusok integrálásakor az inicializálás megfelelői.

$$
\begin{array}{ll}
(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow (\boldsymbol{a} \mid {}_{+}\boldsymbol{b}) & (a_1, a_2, \ldots a_n \mid b_1, b_2, \ldots, b_m) \longrightarrow (a_1, a_2, \ldots a_n \mid b_1 + 1, b_2, \ldots, b_m) \\
(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow \left(\boldsymbol{a} \mid {}^{+}\boldsymbol{b}\right) & (a_1, a_2, \ldots a_n \mid b_1, b_2, \ldots, b_m) \longrightarrow (a_1, a_2, \ldots a_n \mid 1, b_1, b_2, \ldots, b_m)
\end{array}
$$

# 2 Fázisok táblázatai

Az $\boldsymbol{a}$ vektor egyértelműen meghatározza a végrehajtandó lépések sorozatát. Például $\boldsymbol{a} = (4, 1, 3)$ indexvektor esetén a lépések sora így alakul:

$$
(4,1,3) \overset{\text{std}}{\to} (3,1,3) \overset{\text{std}}{\to} (2,1,3) \overset{\text{std}}{\to} (1,1,3) \overset{\text{1-átv}}{\to} (1,3) \overset{\text{1-átv}}{\to} (3) \overset{\text{std}}{\to} (2) \overset{\text{std}}{\to} (1) \overset{\text{1-ürit}}{\to} ()
$$

Sokkal nehezebb megmondani, hogy egy konkrét integrálási feladatban az egyes fázisokban (lépések végrehajtásakor) mi történik a $\boldsymbol{b}$ vektorral. Egy általános

$$
\int \frac{\mathrm{L}_{\boldsymbol{a}}(X_a) \cdot \mathrm{L}_{\boldsymbol{b}}(X_b)}{X} \, \mathrm{d}x
$$

integrálási feladat az $\mathrm{L}_{\boldsymbol{a}} = \mathrm{Li}/\mathrm{Le}$, $\mathrm{L}_{\boldsymbol{b}} = \mathrm{Li}/\mathrm{Le}$, $X_a = x/1-x$, $X_b = x/1-x$, $X = x/1-x$ változók megválasztásától függ, amely összesen $2^5 = 32$ lehetőséget jelent. Ezek mindegyikében megadható a $\boldsymbol{b}$ vektor alakulása a négy különböző fázisban. Ezeket foglaltuk össze az alábbi táblázatokban.

| Inicializálás | $\int \frac{1}{x}$ | $\int \frac{1}{1-x}$ |
|---|---|---|
| $\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)$ | ${}_{+}\boldsymbol{b}$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}$ |
| $\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)$ | $-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$ | $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$ |
| $\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)$ | ${}_{+}\boldsymbol{b}$ | ${}^{+}\boldsymbol{b} - {}_{+}\boldsymbol{b}$ |
| $\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)$ | $-\left({}^{+}\boldsymbol{b} - {}_{+}\boldsymbol{b}\right)$ | $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$ |

| Sztandard lépés | $\mathrm{L}_{\boldsymbol{a}}(x)$ | $\mathrm{L}_{\boldsymbol{a}}(1-x)$ |
|---|---|---|
| $\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)$ | ${}_{+}\boldsymbol{b}$ | $-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$ |
| $\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)$ | $-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$ | ${}_{+}\boldsymbol{b}$ |
| $\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)$ | ${}_{+}\boldsymbol{b}$ | $-\left({}^{+}\boldsymbol{b} - {}_{+}\boldsymbol{b}\right)$ |
| $\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)$ | $-\left({}^{+}\boldsymbol{b} - {}_{+}\boldsymbol{b}\right)$ | ${}_{+}\boldsymbol{b}$ |

Megjegyzés: A sztandard lépés tánlázata csak annyiban különbözik az inicializálás táblázatától, hogy a második oszlopot -1-gyel megszorozzuk.

| 1-átvitel | $\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)$ | $\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)$ | $\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x)$ | $\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(1-x)$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}$ | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}$ | $-({}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b})$ |
| $\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)$ | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}$ | $-({}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b})$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}$ |
| $\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$ | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}$ | $-({}^{+}\boldsymbol{b})$ |
| $\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)$ | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$ | $-({}^{+}\boldsymbol{b})$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}$ |

| 1-ürítés | $\mathrm{L}_{\boldsymbol{a}}(x)$ | $\mathrm{L}_{\boldsymbol{a}}(1-x)$ |
|---|---|---|
| $\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}$ | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ |
| $\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)$ | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}$ |
| $\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$ | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ |
| $\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)$ | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$ |

Megjegyzés: Az 1-ürítés tánlázata megegyezik az 1-átvitel táblázatának első két oszlopával.

A 32 lehetséges esetet egy összefoglaló táblázata:

| | | $\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)$ | | $\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)$ | | $\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x)$ | | $\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(1-x)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\int \frac{1}{x}$ | $\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)$ | ${}_{+}\boldsymbol{b}$ | ${}_{+}\boldsymbol{b}$ | ${}_{+}\boldsymbol{b}$ | $-({}^{+}\boldsymbol{b})$ | ${}_{+}\boldsymbol{b}$ | ${}_{+}\boldsymbol{b}$ | ${}_{+}\boldsymbol{b}$ | $-({}^{+}\boldsymbol{b})$ |
| | | ${}^{+}\boldsymbol{b}$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}$ | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}$ | $-({}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b})$ | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ |
| | $\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)$ | $-({}^{+}\boldsymbol{b})$ | $-({}^{+}\boldsymbol{b})$ | $-({}^{+}\boldsymbol{b})$ | ${}_{+}\boldsymbol{b}$ | $-({}^{+}\boldsymbol{b})$ | $-({}^{+}\boldsymbol{b})$ | $-({}^{+}\boldsymbol{b})$ | ${}_{+}\boldsymbol{b}$ |
| | | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}$ | $-({}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b})$ | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}$ |
| | $\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)$ | ${}_{+}\boldsymbol{b}$ | ${}_{+}\boldsymbol{b}$ | ${}_{+}\boldsymbol{b}$ | ${}_{+}\boldsymbol{b}-{}^{+}\boldsymbol{b}$ | ${}_{+}\boldsymbol{b}$ | ${}_{+}\boldsymbol{b}$ | ${}_{+}\boldsymbol{b}$ | ${}_{+}\boldsymbol{b}-{}^{+}\boldsymbol{b}$ |
| | | ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$ | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$ | $-({}^{+}\boldsymbol{b})$ | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ |
| | $\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)$ | $-({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b})$ | $-({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b})$ | $-({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b})$ | ${}_{+}\boldsymbol{b}$ | $-({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b})$ | $-({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b})$ | $-({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b})$ | ${}_{+}\boldsymbol{b}$ |
| | | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$ | $-({}^{+}\boldsymbol{b})$ | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$ |
| $\int \frac{1}{1-x}$ | $\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}$ | ${}_{+}\boldsymbol{b}$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}$ | $-({}^{+}\boldsymbol{b})$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}$ | ${}_{+}\boldsymbol{b}$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}$ | $-({}^{+}\boldsymbol{b})$ |
| | | ${}^{+}\boldsymbol{b}$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}$ | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}$ | $-({}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b})$ | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ |
| | $\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)$ | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ | $-({}^{+}\boldsymbol{b})$ | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ | ${}_{+}\boldsymbol{b}$ | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ | $-({}^{+}\boldsymbol{b})$ | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ | ${}_{+}\boldsymbol{b}$ |
| | | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}$ | $-({}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b})$ | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}$ |
| | $\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$ | ${}_{+}\boldsymbol{b}$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$ | ${}_{+}\boldsymbol{b}-{}^{+}\boldsymbol{b}$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$ | ${}_{+}\boldsymbol{b}$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$ | ${}_{+}\boldsymbol{b}-{}^{+}\boldsymbol{b}$ |
| | | ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$ | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$ | $-({}^{+}\boldsymbol{b})$ | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ |
| | $\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)$ | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ | $-({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b})$ | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ | ${}_{+}\boldsymbol{b}$ | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ | $-({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b})$ | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ | ${}_{+}\boldsymbol{b}$ |
| | | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$ | $-({}^{+}\boldsymbol{b})$ | $-({}_{+}\boldsymbol{b})$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}$ | ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$ |

## 3 A polilogaritmus integrálok 10 alapesete

Elegendő az alábbi tíz esetet tisztázni, mert ezekből az összes többi tükrözéssel, illetve pozíciócserével megkapható.

$$\int \frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)}{1-x}\,\mathbf{d}x \xrightarrow{\textbf{tükrözés}} \int \frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}\,\mathbf{d}x \quad \text{és} \quad \int \frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{pozíció csere}} \int \frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)\cdot\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

**LiLi** (1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ (2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$ (3) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$

**LeLe** (4) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ (5) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$ (6) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$

**LiLe** (7) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ (8) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$ (9) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ (10) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\dfrac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}$<br>${}_{+}\boldsymbol{b} \qquad {}_{+}\boldsymbol{b}$<br>${}^{+}\boldsymbol{b} \qquad {}^{+}\boldsymbol{b}$ | | $\dfrac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)}{1-x}$<br>$-({}_{+}\boldsymbol{b}) \qquad {}_{+}\boldsymbol{b}$<br>${}^{+}\boldsymbol{b} \qquad {}^{+}\boldsymbol{b}$ | |
| 2 | $\dfrac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)}{1-x}$<br>${}^{+}\boldsymbol{b} \qquad {}_{+}\boldsymbol{b}$<br>${}^{+}\boldsymbol{b} \qquad {}^{+}\boldsymbol{b}$ | | $\dfrac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)}{x}$<br>$-({}^{+}\boldsymbol{b}) \qquad {}_{+}\boldsymbol{b}$<br>${}^{+}\boldsymbol{b} \qquad {}^{+}\boldsymbol{b}$ | |
| 3 | $\dfrac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}$<br>${}_{+}\boldsymbol{b} \qquad -({}^{+}\boldsymbol{b})$<br>$-({}_{+}\boldsymbol{b}) \qquad -({}_{+}\boldsymbol{b})$ | $\dfrac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)\cdot\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)}{x}$<br>$-({}^{+}\boldsymbol{b}) \qquad -({}^{+}\boldsymbol{b})$<br>$-({}_{+}\boldsymbol{b}) \qquad -({}_{+}\boldsymbol{b})$ | $\dfrac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)}{1-x}$<br>$-({}_{+}\boldsymbol{b}) \qquad -({}^{+}\boldsymbol{b})$<br>$-({}_{+}\boldsymbol{b}) \qquad -({}_{+}\boldsymbol{b})$ | $\dfrac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)\cdot\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)}{1-x}$<br>${}^{+}\boldsymbol{b} \qquad -({}^{+}\boldsymbol{b})$<br>$-({}_{+}\boldsymbol{b}) \qquad -({}_{+}\boldsymbol{b})$ |
| 4 | $\dfrac{\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}$<br>${}_{+}\boldsymbol{b} \qquad {}_{+}\boldsymbol{b}$<br>${}^{+}\boldsymbol{b} \qquad {}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$ | | $\dfrac{\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)}{1-x}$<br>$-({}_{+}\boldsymbol{b}) \qquad {}_{+}\boldsymbol{b}$<br>${}^{+}\boldsymbol{b} \qquad {}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$ | |
| 5 | $\dfrac{\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{1-x}$<br>${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b} \qquad {}_{+}\boldsymbol{b}$<br>${}^{+}\boldsymbol{b} \qquad {}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$ | | $\dfrac{\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}1-(x)}{x}$<br>$-({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}) \qquad {}_{+}\boldsymbol{b}$<br>${}^{+}\boldsymbol{b} \qquad {}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$ | |
| 6 | $\dfrac{\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}$<br>${}_{+}\boldsymbol{b} \qquad -({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b})$<br>$-({}^{+}\boldsymbol{b}) \qquad -({}_{+}\boldsymbol{b})$ | $\dfrac{\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x)}{x}$<br>$-({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}) \qquad -({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b})$<br>$-({}^{+}\boldsymbol{b}) \qquad -({}_{+}\boldsymbol{b})$ | $\dfrac{\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)}{1-x}$<br>$-({}_{+}\boldsymbol{b}) \qquad -({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b})$<br>$-({}^{+}\boldsymbol{b}) \qquad -({}_{+}\boldsymbol{b})$ | $\dfrac{\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(1-x)}{1-x}$<br>${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b} \qquad -({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b})$<br>$-({}^{+}\boldsymbol{b}) \qquad -({}_{+}\boldsymbol{b})$ |
| 7 | $\dfrac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}$<br>${}_{+}\boldsymbol{b} \qquad {}_{+}\boldsymbol{b}$<br>${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b} \qquad {}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$ | $\dfrac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x)}{x}$<br>${}_{+}\boldsymbol{b} \qquad {}_{+}\boldsymbol{b}$<br>${}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b} \qquad {}^{+}\boldsymbol{b}$ | $\dfrac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)}{1-x}$<br>$-({}_{+}\boldsymbol{b}) \qquad {}_{+}\boldsymbol{b}$<br>${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b} \qquad {}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$ | $\dfrac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(1-x)}{1-x}$<br>$-({}_{+}\boldsymbol{b}) \qquad {}_{+}\boldsymbol{b}$<br>${}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b} \qquad {}^{+}\boldsymbol{b}$ |
| 8 | $\dfrac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{1-x}$<br>${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b} \qquad {}_{+}\boldsymbol{b}$<br>${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b} \qquad {}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$ | $\dfrac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x)}{1-x}$<br>${}^{+}\boldsymbol{b} \qquad {}_{+}\boldsymbol{b}$<br>${}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b} \qquad {}^{+}\boldsymbol{b}$ | $\dfrac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)}{x}$<br>$-({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}) \qquad {}_{+}\boldsymbol{b}$<br>${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b} \qquad {}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$ | $\dfrac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(1-x)}{x}$<br>$-({}^{+}\boldsymbol{b}) \qquad {}_{+}\boldsymbol{b}$<br>${}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b} \qquad {}^{+}\boldsymbol{b}$ |
| 9 | $\dfrac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}$<br>${}_{+}\boldsymbol{b} \qquad -({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b})$<br>$-({}_{+}\boldsymbol{b}) \qquad -({}_{+}\boldsymbol{b})$ | $\dfrac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x)}{x}$<br>$-({}^{+}\boldsymbol{b}) \qquad -({}^{+}\boldsymbol{b})$<br>$-({}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}) \qquad -({}_{+}\boldsymbol{b})$ | $\dfrac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)}{1-x}$<br>$-({}_{+}\boldsymbol{b}) \qquad -({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b})$<br>$-({}_{+}\boldsymbol{b}) \qquad -({}_{+}\boldsymbol{b})$ | $\dfrac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(1-x)}{1-x}$<br>${}^{+}\boldsymbol{b} \qquad -({}^{+}\boldsymbol{b})$<br>$-({}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}) \qquad -({}_{+}\boldsymbol{b})$ |
| 10 | $\dfrac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)}{x}$<br>$-({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}) \qquad -({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b})$<br>$-({}_{+}\boldsymbol{b}) \qquad -({}_{+}\boldsymbol{b})$ | $\dfrac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(1-x)}{x}$<br>${}_{+}\boldsymbol{b} \qquad -({}^{+}\boldsymbol{b})$<br>$-({}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}) \qquad -({}_{+}\boldsymbol{b})$ | $\dfrac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{1-x}$<br>${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b} \qquad -({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b})$<br>$-({}_{+}\boldsymbol{b}) \qquad -({}_{+}\boldsymbol{b})$ | $\dfrac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x)}{1-x}$<br>$-({}_{+}\boldsymbol{b}) \qquad -({}^{+}\boldsymbol{b})$<br>$-({}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}) \qquad -({}_{+}\boldsymbol{b})$ |

A fenti táblázat a tíz alapesetet, és azok transzformáltjait tartalmazza. A táblázatból kiderül, hogy a tíz alapfeladat mindegyikének van olyan ekvivalens változata, amelyben legfeljebb csak egyetlen fázisban jelentkezik a $\boldsymbol{b}$ vektor hasadása.

## 4 Példák

**1. példa**

Az $\mathrm{L}_{\boldsymbol{a}} = \mathrm{Li}$, $\mathrm{L}_{\boldsymbol{b}} = \mathrm{Le}$, $X_a = 1 - x$, $X_b = x$, $X = x$, illetve $\boldsymbol{a} = (2,3)$ és $\boldsymbol{b} = (4)$ paraméterek beállításával a szürke kijelzőben rögtön az alábbi kimenet látható:

$$\int \frac{\mathrm{Li}_{(2,3)}(1-x)\cdot \mathrm{Le}_{(4)}(x)}{x}\,\mathrm{d}x \qquad\qquad \begin{bmatrix} {}_{+}\boldsymbol{b} & {}_{+}\boldsymbol{b} - {}^{+}\boldsymbol{b} \\ -({}_{+}\boldsymbol{b}) & -({}_{+}\boldsymbol{b}) \end{bmatrix}$$

Az integrál csak jól kivehetően mutatja a bevitt feladatot. Az elöző táblázatból az is kiolvasható, hogy ez éppen a 9. alapfeladat, melynek *fázismátrixa* jelenik meg az integrál után. Ebből azt tudjuk meg, hogy a négy különböző fázisban mi történik a $\boldsymbol{b}$ vektorral az integrálási feladat során:

$$\begin{array}{ll} \text{inicializálás: } \boldsymbol{b} \to {}_{+}\boldsymbol{b} & \text{standard lépés: } \boldsymbol{b} \to -\left({}^{+}\boldsymbol{b} - {}_{+}\boldsymbol{b}\right) = {}_{+}\boldsymbol{b} - {}^{+}\boldsymbol{b} \\ \text{1-átvitel: } \boldsymbol{b} \to -({}_{+}\boldsymbol{b}) & \text{1-ürítés: } \boldsymbol{b} \to -({}_{+}\boldsymbol{b}) \end{array}$$

Az $\boldsymbol{a}$ vektor pedig egyértelműen meghatározza a végrehajtandó lépések sorozatát:

$$\overset{\text{init}}{\to} (2,3) \overset{\text{std}}{\to} (1,3) \overset{\text{atv}}{\to} (3) \overset{\text{std}}{\to} (2) \overset{\text{std}}{\to} (1) \overset{\text{veg}}{\to} ()$$

(A fázisokra a következő rövidítéseket használjuk. initializálás: `init`; standard lépés: `std`; 1-átvitel: `atv`; 1-ürítés: `veg`)

A `Calculate` gombra kattintva az alábbi kimentet kapjuk:

$$\begin{array}{r|l} \mathrm{Li}_a(1-x) & (2,3) \\ \hline \mathrm{Le}_b(x) & (4) \end{array} \overset{\text{init}}{\to} \begin{array}{l} +(2,3) \\ \hline +(5) \end{array} \overset{\text{std}}{\to} \begin{array}{l} -(1,3) \\ \hline -(1,5) \\ +(6) \end{array} \overset{\text{atv}}{\to} \begin{array}{l} +(3) \\ \hline +(2,5) \\ -(7) \end{array} \overset{\text{std}}{\to} \begin{array}{l} -(2) \\ \hline -(1,2,5) \\ +(1,7) \\ +(3,5) \\ -(8) \end{array} \overset{\text{std}}{\to} \begin{array}{l} +(1) \\ \hline +(1,1,2,5) \\ -(1,1,7) \\ -(1,3,5) \\ +(1,8) \\ -(2,2,5) \\ +(2,7) \\ +(4,5) \\ -(9) \end{array} \overset{\text{veg}}{\to} \begin{array}{l} -() \\ \hline -(2,1,2,5) \\ +(2,1,7) \\ +(2,3,5) \\ -(2,8) \\ +(3,2,5) \\ -(3,7) \\ -(5,5) \\ +(10) \end{array}$$

A sor legelső tagja csak a bevitt feladatot jeleníti meg. Minden egyes táblázat fejlécében az $\boldsymbol{a}$ vektor található, a parciális integrálás során fellépő szokásos előjelváltásokkal együtt. A fázismátrix szerint a $\boldsymbol{b} = (4)$ vektor inicializáláskor a $\boldsymbol{b} \to {}_{+}\boldsymbol{b}$ szabály szerint változik. Ez konkrétan a $+(4) \to +(5)$ eredményt adja. A következő egy standard lépés, amely során a $\boldsymbol{b}$ vektor a $\boldsymbol{b} \to {}_{+}\boldsymbol{b} - {}^{+}\boldsymbol{b}$ hasadást szenvedi. Vagyis, az egyetlen $\boldsymbol{b} = (5)$ vektorból képeznünk kell a ${}_{+}(5) = (6)$, illetve a $-({}^{+}(5)) = -(1,5)$ vektorokat tartalmazó $\{(-(1,5); (6)\}$ vektorhalmazt. Az ezt követő 1-átvitelkor a fázismátrix szerint a $\boldsymbol{b} \to -({}_{+}\boldsymbol{b})$ átalakítást kell elvégeznünk a $\{(-(1,5); (6)\}$ vektorhalmaz minden egyes elmén: $\{(-(1,5); (6)\} \to \{(2,5); -(7)\}$, ami szerencsére nem okozott hasadást. A következő két standard lépés során viszont hasadni fog a most már kételemű $\boldsymbol{b}$ vektorhalmaz, így nyolc eleműre duzzad:

$$\begin{array}{lcccccccl} +(3) & & & & -(2) & & & & +(1) \\ \hline +(2,5) & \to & \boldsymbol{b} \to -\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right) & \to & -(1,2,5) & & & & +(1,1,2,5) \\ -(7) & \searrow & & & +(1,7) & \to & \boldsymbol{b} \to -\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right) & \to & -(1,1,7) \\ & & \boldsymbol{b} \to {}_{+}\boldsymbol{b} & & +(3,5) & & & & -(1,3,5) \\ & & & \to & -(8) & \searrow & & & +(1,8) \\ & & & & & & & & -(2,2,5) \\ & & & & & & \boldsymbol{b} \to {}_{+}\boldsymbol{b} & \to & +(2,7) \\ & & & & & & & & +(4,5) \\ & & & & & & & & -(9) \end{array}$$

Végül a befejező 1-ürítéskor a fázismátrix szerint a $\boldsymbol{b} \to -({}_{+}\boldsymbol{b})$ transzformációt kell alkalmazni a $\boldsymbol{b}$ vektorhalmazon, ami szerencsére nem jelent további hasadást.

$$
\begin{array}{ccc}
+\,(1) & & -\,() \\
\hline
+\,(1,1,2,5) & & -\,(2,1,2,5) \\
-\,(1,1,7) & & +\,(2,1,7) \\
-\,(1,3,5) & & +\,(2,3,5) \\
+\,(1,8) & & -\,(2,8) \\
-\,(2,2,5) & \rightarrow \quad \boldsymbol{b} \rightarrow -\,({}_{+}\boldsymbol{b}) \quad \rightarrow & +\,(3,2,5) \\
+\,(2,7) & & -\,(3,7) \\
+\,(4,5) & & -\,(5,5) \\
-\,(9) & & +\,(10)
\end{array}
$$

Az integrált pedig az összes $\boldsymbol{a}$ vektor és az oszlopában található $\boldsymbol{b}$ vektorok előjeles szorzatösszege adja. Ezt a programmal is kiírathatjuk, ha a kétállású gomb átállításával a `HTML` kimenet helyett a `MathJax` kimenetet vállasztjuk, és a beállításokban a `Show math as functions` jelölő négyzetet kipipáljuk.

$$
\begin{gathered}
\int \frac{\mathrm{Li}_{(2,3)}(1-x)\cdot \mathrm{Le}_{(4,1)}(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Li}_{(2,3)}(1-x)\cdot \mathrm{Le}_{(5)}(x) - \mathrm{Li}_{(1,3)}(1-x)\cdot \left[-\mathrm{Le}_{(1,5)}(x) + \mathrm{Le}_{(6)}(x)\right] + \\
+\mathrm{Li}_{(3)}(1-x)\cdot \left[\mathrm{Le}_{(2,5)}(x) - \mathrm{Le}_{(7)}(x)\right] - \mathrm{Li}_{(2)}(1-x)\cdot \left[-\mathrm{Le}_{(1,2,5)}(x) + \mathrm{Le}_{(1,7)}(x) + \mathrm{Le}_{(3,5)}(x) - \mathrm{Le}_{(8)}(x)\right] + \\
+\mathrm{Li}_{(1)}(1-x)\cdot \left[\mathrm{Le}_{(1,1,2,5)}(x) - \mathrm{Le}_{(1,1,7)}(x) - \mathrm{Le}_{(1,3,5)}(x) + \mathrm{Le}_{(1,8)}(x) - \mathrm{Le}_{(2,2,5)}(x) + \mathrm{Le}_{(2,7)}(x) + \mathrm{Le}_{(4,5)}(x) - \mathrm{Le}_{(9)}(x)\right] - \\
-\mathrm{Li}_{()}(1-x)\cdot \left[-\mathrm{Le}_{(2,1,2,5)}(x) + \mathrm{Le}_{(2,1,7)}(x) + \mathrm{Le}_{(2,3,5)}(x) - \mathrm{Le}_{(2,8)}(x) + \mathrm{Le}_{(3,2,5)}(x) - \mathrm{Le}_{(3,7)}(x) - \mathrm{Le}_{(5,5)}(x) + \mathrm{Le}_{(10)}(x)\right]
\end{gathered}
$$