

1 Tetszőleges $w \in \mathfrak{h}$ szó $\sum_i w_i \sqcup x^j$, ($w_j \in \mathfrak{h}y$) felbontásatása, $\text{reg}_{\sqcup}^0(w)$

Shu OI and Kimio UENO; Fundamental Solutions of the Knizhnik-Zamolodchikov Equation of One Variable and the Riemann-Hilbert Problem, PROPOSITION 4 ([R]), TOKYO J. MATH. VOL. 41, NO. 1, 2018

The algebra (\mathfrak{h}, \sqcup) is a polynomialalgebra of x whose coefficients are in $\mathfrak{h}y$, and is a polynomial algebra of x, y whose coefficients are in $x\mathfrak{h}y$; $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}y[x]$, $\mathfrak{h} = xy\mathfrak{h}[x, y]$. That is, any word w in \mathfrak{h} can be written as $\sum_i w_i \sqcup x^j = \sum_{i,j} y^j \sqcup w_{i,j} \sqcup x^j$ uniquely,

where $w_j \in \mathfrak{h}y$ and $w_{i,j} \in x\mathfrak{h}y$.

A (\mathfrak{h}, \sqcup) algebra egy egyváltozós polinomalgebra az x változóval, melynek együtthatói a $\mathfrak{h}y$ szavaiból kerülnek ki, és ugyanakkor egy kétváltozós polinomalgebra is x, y változókkal, melynek együtthatói az $x\mathfrak{h}y$ szavaiból kerülnek ki; $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}y[x]$, $\mathfrak{h} = xy\mathfrak{h}[x, y]$. Vagyis, minden \mathfrak{h} -beli w szó felírható

$$\sum_i w_i \sqcup x^j = \sum_{i,j} y^j \sqcup w_{i,j} \sqcup x^j$$

alakban, ahol $w_j \in \mathfrak{h}y$ és $w_{i,j} \in x\mathfrak{h}y$, és ez a felírás egyértelmű.

$\mathbb{Z}[x]$: Az egész együtthatós x válozós polinomok algebrája. Elemei a $p(x) = z_0x^0 + z_1x^1 + z_2x^2 + \dots + z_nx^n$ ($z_0, z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{Z}$) alakú polinomok. Azért algebra, mert az egész együtthatós x válozós polinomok vektorteret alkotnak, és értelmezve van egy szorzat a polinomokon.

$\mathbb{R}[x]$: A valós együtthatós x válozós polinomok algebrája. Elemei a $p(x) = r_0x^0 + r_1x^1 + r_2x^2 + \dots + r_nx^n$ ($r_0, r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{R}$) alakú polinomok. Azért algebra, mert a valós együtthatós x válozós polinomok vektorteret alkotnak, és értelmezve van egy szorzat a polinomokon.

A $\mathfrak{h} = (\mathfrak{h}, \sqcup) = \mathfrak{h}y[x]$ azt fejezi ki, hogy a

$$p(x) = w_0 \sqcup x^0 + w_1 \sqcup x^1 + w_2 \sqcup x^2 + \dots + w_n \sqcup x^n \in \mathfrak{h}y[x]$$

$(w_0, w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathfrak{h}y)$ alakú polinomok éppen a (\mathfrak{h}, \sqcup) algebrát adják. Vagyis, \mathfrak{h} minden w eleme egyértelműen felírható

$$w = w_0 \sqcup x^0 + w_1 \sqcup x^1 + \dots + w_n \sqcup x^n \quad (w_0, w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathfrak{h}y) \quad (1.1)$$

alakban.

Ezen egyértelmű felbontás segítségével definiálhatjuk tetszőleges $w \in \mathfrak{h}$ szó $\text{reg}_{\sqcup}^0(w)$ regularizáltját, ami nem más, mint az (1.1) felbontásban a w_0 konstans együttható. Azaz,

$$\text{reg}_{\sqcup}^0(w) = w_0 \iff w = w_0 \sqcup x^0 + w_1 \sqcup x^1 + \dots + w_n \sqcup x^n \in \mathfrak{h}y[x]$$

A definícióból rögtön következik, hogy tetszőleges $w \in \mathfrak{h}$ szóra $\text{reg}_{\sqcup}^0(w) \in \mathfrak{h}y$ és, hogy $\text{reg}_{\sqcup}^0(u) = u$ minden $u \in \mathfrak{h}y$ szóra. Egy nem $\mathfrak{h}y$ -beli w szó egyértelműen felírható ux^n , $u \in \mathfrak{h}y$, $n \geq 0$ alakban, melynek a regularizáltját az alábbi explicit képlet adja meg.

Tetszőleges $u \in \mathfrak{h}y$ y-ra végződő szóra, és tetszőleges $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ számra

$$\text{reg}_{\sqcup}^0(ux^n) = \sum_{j=0}^n (-1)^j ux^{n-j} \sqcup x^j \in \mathfrak{h}y \quad (A)$$

$$\text{reg}_{\sqcup}^0(ux^n) = ux^n - ux^{n-1} \sqcup x + ux^{n-2} \sqcup x^2 - \dots + (-1)^{n-1} ux \sqcup x^{n-1} + (-1)^n u \sqcup x^n$$

Ezzel ekvivalens az

$$ux^n = \sum_{j=0}^n \text{reg}_{\sqcup}^0(ux^{n-j}) \sqcup x^j \quad (A')$$

$$ux^n = \text{reg}_{\sqcup}^0(ux^n) + \text{reg}_{\sqcup}^0(ux^{n-1}) \sqcup x + \text{reg}_{\sqcup}^0(ux^{n-2}) \sqcup x^2 - \dots + \text{reg}_{\sqcup}^0(ux) \sqcup x^{n-1} + \text{reg}_{\sqcup}^0(u) \sqcup x^n$$

felbontás.

Az (A') képlet szerint egy $w = ux^n$, ($u \in \mathfrak{h}y$) szó

$$w = ux^n = w_0 \sqcup x^0 + w_1 \sqcup x^1 + \dots + w_n \sqcup x^n \quad (w_0, w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathfrak{h}y)$$

felbontásában tetszőleges w_k ($0 \leq k \leq n$) együttható megkapható a

$$w_k = \text{reg}_{\sqcup}^0(ux^{n-k}) \sqcup x^k = \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j ux^{n-k-j} \sqcup x^j$$

formulával. Az (A) és a vele ekvivalens (A') felbontásból levezetünk egy harmadik, (A'') felbontást.

$$\begin{aligned} ux^n &\stackrel{(A')}{=} \sum_{j=0}^n \text{reg}_{\sqcup}^0(ux^{n-j}) \sqcup x^j \stackrel{(A)}{=} \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^{n-j} (-1)^j ux^{n-j-i} \sqcup x^i \right) \sqcup x^j = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n-j} (-1)^j ux^{n-j-i} \sqcup (x^i \sqcup x^j) = \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n-j} (-1)^j ux^{n-j-i} \sqcup \binom{i+j}{j} x^{i+j} \stackrel{k=i+j}{=} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} ux^{n-k} \sqcup x^k \end{aligned}$$

Itt kihasználtuk, hogy $x^i \sqcup x^j = \binom{i+j}{j} x^{i+j}$ és, hogy a \sqcup -szorzat asszociatív.

Tetszőleges $u \in \mathfrak{h}y$ y-ra végződő szóra, és tetszőleges $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ számra

$$\text{reg}_{\sqcup}^0(ux^n) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} ux^{n-k} \sqcup x^k \quad (\text{A}'')$$

A következőkben az (A), (A'), illetve (A'') felbontásokra adunk egy-egy példát, és ismertetjük, hogy a program hogyan segít bennünket a szükséges számítások elvégzésében.

Példa (A): Legyen $w = xxyxyxxx \notin \mathfrak{h}y$. Ekkor $u = xxyxy$, és $n = 3$. Az (A) felbontás szerint

$$\text{reg}_{\sqcup}^0(xxyxyxxx) = xxyxyxxx \sqcup -xxyxyxx \sqcup x + xxyxyx \sqcup xx - xxyxy \sqcup xxx$$

($x^0 := () := \mathbf{1}$, és $w \sqcup \mathbf{1} = w$)

I. A kártya segítségével ezt kiszámíthatjuk tagonként:

1. w_1 -input: $xxyxyxxx$; w_2 -input: (üres) \Rightarrow

$w_1 = \{$	xxyxyxxx	$\}$	$\text{reg}_{\sqcup}^0 \square$
$w_2 = \{$			$\text{reg}_{\sqcup}^0 \square$
<input type="button" value="Calculate"/> <input type="button" value="Clear"/> <input type="checkbox"/> *	<input type="button" value="⚙"/>		

xxyxyxxx

2. w_1 -input: $xxyxyxx$; w_2 -input: x \Rightarrow

$w_1 = \{$	xxyxyxx	$\}$	$\text{reg}_{\sqcup}^0 \square$
$w_2 = \{$	x	$\}$	$\text{reg}_{\sqcup}^0 \square$
<input type="button" value="Calculate"/> <input type="button" value="Clear"/> <input type="checkbox"/> *	<input type="button" value="⚙"/>		

3·xxyxyxxx + 2·xxyxyxx + 3·xxxxxyxx

3. w_1 -input: $xxyxyx$; w_2 -input: xx \Rightarrow

$w_1 = \{$	xxyxyx	$\}$	$\text{reg}_{\sqcup}^0 \square$
$w_2 = \{$	xx	$\}$	$\text{reg}_{\sqcup}^0 \square$
<input type="button" value="Calculate"/> <input type="button" value="Clear"/> <input type="checkbox"/> *	<input type="button" value="⚙"/>		

3·xxyxyxxx + 4·xxyxyxx + 3·xxxxxyxx + 6·xxxxxyx + 6·xxxxxyx

4. w_1 -input: $xxxyxy$; w_2 -input: $xxx \Rightarrow$ Calculate

$w_1 = \{$	xxxyxy	$\} \text{reg}_{\perp}^0 \square$	
$w_2 = \{$	xxx	$\} \text{reg}_{\perp}^0 \square$	
<input type="button" value="Calculate"/>	<input type="button" value="Clear"/>	\perp <input checked="" type="radio"/> *	<input type="button" value=""/>

$xxxyxyxxx + 2 \cdot xxxyxyxx + 3 \cdot xxxyxxxxy + 4 \cdot xxxyxxxxx + 3 \cdot xxxyxyyx + 6 \cdot xxxyxyxx + 9 \cdot xxxyxyxy + 6 \cdot xxxxxyxy + 12 \cdot xxxxxyxx + 10 \cdot xxxxxyxy$

A kapott eredményeket pedig (a megfelelő előjellel ellátva) összevonhatjuk:

1.

$$\underline{xxxyxyxxx} - (3 \cdot \underline{xxxyxyxxx} + 2 \cdot xxxyxyxx + 3 \cdot xxxyxyxx) + (3 \cdot \underline{xxxyxyxxx} + 4 \cdot xxxyxyxx + 3 \cdot xxxyxxxxy + 6 \cdot xxxyxyxx + 6 \cdot xxxyxyxy + 6 \cdot xxxxxyxy) - (\underline{xxxyxyxxx} + 2 \cdot xxxyxyxx + 3 \cdot xxxyxxxxy + 4 \cdot xxxyxxxxy + 3 \cdot xxxyxyxx + 6 \cdot xxxyxxxxy + 9 \cdot xxxyxyxy + 6 \cdot xxxxxyxy + 12 \cdot xxxxxyxy + 10 \cdot xxxxxyxy) =$$

2.

$$= -(2 \cdot \underline{xxxyxyxx} + 3 \cdot xxxyxyxx) + (4 \cdot \underline{xxxyxyxx} + 3 \cdot xxxyxxxxy + 6 \cdot xxxyxyxx + 6 \cdot xxxyxyxy + 6 \cdot xxxxxyxy) - (2 \cdot \underline{xxxyxyxx} + 3 \cdot xxxyxxxxy + 4 \cdot xxxyxxxxy + 3 \cdot xxxyxyxx + 6 \cdot xxxyxyxy + 9 \cdot xxxyxyxy + 6 \cdot xxxxxyxy + 12 \cdot xxxxxyxy + 10 \cdot xxxxxyxy) =$$

3.

$$= -(3 \cdot \underline{xxxyxyxx}) + (3 \cdot \underline{xxxyxxxxy} + 6 \cdot \underline{xxxyxyxx} + 6 \cdot xxxyxxxxy + 6 \cdot xxxyxyxy) - (3 \cdot \underline{xxxyxxxxy} + 4 \cdot xxxyxxxxy + 3 \cdot \underline{xxxyxyxx} + 6 \cdot xxxyxyxy + 9 \cdot xxxyxyxy + 6 \cdot xxxxxyxy + 12 \cdot xxxxxyxy + 10 \cdot xxxxxyxy) =$$

4.

$$= (3 \cdot \underline{xxxyxxxxy} + 6 \cdot xxxyxyxx + 6 \cdot xxxyxyxy) - (3 \cdot \underline{xxxyxxxxy} + 4 \cdot xxxyxxxxy + 6 \cdot xxxyxyxx + 9 \cdot xxxyxyxy + 6 \cdot xxxxxyxy + 12 \cdot xxxxxyxy + 10 \cdot xxxxxyxy) =$$

5.

$$= (6 \cdot \underline{xxxyxyxx} + 6 \cdot xxxxxyxy) - (4 \cdot \underline{xxxyxxxxy} + 6 \cdot \underline{xxxyxyxx} + 9 \cdot xxxyxxxxy + 6 \cdot xxxyxyxy + 12 \cdot xxxxxyxy + 10 \cdot xxxxxyxy) =$$

6.

$$= (6 \cdot \underline{xxxyxyxx}) - (4 \cdot \underline{xxxyxxxxy} + 9 \cdot xxxyxxxxy + 6 \cdot \underline{xxxyxyxx} + 12 \cdot xxxxxyxy + 10 \cdot xxxxxyxy) =$$

7.

$$= -(4 \cdot xxxyxxxxy + 9 \cdot xxxyxxxxy + 12 \cdot xxxxxyxy + 10 \cdot xxxxxyxy)$$

Így a végeredmény: $\text{reg}_{\perp}^0(xxyxyxxx) = -4 \cdot xxxyxxxxy - 9 \cdot xxxyxxxxy - 12 \cdot xxxxxyxy - 10 \cdot xxxxxyxy$.

Egy fontos észrevétel: A megmaradó \perp -beli szavak mind az utolsó $xxxy$ \perp xxx szorzatból kerülnek ki.

II. Ugyanezt az eredményt egyszerűbben, közvetlenül is megkaphatjuk. A w_1 vagy w_2 beviteli mezők valamelyikébe bevisszük a teljes $w = xxyxyxxx$ szót (a másik mezőbe bármi lehet), és a mögötte található reg_{\perp}^0 címkelével felíratozott jelölőnégyzetet kipipáljuk. Az alábbi ábrán a w_2 beviteli mezőbe írtuk be az $xxyxyxxx$ szót. **Arra ügyelni kell, hogy közben az (A) képlet legyen kijelölve (kattintással, piros háttér).** A kimenet szürke hátterű sorában csak a kiválasztott képlet és bevitt adatok tükröződnek, közvetlenül alatta pedig az (A) felbontási képlet tömör, illetve kibontott formában, kitöltve a megfelelő paraméterekkel. A második sávban az egyes kiszámított előjeles shuffle szorzatok piros zárójellel csoporthozítva jelennek meg. A harmadik sávban az összevont végeredmény, míg a negyedikben a végeredmény vektor tartójú multihalmaz megfelelője jelenik meg.

1.  

$w_1 \sqcup w_2 \Leftrightarrow w_1 * w_2$

$$\text{reg}_\omega^0(ux^n) = \sum_{0 \leq j \leq n} (-1)^j ux^{n-j} \omega x^j \quad (\text{A})$$

$$ux^n = \sum_{0 \leq j \leq n} \text{reg}_\omega^0(ux^{n-j}) \omega x^j \quad (\text{A}')$$

$w_1 = \left(\begin{array}{c} \text{xxxxy} \\ \text{xxxxyxxxx} \end{array} \right) \text{reg}_\omega^0 \square$
 $w_2 = \left(\begin{array}{c} \text{xxxyxyxxxx} \end{array} \right) \text{reg}_\omega^0 \checkmark$

Calculate **Clear** ω * 

(A)-ban: $u = xxxyxy \in \mathbb{H}y; n = 3$

$$\text{reg}_\omega^0(xxxyxyxxxx) = \sum_{0 \leq j \leq 3} (-1)^j xxxyxyx^{3-j} \omega x^j = xxxyxy\cancel{\text{xxxx}} \omega () - xxxyxy\cancel{\text{xx}} \omega \cancel{\text{x}} + xxxyxy\cancel{\text{x}} \omega \cancel{\text{xx}} - xxxyxy \omega \cancel{\text{xxxx}} =$$

$$xxxyxyxxxx - (3 \cdot xxxyxyxxxx + 2 \cdot xxxyxyxyxx + 3 \cdot xxxxxyxyxx) + (3 \cdot xxxyxyxxxx + 4 \cdot xxxyxyxyxx + 3 \cdot xxxyxxxxyx + 6 \cdot xxxxxyxyxx + 6 \cdot xxxxxyxyyx) - (xxxyxyxxxx + 2 \cdot xxxyxyxyxx + 3 \cdot xxxyxxxxyx + 4 \cdot xxxyxxxxxy + 3 \cdot xxxxxyxyxx + 6 \cdot xxxxxyxyx + 9 \cdot xxxxxyxyy + 6 \cdot xxxxxyxyx + 12 \cdot xxxxxyxyy + 10 \cdot xxxxxyxyy) =$$

$$- 4 \cdot xxxy|xxxxy| - 9 \cdot xxxx|xxxxy| - 12 \cdot xxxxxy|xyy| - 10 \cdot xxxxxyy|xy| =$$

$$- 4(3,5) - 9(4,4) - 12(5,3) - 10(6,2)$$

Toggle help

Ha a felbontás valamelyik tagjára kattintunk, akkor a hozzátartozó, kiszámított előjeles shuffle szorzatot kékkel emeli ki a program. A kapcsolat fordítva is működik: a második sávban egy tetszőleges tagra kattintva kijelöli a képlet azon szorzatát, amelyből a tag származik.

$$\begin{aligned}
& \text{(A)-ban: } u = xxyxyx \in \mathcal{L} \text{; } n = 3 \\
& \text{reg}_\perp^0(xxyxyxxxx) = \sum_{0 \leq j \leq 3} (-1)^j xxyxyx^{3-j} \cdot x^j = xxyxy \cancel{x} \cancel{x} \cancel{x} \omega() - xxyxy \cancel{x} \cancel{x} \omega \cancel{x} + xxyxy \cancel{x} \omega \cancel{x} \cancel{x} - xxyxy \omega \cancel{x} \cancel{x} \cancel{x} = \\
& xxyxyxxxx - (3 \cdot xxyxyxxxx + 2 \cdot xxyxyxyxx + 3 \cdot xxxxxyyxx) + (3 \cdot xxxxxyxxxx + 4 \cdot xxyxyxyxx + 3 \cdot xxyxxxxxy + 6 \cdot xxxxxyyxx + 6 \cdot xxxxxyxyx + 6 \cdot xxxxxyxy) - (xxyxyxxxx + 2 \cdot xxyxyxyxx + 3 \cdot xxyxxxxy + 4 \cdot xxyxxxxxy + 3 \cdot xxxxxyyxx + 6 \cdot xxxxxyxy + 9 \cdot xxxxxyxy + 6 \cdot xxxxxyxyx + 12 \cdot xxxxxyxy + 10 \cdot xxxxxyxy) = \\
& -4 \cdot xxy|xxxxxy| - 9 \cdot xxxx|xyxy| - 12 \cdot xxxxxy|xy| - 10 \cdot xxxxxy|xy| = \\
& -4 \cdot (3,5) - 9 \cdot (4,4) - 12 \cdot (5,3) - 10 \cdot (6,2)
\end{aligned}$$

Ha a kiszámított shuffle szorzatban egy tetszőleges tagra kattintunk, akkor az előbbi kék kijelöléssel együtt, az egymást kiejtő tagok sárga alpú kijelölése, illetve a képernyő tetején megjelenő kék alapú mezőben, ezen egymást kiejtő tagok előjeles összege segíti a fenti összevonás elvégzését. Az utóbbi akkor tünik el, ha tetszőleges olyan helyre kattintunk a képernyőn, amely nem a szóban forgó shuffle szorzat egy tagja. (Vagyis, nem a második sávba.)

$$\begin{aligned}
 & \text{reg}_\omega^0(xxyxyxxx) = \sum_{0 \leq j \leq 3} (-1)^j xxyxyx^{3-j} \omega^j = \\
 & xxyxy\cancel{x}\cancel{x}\cancel{x}\omega() - xxyxy\cancel{x}\cancel{x}\omega x + xxyxy\cancel{x}\omega \cancel{x}\cancel{x} \\
 & - xxyxy\omega \cancel{x}\cancel{x}\cancel{x} = \\
 \\
 & xxyxyxxxx - (3 \cdot xxyxyxxx + 2 \cdot xxyxxxyx + \\
 & 3 \cdot xxyxyyxx) + (3 \cdot xxyxyxxxx + 4 \cdot xxyxyyxx + \\
 & 3 \cdot xxyxxxxyx + 6 \cdot xxxxxyyxx + 6 \cdot xxxxxyyyx + \\
 & 6 \cdot xxxxuyyxy) - (xxyxyxxx + 2 \cdot xxyxxxyx + \\
 & 3 \cdot xxyxxxxyx + 4 \cdot xxyxxxxxy + 3 \cdot xxxxxyyxx + \\
 & 6 \cdot xxxxuyyxyx + 9 \cdot xxxxxyyyy + 6 \cdot xxxxxyyyx + \\
 & 12 \cdot xxxxxyyxy + 10 \cdot xxxxxyxy) = \\
 \\
 & -4 \cdot xxy|xxxxxy| - 9 \cdot xxxxxy|xxxxy| - \\
 & 12 \cdot xxxxxy|xxy| - 10 \cdot xxxxxy|xy| =
 \end{aligned}$$

$xxxyxxxxyxxxx - 4\cdot xxxyxxyyxxxx + 6\cdot xyxyxxxxyxxxx -$
 $4\cdot xxyxyyxxxx + xxyxyyxxxx$

$3\cdot xyxxxxyxyxxx + xyxxxxyxyxxx +$
 $3\cdot xyyyyyyxxxx + xyyyyyyxyxxx +$
 $xyxxxxxxxxyxxx + 15\cdot xyyyyxxxxxxx +$
 $10\cdot xyyxyxxxxxx + 6\cdot xyyxyxxxxxx +$
 $3\cdot xyyxxxxyxxxx + xyyxxxxyxxxx +$
 $10\cdot xyyxyyxxxxx + 6\cdot xyyxyyxxxxx +$
 $3\cdot xyyxyxyxxxx + xyyxyxyxxxx +$
 $6\cdot xyyxyyxxxx + 3\cdot xyyxyyxxxx +$
 $xyxxxxyxyxxx + 3\cdot xyxxxxyxyxxx +$
 $xxyxxxxyxyxxx + xxyxxxxyxyxxx +$
 $10\cdot xxxxyyxxxxxx + 6\cdot xxxxyyxxxxxx +$
 $3\cdot xxxxyyxxxx + xxxxyyxxxx +$
 $6\cdot xxxxyyxxxx + 3\cdot xxxxyyxxxx +$
 $xxxxyyxyxxx + 3\cdot xxxxyyxyxxx +$
 $xxxxyyxyxxx + xxxxyyxyxxx +$

A kápernyő tetején kéken felugró kék mező különösen akkor hasznos, ha az előjeles kiszámított shuffle szorzat olyan nagy, hogy az egymást kiejtő tagok közül csak néhány, vagy talán csak egy látható.

III. Ha az (A') felbontást szeretnénk megkapni, akkor a legutóbbi beállítás mellett csak az (A') képletre kell kattintanunk, amely ekkor pirosabb háttérszínt kap. Az első (szürke hátterű) sorban most is csak a kiválasztott képlet és a bevitt adatok

tüköröződnek: $w = xxyxyxxx = ux^n$ ($u \in \mathfrak{h}y$), ahol $u = xxyxy$ és $n = 3$. Ezt követően minden $0 \leq j \leq n$ számra (feketével keretezett, elkülönülő mezőkben) az első sorban megjelenik az összegben szereplő $\text{reg}_{\sqcup}^0(ux^{n-j}) \sqcup x^j$ formula (a megfelelő j értékkel kitöltve), a második (világosabb) sorban pedig a szorzat kiszámított értéke.

w₁ ∪ w₂ = w₁ * w₂

$$\text{reg}_{\omega}^0(ux^n) = \sum_{0 \leq j \leq n} (-1)^j ux^{n-j} \sqcup x^j \in \mathfrak{h}y \quad (\text{A})$$

$$ux^n = \sum_{0 \leq j \leq n} \text{reg}_{\omega}^0(ux^{n-j}) \sqcup x^j \quad (\text{A}')$$

w₁ = { xxyy } reg_{ω}^0
w₂ = { xxyxyxxx } reg_{ω}^0

Calculate Clear \sqcup *

(A')-ben: u = xxyxy ∈ h_y; n = 3

j = 0 $\text{reg}_{\omega}^0(xxyxyxxx) \sqcup () =$
- 4·xxy|xxxxy| - 9·xxxy|xxxxy| - 12·xxxxy|xxy| - 10·xxxxxy|xy|

j = 1 $\text{reg}_{\omega}^0(xxyxyxx) \sqcup x =$
3·xxy|xxxxy|x + 12·xxy|xxxxy| + 27·xxxy|xxxxy| + 6·xxxy|xxy|x + 36·xxxxy|xxy| + 6·xxxxxy|xy|x + 30·xxxxxy|xy|

j = 2 $\text{reg}_{\omega}^0(xxyxyx) \sqcup xx =$
- 2·xxy|xxy|xx - 6·xxy|xxxy|x - 12·xxy|xxxxy| - 12·xxxy|xxy|x - 27·xxxy|xxxxy| - 36·xxxxy|xxy| - 3·xxxy|xy|xx - 12·xxxxy|xy|x - 30·xxxxxy|xy|

j = 3 $\text{reg}_{\omega}^0(xxyxy) \sqcup xxx =$
xxy|xy|xxx + 2·xxy|xxxy|xx + 3·xxy|xxxxy|x + 4·xxy|xxxxy| + 3·xxxy|xy|xx + 6·xxxy|xxy|x + 9·xxxy|xxxxy| + 6·xxxxy|xy|x + 12·xxxxy|xxy| + 10·xxxxxy|xy|

Toggle help

A teljes összeg tagjainak az összevonását a program most is úgy segíti, hogy a fehér sorok tetszőleges tagjára kattintva a különböző j értékekhez tartozó azonos szavakat narancssárgával kiemeli, illetve a képernyő tetején felugró kék mezőben előjeles összeg formájában megjeleníti.

- 4·xxy|xxxxy| + 12·xxy|xxoxy| - 12·xxy|xxxxy| + 4·xxy|xxxxy|

w₁ = { xxyy } reg_{ω}^0
w₂ = { xxyxyxxx } reg_{ω}^0

Calculate Clear \sqcup *

(A')-ben: u = xxyxy ∈ h_y; n = 3

j = 0 $\text{reg}_{\omega}^0(xxyxyxxx) \sqcup () =$
- 4·xxy|xxxxy| - 9·xxxy|xxxxy| - 12·xxxxy|xxy| - 10·xxxxxy|xy|

j = 1 $\text{reg}_{\omega}^0(xxyxyxx) \sqcup x =$
3·xxy|xxxxy|x + 12·xxy|xxxxy| + 27·xxxy|xxxxy| + 6·xxxy|xxy|x + 36·xxxxy|xxy| + 6·xxxxxy|xy|x + 30·xxxxxy|xy|

j = 2 $\text{reg}_{\omega}^0(xxyxyx) \sqcup xx =$
- 2·xxy|xxy|xx - 6·xxy|xxxy|x - 12·xxy|xxxxy| - 12·xxxy|xxy|x - 27·xxxy|xxxxy| - 36·xxxxy|xxy| - 3·xxxy|xy|xx - 12·xxxxy|xy|x - 30·xxxxxy|xy|

j = 3 $\text{reg}_{\omega}^0(xxyxy) \sqcup xxx =$
xxy|xy|xxx + 2·xxy|xxxy|xx + 3·xxy|xxxxy|x + 4·xxy|xxxxy| + 3·xxxy|xy|xx + 6·xxxy|xxy|x + 9·xxxy|xxxxy| + 6·xxxxy|xy|x + 12·xxxxy|xxy| + 10·xxxxxy|xy|

Az (A'') képlet nincs is implementálva, hiszen az csak azt állítja, hogy a $j = n$ értékhez tartozó sor első tagjától eltekintve tetszőleges sorban, az összeg tetszőleges tagjára kattintva, az összevonás eredménye mindenig 0 lesz. A $j = n$ értékhez tartozó összeg első tagjára kattintva (xxyxyxxx) pedig az összevonás után magát az $w = xxyxyxxx$ szót fogjuk megkapni.

Minden egyes j érték mezőjében részeredményeket is megjeleníthetünk. Ha például a $\text{reg}_{\sqcup}^0(ux^{n-j})$ formulára kattintunk, akkor az piros háttérszínt kap, és alatta ugyanilyen piros hátterű mezőben láthatjuk annak részletes kiszámítását ugyanúgy, mintha a $\text{reg}_{\sqcup}^0(ux^{n-j})$ értékét az (A) képletállás mellett számítanánk ki. A részeredmény kiírására szolgáló piros keret úgy zárható be, hogy vagy ugyanezen, vagy egy másik j értékhez tartozó sor ugyanilyen $\text{reg}_{\sqcup}^0(ux^{n-j})$ formulájára kattintunk. A piros keret kimenete teljesen egyenértékű az (A) képletállás melletti kimenettel, abban az összevonást segítő kijelölések ugyanúgy működnek.

(A')-ben: $u = xxxy \in \mathfrak{h}y$; $n = 3$

j = 0 $\text{reg}_{\mathbb{U}}^0(xxyxy \textcolor{red}{xxx}) \text{ } \sqcup \text{ } (\textcolor{blue}{}) =$

(A)-ban: $u = xxxy \in \mathfrak{h}y$; $n = 3$

$$\text{reg}_{\mathbb{U}}^0(xxyxyxxx) = \sum_{0 \leq j \leq 3} (-1)^j xxyxyx^{3-j} \text{ } \sqcup \text{ } x^j = xxyxy \textcolor{red}{xxx} \text{ } \sqcup \text{ } () - xxyxy \textcolor{red}{xx} \text{ } \sqcup \text{ } \textcolor{blue}{x} + xxyxy \textcolor{red}{x} \text{ } \sqcup \text{ } \textcolor{blue}{xx} - xxyxy \text{ } \sqcup \text{ } \textcolor{blue}{xxx} =$$

$$xxyxyxxx - (3 \cdot xxyxyxxx + 2 \cdot xxyxyxxx + 3 \cdot xxyxyxxx) + (3 \cdot xxyxyxxx + 4 \cdot xxyxyxxx + 3 \cdot xxyxyxxx + 6 \cdot xxyxyxxx + 6 \cdot xxyxyxxx + 6 \cdot xxyxyxxx) - (xxyxyxxx + 2 \cdot xxyxyxxx + 3 \cdot xxyxyxxx + 4 \cdot xxyxyxxx + 3 \cdot xxyxyxxx + 6 \cdot xxyxyxxx + 9 \cdot xxyxyxxx + 6 \cdot xxyxyxxx + 12 \cdot xxyxyxxx + 10 \cdot xxyxyxxx) = \\ - 4 \cdot xxy|xxxxy| - 9 \cdot xxy|xxxxy| - 12 \cdot xxxxxy|xy| - 10 \cdot xxxxxy|xy| \\ - 4 \cdot (3,5) - 9 \cdot (4,4) - 12 \cdot (5,3) - 10 \cdot (6,2)$$

$$- 4 \cdot xxy|xxxxy| - 9 \cdot xxy|xxxxy| - 12 \cdot xxxxxy|xy| - 10 \cdot xxxxxy|xy|$$

j = 1 $\text{reg}_{\mathbb{U}}^0(xxyxy \textcolor{red}{xx}) \text{ } \sqcup \text{ } \textcolor{blue}{x} =$

$$3 \cdot xxy|xxxxy|x + 12 \cdot xxy|xxxxy| + 27 \cdot xxxxxy|xy| + 6 \cdot xxxxxy|xy|x + 36 \cdot xxxxxy|xy|xy|x + 30 \cdot xxxxxy|xy|$$

j = 2 $\text{reg}_{\mathbb{U}}^0(xxyxy \textcolor{red}{x}) \text{ } \sqcup \text{ } \textcolor{blue}{xx} =$

$$- 2 \cdot xxy|xy|xx - 6 \cdot xxy|xy|x - 12 \cdot xxy|xy| - 12 \cdot xxxxxy|xy|x - 27 \cdot xxxxxy|xy| - 36 \cdot xxxxxy|xy| - 3 \cdot xxxxxy|xy|xx - 12 \cdot xxxxxy|xy|x - 30 \cdot xxxxxy|xy|$$

(A piros keretben belüli részbe kattintva ugyanúgy működnek az összevonást segítő kiemelések.)

$$- 2 \cdot xxy|xy|xx + 4 \cdot xxy|xy|xx - 2 \cdot xxy|xy|xx$$

Calculate Clear

(A')-ben: $u = xxxy \in \mathfrak{h}y$; $n = 3$

j = 0 $\text{reg}_{\mathbb{U}}^0(xxyxy \textcolor{red}{xxx}) \text{ } \sqcup \text{ } (\textcolor{blue}{}) =$

(A)-ban: $u = xxxy \in \mathfrak{h}y$; $n = 3$

$$\text{reg}_{\mathbb{U}}^0(xxyxyxxx) = \sum_{0 \leq j \leq 3} (-1)^j xxyxyx^{3-j} \text{ } \sqcup \text{ } x^j = xxyxy \textcolor{red}{xxx} \text{ } \sqcup \text{ } () - xxyxy \textcolor{red}{xx} \text{ } \sqcup \text{ } \textcolor{blue}{x} + xxyxy \textcolor{red}{x} \text{ } \sqcup \text{ } \textcolor{blue}{xx} - xxyxy \text{ } \sqcup \text{ } \textcolor{blue}{xxx} =$$

$$xxyxyxxx - (3 \cdot xxyxyxxx + 2 \cdot xxyxyxxx + 3 \cdot xxyxyxxx) + (3 \cdot xxyxyxxx + 4 \cdot xxyxyxxx + 3 \cdot xxyxyxxx + 6 \cdot xxyxyxxx + 6 \cdot xxyxyxxx + 6 \cdot xxyxyxxx) - (xxyxyxxx + 2 \cdot xxyxyxxx + 3 \cdot xxyxyxxx + 4 \cdot xxyxyxxx + 3 \cdot xxyxyxxx + 6 \cdot xxyxyxxx + 9 \cdot xxyxyxxx + 6 \cdot xxyxyxxx + 12 \cdot xxyxyxxx + 10 \cdot xxyxyxxx) = \\ - 4 \cdot xxy|xxxxy| - 9 \cdot xxy|xxxxy| - 12 \cdot xxxxxy|xy| - 10 \cdot xxxxxy|xy| \\ - 4 \cdot (3,5) - 9 \cdot (4,4) - 12 \cdot (5,3) - 10 \cdot (6,2)$$

$$- 4 \cdot xxy|xxxxy| - 9 \cdot xxy|xxxxy| - 12 \cdot xxxxxy|xy| - 10 \cdot xxxxxy|xy|$$

j = 1 $\text{reg}_{\mathbb{U}}^0(xxyxy \textcolor{red}{xx}) \text{ } \sqcup \text{ } \textcolor{blue}{x} =$

$$3 \cdot xxy|xxxxy|x + 12 \cdot xxy|xxxxy| + 27 \cdot xxxxxy|xy| + 6 \cdot xxxxxy|xy|x + 36 \cdot xxxxxy|xy|xy|x + 30 \cdot xxxxxy|xy|$$

j = 2 $\text{reg}_{\mathbb{U}}^0(xxyxy \textcolor{red}{x}) \text{ } \sqcup \text{ } \textcolor{blue}{xx} =$

$$- 2 \cdot \textcolor{brown}{xxy|xy|xx} - 6 \cdot \textcolor{brown}{xxy|xy|x} - 12 \cdot \textcolor{brown}{xxy|xy|} - 12 \cdot \textcolor{brown}{xxxxy|xy|} - 27 \cdot \textcolor{brown}{xxxxy|xy|x} - 36 \cdot \textcolor{brown}{xxxxy|xy|xy|x} - 3 \cdot \textcolor{brown}{xxxxy|xy|xx} - 12 \cdot \textcolor{brown}{xxxxy|xy|x} - 30 \cdot \textcolor{brown}{xxxxy|xy|}$$

Az egyes j értékekhez tartozó mezők alsó fehér soraiban a $\text{reg}_{\mathbb{U}}^0(ux^{n-j}) \text{ } \sqcup \text{ } x^j$ szorzat kiszámított és összevont eredményét látjuk. Ha a kiszámítás előtti formulát szeretnénk megjeleníteni, akkor az első sor végén található, sárgás hátterű egyenlőségjelre kell kattintanunk.

j = 2 $\text{reg}_{\mathbb{U}}^0(xxyxy \textcolor{red}{x}) \text{ } \sqcup \text{ } \textcolor{blue}{xx} = - (2 \cdot xxyxy + 3 \cdot xxxxxy) \text{ } \sqcup \text{ } \textcolor{blue}{xx} =$

$$- 2 \cdot xxy|xy|xx - 6 \cdot xxy|xy|x - 12 \cdot xxy|xy| - 12 \cdot xxxxxy|xy|x - 27 \cdot xxxxxy|xy| - 36 \cdot xxxxxy|xy| - 3 \cdot xxxxxy|xy|xx - 12 \cdot xxxxxy|xy|x - 30 \cdot xxxxxy|xy|$$

Egy tetszőleges $w = ux^n$ ($u \in \mathfrak{h}y$) szó $\text{reg}_{\mathbb{U}}^0(ux^n)$ regularizáltjában pontosan lépnek fel non-admissible tagok, ha az u szó non-admissible. Például, a $w = yyxyxx$ szó $\text{reg}_{\mathbb{U}}^0(yyxyxx)$ regularizáltjára a $3 \cdot y|y|xxxxy| + 2 \cdot y|xy|xyy| + y|xy|xy| + 2 \cdot xy|y|xy| + xy|xy|xy| + xxy|y|xy|$ polinomot kapjuk, melynek vektor tartójú multihalmaz megfelelője a $3 * (1, 1, 4) + 2 * (1, 2, 3) + (1, 3, 2) + 2 * (2, 1, 3) + (2, 2, 2) + (3, 1, 2)$ multihalmaz. Viszont a $w = xxyxyxxxx$ szó $\text{reg}_{\mathbb{U}}^0(xxyxyxxxx) = 15 \cdot xxy|xxxxxy| + 30 \cdot$

$xxxxy|xxxxxy|+36\cdot xxxxxy|xxxxy|+30\cdot xxxxy|xxxxy|+15\cdot xxxxy|xy| \approx 15*(3,7)+30*(4,6)+36*(5,5)+30*(6,4)+15*(7,3)$
 regularizáltjában nem lépnek fel non-admissible tagok.

Gyakorlatok:

1. A program segítségével vizsgálja meg az $x^n \sqcup x^m = \binom{n+m}{n} x^{n+m}$, illetve $y^n \sqcup y^m = \binom{n+m}{n} y^{n+m}$, ($n, m \geq 0$) azonosságok teljesülését.
2. A program segítségével vizsgálja meg a $\text{reg}_{\sqcup}^0(yx^n) = (yx^n)^{-1} = x^n y$, ($n \geq 0$) azonosság teljesülését.

2 Alapformula

Legyen δ egy tetszőleges derivált. Ekkor

- $\delta_*(w) := (\delta w^*)^*$ is egy derivált, amelyet a δ konjugált deriváltjának nevezünk
- $\delta_-(w) := (\delta w^-)^-$ is egy derivált, amelyet a δ inverz deriváltjának nevezünk
- $\delta_\dagger(w) := (\delta w^\dagger)^\dagger = \delta_{-*}(w) := (\delta w^{-*})^{-*}$ is egy derivált, amelyet a δ duális(inverz-konjugált) deriváltjának nevezünk

Ha másról nem mondunk, akkor a ∂ azt a deriváltat jelöli, amelyet a $\partial x = xx$ és $\partial y = xy$ egyenletek határoznak meg.

$$\partial : \begin{cases} x \mapsto xx \\ y \mapsto xy \end{cases} \quad \partial_- : \begin{cases} x \mapsto xx \\ y \mapsto yx \end{cases} \quad \partial_* : \begin{cases} x \mapsto yx \\ y \mapsto yy \end{cases} \quad \partial_\dagger : \begin{cases} x \mapsto xy \\ y \mapsto yy \end{cases}$$

Tehát

- ∂ minden betű előre egy x betűt fűz
- ∂_- minden betű mögöre egy x betűt fűz
- ∂_* minden betű előre egy y betűt fűz
- $\partial_{-*} = \partial_\dagger$ minden betű mögöre egy y betűt fűz

Tétel: Tetszőleges $w \in \mathfrak{h}$ szóval, illetve $n \in \mathbb{N}$ számmal teljesül az alábbi nyolc (ekvivalens) formula:

(1.a)	$w \sqcup x^n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \partial^k w \bullet x^{n-k}$	(2.a)	$y^n \sqcup w = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^{n-k} \bullet \partial_\dagger^k w$
(1.b)	$w \bullet x^n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \partial^k w \sqcup x^{n-k}$	(2.b)	$y^n \bullet w = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^{n-k} \sqcup \partial_\dagger^k w$
(3.a)	$x^n \sqcup w = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \partial_-^k w \bullet x^{n-k}$	(4.a)	$w \sqcup x^n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \partial_*^k w \bullet x^{n-k}$
(3.b)	$x^n \bullet w = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} x^{n-k} \sqcup \partial_-^k w$	(4.b)	$w \bullet x^n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \partial_*^k w \sqcup x^{n-k}$