1 A $\mathscr{C}(n,m)$, $\mathscr{M}_{n,m,k}$ polinomok , illetve az $\mathscr{M}_{n,k-n,k}$ alappolinomok

A $\mathscr{C}(n,m)$ polinomban az $n+m$-nél nem nagyobb számok, 1-et nem tartalmazó, legfeljebb $\min(n,m)$ hosszú felbontásainak megfelelő monomok vannak. Vagyis, a $\mathscr{C}(n,m)$ polinom olyan $x_{f_1}^{k_1} x_{f_1}^{k_1} \dots x_{f_r}^{k_r}$ monomokból áll, amelyekre

1. $f_1, f_2, \dots, f_r > 1$ (Egyik monom sem tartalmaz x_1-et.)
2. $f_1 + f_2 + \cdots + f_r \leq \min(n,m)$ (A kitevők összege az n, illetve m számok egyikénél sem több.)
3. $k_1 f_1 + k_2 f_2 + \cdots k_r f_r \leq n+m$ (Az indexek és a kitevők szorzatának összege **legfeljebb** $n+m$. Azaz, $f_1^{k1}, f_2^{k2}, \dots, f_r^{k_r} \vdash k$, ahol k **tetszőleges $n+m$-nél nem nagyobb szám**.)

A $\mathscr{C}(n,m)$ polinom monomjait csoportosíthatjuk aszerint, hogy melyik $n+m$-nél nem nagyobb k szám felbontásai. Ezeket a részpolinomokat $\mathscr{M}_{n,m,k}$-el fogjuk jelölni. Eszerint az $\mathscr{M}_{n,m,k}$ polinom olyan $x_{f_1}^{k_1} x_{f_1}^{k_1} \dots x_{f_r}^{k_r}$ monomokból áll, amelyekre

1. $f_1, f_2, \dots, f_r > 1$ (Egyik monom sem tartalmaz x_1-et.)
2. $f_1 + f_2 + \cdots + f_r \leq \min(n,m)$ (A kitevők összege az n, illetve m számok egyikénél sem több.)
3. $k_1 f_1 + k_2 f_2 + \cdots k_r f_r = k$ (Az indexek és a kitevők szorzatának összege **pontosan** k. Azaz, $f_1^{k1}, f_2^{k2}, \dots, f_r^{k_r} \vdash k$.)

A fenti felbontást fejezi ki az alábbi képlet.

$$\mathscr{C}(n,m) = \sum_{k=2}^{n+m} \mathscr{M}_{n,m,k} \qquad (1.1)$$

Tételek
Minden a későbbiekben kimondott tétel annak az egyszerű következménye, hogy az $\mathscr{M}_{n,m,k}$ polinomokra teljesül egy **előjeles Pascal-féle azonosság**.

$$-\mathscr{M}_{n,m,k} = \mathscr{M}_{n-1,m,k} + \mathscr{M}_{n,m-1,k} \quad (n,m,k \in \mathbb{Z}) \qquad (1.2)$$

Ebből könnyen levezethető, hogy a $\mathscr{C}(n,m)$ polinomokra is teljesül egy hasonló azonosság.

$$\mathscr{C}(n,m) = \mathscr{M}_{n,m,n+m} - (\mathscr{C}(n,m) + \mathscr{C}(n,m)) \quad (n,m \in \mathbb{Z}) \qquad (1.3)$$

Egy másik —sokkal fontosabb— következmény az $\mathscr{M}_{n,m,k}$ polinomot az $\mathscr{M}_{1,k-1,k}, \mathscr{M}_{2,k-2,k}, \mathscr{M}_{3,k-3,k}, \dots \mathscr{M}_{k-1,1,k}$ speciális polinomok összegeként állítja elő.

$$\mathscr{M}_{n,m,k} = (-1)^{n+m} \sum_{i=1}^{k-1} \binom{n+m-k}{n-i} \mathscr{M}_{i,k-i,k} \quad (n,m,k \in \mathbb{Z}) \qquad (1.4)$$

Ezen $\mathscr{M}_{i,k-i,k}$ speciális polinomok sok tekintetben hasonlóan viselkednek mint a binomiális együtthatók, és nagyon érdekes tulajdonságaik vannak. Valójában a binomiális együtthatók egyfajta általánosításának tekinthetők, ezért egy a kapcsolatot jobban kifejező jelölést vezetünk be.

$$\mathscr{M}_{n,k-n,k} \overset{jel.}{=} \left\|\begin{matrix} k \\ n \end{matrix}\right\| \tag{1.5}$$

Ezzel a jelöléssel már (1.4) is az

$$\mathscr{M}_{n,m,k} = (-1)^{n+m} \sum_{i=1}^{k-1} \binom{n+m-k}{n-i} \left\|\begin{matrix} k \\ i \end{matrix}\right\| \quad (n, m, k \in \mathbb{Z}) \tag{1.6}$$

formába írható. A képlet azt mondja, hogy elegendő csak a $\left\|\begin{matrix} k \\ i \end{matrix}\right\|$ polinomokat meghatározni, mert ezekből már minden előállítható.

A fentiekből egyszerűen levezethető a legfontosabb tétel, amely $\mathscr{C}(n,m)$ polinomot állítja elő a $\left\|\begin{matrix} i+j \\ i \end{matrix}\right\|$ alappolinomok szép, szimmetrikus összegeként.

$$\mathscr{C}(n,m) = (-1)^{n+m} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{i+j} \binom{n+m-(i+j)}{n-i} \left\|\begin{matrix} i+j \\ i \end{matrix}\right\| \quad (n, m \in \mathbb{Z}) \tag{1.7}$$

Konkrét példa

A $\mathscr{C}(n,m) = \mathscr{C}(6,4)$ polinomban az $n+m = 6+4 = 10$-nél nem nagyobb számok, 1-et nem tartalmazó, legfeljebb $\min(n,m) = \min(6,4) = 4$ hosszú felbontásainak megfelelő monomok vannak.

$\mathscr{C}(6,4) = \frac{1}{4}\, {x_2}^2 {x_3}^2 + 4\, {x_5}^2 - 21\, x_{10} - \frac{70}{3}\, x_9 - \frac{105}{4}\, x_8 - 30\, x_7 - \frac{209}{6}\, x_6 - 56\, x_2 - 56\, x_3 - \frac{97}{2}\, x_4 - 41\, x_5 - 3\, x_2 x_3 x_5 - \frac{7}{4}\, {x_3}^2 x_4 - \frac{7}{2}\, x_2 x_3 x_4 -$
$- \frac{2}{3}\, {x_3}^3 - 2\, x_2 {x_3}^2 - \frac{2}{3}\, {x_2}^3 - 2\, {x_2}^2 x_3 + \frac{1}{24}\, {x_2}^4 + \frac{1}{6}\, {x_2}^3 x_3 + \frac{1}{6}\, {x_2}^3 x_4 - \frac{3}{2}\, x_2 {x_4}^2 - \frac{3}{2}\, {x_2}^2 x_5 + 7\, x_2 x_8 + 8\, x_3 x_7 + \frac{97}{12}\, x_4 x_6 - \frac{5}{4}\, {x_2}^2 x_6 +$
$+ \frac{28}{3}\, x_2 x_6 + 11\, x_3 x_5 + \frac{45}{8}\, {x_4}^2 - \frac{7}{4}\, {x_2}^2 x_4 + 8\, x_2 x_7 + \frac{28}{3}\, x_3 x_6 + \frac{19}{2}\, x_4 x_5 + \frac{15}{2}\, {x_2}^2 + 15\, x_2 x_3 + 13\, x_2 x_4 + \frac{15}{2}\, {x_3}^2 + 11\, x_2 x_5 + 13\, x_3 x_4$

A $\mathscr{C}(n,m) = \mathscr{C}(6,4)$ polinom monomjait csoportosíthatjuk aszerint, hogy a 10-nél nem nagyobb számok közül konkrétan melyiknek a legfeljebb 4 hosszú felbontását adják. $/k_1 f_1 + k_2 f_2 + \cdots k_r f_r = k, \quad (k = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)/$ Ezen csoportosításokkal kapott polinomokat jelöljük rendre az $\mathscr{M}_{6,4,2}, \mathscr{M}_{6,4,3}, \ldots, \mathscr{M}_{6,4,10}$ szimbólumokkal.

$\mathscr{C}(6,4) = \{-56\, x_2\} + \{-56\, x_3\} + \left\{-\frac{97}{2}\, x_4 + \frac{15}{2}\, {x_2}^2\right\} + \{15\, x_2 x_3 - 41\, x_5\} + \left\{-\frac{209}{6}\, x_6 + 13\, x_2 x_4 + \frac{15}{2}\, {x_3}^2 - \frac{2}{3}\, {x_2}^3\right\} +$
$+ \left\{-2\, {x_2}^2 x_3 + 11\, x_2 x_5 + 13\, x_3 x_4 - 30\, x_7\right\} + \left\{-\frac{105}{4}\, x_8 + \frac{28}{3}\, x_2 x_6 + 11\, x_3 x_5 + \frac{45}{8}\, {x_4}^2 - \frac{7}{4}\, {x_2}^2 x_4 - 2\, x_2 {x_3}^2 + \frac{1}{24}\, {x_2}^4\right\} +$
$+ \left\{-\frac{70}{3}\, x_9 + 8\, x_2 x_7 + \frac{28}{3}\, x_3 x_6 + \frac{19}{2}\, x_4 x_5 - \frac{3}{2}\, {x_2}^2 x_5 - \frac{7}{2}\, x_2 x_3 x_4 - \frac{2}{3}\, {x_3}^3 + \frac{1}{6}\, {x_2}^3 x_3\right\} + \left\{-21\, x_{10} + 7\, x_2 x_8 + 8\, x_3 x_7 + \frac{97}{12}\, x_4 x_6 -\right.$
$\left. -3\, x_2 x_3 x_5 - \frac{3}{2}\, x_2 {x_4}^2 - \frac{7}{4}\, {x_3}^2 x_4 + \frac{1}{6}\, {x_2}^3 x_4 + \frac{1}{4}\, {x_2}^2 {x_3}^2\right\}$

$$\mathscr{M}_{6,4,2} = -56\,x_2$$
$$\mathscr{M}_{6,4,3} = -56\,x_3$$
$$\mathscr{M}_{6,4,4} = -\frac{97}{2}\,x_4 + \frac{15}{2}\,{x_2}^2$$
$$\mathscr{M}_{6,4,5} = 15\,x_2x_3 - 41\,x_5$$
$$\mathscr{M}_{6,4,6} = -\frac{209}{6}\,x_6 + 13\,x_2x_4 + \frac{15}{2}\,{x_3}^2 - \frac{2}{3}\,{x_2}^3$$
$$\mathscr{M}_{6,4,7} = -2\,{x_2}^2x_3 + 11\,x_2x_5 + 13\,x_3x_4 - 30\,x_7$$
$$\mathscr{M}_{6,4,8} = -\frac{105}{4}\,x_8 + \frac{28}{3}\,x_2x_6 + 11\,x_3x_5 + \frac{45}{8}\,{x_4}^2 - \frac{7}{4}\,{x_2}^2x_4 - 2\,x_2{x_3}^2 + \frac{1}{24}\,{x_2}^4$$
$$\mathscr{M}_{6,4,9} = -\frac{70}{3}\,x_9 + 8\,x_2x_7 + \frac{28}{3}\,x_3x_6 + \frac{19}{2}\,x_4x_5 - \frac{3}{2}\,{x_2}^2x_5 - \frac{7}{2}\,x_2x_3x_4 - \frac{2}{3}\,{x_3}^3 + \frac{1}{6}\,{x_2}^3x_3$$
$$\mathscr{M}_{6,4,10} = -21\,x_{10} + 7\,x_2x_8 + 8\,x_3x_7 + \frac{97}{12}\,x_4x_6 + 4\,{x_5}^2 - \frac{5}{4}\,{x_2}^2x_6 - 3\,x_2x_3x_5 - \frac{3}{2}\,x_2{x_4}^2 - \frac{7}{4}\,{x_3}^2x_4 + \frac{1}{6}\,{x_2}^3x_4 + \frac{1}{4}\,{x_2}^2{x_3}^2$$

Nyilván

$$\mathscr{C}(6,4) = \sum_{k=2}^{10} \mathscr{M}_{6,4,k} = \mathscr{M}_{6,4,2} + \mathscr{M}_{6,4,3} + \mathscr{M}_{6,4,4} + \mathscr{M}_{6,4,5} + \mathscr{M}_{6,4,6} + \mathscr{M}_{6,4,7} + \mathscr{M}_{6,4,8} + \mathscr{M}_{6,4,9} + \mathscr{M}_{6,4,10}$$

Egy $\mathscr{M}_{n,m,k}$ polinom **defektus**án a $n+m-k$ számot értjük. Például, az $\mathscr{M}_{6,4,7}$ polinom defektusa $6+4-7=3$. Viszont az $\mathscr{M}_{6,4,10} = \left\|\begin{matrix}10\\6\end{matrix}\right\|$ alappolinom defektusa 0.

Egy nem 0 defektussal rendelkező ($k \neq n+m$) $\mathscr{M}_{n,m,k}$ polinom együtthatóinak a kiszámítása sokkal nehezebb mint egy 0 defektussal rendelkező $\mathscr{M}_{n,m,n+m} = \left\|\begin{matrix}n+m\\n\end{matrix}\right\|$ alappolinom együtthatóinak a kiszámítása. Ezért is bírnak olyan nagy jelentőséggel az (1.6), illetve (1.7) képletek.

A (1.7) képlet tartalma az alábbi. Írjuk fel a binomiális együtthatókat tartalmazó Pascal-féle háromszöget a szokásos módon.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} \\
\iddots & & & & & & & & & & & & \ddots
\end{array}$$

Aztán írjuk fel az előjeles $\left\|\begin{matrix}i\\j\end{matrix}\right\|$ alappolinomokat tartalmazó Pascal-féle háromszöget fejjel lefelé. (Az óramutató járásával megegyező irányban 90°-kal elforgatva.)

$$
\begin{array}{c}
\ddots \hspace{30em} \iddots \\
\begin{Vmatrix}6\\6\end{Vmatrix} \quad -\begin{Vmatrix}6\\5\end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix}6\\4\end{Vmatrix} \quad -\begin{Vmatrix}6\\3\end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix}6\\2\end{Vmatrix} \quad -\begin{Vmatrix}6\\1\end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix}6\\0\end{Vmatrix} \\
\begin{Vmatrix}5\\5\end{Vmatrix} \quad -\begin{Vmatrix}5\\4\end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix}5\\3\end{Vmatrix} \quad -\begin{Vmatrix}5\\2\end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix}5\\1\end{Vmatrix} \quad -\begin{Vmatrix}5\\0\end{Vmatrix} \\
\begin{Vmatrix}4\\4\end{Vmatrix} \quad -\begin{Vmatrix}4\\3\end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix}4\\2\end{Vmatrix} \quad -\begin{Vmatrix}4\\1\end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix}4\\0\end{Vmatrix} \\
\begin{Vmatrix}3\\3\end{Vmatrix} \quad -\begin{Vmatrix}3\\2\end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix}3\\1\end{Vmatrix} \quad -\begin{Vmatrix}3\\0\end{Vmatrix} \\
\begin{Vmatrix}2\\2\end{Vmatrix} \quad -\begin{Vmatrix}2\\1\end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix}2\\0\end{Vmatrix} \\
\begin{Vmatrix}1\\1\end{Vmatrix} \quad -\begin{Vmatrix}1\\0\end{Vmatrix} \\
\begin{Vmatrix}0\\0\end{Vmatrix}
\end{array}
$$

Ezt a két szembefordított háromszöget kell a binomiális együtthatók $\binom{n+m+1}{n+1}$ pontjában összeilleszteni az alappolinomok háromszögének $\begin{Vmatrix}0\\0\end{Vmatrix}$ csúcsával. Ekkor a binomiális együtthatók $\binom{0}{0}$ csúcsa az alappolinomok $\begin{Vmatrix}n+m+1\\n+1\end{Vmatrix}$ pontjába kerül. Az $n = 6$, $m = 4$ esetre ez azt jelenti, hogy a két háromszöget a binomiális együtthatók háromszögének a $\binom{11}{7}$ (pirossal jelölt) pontjában kell összeilleszteni a szembefordított alappolinomok háromszögének $\begin{Vmatrix}0\\0\end{Vmatrix}$ csúcsával.

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\iddots \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\
\binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6} \\
\binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad \ddots \\
\binom{8}{5} \quad \binom{8}{6} \\
\binom{9}{6} \\
\binom{10}{6} \quad \binom{10}{7} \\
\iddots \quad {\color{red}\binom{11}{7}} \quad \ddots
\end{array}
$$

A következő ábrán még csak a megfelelően összeillesztett alappolinomok háromszögének a széleit mutatja.

$$\begin{gathered}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \qquad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \qquad \binom{2}{1} \qquad \binom{2}{2} \\
\ddots \qquad \binom{3}{0} \qquad \binom{3}{1} \qquad \binom{3}{2} \qquad \binom{3}{3} \\
\begin{Vmatrix}7\\7\end{Vmatrix} \qquad \binom{4}{1} \qquad \binom{4}{2} \qquad \binom{4}{3} \qquad \binom{4}{4} \\
\iddots \qquad \begin{Vmatrix}6\\6\end{Vmatrix} \qquad \binom{5}{2} \qquad \binom{5}{3} \qquad \binom{5}{4} \qquad \binom{5}{5} \\
\begin{Vmatrix}5\\5\end{Vmatrix} \qquad \binom{6}{3} \qquad \binom{6}{4} \qquad \binom{6}{5} \qquad \binom{6}{6} \qquad \iddots \\
\begin{Vmatrix}4\\4\end{Vmatrix} \qquad \binom{7}{4} \qquad \binom{7}{5} \qquad \binom{7}{6} \qquad \begin{Vmatrix}4\\0\end{Vmatrix} \\
\begin{Vmatrix}3\\3\end{Vmatrix} \qquad \binom{8}{5} \qquad \binom{8}{6} \qquad \begin{Vmatrix}3\\0\end{Vmatrix} \qquad \ddots \\
\begin{Vmatrix}2\\2\end{Vmatrix} \qquad \binom{9}{6} \qquad \begin{Vmatrix}2\\0\end{Vmatrix} \\
\begin{Vmatrix}1\\1\end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix}1\\0\end{Vmatrix} \\
\iddots \qquad \binom{11}{7}\begin{Vmatrix}0\\0\end{Vmatrix} \qquad \ddots
\end{gathered}$$

Aztán minden elemet beírunk.

$$\begin{gathered}
\binom{0}{0}\begin{Vmatrix}11\\7\end{Vmatrix} \\
-\binom{1}{0}\begin{Vmatrix}10\\7\end{Vmatrix} \qquad \binom{1}{1}\begin{Vmatrix}10\\6\end{Vmatrix} \\
\binom{2}{0}\begin{Vmatrix}9\\7\end{Vmatrix} \qquad -\binom{2}{1}\begin{Vmatrix}9\\6\end{Vmatrix} \qquad \binom{2}{2}\begin{Vmatrix}9\\5\end{Vmatrix} \\
-\binom{3}{0}\begin{Vmatrix}8\\7\end{Vmatrix} \qquad \binom{3}{1}\begin{Vmatrix}8\\6\end{Vmatrix} \qquad -\binom{3}{2}\begin{Vmatrix}8\\5\end{Vmatrix} \qquad \binom{3}{3}\begin{Vmatrix}8\\4\end{Vmatrix} \\
-\binom{4}{1}\begin{Vmatrix}7\\6\end{Vmatrix} \qquad \binom{4}{2}\begin{Vmatrix}7\\5\end{Vmatrix} \qquad -\binom{4}{3}\begin{Vmatrix}7\\4\end{Vmatrix} \qquad \binom{4}{4}\begin{Vmatrix}7\\3\end{Vmatrix} \\
\begin{Vmatrix}6\\6\end{Vmatrix} \qquad -\binom{5}{2}\begin{Vmatrix}6\\5\end{Vmatrix} \qquad \binom{5}{3}\begin{Vmatrix}6\\4\end{Vmatrix} \qquad -\binom{5}{4}\begin{Vmatrix}6\\3\end{Vmatrix} \qquad \binom{5}{5}\begin{Vmatrix}6\\2\end{Vmatrix} \\
\begin{Vmatrix}5\\5\end{Vmatrix} \qquad -\binom{6}{3}\begin{Vmatrix}5\\4\end{Vmatrix} \qquad \binom{6}{4}\begin{Vmatrix}5\\3\end{Vmatrix} \qquad -\binom{6}{5}\begin{Vmatrix}5\\2\end{Vmatrix} \qquad \binom{6}{6}\begin{Vmatrix}5\\1\end{Vmatrix} \\
\iddots \qquad \begin{Vmatrix}4\\4\end{Vmatrix} \qquad -\binom{7}{4}\begin{Vmatrix}4\\3\end{Vmatrix} \qquad \binom{7}{5}\begin{Vmatrix}4\\2\end{Vmatrix} \qquad -\binom{7}{6}\begin{Vmatrix}4\\1\end{Vmatrix} \\
\iddots \qquad \begin{Vmatrix}3\\3\end{Vmatrix} \qquad -\binom{8}{5}\begin{Vmatrix}3\\2\end{Vmatrix} \qquad \binom{8}{6}\begin{Vmatrix}3\\1\end{Vmatrix} \qquad -\begin{Vmatrix}3\\0\end{Vmatrix} \\
\iddots \qquad \begin{Vmatrix}2\\2\end{Vmatrix} \qquad -\binom{9}{6}\begin{Vmatrix}2\\1\end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix}2\\0\end{Vmatrix} \\
\iddots \qquad \begin{Vmatrix}1\\1\end{Vmatrix} \qquad -\begin{Vmatrix}1\\0\end{Vmatrix} \qquad \ddots \\
\iddots \qquad \iddots \qquad \binom{11}{7}\begin{Vmatrix}0\\0\end{Vmatrix} \qquad \ddots \qquad \ddots
\end{gathered}$$

Ha az illesztés rendben történik meg, akkor a két párosított együtthatóra teljesül, hogy a felső számok összege $n+m+1$, illetve az alsó számok összege $n+1$. A két szembefordított háromszög metszetéből álló téglalap —az alappolinomok háromszögének a szélét elhagyva— elemeit kell összeszorozva összegezni és megkapjuk a $\mathscr{C}(6,4)$ polinomot. A számítások jelentősen egyszerűsíthetők annak köszönhetően, hogy az $\begin{Vmatrix}i\\j\end{Vmatrix}$ alappolinomok a binomiális együtthatókhoz hasonlóan viselkednek. (Például $\begin{Vmatrix}6\\4\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}6\\2\end{Vmatrix}$.) Számunkra most csak az a fontos, hogy **elegendő a $\begin{Vmatrix}k\\n\end{Vmatrix}$ alappolinomok együtthatóinak a kiszámításával foglalkozni**.

2 A alappolinomok együtthatóinak kiszámítása

Tudjuk, hogy a $\left\| \begin{matrix} k \\ n \end{matrix} \right\|$ $(k > n)$ alappolinomban olyan $x_{f_1}^{k_1} x_{f_1}^{k_1} \dots x_{f_r}^{k_r}$ monomok vannak, amelyekre

$$\sum_{i=1}^{r} k_i f_i = k, \text{ és } \sum_{i=1}^{r} k_i \leq n$$

Ahhoz. hogy a $\left\| \begin{matrix} k \\ n \end{matrix} \right\|$ alappolinom $x_{f_1}^{k_1} x_{f_1}^{k_1} \dots x_{f_r}^{k_r}$ monomjának az együtthatóját megkapjuk össze kell gyűjtenünk n-nek a $k_1, k_2, \dots, k_r$ blokkokon monoton növekvő előállítását. Hogy ez pontosan mit is jelent, azt egy számszerű példán mutatjuk be. Tekintsük a $\left\| \begin{matrix} 43 \\ 20 \end{matrix} \right\|$ alappolinom $x_3^4 x_5^3 x_8^2$ monomját. Írjuk le a 3-at 4-szer egymás mellé majd húzzunk egy függőleges elválasztó vonalat. Ez lesz a hármasok blokkja. Ezt csináljuk meg 5-tel és 8-cal is. Így megkapjuk az összes blokkot.

3	3	3	3	5	5	5	8	8

A hármasok blokkjában minden 3-as fölé írjuk be az összes 3-nál kisebb számot. Hasonlóan, az ötösök blokkjában minden 5-ös fölé írjuk be az összes 5-nél kisebb számot. Ezt tegyük meg az összes blokkal. Ekkor az alábbi táblázatot kapjuk.

							7	7
							6	6
							5	5
				4	4	4	4	4
				3	3	3	3	3
2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	3	3	3	5	5	5	8	8

Feladatunk az, hogy minden oszlopban válasszunk egy számot úgy, hogy azok összege éppen $n = 20$ legyen, de a kiválasztott számok egy blokkon belül nem csökkenhetnek. (Minden oszlopból kell egy számot választani.)
Felírunk néhány lehetséges választást. Kezdjük a lehetséges „legkisebbel”!

							7	7
							6	6
							5	5
				4	4	4	4	4
				3	3	3	3	3
2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	3	3	3	5	5	5	8	8

De ugyanígy megfelelők az alábbi választások is, mert a kiválasztott számok egy blokkon belül nem csökkennek, és 20 az összegük.

							7	7
							6	6
							5	5
				4	4	4	4	4
				3	3	3	3	3
2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	3	3	3	5	5	5	8	8

							7	7
							6	6
							5	5
				4	4	4	4	4
				3	3	3	3	3
2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	3	3	3	5	5	5	8	8

							7	7
							6	6
							5	5
				4	4	4	4	4
				3	3	3	3	3
2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	3	3	3	5	5	5	8	8

Viszont az alábbi választások már nem jók, mert van(nak) olyan blokk(ok), amelyekben a kiválasztott számok csökkennek.

							7	7
							6	**6**
							5	5
				4	4	4	4	4
				3	3	**3**	3	3
2	2	2	**2**	2	**2**	2	2	2
1	**1**	**1**	1	1	1	1	**1**	1
3	3	3	3	5	5	5	8	8

							7	7
							6	6
							5	5
				4	4	4	4	4
				3	3	3	3	3
2	**2**	2	2	2	**2**	**2**	2	**2**
1	1	**1**	**1**	1	1	1	1	1
3	3	3	3	5	5	5	8	8

							7	7
							6	**6**
							5	5
				4	4	4	4	4
				3	3	3	3	3
2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	1	1
3	3	3	3	5	5	5	8	8

Az alábbi választások pedig azért nem jók, mert (habár a kiválasztott számok egy blokkon belül nem csökkennek) az összegük nem $n = 20$-at eredményez.

							7	7
							6	**6**
							5	5
				4	4	**4**	**4**	4
				3	3	3	3	3
2	2	2	**2**	**2**	**2**	2	2	2
1	**1**	**1**	1	1	1	1	1	1
3	3	3	3	5	5	5	8	8

							7	7
							6	6
							5	**5**
				4	4	4	4	4
				3	3	3	3	3
2	**2**	**2**	**2**	2	2	2	**2**	2
1	1	1	1	**1**	**1**	**1**	1	1
3	3	3	3	5	5	5	8	8

							7	7
							6	6
							5	5
				4	4	4	4	4
				3	3	**3**	3	3
2	2	**2**	**2**	**2**	**2**	2	**2**	**2**
1	**1**	1	1	1	1	1	1	1
3	3	3	3	5	5	5	8	8

Ezen példa arra is rámutat, hogy k, illetve n növekedésével a lehetséges felbontások száma drasztikusan megnőhet, és így a magasabb fokú $\left\Vert\begin{matrix}k\\n\end{matrix}\right\Vert$ alappolinomokban a monomok együtthatóinak a meghatározása is igen számításigényessé válhat.

Egy blokkonként monoton növekvő 10-felbontáshoz pedig a már megismert módon rendelhetünk egy számot.

							7	**7**
							6	6
							5	5
				4	4	4	4	4
				3	3	3	3	3
2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	1	1
3	3	3	3	5	5	5	8	8

$$\rightarrow \quad \frac{\binom{3}{1}^4\binom{5}{1}^3\binom{8}{6}^1\binom{8}{7}^1}{3^4\cdot 4!\cdot 5^3\cdot 3!\cdot 8^1\cdot 1!\cdot 8^1\cdot 1!}$$

							7	7
							6	**6**
							5	5
				4	4	4	4	4
				3	**3**	**3**	3	3
2	2	2	**2**	**2**	2	2	2	2
1	**1**	**1**	1	1	1	1	**1**	1
3	3	3	3	5	5	5	8	8

$$\rightarrow \quad \frac{\binom{3}{1}^3\binom{3}{2}^1\binom{5}{2}^1\binom{5}{3}^2\binom{8}{1}^1\binom{8}{6}^1}{3^3\cdot 3!\cdot 3^1\cdot 1!\cdot 5^1\cdot 1!\cdot 5^2\cdot 2!\cdot 8^1\cdot 1!\cdot 8^1\cdot 1!}$$

Ha az összes blokkonként monoton növekvő 10-felbontáshoz rendelt számot összeadjuk, akkor megkapjuk a $\left\Vert\begin{matrix}43\\20\end{matrix}\right\Vert$ alappolinom $x_3^4 x_5^3 x_8^2$ monomjának együtthatóját. Érdemes megjegyezni, hogy a nevezőben a hatványok mindig $3^4\cdot 5^3\cdot 8^2$ értéket adnak, amit az összegből ki is emelhetünk. Ez már jelzi, hogy a számítások egyszerűsíthetők, de ezzel csak a későbbiekben foglalkozunk. A defektusokat most teljesen figyelmen kívül hagyhatjuk, mert egy alappolinomban a defektus mindig 0, és így az eredményt $\binom{0}{0} = 1$egyel kell megszorozni. Az előjelek pedig egy $x_{f_1}^{k_1} x_{f_1}^{k_1} \dots x_{f_r}^{k_r}$ monomon belül egyformák, amit a kitevők $\sum_{i=1}^{r} k_i$ összege határoz meg a $(-1)^{k+m}\cdot(-1)^{\sum_{i=1}^{r} k_i}$ előjellel.

Most megadjuk a fentiekben már felírt

$$\left\Vert\begin{matrix}10\\6\end{matrix}\right\Vert = -21\,x_{10} + 7\,x_2x_8 + 8\,x_3x_7 + \frac{97}{12}\,x_4x_6 + 4\,{x_5}^2 - \frac{5}{4}\,{x_2}^2x_6 - 3\,x_2x_3x_5 - \frac{3}{2}\,x_2{x_4}^2 - \frac{7}{4}\,{x_3}^2x_4 + \frac{1}{6}\,{x_2}^3x_4 + \frac{1}{4}\,{x_2}^2{x_3}^2$$

néhány monomjának együtthatóját.

<u>Az ${x_3}^2x_4$ monom együtthatójának kiszámítása</u>

A monom együtthatójának előjele $(-1)^{10+6}\cdot(-1)^{2+1}=-1$. A blokkonként monoton növekvő $n=6$ összegű felbontásokból most mindösszesen kettő van.

$$\begin{array}{cc|c} & & 3\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ \hline 3 & 3 & 4\end{array} \qquad \begin{array}{cc|c} & & 3\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ \hline 3 & 3 & 4\end{array}$$

Az ezekhez rendelt számok összege pedig

$$\frac{\binom{3}{1}^1\binom{3}{2}^1\binom{4}{3}^1}{3^1\cdot 1!\cdot 3^1\cdot 1!\cdot 4^1\cdot 1!}+\frac{\binom{3}{2}^2\binom{4}{2}^1}{3^2\cdot 2!\cdot 4^1\cdot 1!}=\frac{\cancel{\binom{3}{1}^1}\cancel{\binom{3}{2}^1}\cancel{\binom{4}{3}^1}}{\cancel{3^1}\cdot 1!\cdot \cancel{3^1}\cdot 1!\cdot \cancel{4^1}\cdot 1!}+\frac{\cancel{\binom{3}{2}^2}\binom{4}{2}^1}{\cancel{3^2}\cdot 2!\cdot 4^1\cdot 1!}=1+\frac{6}{2\cdot 4}=1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$$

Az $x_2{}^3x_4$ monom együtthatójának kiszámítása

A monom együtthatójának előjele $(-1)^{10+6}\cdot(-1)^{3+1}=+1$. A blokkonként monoton növekvő $n=6$ összegű felbontásokból most csak egyetlen egy van.

$$\begin{array}{ccc|c} & & & 3\\ & & & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ \hline 2 & 2 & 2 & 4\end{array}$$

Az ehhez rendelt szám megadja a kérdéses együttható nagyságát.

$$\frac{\binom{2}{1}^3\binom{4}{3}^1}{2^3\cdot 3!\cdot 4^1\cdot 1!}=\frac{\cancel{\binom{2}{1}^3}\cancel{\binom{4}{3}^1}}{\cancel{2^3}\cdot 3!\cdot \cancel{4^1}\cdot 1!}=\frac{1}{6}$$

Az x_4x_6 monom együtthatójának kiszámítása

A monom együtthatójának előjele $(-1)^{1+1}=+1$. A blokkonként monoton növekvő $n=6$ összegű felbontásokból most már három is van.

$$\begin{array}{c|c} & 5\\ & 4\\ 3 & 3\\ 2 & 2\\ 1 & 1\\ \hline 4 & 6\end{array} \qquad \begin{array}{c|c} & 5\\ & 4\\ 3 & 3\\ 2 & 2\\ 1 & 1\\ \hline 4 & 6\end{array} \qquad \begin{array}{c|c} & 5\\ & 4\\ 3 & 3\\ 2 & 2\\ 1 & 1\\ \hline 4 & 6\end{array}$$

Az ezekhez rendelt számok összege éppen az együttható nagyságát adja.

$$\frac{\binom{4}{1}^1\binom{6}{5}^1}{4^1\cdot 1!\cdot 6^1\cdot 1!}+\frac{\binom{4}{2}^1\binom{6}{4}^1}{4^1\cdot 1!\cdot 6^1\cdot 1!}+\frac{\binom{4}{3}^1\binom{6}{3}^1}{4^1\cdot 1!\cdot 6^1\cdot 1!}=\frac{1}{4\cdot 6}(4\cdot 6+6\cdot 15+4\cdot 20)=\frac{194}{24}=\frac{97}{12}$$

Egy nagyobb számítást igénylő példaként a $\left\|\begin{matrix}20\\8\end{matrix}\right\|$ alappolinomban előforduló $x_3^2x_4^2x_6$ monom $-\dfrac{1483}{96}$ együtthatóját adjuk meg.

A monom együtthatójának előjele $(-1)^{20+8}\cdot(-1)^{2+2+1}=-1$. Elsőként a legkisebb blokkonként monoton növekvő 8-felbontást adjuk meg.

$$\begin{array}{cc|cc|c} & & & & 5\\ & & & & 4\\ & & 3 & 3 & 3\\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ \hline 3 & 3 & 4 & 4 & 6\end{array}$$

A többi blokkonként monoton növekvő 8-felbontást már csak az utolsó elemek eggyel történő egyidejű növelése, csökkentése szisztémát követve egymás alá felírjuk. Így összesen 11 blokkonként monoton növekvő 8-felbontást kapunk.

	3	3	4	4	6
1.	1	1	1	1	4
2.	1	1	1	2	3
3.	1	1	1	3	2
4.	1	1	2	2	2
5.	1	1	2	3	1
6.	1	2	1	1	3
7.	1	2	1	2	2
8.	1	2	1	3	1
9.	1	2	2	2	1
10.	2	2	1	1	2
11.	2	2	1	2	1

Az egyes felbontásokhoz rendelt számok összegzésénél most már élni fogunk a korábban említett kiemelhetőséggel. Nevezetesen, az összes szám nevezőjéből kiemelhető lesz $3^2 \cdot 4^2 \cdot 6^1 = 864$, amivel csak a számok összegzése után fogunk egyszer osztani. Vagyis, a felbontások nevezőiben a

$$\frac{\dots}{3^i \cdot 3^j \cdot 4^a \cdot 4^b \cdot 6^1 \dots} = \frac{\dots}{3^2 \cdot 4^2 \cdot 6^1 \dots} = \frac{\dots}{864}$$

hatványokat nem írjuk ki, csak az összegzés végén osztunk vele.

1. $$\frac{\binom{3}{1}^2\binom{4}{1}^2\binom{6}{4}^1}{2!\cdot 2!\cdot 1!} = \frac{3^2\cdot 4^2\cdot 15}{2\cdot 2} = \mathbf{540}$$

2. $$\frac{\binom{3}{1}^2\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{6}{3}^1}{2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{3^2\cdot 4\cdot 6\cdot 20}{2} = \mathbf{2160}$$

3. $$\frac{\binom{3}{1}^2\binom{4}{1}\binom{4}{3}\binom{6}{2}^1}{2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{3^2\cdot 4\cdot 4\cdot 15}{2} = \mathbf{1080}$$

4. $$\frac{\binom{3}{1}^2\binom{4}{2}^2\binom{6}{2}^1}{2!\cdot 2!\cdot 1!} = \frac{3^2\cdot 6^2\cdot 15}{2\cdot 2} = \mathbf{1215}$$

5. $$\frac{\binom{3}{1}^2\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{6}{1}^1}{2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{3^2\cdot 6\cdot 4\cdot 6}{2} = \mathbf{648}$$

6. $$\frac{\binom{3}{1}^1\binom{3}{2}^1\binom{4}{1}^2\binom{6}{3}^1}{1!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 1!} = \frac{3\cdot 3\cdot 4^2\cdot 20}{2} = \mathbf{1440}$$

7. $$\frac{\binom{3}{1}^1\binom{3}{2}^1\binom{4}{1}^1\binom{4}{2}^1\binom{6}{2}^1}{1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 3\cdot 3\cdot 4\cdot 6\cdot 15 = \mathbf{3240}$$

8. $$\frac{\binom{3}{1}^1\binom{3}{2}^1\binom{4}{1}^1\binom{4}{3}^1\binom{6}{1}^1}{1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 3\cdot 3\cdot 4\cdot 4\cdot 6 = \mathbf{864}$$

9. $$\frac{\binom{3}{1}^1\binom{3}{2}^1\binom{4}{2}^2\binom{6}{1}^1}{1!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 1!} = \frac{3\cdot 3\cdot 6^2\cdot 6}{2} = \mathbf{972}$$

10. $$\frac{\binom{3}{2}^2\binom{4}{1}^2\binom{6}{2}^1}{2!\cdot 2!\cdot 1!} = \frac{3^2\cdot 4^2\cdot 15}{2\cdot 2} = \mathbf{540}$$

11. $$\frac{\binom{3}{2}^2\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{6}{1}^1}{2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{3^2\cdot 4\cdot 6\cdot 6}{2} = \mathbf{648}$$

$\sum$ $$\sum = \mathbf{13347} \to \frac{13347}{864} = \frac{1483}{96}$$

A $\left\|\begin{matrix}20\\8\end{matrix}\right\|$ alappolinom $x_3^2x_4^2x_6$ monomjához tartozó együttható meghatározásakor a Pascal-féle háromszögből (a legszélső $\binom{n}{0}$ $\binom{n}{n}$ elemeket elhagyva) ismétlődést is megenged választunk $2+2+1=5$ darab binomiális együtthatót. Az $n=8$ érték megszabja a kiválasztandó binomiális együtthatók alsó számainak az összegét. A felső számok összegének pedig $k=20$-at kell adnia. A $x_3^2x_4^2x_6$ monom azt is előírja, hogy 2 elem kell a 3. sorból, 2 elem a 4. sorból, és 1 elem a 6. sorból. Az összes ilyen választások szorzatából, az ismétléseket is figyelembe vevő faktoriálisokkal történő osztással kapott számok összege adja a monom együtthatóját. Jelenleg nem ismerünk olyan képletet, amellyel ez a szám egyszerűbben kiszámítható lenne.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \cancel{\binom{0}{0}} & & & & & & \\
 & & & & & \cancel{\binom{1}{0}} & & \cancel{\binom{1}{1}} & & & & & \\
 & & & & \cancel{\binom{2}{0}} & & \binom{2}{1} & & \cancel{\binom{2}{2}} & & & & \\
 & & & \cancel{\binom{3}{0}} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \cancel{\binom{3}{3}} & & & \\
 & & \cancel{\binom{4}{0}} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \cancel{\binom{4}{4}} & & \\
 & \cancel{\binom{5}{0}} & & \binom{5}{5} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \cancel{\binom{5}{5}} & \\
\cancel{\binom{6}{0}} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \cancel{\binom{6}{6}} \\
\iddots & & & & & & & & & & & & \ddots
\end{array}
$$

Az alábbiakban teljesen megadunk néhány magasabb fokú alappolinomot. Az ebben előforduló monomok együtthatójának a kiszámítása jó gyakorlás lehet.

$$\mathscr{M}_{8,12,20} = \left\|\begin{matrix}20\\8\end{matrix}\right\|$$

$$
-\tfrac{247}{96}\,x_3^4x_8+\tfrac{1}{5040}\,x_2^7x_6+\tfrac{1}{720}\,x_2^6x_3x_5+\tfrac{1}{1440}\,x_2^6x_4^2+\tfrac{1}{240}\,x_2^5x_3^2x_4+\tfrac{1}{576}\,x_2^4x_3^4-\tfrac{123}{8}\,x_3^2x_4x_5^2-\tfrac{167}{16}\,x_3x_4^3x_5-\tfrac{55}{32}\,x_2^4x_{12}-
10/3\,x_2^3x_7^2-\tfrac{17}{32}\,x_4^5-539\,x_3x_4x_{13}-\tfrac{1001}{2}\,x_3x_5x_{12}-470\,x_3x_6x_{11}-\tfrac{2249}{5}\,x_3x_7x_{10}-\tfrac{2639}{6}\,x_3x_8x_9-\tfrac{955}{2}\,x_4x_5x_{11}-\tfrac{18077}{40}\,x_4x_6x_{10}-
\tfrac{873}{2}\,x_4x_7x_9-\tfrac{8008}{15}\,x_2x_3x_{15}-\tfrac{1001}{2}\,x_2x_4x_{14}-462\,x_2x_5x_{13}-\tfrac{2585}{6}\,x_2x_6x_{12}-409\,x_2x_7x_{11}-\tfrac{1981}{5}\,x_2x_8x_{10}+\tfrac{3147}{5}\,x_{10}^2-\tfrac{12597}{2}\,x_{20}+
\tfrac{3509}{40}\,x_3^2x_4x_{10}+\tfrac{251}{3}\,x_3^2x_5x_9+\tfrac{1295}{16}\,x_3^2x_6x_8+\tfrac{256}{3}\,x_3x_4^2x_9+80\,x_3x_5^2x_7+\tfrac{653}{8}\,x_4^2x_5x_7+77\,x_2^2x_3x_{13}+\tfrac{17}{12}\,x_2^2x_3^3x_7+\tfrac{17}{8}\,x_2^2x_3^2x_5^2+
\tfrac{29}{36}\,x_2x_3^4x_6+5/4\,x_2^3x_3^2x_8+\tfrac{181}{144}\,x_2^3x_4^2x_6+5/4\,x_2^3x_4x_5^2-\tfrac{3}{32}\,x_2^4x_3^2x_6-\tfrac{5}{36}\,x_2^3x_3^3x_5-1/30\,x_2^5x_3x_7-1/30\,x_2^5x_4x_6-
\tfrac{7}{1440}\,x_2^6x_8-\tfrac{1}{60}\,x_2^5x_5^2-1/32\,x_2^4x_4^3-\tfrac{1483}{96}\,x_3^2x_4^2x_6-\tfrac{105}{8}\,x_2x_3^2x_6^2-\tfrac{217}{24}\,x_2x_4^3x_6-\tfrac{41}{4}\,x_3^3x_4x_7-\tfrac{91}{9}\,x_3^3x_5x_6-\tfrac{213}{4}\,x_2x_3x_4x_5x_6-
\tfrac{53}{6}\,x_2x_3x_5^3-\tfrac{27}{2}\,x_2x_4^2x_5^2-3/16\,x_2^4x_3x_4x_5+5/9\,x_2^4x_3x_9+\tfrac{53}{96}\,x_2^4x_4x_8+\tfrac{13}{24}\,x_2^4x_5x_7-\tfrac{1001}{4}\,x_2^2x_{16}-196\,x_2x_9^2-286\,x_3^2x_{14}-
\tfrac{8173}{32}\,x_4^2x_{12}-\tfrac{3451}{16}\,x_4x_8^2-\tfrac{2249}{10}\,x_5^2x_{10}-\tfrac{59687}{288}\,x_6^2x_8+\tfrac{3812}{3}\,x_9x_{11}+\tfrac{143}{6}\,x_2^3x_{14}+\tfrac{497}{16}\,x_2^2x_8^2-\tfrac{5}{24}\,x_2^3x_3^2x_4^2-\tfrac{11}{96}\,x_2^2x_3^4x_4-
\tfrac{1}{120}\,x_2x_3^6+\tfrac{11}{60}\,x_3^5x_5+1/10\,x_2^5x_{10}+\tfrac{155}{576}\,x_2^4x_6^2+5/2\,x_2^3x_3x_4x_7+\tfrac{89}{36}\,x_2^3x_3x_5x_6+\tfrac{205}{48}\,x_2^2x_3^2x_4x_6+\tfrac{69}{16}\,x_2^2x_3x_4^2x_5+\tfrac{13}{4}\,x_2x_3^3x_4x_5-
\tfrac{381}{32}\,x_2^2x_4^2x_8-\tfrac{1105}{96}\,x_2^2x_4x_6^2-\tfrac{275}{24}\,x_2^2x_5^2x_6-\tfrac{55}{6}\,x_2x_3^3x_9+\tfrac{35}{96}\,x_2^2x_4^4+\tfrac{79}{48}\,x_2x_3^2x_4^3+\tfrac{89}{192}\,x_3^4x_4^2-\tfrac{3866}{9}\,x_5x_6x_9-\tfrac{1677}{4}\,x_5x_7x_8-
\tfrac{614}{3}\,x_6x_7^2+1768\,x_2x_{18}+1872\,x_3x_{17}+\tfrac{6955}{4}\,x_4x_{16}+\tfrac{23816}{15}\,x_5x_{15}+\tfrac{30719}{21}\,x_6x_{14}+1370\,x_7x_{13}+\tfrac{62737}{48}\,x_8x_{12}-15/2\,x_2^3x_3x_{11}-
\tfrac{29}{4}\,x_2^3x_4x_{10}-\tfrac{125}{18}\,x_2^3x_5x_9-\tfrac{485}{72}\,x_2^3x_6x_8-\tfrac{99}{8}\,x_2^2x_3^2x_{10}+\tfrac{20}{3}\,x_5^4+141\,x_2x_3x_7x_8+\tfrac{293}{2}\,x_2x_4x_5x_9+\tfrac{425}{3}\,x_2x_4x_6x_8+\tfrac{827}{6}\,x_2x_5x_6x_7+
\tfrac{409}{18}\,x_2x_6^3+\tfrac{1315}{8}\,x_3x_4x_5x_8+\tfrac{643}{4}\,x_3x_4x_6x_7+\tfrac{2849}{36}\,x_3x_5x_6^2+\tfrac{23257}{576}\,x_4^2x_6^2+\tfrac{643}{8}\,x_4x_5^2x_6+\tfrac{91}{3}\,x_3^3x_{11}+40\,x_3^2x_7^2+\tfrac{2683}{96}\,x_4^3x_8+
\tfrac{1537}{20}\,x_2x_4^2x_{10}+70\,x_2x_4x_7^2+\tfrac{141}{2}\,x_2x_5^2x_8+\tfrac{3509}{48}\,x_2^2x_4x_{12}+\tfrac{137}{2}\,x_2^2x_5x_{11}+\tfrac{2599}{40}\,x_2^2x_6x_{10}+\tfrac{377}{6}\,x_2^2x_7x_9+\tfrac{1001}{12}\,x_2x_3^2x_{12}-
\tfrac{145}{6}\,x_2^2x_3x_4x_9-\tfrac{187}{8}\,x_2^2x_3x_5x_8-\tfrac{275}{12}\,x_2^2x_3x_6x_7-\tfrac{93}{4}\,x_2^2x_4x_5x_7-\tfrac{217}{8}\,x_2x_3^2x_4x_8-\tfrac{53}{2}\,x_2x_3^2x_5x_7-27\,x_2x_3x_4^2x_7+\tfrac{319}{2}\,x_2x_3x_4x_{11}+
\tfrac{1507}{10}\,x_2x_3x_5x_{10}+\tfrac{2597}{18}\,x_2x_3x_6x_9
$$

$$\mathscr{M}_{6,11,17} = \left\|\begin{matrix}17\\6\end{matrix}\right\|$$

$$
-\tfrac{73}{4}\,x_2x_3x_4x_8-18\,x_2x_3x_5x_7-\tfrac{217}{12}\,x_2x_4x_5x_6+5/2\,x_2^2x_3x_4x_6+11/4\,x_2x_3^2x_4x_5-\tfrac{247}{24}\,x_3x_4^2x_6-\tfrac{41}{4}\,x_3x_4x_5^2-\tfrac{215}{24}\,x_2x_3x_6^2-
\tfrac{73}{8}\,x_2x_4^2x_7-\tfrac{41}{4}\,x_3^2x_4x_7-\tfrac{61}{6}\,x_3^2x_5x_6-\tfrac{33}{4}\,x_2^2x_3x_{10}-\tfrac{49}{6}\,x_2^2x_4x_9-8\,x_2^2x_5x_8-\tfrac{95}{12}\,x_2^2x_6x_7-\tfrac{55}{6}\,x_2x_3^2x_9+1/4\,x_3^4x_5+
1/2\,x_3^3x_4^2+1/6\,x_2^4x_9+\tfrac{241}{4}\,x_4x_5x_8+\tfrac{237}{4}\,x_4x_6x_7+\tfrac{11}{12}\,x_2x_3x_4^3+5/4\,x_2^2x_4^2x_5+\tfrac{11}{12}\,x_2x_3^3x_6+5/4\,x_2^2x_3^2x_7+5/4\,x_2^2x_3x_5^2+
3/4\,x_2^3x_3x_8+3/4\,x_2^3x_4x_7+3/4\,x_2^3x_5x_6+55\,x_2x_5x_{10}+\tfrac{319}{6}\,x_2x_6x_9+\tfrac{209}{4}\,x_2x_7x_8+\tfrac{253}{4}\,x_3x_4x_{10}+61\,x_3x_5x_9+\tfrac{119}{2}\,x_3x_6x_8+
\tfrac{715}{12}\,x_2x_3x_{12}+\tfrac{115}{2}\,x_2x_4x_{11}-3\,x_2x_5^3-\tfrac{41}{12}\,x_3^3x_8-\tfrac{83}{24}\,x_4^3x_5-5/2\,x_2^3x_{11}+\tfrac{55}{2}\,x_2^2x_{13}+\tfrac{65}{2}\,x_3^2x_{11}+\tfrac{59}{2}\,x_3x_7^2+31\,x_4^2x_9+
$$

$\frac{59}{2}\,{x_{{5}}}^{2}x_{{7}}+\frac{117}{4}\,x_{{5}}{x_{{6}}}^{2}-\frac{1001}{5}\,x_{{2}}x_{{15}}-\frac{429}{2}\,x_{{3}}x_{{14}}-\frac{407}{2}\,x_{{4}}x_{{13}}-\frac{572}{3}\,x_{{5}}x_{{12}}-\frac{361}{2}\,x_{{6}}x_{{11}}-\frac{1737}{10}\,x_{{7}}x_{{10}}-\frac{511}{3}\,x_{{8}}x_{{9}}-\frac{1}{120}\,{x_{{2}}}^{5}x_{{7}}-1/24\,{x_{{2}}}^{4}x_{{3}}x_{{6}}-1/24\,{x_{{2}}}^{4}x_{{4}}x_{{5}}-1/12\,{x_{{2}}}^{3}{x_{{3}}}^{2}x_{{5}}-1/12\,{x_{{2}}}^{3}x_{{3}}{x_{{4}}}^{2}-1/12\,{x_{{2}}}^{2}{x_{{3}}}^{3}x_{{4}}-\frac{1}{120}\,x_{{2}}{x_{{3}}}^{5}+728\,x_{{17}}$

$\mathscr{M}_{9,11,18}=\left\|\begin{matrix}18\\9\end{matrix}\right\|$

$-\frac{461}{216}\,{x_{{2}}}^{3}{x_{{6}}}^{2}-\frac{91}{6}\,{x_{{2}}}^{2}x_{{3}}x_{{5}}x_{{6}}-\frac{187}{24}\,{x_{{2}}}^{2}{x_{{4}}}^{2}x_{{6}}-\frac{217}{12}\,x_{{2}}{x_{{3}}}^{2}x_{{4}}x_{{6}}-7/4\,{x_{{3}}}^{4}x_{{6}}-\frac{203}{128}\,x_{{2}}{x_{{4}}}^{4}-\frac{668}{3}\,x_{{5}}x_{{6}}x_{{7}}-270\,x_{{3}}x_{{4}}x_{{11}}-\frac{1254}{5}\,x_{{3}}x_{{5}}x_{{10}}-\frac{710}{3}\,x_{{3}}x_{{6}}x_{{9}}-\frac{459}{2}\,x_{{3}}x_{{7}}x_{{8}}-\frac{724}{3}\,x_{{4}}x_{{5}}x_{{9}}-\frac{692}{3}\,x_{{4}}x_{{6}}x_{{8}}-\frac{459}{4}\,{x_{{5}}}^{2}x_{{8}}-228\,x_{{2}}x_{{5}}x_{{11}}-213\,x_{{2}}x_{{6}}x_{{10}}-204\,x_{{2}}x_{{7}}x_{{9}}-\frac{3217}{32}\,x_{{2}}{x_{{8}}}^{2}-264\,x_{{2}}x_{{3}}x_{{13}}-\frac{495}{2}\,x_{{2}}x_{{4}}x_{{12}}+\frac{327}{8}\,x_{{2}}x_{{4}}{x_{{6}}}^{2}+\frac{122}{3}\,x_{{2}}{x_{{5}}}^{2}x_{{6}}-\frac{1}{216}\,{x_{{2}}}^{6}x_{{6}}+\frac{1}{3360}\,{x_{{2}}}^{7}x_{{4}}+\frac{7}{96}\,{x_{{2}}}^{5}x_{{8}}+\frac{11}{32}\,{x_{{2}}}^{3}{x_{{4}}}^{3}-\frac{21}{20}\,{x_{{2}}}^{4}x_{{10}}+\frac{197}{8}\,{x_{{4}}}^{2}{x_{{5}}}^{2}+16\,x_{{3}}{x_{{5}}}^{3}+\frac{851}{36}\,{x_{{3}}}^{2}{x_{{6}}}^{2}+\frac{33}{2}\,{x_{{4}}}^{3}x_{{6}}+\frac{77}{6}\,{x_{{2}}}^{3}x_{{12}}+\frac{154}{9}\,{x_{{3}}}^{3}x_{{9}}+\frac{399}{10}\,{x_{{2}}}^{2}x_{{4}}x_{{10}}+\frac{112}{3}\,{x_{{2}}}^{2}x_{{5}}x_{{9}}+\frac{427}{12}\,{x_{{2}}}^{2}x_{{6}}x_{{8}}+\frac{231}{5}\,x_{{2}}{x_{{3}}}^{2}x_{{10}}+\frac{1379}{32}\,x_{{2}}{x_{{4}}}^{2}x_{{8}}+\frac{399}{8}\,{x_{{3}}}^{2}x_{{4}}x_{{8}}+42\,{x_{{2}}}^{2}x_{{3}}x_{{11}}-143\,{x_{{3}}}^{2}x_{{12}}-\frac{2571}{20}\,{x_{{4}}}^{2}x_{{10}}-\frac{227}{2}\,x_{{4}}{x_{{7}}}^{2}-1/30\,{x_{{2}}}^{5}x_{{3}}x_{{5}}+\frac{29}{16}\,{x_{{2}}}^{2}{x_{{3}}}^{2}{x_{{4}}}^{2}+\frac{5}{12}\,{x_{{2}}}^{4}x_{{3}}x_{{7}}+\frac{5}{12}\,{x_{{2}}}^{4}x_{{4}}x_{{6}}+\frac{35}{36}\,{x_{{2}}}^{3}{x_{{3}}}^{2}x_{{6}}-\frac{24310}{9}\,x_{{18}}+630\,x_{{7}}x_{{11}}+\frac{1215}{2}\,x_{{8}}x_{{10}}+\frac{2701}{9}\,{x_{{9}}}^{2}-\frac{858}{7}\,{x_{{2}}}^{2}x_{{14}}+\frac{6435}{8}\,x_{{2}}x_{{16}}+858\,x_{{3}}x_{{15}}+\frac{5577}{7}\,x_{{4}}x_{{14}}+726\,x_{{5}}x_{{13}}+\frac{4015}{6}\,x_{{6}}x_{{12}}-\frac{43}{6}\,{x_{{3}}}^{3}x_{{4}}x_{{5}}-\frac{31}{4}\,{x_{{2}}}^{2}x_{{4}}{x_{{5}}}^{2}-9\,x_{{2}}{x_{{3}}}^{2}{x_{{5}}}^{2}-6\,x_{{2}}{x_{{3}}}^{3}x_{{7}}-14/3\,{x_{{2}}}^{3}x_{{3}}x_{{9}}-\frac{217}{48}\,{x_{{2}}}^{3}x_{{4}}x_{{8}}-13/3\,{x_{{2}}}^{3}x_{{5}}x_{{7}}-\frac{63}{8}\,{x_{{2}}}^{2}{x_{{3}}}^{2}x_{{8}}+\frac{5}{24}\,{x_{{2}}}^{4}{x_{{5}}}^{2}+2\,{x_{{2}}}^{3}x_{{3}}x_{{4}}x_{{5}}+7/6\,{x_{{2}}}^{2}{x_{{3}}}^{3}x_{{5}}+\frac{17}{24}\,x_{{2}}{x_{{3}}}^{4}x_{{4}}+1/36\,{x_{{3}}}^{6}-\frac{37}{2}\,x_{{2}}x_{{3}}{x_{{4}}}^{2}x_{{5}}-\frac{31}{2}\,{x_{{2}}}^{2}x_{{3}}x_{{4}}x_{{7}}+\frac{193}{2}\,x_{{3}}x_{{4}}x_{{5}}x_{{6}}+\frac{35}{2}\,{x_{{2}}}^{2}{x_{{7}}}^{2}+\frac{266}{3}\,x_{{2}}x_{{3}}x_{{4}}x_{{9}}+84\,x_{{2}}x_{{3}}x_{{5}}x_{{8}}+\frac{244}{3}\,x_{{2}}x_{{3}}x_{{6}}x_{{7}}+83\,x_{{2}}x_{{4}}x_{{5}}x_{{7}}+48\,{x_{{3}}}^{2}x_{{5}}x_{{7}}+\frac{197}{4}\,x_{{3}}{x_{{4}}}^{2}x_{{7}}-\frac{59}{16}\,{x_{{3}}}^{2}{x_{{4}}}^{3}-\frac{11855}{324}\,{x_{{6}}}^{3}-\frac{1}{362880}\,{x_{{2}}}^{9}-\frac{17}{960}\,{x_{{2}}}^{5}{x_{{4}}}^{2}-\frac{5}{48}\,{x_{{2}}}^{4}{x_{{3}}}^{2}x_{{4}}-1/24\,{x_{{2}}}^{3}{x_{{3}}}^{4}+\frac{1}{720}\,{x_{{2}}}^{6}{x_{{3}}}^{2}$