

# 1 Fésű-szorzat (shuffle-szorzat)

**(1) Multihalmazok:** Multihalmazon olyan objektumot értünk, amelyben egy elem többször is előfordulhat. Egy elem előfordulását az elem *multiplicitásának* nevezzük. Például az  $A = [a, a, b, b, b, b, c, c, c]$  multihalmazban az  $b$  elem multiplicitása 4, a  $c$  elemé pedig 3. Az  $\{a, b, c\}$  hagyományos halmazt az  $A$  multihalmaz *tartójának* nevezzük. A multihalmazok felírására két bevett jelölés terjedt el.

**Multiplikatív felírás:**  $A = a^2 b^4 c^3$ . Általánosan  $A = \{a_1^{m_1} a_2^{m_2} \cdots a_k^{m_k}\}$ , ahol  $A$  az  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  tartójú  $\{m_1, m_2, \dots, m_k\}$  multiplicitású multihalmaz

**Additív felírás:**  $A = 2 * a + 4 * b + 3 * c$ . Általánosan  $A = m_1 * a_1 + m_2 * a_2 + \cdots + m_k * a_k$ , ahol  $A$  az  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  tartójú  $\{m_1, m_2, \dots, m_k\}$  multiplicitású multihalmaz

Mi a továbbiakban az additív felírást követjük, mert ez jobban megfelel a céljainknak.

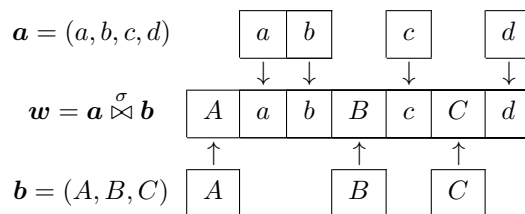
**(2) Összefésülés (shuffle-keverés):** Két tetszőleges  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektor *egy konkrét összefésülésén (shuffle-keverésén)* a két vektor olyan összekeverését értjük, amelyben mind a két vektor megtartja az eredeti sorrendet, pontosan úgy, ahogyan az alábbi ábrán egymásba „pörgetünk” két pakli kártyát (riffle-shuffle). Az egyik pakli az  $\mathbf{a}$  vektornak felel meg, míg a másik pakli a  $\mathbf{b}$  vektornak. Egy  $n$  hosszú  $\mathbf{a}$  vektornak és egy  $m$  hosszú  $\mathbf{b}$  vektornak (multiplicitással számolva) pontosan  $\binom{n+m}{n}$  összefésülése van, hiszen az  $n + m$  együttes hosszúságú vektorból elegendő kiválasztani azt az  $n$  darab helyet, ahová az  $n$  hosszú  $\mathbf{a}$  vektort beírjuk. Ekkor a maradék  $m$  helyre az  $m$  hosszú  $\mathbf{b}$  vektort –az eredeti sorrendet megtartva– már csak egyféleképpen írható be. Ebből az is kiderült, hogy az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok minen egyes konkrét összefésülésének megadása teljesen egyenértékű egy az  $\{1, 2, 3, \dots, |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|\}$  halmazból történő  $|\mathbf{a}|$  elemszámú  $\sigma$  részhalmaz kiválasztásával. Ezért az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok egy konkrét összefésülését  $\mathbf{a} \overset{\sigma}{\bowtie} \mathbf{b}$  fogja jelölni, ahol  $\sigma \subseteq \{1, 2, 3, \dots, |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|\}$ ,  $|\sigma| = |\mathbf{a}|$ . (Az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok összefésülései a  $\sigma \subseteq \{1, 2, 3, \dots, |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|\}$ ,  $|\sigma| = |\mathbf{a}|$  részhalmazokkal paraméterezhetők.)

Riffle-shuffle



$$\mathbf{w} = (a, b, c, d) \overset{\sigma}{\bowtie} (A, B, C)$$

$$\sigma = \{2, 3, 5, 7\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$



Példa: az  $\mathbf{a} = (x, y)$  és  $\mathbf{b} = (A, B, C)$  vektoroknak pontosan  $\binom{5}{2} = 10$  összefésülése van. Ezek az alábbiak:

$$\begin{array}{ccccc} \sigma_1 = \{1, 2, 3\} & \sigma_2 = \{1, 2, 4\} & \sigma_3 = \{1, 3, 5\} & \sigma_4 = \{1, 3, 4\} & \sigma_5 = \{1, 3, 5\} \\ (A, B, C, x, y) & (A, B, x, C, y) & (A, B, x, y, C) & (A, x, B, C, y) & (A, x, B, y, C) \\ \\ \sigma_6 = \{1, 4, 5\} & \sigma_7 = \{2, 3, 4\} & \sigma_8 = \{2, 3, 5\} & \sigma_9 = \{2, 4, 5\} & \sigma_{10} = \{3, 4, 5\} \\ (A, x, y, B, C) & (x, A, B, C, y) & (x, A, B, y, C) & (x, A, y, B, C) & (x, y, A, B, C) \end{array}$$

A kapott tíz összefésülés mind különböző, ezért egy halmazt alkotnak. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  halmaz tetszőleges különböző kételemű  $\sigma_1$  és  $\sigma_2$  részhalmazához az  $\mathbf{a} \overset{\sigma_1}{\bowtie} \mathbf{b}$  és  $\mathbf{a} \overset{\sigma_2}{\bowtie} \mathbf{b}$  összefésülések is különbözőek lesznek. Ha viszont az  $\mathbf{a}$ , illetve  $\mathbf{b}$  vektorok valamelyike egy elemet többször is tartalmaz, vagy a két vektornak van közös eleme, akkor az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok összes összefésülése általában már egy multihalmazt alkot. Példaként kiszámítjuk az  $\mathbf{a} = (c, b)$  és  $\mathbf{b} = (b, c, c)$  vektorok összes lehetséges összefésülését. Azért, hogy a két vektor között könnyebben különbséget tudjunk tenni, az  $\mathbf{a}$  vektor elemeit pirossal szedjük. Minden keverést két lépésre bontva érdemes kiszámítani.

(1) Az öt hosszú vektorból választunk az  $\mathbf{a} = (c, b)$  vektornak két helyet (választunk egy  $\sigma \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$  részhalmazt):

$$(\bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet) \rightarrow (\bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet)$$

(2) Az  $\mathbf{a} = (c, b)$  és  $\mathbf{b} = (b, c, c)$  vektorokat beírjuk a megfelelő helyekre az eredeti sorrendben:

$$\begin{array}{ccc} (b, c, c) & & (c, b) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (b, \bullet, c, \bullet, c) & \rightarrow & (b, c, c, \bullet, c) \end{array}$$

A tíz összefésülés pedig az alábbi lesz:

$$\begin{array}{ccccc}
\sigma_1 = \{1, 2\} & \sigma_2 = \{1, 3\} & \sigma_3 = \{1, 4\} & \sigma_4 = \{1, 5\} & \sigma_5 = \{2, 3\} \\
(\textcolor{red}{c}, \textcolor{red}{b}, b, c, c) & (c, b, \textcolor{red}{b}, c, c) & (c, b, c, \textcolor{red}{b}, c) & (c, b, c, c, \textcolor{red}{b}) & (b, c, \textcolor{red}{b}, c, c) \\
\\
\sigma_6 = \{2, 4\} & \sigma_7 = \{2, 5\} & \sigma_8 = \{3, 4\} & \sigma_9 = \{3, 5\} & \sigma_{10} = \{4, 5\} \\
(b, c, c, \textcolor{red}{b}, c) & (b, \textcolor{red}{c}, c, c, \textcolor{red}{b}) & (b, c, \textcolor{red}{c}, b, c) & (b, c, \textcolor{red}{c}, c, \textcolor{red}{b}) & (b, c, c, c, \textcolor{red}{b})
\end{array}$$

Ebben a felsorolásban már bizonyos vektorok többször is előfordulnak. Más megfogalmazásban, az  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  halmaz két különböző kételemű  $\sigma_i$  és  $\sigma_j$  részhalmazai által meghatározott  $\mathbf{a} \overset{\sigma_i}{\bowtie} \mathbf{b}$  és  $\mathbf{a} \overset{\sigma_j}{\bowtie} \mathbf{b}$  összefésülések nem feltétlenül különbözöek. Például  $\mathbf{a} \overset{\sigma_1}{\bowtie} \mathbf{b} = \mathbf{a} \overset{\sigma_2}{\bowtie} \mathbf{b} = (c, b, b, c, c)$ , sőt  $\mathbf{a} \overset{\sigma_7}{\bowtie} \mathbf{b} = \mathbf{a} \overset{\sigma_9}{\bowtie} \mathbf{b} = \mathbf{a} \overset{\sigma_{10}}{\bowtie} \mathbf{b} = (b, c, c, c, b)$ . A multiplicitás megállapításához az egyformákat egymás alá gyűjtjük:

$$\begin{array}{cccccc}
(\textcolor{red}{c}, \textcolor{red}{b}, b, c, c) & (c, b, c, \textcolor{red}{b}, c) & (c, b, c, c, \textcolor{red}{b}) & (b, \textcolor{red}{c}, b, c, c) & (b, c, c, \textcolor{red}{b}, c) & (b, \textcolor{red}{c}, c, c, \textcolor{red}{b}) \\
(\textcolor{red}{c}, b, \textcolor{red}{b}, c, c) & & & & (b, c, \textcolor{red}{c}, b, c) & (b, c, \textcolor{red}{c}, c, \textcolor{red}{b}) \\
& & & & & (b, c, c, c, \textcolor{red}{b})
\end{array}$$

Ezt a táblázatot már csak egy multihalmazzal írhatjuk le. Ezt a multihalmazt nevezzük az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok *összefésülésének*, amit  $\mathbf{a} \bowtie \mathbf{b}$ -vel jelölünk. Vagyis, az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok  $\mathbf{a} \bowtie \mathbf{b}$  összefésülésén az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok összes lehetséges összefésülését tartalmazó multihalmazt értjük.

$$\mathbf{a} \bowtie \mathbf{b} = \left\{ \mathbf{a} \overset{\sigma}{\bowtie} \mathbf{b} : \sigma \subset \{1, 2, 3, \dots, |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|\}, |\sigma| = |\mathbf{a}| \right\} = \sum_{\sigma \subset \{1, 2, 3, \dots, |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|\}, |\sigma| = |\mathbf{a}|} \mathbf{a} \overset{\sigma}{\bowtie} \mathbf{b}$$

Ezzel a jelöléssel a fenti számítások eredménye tömören így írható:

$$(c, b) \bowtie (b, c, c) = 2 * (c, b, b, c, c) + (c, b, c, b, c) + (c, b, c, c, b) + (b, c, b, c, c) + 2 * (b, c, c, b, c) + 3 * (b, c, c, c, b)$$

Könnyen átgondolható, hogy a vektorok összefésülése kommutatív, azaz

$$\mathbf{a} \bowtie \mathbf{b} = \mathbf{b} \bowtie \mathbf{a}$$

Az asszociativitásról már nem beszélhetünk, mert a bevezetett  $\mathbf{a} \bowtie \mathbf{b}$  összefésülés *nem is művelet*, hiszen egy  $H$  halmazon értelmezett kétváltozós  $\circ$  műveleten a  $H \times H$  halmaz önmagába való leképezését értjük:

$$\begin{aligned}
\circ : H \times H &\rightarrow H \\
(h_1, h_2) &\rightarrow h_1 \circ h_2
\end{aligned}$$

A fentebb értelmezett összefésülés pedig két vektorhoz egy multihalmazt, és nem egy vektort rendel. Viszont egy  $\mathbf{a}$  vektor és az  $\mathbf{a}$  vektort tartalmazó egyelemű  $1 * \mathbf{a}$  multihalmaz kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak. (A vektorok *beágyazhatók* a vektorokat tartalmazó multihalmazok halmazába.) Ha a vektorokat tartalmazó multihalmazok halmazát  $\mathcal{H}$ -val jelöljük, akkor az összefésülés  $\mathcal{H}$ -ra történő *lineáris kiterjesztése* már művelet lesz  $\mathcal{H}$ -n.

$$\bowtie : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}; \quad \left( \sum_{i=1}^r \alpha_i * \mathbf{a}_i \right) \bowtie \left( \sum_{j=1}^s \beta_j * \mathbf{b}_j \right) := \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \alpha_i \cdot \beta_j * (\mathbf{b}_j \bowtie \mathbf{a}_i)$$

Ez valóban kiterjesztése a korábban definált összefésülésnek, hiszen a fent említett  $\mathbf{a} \leftrightarrow 1 * \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b} \leftrightarrow 1 * \mathbf{b}$  beágyazással

$$\mathbf{a} \bowtie \mathbf{b} \leftrightarrow 1 * \mathbf{a} \bowtie 1 * \mathbf{b} := (1 \cdot 1) * \mathbf{a} \bowtie \mathbf{b} = 1 * \mathbf{a} \bowtie \mathbf{b} = \mathbf{a} \bowtie \mathbf{b}$$

Ha csak két vektor összefésülését vesszük, akkor –az egyértelmű megfeleltetést kihasználva– továbbra is használni fogjuk a rövidebb  $\mathbf{a} \bowtie \mathbf{b}$  jelölést az  $1 * \mathbf{a} \bowtie 1 * \mathbf{b}$  felírás helyett.

Könnyen átgondolható, hogy az így kiterjesztett összefésülés kommutatív, asszociatív és létezik egységeleme, ami az egyetlen *üresvektort* tartalmazó  $\iota = \{(\ )\} = 1 * (\ )$  multihalmaz.

$$\left( \sum_{i=1}^r \alpha_i * \mathbf{a}_i \right) \bowtie \left( \sum_{j=1}^s \beta_j * \mathbf{b}_j \right) = \left( \sum_{j=1}^s \beta_j * \mathbf{b}_j \right) \bowtie \left( \sum_{i=1}^r \alpha_i * \mathbf{a}_i \right)$$

$$\left(\sum_{i=1}^r \alpha_i * \mathbf{a}_i\right) \bowtie \left[\left(\sum_{j=1}^s \beta_j * \mathbf{b}_j\right) \bowtie \left(\sum_{k=1}^t \gamma_k * \mathbf{b}_k\right)\right] = \left[\left(\sum_{i=1}^r \alpha_i * \mathbf{a}_i\right) \bowtie \left(\sum_{j=1}^s \beta_j * \mathbf{b}_j\right)\right] \bowtie \left(\sum_{k=1}^t \gamma_k * \mathbf{b}_k\right)$$

$$\iota \bowtie \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i * \mathbf{a}_i\right) = \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i * \mathbf{a}_i\right)$$

**(3) Vektorok bináris kódolása:** Tekintsük az  $\mathbf{a} = (2, 3, 4, 1, 0, 2)$  vektort. Ha ezt a vektort binárisan szeretnénk kódolni, akkor egy kézenfekvő megoldás az lehetne, hogy a vektor komponenseinek megfelelő számú nullákat választunk el egyesekkel (mint határoló jelekkel).

$$\mathbf{a} = (2, 3, 4, 1, 0, 2) \leftrightarrow 0, 0, \mathbf{1}, 0, 0, 0, \mathbf{1}, 0, 0, 0, 0, \mathbf{1}, 0, \mathbf{1}, \mathbf{1}, 0, 0, \mathbf{1}$$

Ezt az ötletet fogalmazza meg matematikai precizitással a következő állítás. A nemnegatív  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  vektorok és az 1-re végződő, pontosan  $n$  darab 1-et tartalmazó bináris vektor között kölcsönösen egyértelmű kapcsolatot létesít az

$$\omega(\mathbf{a}) := (\underbrace{0, 0, \dots, 0, \mathbf{1}}_{a_1}, \underbrace{0, 0, \dots, 0, \mathbf{1}}_{a_2}, \dots, \underbrace{0, 0, \dots, 0, \mathbf{1}}_{a_n})$$

megfeleltetés. (Az  $i$ -edik 1-es elé  $a_i$  darab 0-át írunk.)

Példák:

$$\begin{aligned}\omega((2, 3, 1, 2)) &= (0, 0, \mathbf{1}, 0, 0, 0, \mathbf{1}, 0, \mathbf{1}, 0, 0, \mathbf{1}) \\ \omega((3, 0, 0, 1, 0)) &= (0, 0, 0, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, 0, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \\ \omega^{-1}((\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0, 0, 0, \mathbf{1}, 0, \mathbf{1}, 0, 0, \mathbf{1})) &= (0, 0, 3, 1, 2) \\ \omega^{-1}((\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})) &= (0, 0, 0, 0)\end{aligned}$$

Érdemes megjegyezni, hogy tetszőleges nemnegatív  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  vektorra

$$\begin{aligned}|\omega(\mathbf{a})| &= \sum \mathbf{a} + |\mathbf{a}| = a_1 + a_2 + \dots + a_n + n \\ \sum \omega(\mathbf{a}) &= |\mathbf{a}| = n\end{aligned}$$

**(4) Fésű-szorzat (shuffle-szorzat):** A fent bevezetett összefésülés, multihalmazok additív felírása, illetve  $\omega(\mathbf{a})$  bináris oda-vissza kódolás fogalmak segítségével már könnyen értelmezhető egy nemnegatív  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  és  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  vektor  $\mathbf{a} \sqcup \mathbf{b}$  fésű-szorzata (shuffle-szorzata) is. Vegyük az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektor  $\omega(\mathbf{a})$ , illetve  $\omega(\mathbf{b})$  bináris képeinek az összefésülését, ami általában egy multihalmaz, és ebben minden vektort kódoljunk vissza. Az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok  $\mathbf{a} \sqcup \mathbf{b}$  fésű-szorzatán ezt a visszakódolt multihalmazt értjük.

$$\mathbf{a} \sqcup \mathbf{b} := \omega^{-1}(\omega(\mathbf{a}) \bowtie \omega(\mathbf{b}))$$

Nézzünk egy konkrét példát. Legyen  $\mathbf{a} = (2, 1)$  és  $\mathbf{b} = (1)$ . Ekkor  $\omega(\mathbf{a}) = (0, 0, 1, 0, 1)$  és  $\omega(\mathbf{b}) = (0, 1)$ . Ezen két bináris vektornak pontosan  $\binom{7}{2} = 21$  összefésülése van. Azért, hogy a két vektor között különbséget tudjunk tenni az  $\omega(\mathbf{b})$  vektor elemeit pirossal szedjük.

Ahogy azt korábban már javasoltuk, most is minden ilyen keverést két lépésre bontva érdemes kiszámítani. (1) A hét hosszú vektorból választunk az  $\omega(\mathbf{b}) = (0, \mathbf{1})$  vektornak két helyet:

$$(\bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet) \rightarrow (\bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet)$$

(2) Az  $\omega(\mathbf{a}) = (0, 0, 1, 0, 1)$  és  $\omega(\mathbf{b}) = (0, \mathbf{1})$  vektorokat beírjuk a megfelelő helyekre az eredeti sorrendben:

$$\begin{array}{ccc}(0, 0, 1, 0, 1) & & (0, \mathbf{1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (0, 0, \bullet, 1, 0, \bullet, 1) & \rightarrow & (0, 0, 0, \mathbf{1}, 0, \mathbf{1}, 1)\end{array}$$

A 21 összefésülés pedig az alábbi:

(0, 0, 1, 0, 1, **0, 1**); (0, 0, 1, 0, **0, 1**, 1); (0, 0, 1, **0, 0, 1, 1**); (0, 0, **0, 1, 0, 1, 1**); (0, **0, 0, 1, 0, 1, 1**); (0, 0, 0, 1, 0, 1, **1**); (0, 0, 1, 0, **0, 1, 1**);  
 (0, 0, 1, **0, 0, 1, 1**); (0, 0, **0, 1, 0, 1, 1**); (0, **0, 0, 1, 0, 1, 1**); (**0, 0, 0, 1, 0, 1, 1**); (0, 0, 1, **0, 1, 0, 1**); (0, 0, **0, 1, 1, 0, 1**); (0, **0, 0, 1, 1, 0, 1**); (0, 0, 0, 1, **1, 0, 1**);  
 (**0, 0, 0, 1, 1, 0, 1**); (0, 0, **0, 1, 1, 0, 1**); (0, **0, 0, 1, 1, 0, 1**); (**0, 0, 0, 1, 1, 0, 1**); (0, 0, **1, 0, 1, 0, 1**); (0, **0, 1, 0, 1, 0, 1**); (**0, 1, 0, 0, 1, 0, 1**)

A 21 vektor között vannak egyformák. Egy táblázatban összegyűjtjük az egyes vektorok előfordulását (multiplicitását).

(0, 1, 0, 0, 1, 0, 1)	(0, 0, 1, 0, 1, 0, 1)	(0, 0, 1, 0, 0, 1, 1)	(0, 0, 0, 1, 1, 0, 1)	(0, 0, 0, 1, 0, 1, 1)	$\sum$
1	4	4	6	6	21

Most minden vektort visszafordítunk, azaz vesszük az  $\omega^{-1}$  melletti képét.

(1, 2, 1)	(2, 1, 1)	(2, 2, 0)	(3, 0, 1)	(3, 1, 0)	$\sum$
1	4	4	6	6	21

Végül az eredményt additív multihalmazos jelöléssel felírva megkapjuk a két vektor  $\mathbf{a} \sqcup \mathbf{b}$  shuffle-szorzatát:

$$\mathbf{a} \sqcup \mathbf{b} = (1, 2, 1) + 4 * (2, 1, 1) + 4 * (2, 2, 0) + 6 * (3, 0, 1) + 6 * (3, 1, 0)$$

Mivel az összefésülés nem változtatja meg a tényezők komponenseit, ezért a nemnegatív  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok  $\mathbf{a} \sqcup \mathbf{b}$  fésű-szorzatában a  $\sum \mathbf{a} + \sum \mathbf{b}$  pozitív szám  $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$  hosszú nemnegatív kompozíciói szerepelnek, de általában nem az összes. Mint ismeretes, az  $\sum \mathbf{a} + \sum \mathbf{b}$  pozitív szám összes  $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$  hosszú nemnegatív kompozícióinak száma  $\left(\sum_{|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|-1} \mathbf{a} + \sum \mathbf{b} + |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| - 1\right)$ , ami általában nagyobb, mint az  $\mathbf{a} \sqcup \mathbf{b}$  fésű-szorzat tartóhalmazának elemszáma.

**Implementáció:** A program jelenleg csak két vektor összefésülését tudja kiszámítani, multihalmazokét még nem. Viszont az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok  $\mathbf{a} \bowtie \mathbf{b}$  összefésülésének additív felírásán kívül a fent említett kombinatorikus számokról is informál. Például az  $\mathbf{a} = (2, 3)$ ,  $\mathbf{b} = (1, 2)$  vektorok beírásakor a kimenet első sorában vastagon szedve látható a  $\left(\sum_{|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|-1} \mathbf{a} + \sum \mathbf{b} + |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| - 1\right) = \binom{5+3+2+2-1}{2+2-1} = \binom{11}{3} = 165$ , ami a 8 szám összes nemnegatív 4 hosszú kompozíciója, illetve a  $\mathbf{a} \bowtie \mathbf{b}$  összefésülés tartójának elemszáma, ami most **42**. (Ez azt jelenti, hogy az összeg 42 tagú.)

A számítás mérete: 990 (gyorsítás:  $\times 1.32$ ) futás. 8-nak(nek) összesen **165** darab 4 hosszú nemnegatív kompozíciója van. Az összegben ezekből **42** szerepel. Vagyis, nagyjából minden 3.929-dik.

$$(2,3) \sqcup (1,2) = 2*(1,2,2,3) + 4*(1,2,3,2) + 10*(1,2,4,1) + 20*(1,2,5,0) + 6*(1,3,1,3) + 6*(1,3,2,2) + 12*(1,3,3,1) + 24*(1,3,4,0) + 12*(1,4,0,3) + 6*(1,4,1,2) + 6*(1,4,2,1) + 12*(1,4,3,0) + 3*(2,1,2,3) + 12*(2,1,3,2) + 30*(2,1,4,1) + 60*(2,1,5,0) + 6*(2,2,1,3) + 12*(2,2,2,2) + 28*(2,2,3,1) + 56*(2,2,4,0) + 12*(2,3,0,3) + 10*(2,3,1,2) + 15*(2,3,2,1) + 30*(2,3,3,0) + 8*(2,4,0,2) + 4*(2,4,1,1) + 8*(2,4,2,0) + 6*(3,0,2,3) + 24*(3,0,3,2) + 60*(3,0,4,1) + 120*(3,0,5,0) + 3*(3,1,1,3) + 12*(3,1,2,2) + 30*(3,1,3,1) + 60*(3,1,4,0) + 6*(3,2,0,3) + 6*(3,2,1,2) + 12*(3,2,2,1) + 24*(3,2,3,0) + 6*(3,3,0,2) + 3*(3,3,1,1) + 6*(3,3,2,0)$$

A számítás mérete pedig  $\left(\sum_{|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|-1} \mathbf{a} + \sum \mathbf{b} + |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| - 1\right) \cdot \binom{|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|} = \binom{11}{3} \cdot \binom{4}{2} = 165 \cdot 6 = 990$ . Később ismertetni fogunk egy igen szép formulát, amely tetszőleges  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  pozitív vektorpáros esetén megmondja, hogy a  $\sum \mathbf{a} + \sum \mathbf{b}$  pozitív szám  $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$  hosszú nemnegatív  $\mathbf{c}$  kompozíciója benne van-e az  $\mathbf{a} \sqcup \mathbf{b}$  fésű-szorzatban, és ha igen, akkor megadja annak multiplicitását is. Ez sokban hasonlít a Zhonghua Li , Chen Qin: Shuffle product formulas of multiple zeta values cikkében felírt képletre, de a jól eltalált fogalmaknak köszönhetően sokkal tömörebb. Az implementációban használt algoritmusnak is ez a formula az elméleti alapja.

#### (4) Altalánosított polilogaritmusok és a fésű-szorzat:

Tetszőleges  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  vektor komponensenkénti 1-gyel növelését (csökkentését) jelölje

$$\mathbf{a}^\vee := (a_1 - 1, a_2 - 1, \dots, a_n - 1) = \mathbf{a} - (1, 1, \dots, 1)$$

$$\mathbf{a}^\wedge := (a_1 + 1, a_2 + 1, \dots, a_n + 1) = \mathbf{a} + (1, 1, \dots, 1)$$

A fogalom természetes módon terjeszthető ki multihalmazokra is:

$$(\alpha_1 * \mathbf{a}_1 + \alpha_2 * \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_k * \mathbf{a}_k)^\vee := \alpha_1 * \mathbf{a}_1^\vee + \alpha_2 * \mathbf{a}_2^\vee + \dots + \alpha_k * \mathbf{a}_k^\vee$$

$$(\alpha_1 * \mathbf{a}_1 + \alpha_2 * \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_k * \mathbf{a}_k)^\wedge := \alpha_1 * \mathbf{a}_1^\wedge + \alpha_2 * \mathbf{a}_2^\wedge + \dots + \alpha_k * \mathbf{a}_k^\wedge$$

Az általánosított polilogaritmus függvényeket is kiterjeszthetők multihalmaz indexekre az alábbi definíció szerint

$$\text{Li}_{\alpha_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_k \cdot \mathbf{a}_k}(x) := \alpha_1 \cdot \text{Li}_{\mathbf{a}_1}(x) + \alpha_2 \cdot \text{Li}_{\mathbf{a}_2}(x) + \dots + \alpha_k \cdot \text{Li}_{\mathbf{a}_k}(x)$$

A fenti fogalmak és jelölések segítségével az általánosított polilogaritmus függvényekre az alábbi tételt fogalmazhatjuk meg.

**Tétel:** Tetszőleges  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  és  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$  pozitív vektorokra

$$\text{Li}_{\mathbf{a}}(x) \cdot \text{Li}_{\mathbf{b}}(x) = \text{Li}_{(\mathbf{a} \sqcup \mathbf{b})^\vee}(x)$$

Példa:  $\mathbf{a} = (2, 3)$ , és  $\mathbf{b} = (1, 2)$  vektorokkal  $\mathbf{a}^\vee = (1, 2)$  és  $\mathbf{b}^\vee = (0, 1)$ . Az implementációban végzett számítás szerint,  
 $(1, 2) \sqcup (0, 1) = 2 * (0, 1, 1, 2) + 3 * (0, 1, 2, 1) + 6 * (0, 1, 3, 0) + 4 * (0, 2, 0, 2) + 2 * (0, 2, 1, 1) + 4 * (0, 2, 2, 0) + 2 * (1, 0, 1, 2) +$   
 $+ 6 * (1, 0, 2, 1) + 12 * (1, 0, 3, 0) + 2 * (1, 1, 0, 2) + 3 * (1, 1, 1, 1) + 6 * (1, 1, 2, 0) + 2 * (1, 2, 0, 1) + 2 * (1, 2, 1, 0).$

Ebben az eredményben minden vektort komponensenként eggyel megnövelve:

$$\begin{aligned} ((1, 2) \sqcup (0, 1))^\vee &= 2 * (0, 1, 1, 2)^\vee + 3 * (0, 1, 2, 1)^\vee + 6 * (0, 1, 3, 0)^\vee + 4 * (0, 2, 0, 2)^\vee + 2 * (0, 2, 1, 1)^\vee + 4 * (0, 2, 2, 0)^\vee + 2 * (1, 0, 1, 2)^\vee + \\ &+ 6 * (1, 0, 2, 1)^\vee + 12 * (1, 0, 3, 0)^\vee + 2 * (1, 1, 0, 2)^\vee + 3 * (1, 1, 1, 1)^\vee + 6 * (1, 1, 2, 0)^\vee + 2 * (1, 2, 0, 1)^\vee + 2 * (1, 2, 1, 0)^\vee = \\ &= 2 * (1, 2, 2, 3) + 3 * (1, 2, 3, 2) + 6 * (1, 2, 4, 1) + 4 * (1, 3, 1, 3) + 2 * (1, 3, 2, 2) + 4 * (1, 3, 3, 1) + 2 * (2, 1, 2, 3) + 6 * (2, 1, 3, 2) + \\ &+ 12 * (2, 1, 4, 1) + 2 * (2, 2, 1, 3) + 3 * (2, 2, 2, 2) + 6 * (2, 2, 3, 1) + 2 * (2, 3, 1, 2) + 2 * (2, 3, 2, 1). \end{aligned}$$

A tétel szerint a két általánosított polilogaritmus függvény szorzata az alábbi lineáris kombinációra bomlik fel:

$$\begin{aligned} \text{Li}_{(2,3)}(x) \cdot \text{Li}_{(1,2)}(x) &= 2 \cdot \text{Li}_{(1,2,2,3)}(x) + 3 \cdot \text{Li}_{(1,2,3,2)}(x) + 6 \cdot \text{Li}_{(1,2,4,1)}(x) + 4 \cdot \text{Li}_{(1,3,1,3)}(x) + 2 \cdot \text{Li}_{(1,3,2,2)}(x) + 4 \cdot \text{Li}_{(1,3,3,1)}(x) + \\ &+ 2 \cdot \text{Li}_{(2,1,2,3)}(x) + 6 \cdot \text{Li}_{(2,1,3,2)}(x) + 12 \cdot \text{Li}_{(2,1,4,1)}(x) + 2 \cdot \text{Li}_{(2,2,1,3)}(x) + 3 \cdot \text{Li}_{(2,2,2,2)}(x) + 6 \cdot \text{Li}_{(2,2,3,1)}(x) + 2 \cdot \text{Li}_{(2,3,1,2)}(x) + 2 \cdot \text{Li}_{(2,3,2,1)}(x). \end{aligned}$$

**(5) Az  $A \subseteq \{1, 2, 3, \dots, n\}$  halmazok deriváltja:  $\partial A$**

$$i \in \partial A \Leftrightarrow \begin{cases} i = 1 \\ i \in A \text{ és } i - 1 \in A \\ i \notin A \text{ és } i - 1 \notin A \end{cases}$$

Szavakban, az  $A \subseteq \{1, 2, 3, \dots, n\}$  halmaz  $\partial A$  deriváltjában az 1 mindig benne van. Tetszőleges  $1 \leq i \leq n$  elem pontosan akkor eleme  $\partial A$ -nak, ha  $i$  is és  $i - 1$  is, vagy ha  $i$  sem és  $i - 1$  sem eleme  $A$ -nak. Mégegyszerűbben leírhatjuk a  $\partial A$  halmazt, ha annak digitális megfelelőjét vesszük. Tekintsük az  $A = \{2, 3, 4, 7, 8, 9\} \subseteq \{1, 2, 3, \dots, 11\}$  halmaznak megfelelő digitális vektort:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
$A =$	(0,	1,	1,	0,	0,	0,	1,	1,	1,	0,	0)
$\partial A =$	(1,	0,	1,	0,	1,	1,	0,	1,	1,	0,	1)

Az első helyen mindig 1 áll. A többi  $i$ -edik helyen pontosan akkor áll 1-es a  $\partial A$  vektorban, ha  $A$  vektorban az  $i$ -edik és az  $i - 1$ -edik bit megegyezik.

Nagyon fontos lesz a későbbiekben az alábbi tétel

$$\partial(A \triangle B) = \overline{\partial A} \triangle \partial B$$

## 2 Fésű-szorzat (shuffle-szorzat) kiszámítása

Legyen  $\mathbf{a} = (2, 3)$  és  $\mathbf{b} = (2, 1)$ . Az  gombra kattintva megkapjuk az  $\mathbf{a} \sqcup \mathbf{b}$  fésű-szorzatot.

A számítás mérete: 990 (gyorsítás:  $\times 1.32$ ) futás. 8-nak(nek) összesen **165** darab 4 hosszú nemnegatív kompozíciója van. Az összegben ezekből **37** szerepel. Vagyis, nagyjából minden 4.459-dik.

$$(2,3) \sqcup (2,1) = (2,1,2,3) + 4*(2,2,1,3) + 4*(2,2,2,2) + 8*(2,2,3,1) + 16*(2,2,4,0) + 6*(2,3,0,3) + 6*(2,3,1,2) + 13*(2,3,2,1) + 24*(2,3,3,0) + 16*(2,4,1,1) + 24*(2,4,2,0) + 20*(2,5,0,1) + 20*(2,5,1,0) + 9*(3,1,1,3) + 12*(3,1,2,2) + 24*(3,1,3,1) + 48*(3,1,4,0) + 12*(3,2,0,3) + 12*(3,2,1,2) + 24*(3,2,2,1) + 48*(3,2,3,0) + 21*(3,3,1,1) + 36*(3,3,2,0) + 24*(3,4,0,1) + 24*(3,4,1,0) + 12*(4,0,1,3) + 24*(4,0,2,2) + 48*(4,0,3,1) + 96*(4,0,4,0) + 12*(4,1,0,3) + 12*(4,1,1,2) + 24*(4,1,2,1) + 48*(4,1,3,0) + 12*(4,2,1,1) + 24*(4,2,2,0) + 12*(4,3,0,1) + 12*(4,3,1,0)$$

$\sum \mathbf{a} = 2 + 3 = 5$ ;  $\sum \mathbf{b} = 2 + 1 = 3$ ;  $|\mathbf{a}| = 2$ ;  $|\mathbf{b}| = 2$  ( $\sum \mathbf{a} + \sum \mathbf{b} + |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| - 1$ ) =  $\binom{5+3+2+2-1}{2+2-1} = \binom{11}{3} = 165$ . Az összegben 37 kompozíció szerepel.

$\mathbf{a} \sqcup \mathbf{b} = (2,3) \sqcup (2,1)$ -ben az  $\sum \mathbf{a} + \sum \mathbf{b} = 8$ -nak  $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| = 4$  hosszú nemnegatív felbontásai (kompozíciói) szerepelnek, de láthatóan nem mind a 165 darab, hanem csak 37 darab. *Hogyan mondható meg, hogy mely nemnegatív felbontások fordulnak elő, és hogyan adható meg az előfordulók együtthatója?* A válasz meglepően egyszerű, de a tömör megfogalmazás érdekében még két egyszerű fogalmat vezetünk be.

**Multi-index jelölés** (Bővebben itt, angolul) A továbbiakban csak az alábbi multi-index jelölésre lesz szükségünk. Legyen  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  és  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  két n-dimenziós vektor, ekkor

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

**Egy vektor (függvény) A halmazon vett differenciája.** Legyen  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  egy n-dimenziós vektor és  $A$  az  $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$  halmaz tetszőleges részhalmaza. Az  $\mathbf{a}$  vektor  $A$  halmazon vett differenciáján a

$$\mathbf{v} = \begin{cases} \Delta v_i = v_i - v_{i-1} & i \in A \\ v_i & i \notin A \end{cases}$$

vektort értjük, és  $\Delta_A \mathbf{a}$ -val jelöljük.

Példa:

$$\Delta_{\{3,5,6,9\}}(2, 3, \underline{4}, 2, \underline{6}, \underline{8}, 1, 2, \underline{7}, 0, 3) = (2, 3, \underline{1}, 2, \underline{4}, \underline{8}, 1, 2, \underline{5}, 0, 3)$$

Az  $\mathbf{a} \overset{\sigma}{\bowtie} \mathbf{b}$  összefésülés fogalmát használva az alábbi nyilvánvaló egyenlőség írható:

$$\Delta_A \mathbf{a} = (\Delta \mathbf{a}) \overset{A}{\bowtie} \mathbf{a}$$

(Ahol  $\Delta$  a teljes  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$  indexhalmazon vett szokásos differencia-operátort jelenti,  $\Delta_{[n]} \mathbf{a} = \Delta \mathbf{a}$ .) Az is könnyen átgondolható, hogy egy rögzített  $A \subseteq [n]$  halmazon a  $\Delta_A$  operátor lineáris. Vagyis,

$$\Delta_A(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \Delta_A \mathbf{a} + \Delta_A \mathbf{b} \text{ és } \Delta_A(\alpha \cdot \mathbf{a}) = \alpha \cdot \Delta_A \mathbf{a}.$$

A most bevezetett fogalmak segítségével:

A  $\sum \mathbf{b} + \sum \mathbf{b} = a_1 + \dots + a_{|\mathbf{a}|} + b_1 + \dots + b_{|\mathbf{b}|}$  szám egy  $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$  hosszú nemnegatív  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_{|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|})$  kompozíciója pontosan akkor szerepel az  $\mathbf{a} \sqcup \mathbf{b}$  fésű-szorzatban, ha

$$0 \leq \Delta_{\partial \mathcal{J}} \sum \left( \mathbf{c} - \mathbf{a} \overset{\mathcal{J}}{\bowtie} \mathbf{b} \right) \leq \mathbf{c} \quad (\forall \mathcal{J} \subseteq \{1, 2, \dots, |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|\}, |\mathcal{J}| = |\mathbf{a}|),$$

és ekkor az együtthatója a szorzatban

$$\left( \Delta_{\partial \mathcal{J}} \sum \left( \mathbf{c} - \mathbf{a} \overset{\mathcal{J}}{\bowtie} \mathbf{b} \right) \right)^{\mathbf{c}}$$

Vagyis,

$$\mathbf{a} \sqcup \mathbf{b} = \sum_{\substack{\mathbf{c} \models \sum \mathbf{b} + \sum \mathbf{b} \\ |\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|}} \left( \sum_{\substack{\mathcal{J} \subseteq \{1, 2, \dots, |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|\} \\ |\mathcal{J}| = |\mathbf{a}|}} \left( \Delta_{\partial \mathcal{J}} \sum \left( \mathbf{c} - \mathbf{a} \overset{\mathcal{J}}{\bowtie} \mathbf{b} \right) \right)^* \mathbf{c} \right)$$

Az  $\mathbf{a} \sqcup \mathbf{b}$  fésű-szorzatot megadó, általam ismert egyetlen formula ZHONGHUA LI AND CHEN QIN “*Shuffle product formulas of multiple zeta values*” 2016-os cikkében található, amely vélhetően ekvivalens a mi formulánkkal, de nem ilyen tömör, sőt, inkább nehézkes.

**Theorem 2.1.** *Let  $r, s$  be two positive integers and let  $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s$  be nonnegative integers. Then we have*

$$\begin{aligned} & x^{a_1} y \cdots x^{a_r} y \sqcup x^{b_1} y \cdots x^{b_s} y \\ &= \sum_{\substack{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{r+s} = \sum_{i=1}^r a_i + \sum_{j=1}^s b_j \\ \alpha_1, \dots, \alpha_{r+s} \geq 0}} c_{\alpha_1, \dots, \alpha_{r+s}} x^{\alpha_1} y x^{\alpha_2} y \cdots x^{\alpha_{r+s}} y, \end{aligned} \quad (2.1)$$

where the coefficients

$$\begin{aligned} c_{\alpha_1, \dots, \alpha_{r+s}} &= \sum_{\substack{l_1 + \cdots + l_{p+1} = r \\ n_1 + \cdots + n_p = s \\ p \geq 1, l_i \geq 1, n_j \geq 1}} \prod_{i=1}^{L_p+s} \binom{\alpha_i}{\beta_i} \prod_{j=L_p+s+2}^{r+s} \delta_{\alpha_j, a_{j-s}} \\ &+ \sum_{\substack{l_1 + \cdots + l_p = r \\ n_1 + \cdots + n_p = s \\ p \geq 1, l_i \geq 1, n_j \geq 1}} \prod_{i=1}^{r+N_{p-1}} \binom{\alpha_i}{\beta_i} \prod_{j=r+N_{p-1}+2}^{r+s} \delta_{\alpha_j, b_{j-r}} \\ &+ \sum_{\substack{l_1 + \cdots + l_p = r \\ n_1 + \cdots + n_{p+1} = s \\ p \geq 1, l_i \geq 1, n_j \geq 1}} \prod_{i=1}^{r+N_p} \binom{\alpha_i}{\gamma_i} \prod_{j=r+N_p+2}^{r+s} \delta_{\alpha_j, b_{j-r}} \\ &+ \sum_{\substack{l_1 + \cdots + l_p = r \\ n_1 + \cdots + n_p = s \\ p \geq 1, l_i \geq 1, n_j \geq 1}} \prod_{i=1}^{L_{p-1}+s} \binom{\alpha_i}{\gamma_i} \prod_{j=L_{p-1}+s+2}^{r+s} \delta_{\alpha_j, a_{j-s}}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Here for positive integers  $l_1, \dots, l_p, (l_{p+1})$  and  $n_1, \dots, n_p, (n_{p+1})$  appearing in the summations above, we define

$$\left\{ \begin{array}{ll} \beta_{L_j+N_j+1} = \sum_{i=1}^{L_j+1} a_i + \sum_{i=1}^{N_j} b_i - \sum_{i=1}^{L_j+N_j} \alpha_i, & \text{for } j = 0, 1, \dots, p, \\ \beta_{L_j+N_j+t} = a_{L_j+t}, \quad (2 \leq t \leq l_{j+1}) & \\ \beta_{L_{j+1}+N_j+1} = \sum_{i=1}^{L_{j+1}} a_i + \sum_{i=1}^{N_j+1} b_i - \sum_{i=1}^{L_{j+1}+N_j} \alpha_i, & \text{for } j = 0, 1, \dots, p-1, \\ \beta_{L_{j+1}+N_j+t} = b_{N_j+t}, \quad (2 \leq t \leq n_{j+1}) & \end{array} \right. \quad (2.3)$$

and

$$\left\{ \begin{array}{ll} \gamma_{L_j+N_j+1} = \sum_{i=1}^{L_j} a_i + \sum_{i=1}^{N_j+1} b_i - \sum_{i=1}^{L_j+N_j} \alpha_i, & \text{for } j = 0, 1, \dots, p, \\ \gamma_{L_j+N_j+t} = b_{N_j+t}, \quad (2 \leq t \leq n_{j+1}) & \\ \gamma_{L_j+N_{j+1}+1} = \sum_{i=1}^{L_j+1} a_i + \sum_{i=1}^{N_{j+1}} b_i - \sum_{i=1}^{L_j+N_{j+1}} \alpha_i, & \text{for } j = 0, 1, \dots, p-1, \\ \gamma_{L_j+N_{j+1}+t} = a_{L_j+t}, \quad (2 \leq t \leq l_{j+1}) & \end{array} \right. \quad (2.4)$$

with  $L_j = l_1 + \cdots + l_j$ ,  $N_j = n_1 + \cdots + n_j$  for  $j \geq 0$  and  $L_0 = N_0 = 0$ . And  $\delta_{ij}$  is Kronecker's delta symbol defined as

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$