1 Fésű-szorzat (shuffle-szorzat)

(1) Multihalmazok: Multihalmazon olyan objektumot értünk, amelyben egy elem többször is előfordulhat. Egy elem előfordulását az elem *multiplicitásának* nevezzük. Például az $A = [a, a, b, b, b, b, c, c, c]$ multihalmazban az b elem multiplicitása 4, a c elemé pedig 3. Az $\{a, b, c\}$ hagyományos halmazt az A multihalmaz *tartójának* nevezzük. A multihalmazok felírására két bevett jelölés terjedt el.

Multiplikatív felírás: $A = a^2b^4c^3$. Általánosan $A = \{a_1^{m_1} a_2^{m_2} \cdots a_k^{m_k}\}$, ahol A az $\{a_1, a_2, \dots a_k\}$ tartójú $\{m_1, m_2, \dots m_k\}$ multiplicitású multihalmaz

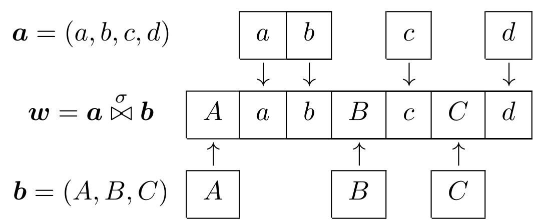
Additív felírás: $A = 2 * a + 4 * b + 3 * c$. Általánosan $A = m_1 * a_1 + m_2 * a_2 + \cdots + m_k * a_k$, ahol A az $\{a_1, a_2, \dots a_k\}$ tartójú $\{m_1, m_2, \dots m_k\}$ multiplicitású multihalmaz

Mi a továbbiakban az additív felírást követjük, mert ez jobban megfelel a céljainknak.

(2) Összefésülés (shuffle-keverés): Két tetszőleges $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektor *egy konkrét összefésülésén (shuffle-keverésén)* a két vektor olyan összekeverését értjük, amelyben mind a két vektor megtartja az eredeti sorrendet, pontosan úgy, ahogyan az alábbi ábrán egymásba „pörgetünk” két pakli kártyát (riffle-shuffle). Az egyik pakli az $\boldsymbol{a}$ vektornak felel meg, míg a másik pakli a $\boldsymbol{b}$ vektornak. Egy n hosszú $\boldsymbol{a}$ vektornak és egy m hosszú $\boldsymbol{b}$ vektornak (multiplicitással számolva) pontosan $\binom{n+m}{n}$ összefésülése van, hiszen az $n+m$ együttes hosszúságú vektorból elegendő kiválasztani azt az n darab helyet, ahová az n hosszú $\boldsymbol{a}$ vektort beírjuk. Ekkor a maradék m helyre az m hosszú $\boldsymbol{b}$ vektort –az eredeti sorrendet megtartva– már csak egyféleképpen írható be. Ebből az is kiderült, hogy az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok minen egyes konkrét összefésülésének megadása teljesen egyenértékű egy az $\{1, 2, 3, \dots |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|\}$ halmazból történő $|\boldsymbol{a}|$ elemszámú σ részhalmaz kiválasztásával. Ezért az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok egy konkrét összefésülését $\boldsymbol{a} \overset{\sigma}{\bowtie} \boldsymbol{b}$ fogja jelölni, ahol $\sigma \subseteq \{1, 2, 3, \dots |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|\}$, $|\sigma| = |\boldsymbol{a}|$. (Az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok összefésülései a $\sigma \subseteq \{1, 2, 3, \dots |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|\}$, $|\sigma| = |\boldsymbol{a}|$ részhalmazokkal paraméterezhetők.)

Riffle-shuffle

$$\boldsymbol{w} = (a, b, c, d) \overset{\sigma}{\bowtie} (A, B, C)$$
$$\sigma = \{2, 3, 5, 7\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$



Példa: az $\boldsymbol{a} = (x, y)$ és $\boldsymbol{b} = (A, B, C)$ vektoroknak pontosan $\binom{5}{2} = 10$ összefésülése van. Ezek az alábbiak:

$\sigma_1 = \{1, 2, 3\}$	$\sigma_2 = \{1, 2, 4\}$	$\sigma_3 = \{1, 3, 5\}$	$\sigma_4 = \{1, 3, 4\}$	$\sigma_5 = \{1, 3, 5\}$
(A, B, C, x, y)	(A, B, x, C, y)	(A, B, x, y, C)	(A, x, B, C, y)	(A, x, B, y, C)
$\sigma_6 = \{1, 4, 5\}$	$\sigma_7 = \{2, 3, 4\}$	$\sigma_8 = \{2, 3, 5\}$	$\sigma_9 = \{2, 4, 5\}$	$\sigma_{10} = \{3, 4, 5\}$
(A, x, y, B, C)	(x, A, B, C, y)	(x, A, B, y, C)	(x, A, y, B, C)	(x, y, A, B, C)

A kapott tíz összefésülés mind különböző, ezért egy halmazt alkotnak. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz tetszőleges különböző kételemű σ_1 és σ_2 részhalmazához az $\boldsymbol{a} \overset{\sigma_1}{\bowtie} \boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{a} \overset{\sigma_2}{\bowtie} \boldsymbol{b}$ összefésülések is különbözőek lesznek. Ha viszont az $\boldsymbol{a}$, illetve $\boldsymbol{b}$ vektorok valamelyike egy elemet többször is tartalmaz, vagy a két vektornak van közös eleme, akkor az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok összes összefésülése általában már egy multihalmazt alkot. Példaként kiszámítjuk az $\boldsymbol{a} = (c, b)$ és $\boldsymbol{b} = (b, c, c)$ vektorok összes lehetséges összefésülését. Azért, hogy a két vektor között könnyebben különbséget tudjunk tenni, az $\boldsymbol{a}$ vektor elemeit pirossal szedjük. Minden keverést két lépésre bontva érdemes kiszámítani.

(1) Az öt hosszú vektorból választunk az $\boldsymbol{a} = (c, b)$ vektornak két helyet (választunk egy $\sigma \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ részhalmazt):

$$(\bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet) \to (\bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet)$$

(2) Az $\boldsymbol{a} = (c, b)$ és $\boldsymbol{b} = (b, c, c)$ vektorokat beírjuk a megfelelő helyekre az eredeti sorrendben:

$$\begin{array}{ccc} (b, c, c) & & (c, b) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (b, \bullet, c, \bullet, c) & \to & (b, c, c, b, c) \end{array}$$

A tíz összefésülés pedig az alábbi lesz:

$$\begin{array}{ccccc}
\sigma_1 = \{1,2\} & \sigma_2 = \{1,3\} & \sigma_3 = \{1,4\} & \sigma_4 = \{1,5\} & \sigma_5 = \{2,3\} \\
(c,b,b,c,c) & (c,b,b,c,c) & (c,b,c,b,c) & (c,b,c,c,b) & (b,c,b,c,c) \\
\\
\sigma_6 = \{2,4\} & \sigma_7 = \{2,5\} & \sigma_8 = \{3,4\} & \sigma_9 = \{3,5\} & \sigma_{10} = \{4,5\} \\
(b,c,c,b,c) & (b,c,c,c,b) & (b,c,c,b,c) & (b,c,c,c,b) & (b,c,c,c,b)
\end{array}$$

Ebben a felsorolásban már bizonyos vektorok többször is előfordulnak. Más megfogalmazásban, az $\{1,2,3,4,5\}$ halmaz két különböző kételemű σ_i és σ_j részhalmazai által meghatározott $\boldsymbol{a} \overset{\sigma_i}{\bowtie} \boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{a} \overset{\sigma_j}{\bowtie} \boldsymbol{b}$ összefésülések nem feltétlenül különbözőek. Például $\boldsymbol{a} \overset{\sigma_1}{\bowtie} \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \overset{\sigma_2}{\bowtie} \boldsymbol{b} = (c,b,b,c,c)$, sőt $\boldsymbol{a} \overset{\sigma_7}{\bowtie} \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \overset{\sigma_9}{\bowtie} \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \overset{\sigma_{10}}{\bowtie} \boldsymbol{b} = (b,c,c,c,b)$. A multiplicitások megállapításához az egyformákat egymás alá gyűjtjük:

(c,b,b,c,c)	(c,b,c,b,c)	(c,b,c,c,b)	(b,c,b,c,c)	(b,c,c,b,c)	(b,c,c,c,b)
(c,b,b,c,c)				(b,c,c,b,c)	(b,c,c,c,b)
					(b,c,c,c,b)

Ezt a táblázatot már csak egy multihalmazzal írhatjuk le. **Ezt a multihalmazt nevezzük az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok *összefésülésének,* amit $\boldsymbol{a} \bowtie \boldsymbol{b}$-vel jelölünk**. **Vagyis, az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok $\boldsymbol{a} \bowtie \boldsymbol{b}$ *összefésülésén* az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok *összes* lehetséges öszefésülését tartalmazó multihalmazt értjük**.

$$\boldsymbol{a} \bowtie \boldsymbol{b} = \left\{ \boldsymbol{a} \overset{\sigma}{\bowtie} \boldsymbol{b} : \sigma \subset \{1,2,3,\ldots |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|\},\ |\sigma| = |\boldsymbol{a}| \right\} = \sum_{\sigma \subset \{1,2,3,\ldots |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|\},\ |\sigma|} \boldsymbol{a} \overset{\sigma}{\bowtie} \boldsymbol{b}$$

Ezzel a jelöléssel a fenti számítások eredménye tömören így írható:

$$(c,b) \bowtie (b,c,c) = 2 * (c,b,b,c,c) + (c,b,c,b,c) + (c,b,c,c,b) + (b,c,b,c,c) + 2 * (b,c,c,b,c) + 3 * (b,c,c,c,b)$$

Könnyen átgondolható, hogy a vektorok összefésülése kommutatív, azaz

$$\boldsymbol{a} \bowtie \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \bowtie \boldsymbol{a}$$

Az asszociativitásról már nem beszélhetünk, mert a bevezetett $\boldsymbol{a} \bowtie \boldsymbol{b}$ *összefésülés nem is művelet*, hiszen egy H halmazon értelmezett kétváltozós $\circ$ műveleten a $H \times H$ halmaz önmagába való leképezését értjük:

$$\circ : H \times H \to H$$
$$(h_1, h_2) \to h_1 \circ h_2$$

A fentebb értelmezett összefésülés pedig két vektorhoz egy multihalmazt, és nem egy vektort rendel. Viszont egy $\boldsymbol{a}$ vektor és az $\boldsymbol{a}$ vektort tartalmazó egyelemű $1 * \boldsymbol{a}$ multihalmaz kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak. (A vektorok *beágyazhatók* a vektorokat tartalmazó multihalmazok halmazába.) Ha a vektorokat tartalmazó multihalmazok halmazát $\mathscr{H}$-val jelöljük, akkor az összefésülés $\mathscr{H}$-ra történő *lineáris kiterjesztése* már művelet lesz $\mathscr{H}$-n.

$$\bowtie : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathscr{H}; \quad \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i * \boldsymbol{a}_i \right) \bowtie \left(\sum_{j=1}^{s} \beta_j * \boldsymbol{b}_j \right) := \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \alpha_i \cdot \beta_j * (\boldsymbol{b}_j \bowtie \boldsymbol{a}_i)$$

Ez valóban kiterjesztése a korábban definált összefésülésnek, hiszen a fent említett $\boldsymbol{a} \leftrightarrow 1 * \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \leftrightarrow 1 * \boldsymbol{b}$ beágyazással

$$\boldsymbol{a} \bowtie \boldsymbol{b} \leftrightarrow 1 * \boldsymbol{a} \bowtie 1 * \boldsymbol{b} := (1 \cdot 1) * \boldsymbol{a} \bowtie \boldsymbol{b} = 1 * \boldsymbol{a} \bowtie \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \bowtie \boldsymbol{b}$$

Ha csak két vektor összefésülését vesszük, akkor –az egyértelmű megfeleltetést kihasználva– továbbra is használni fogjuk a rövidebb $\boldsymbol{a} \bowtie \boldsymbol{b}$ jelölést az $1 * \boldsymbol{a} \bowtie 1 * \boldsymbol{b}$ felírás helyett.

Könnyen átgondolható, hogy az így kiterjesztett összefésülés kommutatív, asszociatív és létezik egységeleme, ami az egyetlen *üresvektort* tartalmazó $\iota = \{(\,)\} = 1 * (\,)$ multihalmaz.

$$\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i * \boldsymbol{a}_i\right) \bowtie \left(\sum_{j=1}^{s} \beta_j * \boldsymbol{b}_j\right) = \left(\sum_{j=1}^{s} \beta_j * \boldsymbol{b}_j\right) \bowtie \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i * \boldsymbol{a}_i\right)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i * \boldsymbol{a}_i\right) \bowtie \left[\left(\sum_{j=1}^{s} \beta_j * \boldsymbol{b}_j\right) \bowtie \left(\sum_{k=1}^{t} \gamma_k * \boldsymbol{b}_k\right)\right] = \left[\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i * \boldsymbol{a}_i\right) \bowtie \left(\sum_{j=1}^{s} \beta_j * \boldsymbol{b}_j\right)\right] \bowtie \left(\sum_{k=1}^{t} \gamma_k * \boldsymbol{b}_k\right)$$

$$\iota \bowtie \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i * \boldsymbol{a}_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i * \boldsymbol{a}_i\right)$$

(3) Vektorok bináris kódólása: Tekintsük az $\boldsymbol{a} = (2,3,4,1,0,2)$ vektort. Ha ezt a vektort binárisan szeretnénk kódolni, akkor egy kézenfekvő megoldás az lehetne, hogy a vektor komponenseinek megfelelő számú nullákat választunk el egyesekkel (mint határoló jelekkel).

$$\boldsymbol{a} = (2,3,4,1,0,2) \leftrightarrow 0,0,\mathbf{1},0,0,0,\mathbf{1},0,0,0,0,\mathbf{1},0,\mathbf{1},\mathbf{1},0,0,\mathbf{1}$$

Ezt az ötletet fogalmazza meg matematikai precizitással a következő állítás. A nemnegatív $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vektorok és az *1-re végződő*, *pontosan n darab 1-et tartalmazó* bináris vektor között kölcsönösen egyértelmű kapcsolatot létesít az

$$\omega(\boldsymbol{a}) := (\underbrace{0,0,\ldots,0}_{a_1},\mathbf{1},\underbrace{0,0,\ldots,0}_{a_2},\mathbf{1},\ldots,\underbrace{0,0,\ldots,0}_{a_n},\mathbf{1})$$

megfeleltetés. (Az i-edik 1-es elé a_i darab 0-át írunk.)

Példák:

$$\begin{aligned}
\omega((2,3,1,2)) &= (0,0,\mathbf{1},0,0,0,\mathbf{1},0,\mathbf{1},0,0,\mathbf{1}) \\
\omega((3,0,0,1,0)) &= (0,0,0,\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},0,\mathbf{1},\mathbf{1}) \\
\omega^{-1}((\mathbf{1},\mathbf{1},0,0,0,\mathbf{1},0,\mathbf{1},0,0,\mathbf{1})) &= (0,0,3,1,2) \\
\omega^{-1}((\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1})) &= (0,0,0,0)
\end{aligned}$$

Érdemes megjegyezni, hogy tetszőleges nemnegatív $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vektorra

$$\begin{aligned}
|\omega(\boldsymbol{a})| &= \sum \boldsymbol{a} + |\boldsymbol{a}| = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + n \\
\sum \omega(\boldsymbol{a}) &= |\boldsymbol{a}| = n
\end{aligned}$$

(4) Fésű-szorzat (shuffle-szorzat): A fent bevezetett összefésülés, multihalmazok additív felírása, illetve $\omega(\boldsymbol{a})$ bináris oda-vissza kódolás fogalmak segítségével már könnyen értelmezhető egy nemnegatív $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ és $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ vektor $\boldsymbol{a} \sqcup\!\sqcup\, \boldsymbol{b}$ *fésű-szorzata (shuffle-szorzata)* is. Vegyük az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektor $\omega(\boldsymbol{a})$, illetve $\omega(\boldsymbol{b})$ bináris képeinek az összefésülését, ami általában egy multihalmaz, és ebben minden vektort kódoljunk vissza. Az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok $\boldsymbol{a} \sqcup\!\sqcup\, \boldsymbol{b}$ fésű-szorzatán ezt a visszakódolt multihalmazt értjük.

$$\boldsymbol{a} \sqcup\!\sqcup\, \boldsymbol{b} := \omega^{-1}\left(\omega(\boldsymbol{a}) \bowtie \omega(\boldsymbol{b})\right)$$

Nézzünk egy konkrét példát. Legyen $\boldsymbol{a} = (2,1)$ és $\boldsymbol{b} = (1)$. Ekkor $\omega(\boldsymbol{a}) = (0,0,1,0,1)$ és $\omega(\boldsymbol{b}) = (0,1)$. Ezen két bináris vektornak pontosan $\binom{7}{2} = 21$ összefésülése van. Azért, hogy a két vektor között különbséget tudjunk tenni az $\omega(\boldsymbol{b})$ vektor elemeit pirossal szedjük.

Ahogy azt korábban már javasoltuk, most is minden ilyen keverést két lépésre bontva érdemes kiszámítani. (1) A hét hosszú vektorból választunk az $\omega(\boldsymbol{b}) = (0,1)$ vektornak két helyet:

$$(\bullet,\bullet,\bullet,\bullet,\bullet,\bullet,\bullet) \to (\bullet,\bullet,\bullet,\bullet,\bullet,\bullet,\bullet)$$

(2) Az $\omega(\boldsymbol{a}) = (0,0,1,0,1)$ és $\omega(\boldsymbol{b}) = (0,1)$ vektorokat beírjuk a megfelelő helyekre az eredeti sorrendben:

$$\begin{array}{ccc} (0,0,1,0,1) & & (0,1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (0,0,\bullet,1,0,\bullet,1) & \to & (0,0,0,1,0,1,1) \end{array}$$

A 21 összefésülés pedig az alábbi:

$(0,0,1,0,1,0,1)$; $(0,0,1,0,0,1,1)$; $(0,0,1,0,0,1,1)$; $(0,0,0,1,0,1,1)$; $(0,0,0,1,0,1,1)$; $(0,0,0,1,0,1,1)$; $(0,0,1,0,0,1,1)$
$(0,0,1,0,0,1,1)$; $(0,0,0,1,0,1,1)$; $(0,0,0,1,0,1,1)$; $(0,0,0,1,0,1,1)$; $(0,0,1,0,1,0,1)$; $(0,0,0,1,1,0,1)$; $(0,0,0,1,1,0,1)$;
$(0,0,0,1,1,0,1)$; $(0,0,0,1,1,0,1)$; $(0,0,0,1,1,0,1)$; $(0,0,0,1,1,0,1)$; $(0,0,1,0,1,0,1)$; $(0,0,1,0,1,0,1)$; $(0,1,0,0,1,0,1)$

A 21 vektor között vanak egyformák. Egy táblázatban összegyűjtjük az egyes vektorok előfordulását (multiplicitását).

$(0,1,0,0,1,0,1)$	$(0,0,1,0,1,0,1)$	$(0,0,1,0,0,1,1)$	$(0,0,0,1,1,0,1)$	$(0,0,0,1,0,1,1)$	$\sum$
1	4	4	6	6	21

Most minden vektort visszafordítunk, azaz vesszük az ω^{-1} melletti képét.

$(1,2,1)$	$(2,1,1)$	$(2,2,0)$	$(3,0,1)$	$(3,1,0)$	$\sum$
1	4	4	6	6	21

Végül az eredményt additív multihalmazos jelöléssel felírva megkapjuk a két vektor $\boldsymbol{a} \sqcup\!\sqcup \boldsymbol{b}$ shuffle-szorzatát:

$$\boldsymbol{a} \sqcup\!\sqcup \boldsymbol{b} = (1,2,1) + 4*(2,1,1) + 4*(2,2,0) + 6*(3,0,1) + 6*(3,1,0)$$

Mivel az összefésülés nem változtatja meg a tényezők komponenseit, ezért *a nemnegatív* $\boldsymbol{a}$ *és* $\boldsymbol{b}$ *vektorok* $\boldsymbol{a} \sqcup\!\sqcup \boldsymbol{b}$ *fésű-szorzatában* a $\sum \boldsymbol{a} + \sum \boldsymbol{b}$ *pozitív szám* $|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$ *hosszú nemnegatív kompozíciói szerepelnek*, de általában nem az összes. Mint ismeretes, az $\sum \boldsymbol{a} + \sum \boldsymbol{b}$ pozitív szám összes $|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$ hosszú nemnegatív kompozícióinak száma $\binom{\sum \boldsymbol{a} + \sum \boldsymbol{b} + |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| - 1}{|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| - 1}$, ami általában nagyobb, mint az $\boldsymbol{a} \sqcup\!\sqcup \boldsymbol{b}$ fésű-szorzat tartóhalmazának elemszáma.

Implementáció: A program jelenleg csak két vektor összefésülését tudja kiszámítani, multihalmazokét még nem. Viszont az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok $\boldsymbol{a} \bowtie \boldsymbol{b}$ összefésülésének additív felírásán kívűl a fent említett kombinatorikus számokról is informál. Például az $\boldsymbol{a} = (2,3)$, $\boldsymbol{b} = (1,2)$ vektorok beírásakor a kimenet első sorában vastagon szedve látható a $\binom{\sum \boldsymbol{a} + \sum \boldsymbol{b} + |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| - 1}{|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| - 1} = \binom{5+3+2+2-1}{2+2-1} = \binom{11}{3}$ =**165**, ami a 8 szám összes nemnegatív 4 hosszú kompozíciója, illetve a $\boldsymbol{a} \bowtie \boldsymbol{b}$ összefésülés tartójának elemszáma, ami most **42**. (Ez azt jelenti, hogy az összeg 42 tagú.)

A számítás mérete: 990 (gyorsítás: ×1.32) futás. 8-nak(nek) összesen **165** darab 4 hosszú nem-negatív kompozíciója van. Az összegben ezekből **42** szerepel. Vagyis, nagyjából minden 3.929-dik.

(2,3)⊔⊔(1,2) = 2∗(1,2,2,3) + 4∗(1,2,3,2) + 10∗(1,2,4,1) + 20∗(1,2,5,0) + 6∗(1,3,1,3) + 6∗(1,3,2,2) + 12∗(1,3,3,1) + 24∗(1,3,4,0) + 12∗(1,4,0,3) + 6∗(1,4,1,2) + 6∗(1,4,2,1) + 12∗(1,4,3,0) + 3∗(2,1,2,3) + 12∗(2,1,3,2) + 30∗(2,1,4,1) + 60∗(2,1,5,0) + 6∗(2,2,1,3) + 12∗(2,2,2,2) + 28∗(2,2,3,1) + 56∗(2,2,4,0) + 12∗(2,3,0,3) + 10∗(2,3,1,2) + 15∗(2,3,2,1) + 30∗(2,3,3,0) + 8∗(2,4,0,2) + 4∗(2,4,1,1) + 8∗(2,4,2,0) + 6∗(3,0,2,3) + 24∗(3,0,3,2) + 60∗(3,0,4,1) + 120∗(3,0,5,0) + 3∗(3,1,1,3) + 12∗(3,1,2,2) + 30∗(3,1,3,1) + 60∗(3,1,4,0) + 6∗(3,2,0,3) + 6∗(3,2,1,2) + 12∗(3,2,2,1) + 24∗(3,2,3,0) + 6∗(3,3,0,2) + 3∗(3,3,1,1) + 6∗(3,3,2,0)

A számítás mérete pedig $\binom{\sum \boldsymbol{a} + \sum \boldsymbol{b} + |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| - 1}{|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| - 1} \cdot \binom{|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|} = \binom{11}{3} \cdot \binom{4}{2} = 165 \cdot 6 = 990$. Később ismertetni fogunk egy igen szép formulát, amely tetszőleges $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ pozítív vektorpáros esetén megmondja, hogy a $\sum \boldsymbol{a} + \sum \boldsymbol{b}$ pozitív szám $|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$ hosszú nemnegatív $\boldsymbol{c}$ kompozíciója benne van-e az $\boldsymbol{a} \sqcup\!\sqcup \boldsymbol{b}$ fésű-szorzatban, és ha igen, akkor megadja annak multiplicitását is. Ez sokban hasonlít a Zhonghua Li , Chen Qin: Shuffle product formulas of multiple zeta values cikkében felírt képletre, de a jól eltalált fogalmaknak köszönhetően sokkal tömörebb. Az implementációban használt algoritmusnak is ez a formula az elméleti alapja.

(4) Altalánosított polilogaritmusok és a fésű-szorzat:

Tetszőleges $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vektor komponensenkénti 1-gyel növelését (csökkentését) jelölje

$$\boldsymbol{a}^{\vee} := (a_1 - 1, a_2 - 1, \ldots, a_n - 1) = \boldsymbol{a} - (1,1,\ldots,1)$$

$$\boldsymbol{a}^{\wedge} := (a_1 + 1, a_2 + 1, \ldots, a_n + 1) = \boldsymbol{a} + (1,1,\ldots,1)$$

A fogalom természetes módon terjeszthető ki multihalmazokra is:

$$(\alpha_1 * \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 * \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k * \boldsymbol{a}_k)^\vee := \alpha_1 * \boldsymbol{a}_1^\vee + \alpha_2 * \boldsymbol{a}_2^\vee + \ldots + \alpha_k * \boldsymbol{a}_k^\vee$$

$$(\alpha_1 * \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 * \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k * \boldsymbol{a}_k)^\wedge := \alpha_1 * \boldsymbol{a}_1^\wedge + \alpha_2 * \boldsymbol{a}_2^\wedge + \ldots + \alpha_k * \boldsymbol{a}_k^\wedge$$

Az általánosított polilogaritmus függvényeket is kiterjeszthetők multihalmaz indexekre az alábbi definíció szerint

$$\mathrm{Li}_{\alpha_1 * \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 * \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k * \boldsymbol{a}_k}(x) := \alpha_1 \cdot \mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}_1}(x) + \alpha_2 \cdot \mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}_2}(x) + \cdots + \alpha_k \cdot \mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}_k}(x)$$

A fenti fogalmak és jelölések segítségével az általánosított polilogaritmus függvényekre az alábbi tételt fogalmazhatjuk meg.

Tétel: *Tetszőleges* $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *és* $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ *pozitív vektorokra*

$$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x) \cdot \mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x) = \mathrm{Li}_{(\boldsymbol{a}^\vee \sqcup\!\sqcup\, \boldsymbol{b}^\vee)^\wedge}(x)$$

Példa: $\boldsymbol{a} = (2,3)$, és $\boldsymbol{b} = (1,2)$ vektorokkal $\boldsymbol{a}^\vee = (1,2)$ és $\boldsymbol{b}^\vee = (0,1)$. Az implementációban végzett számítás szerint,

$$\begin{aligned}(1,2) \sqcup\!\sqcup\, (0,1) = {} & 2*(0,1,1,2) + 3*(0,1,2,1) + 6*(0,1,3,0) + 4*(0,2,0,2) + 2*(0,2,1,1) + 4*(0,2,2,0) + 2*(1,0,1,2) + \\ & + 6*(1,0,2,1) + 12*(1,0,3,0) + 2*(1,1,0,2) + 3*(1,1,1,1) + 6*(1,1,2,0) + 2*(1,2,0,1) + 2*(1,2,1,0).\end{aligned}$$

Ebben az eredményben minden vektort komponensenként eggyel megnövelve:

$$\begin{aligned}((1,2) \sqcup\!\sqcup\, (0,1))^\wedge = {} & 2*(0,1,1,2)^\wedge + 3*(0,1,2,1)^\wedge + 6*(0,1,3,0)^\wedge + 4*(0,2,0,2)^\wedge + 2*(0,2,1,1)^\wedge + 4*(0,2,2,0)^\wedge + 2*(1,0,1,2)^\wedge + \\ & + 6*(1,0,2,1)^\wedge + 12*(1,0,3,0)^\wedge + 2*(1,1,0,2)^\wedge + 3*(1,1,1,1)^\wedge + 6*(1,1,2,0)^\wedge + 2*(1,2,0,1)^\wedge + 2*(1,2,1,0)^\wedge = \\ & = 2*(1,2,2,3) + 3*(1,2,3,2) + 6*(1,2,4,1) + 4*(1,3,1,3) + 2*(1,3,2,2) + 4*(1,3,3,1) + 2*(2,1,2,3) + 6*(2,1,3,2) + \\ & + 12*(2,1,4,1) + 2*(2,2,1,3) + 3*(2,2,2,2) + 6*(2,2,3,1) + 2*(2,3,1,2) + 2*(2,3,2,1).\end{aligned}$$

A tétel szerint a két általánosított polilogaritmus függvény szorzata az alábbi lineáris kombinációra bomlik fel:

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}_{(2,3)}(x) \cdot \mathrm{Li}_{(1,2)}(x) = {} & 2 \cdot \mathrm{Li}_{(1,2,2,3)}(x) + 3 \cdot \mathrm{Li}_{(1,2,3,2)}(x) + 6 \cdot \mathrm{Li}_{(1,2,4,1)}(x) + 4 \cdot \mathrm{Li}_{(1,3,1,3)}(x) + 2 \cdot \mathrm{Li}_{(1,3,2,2)}(x) + 4 \cdot \mathrm{Li}_{(1,3,3,1)}(x) + \\ & + 2 \cdot \mathrm{Li}_{(2,1,2,3)}(x) + 6 \cdot \mathrm{Li}_{(2,1,3,2)}(x) + 12 \cdot \mathrm{Li}_{(2,1,4,1)}(x) + 2 \cdot \mathrm{Li}_{(2,2,1,3)}(x) + 3 \cdot \mathrm{Li}_{(2,2,2,2)}(x) + 6 \cdot \mathrm{Li}_{(2,2,3,1)}(x) + 2 \cdot \mathrm{Li}_{(2,3,1,2)}(x) + 2 \cdot \mathrm{Li}_{(2,3,2,1)}(x).\end{aligned}$$