1 Alapvető vektorműveletek, lépések

Az alábbiakban definiálunk négy darab egyváltozós vektorműveletet, amelyek mindegyike egy vektor elejét változtatja meg.

$$\begin{aligned}
{}^{+}(a_1, a_2, \ldots a_n) &= (1, a_1, a_2, \ldots a_n) \\
{}^{-}(1, a_2, \ldots a_n) &= (a_2, a_3, \ldots a_n) \\
{}_{+}(a_1, a_2, \ldots a_n) &= (a_1 + 1, a_2, \ldots a_n) \\
{}_{-}(a_1, a_2, \ldots a_n) &= (a_1 - 1, a_2, \ldots a_n)
\end{aligned}$$

Ezen egyváltozós műveletek segítségével négy kétváltozós vektorműveletet definiálunk. Ezek mindegyike az általánosított polilogaritmusok integrálásakor alkalmazott lépések egyike. Az első kettő a sztandard lépés, illetve annak duálisa, míg a második kettő at 1-átvitel és annak duálisa.

$$\begin{array}{ll}
(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow ({}_{-}\boldsymbol{a} \mid {}_{+}\boldsymbol{b}) & (a_1, a_2, \ldots a_n \mid b_1, b_2, \ldots, b_m) \longrightarrow (a_1 - 1, a_2, \ldots a_n \mid b_1 + 1, b_2, \ldots, b_m) \\
(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow \left({}_{-}\boldsymbol{a} \mid {}^{+}\boldsymbol{b}\right) & (a_1, a_2, \ldots a_n \mid b_1, b_2, \ldots, b_m) \longrightarrow (a_1 - 1, a_2, \ldots a_n \mid 1, b_1, b_2, \ldots, b_m) \\
(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow \left({}^{-}\boldsymbol{a} \mid {}^{+}\boldsymbol{b}\right) & (1, a_2, \ldots a_n \mid b_1, b_2, \ldots, b_m) \longrightarrow (a_2, \ldots a_n \mid 1, b_1, b_2, \ldots, b_m) \\
(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow \left({}^{-}\boldsymbol{a} \mid {}_{+}\boldsymbol{b}\right) & (1, a_2, \ldots a_n \mid b_1, b_2, \ldots, b_m) \longrightarrow (a_2, \ldots a_n \mid b_1 + 1, b_2, \ldots, b_m)
\end{array}$$

Ha az $(a_1, a_2, \ldots a_n \mid b_1, b_2, \ldots, b_m)$ párosban $a_1 > 1$, akkor a sztandard lépés, ha pedig $a_1 = 1$, akkor az 1-átvitel valamelyik változatát hajtjuk végre.

Szükségünk lesz még az alábbi két kétváltozós vektorműveletre, amelyek az általánosított polilogaritmusok integrálásakor az inicializálás megfelelői.

$$\begin{array}{ll}
(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow (\boldsymbol{a} \mid {}_{+}\boldsymbol{b}) & (a_1, a_2, \ldots a_n \mid b_1, b_2, \ldots, b_m) \longrightarrow (a_1, a_2, \ldots a_n \mid b_1 + 1, b_2, \ldots, b_m) \\
(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow \left(\boldsymbol{a} \mid {}^{+}\boldsymbol{b}\right) & (a_1, a_2, \ldots a_n \mid b_1, b_2, \ldots, b_m) \longrightarrow (a_1, a_2, \ldots a_n \mid 1, b_1, b_2, \ldots, b_m)
\end{array}$$

2 Példák vizsgálata

A továbbiakban feltesszük, hogy az $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots a_n)$ indexvektor minden komponense potitív, azaz $a_i > 0 \ \ (i = 1, 2, \ldots, n)$, és mindig az $\boldsymbol{a}$ vektort ürítjük.

A polilogaritmus függvények integrálásakor négy *fázist* különböztethetünk meg.

Inicializáció Az $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ vektorpárosból megalkotjuk az integrálási/kiürítési sor *első* tagját.

Sztandard lépés Az $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots a_n)$ indexvektor első eleme nagyobb 1-nél és azt az $(\boldsymbol{a} \rfloor \boldsymbol{b}) \longrightarrow ({}_{-}\boldsymbol{a} \rfloor {}_{+}\boldsymbol{b})$, illetve $(\boldsymbol{a} \rfloor \boldsymbol{b}) \longrightarrow \left({}_{-}\boldsymbol{a} \rfloor {}^{+}\boldsymbol{b}\right)$ lépések valamelyikével (akár mind a kettővel) csökkentjük 1-gyel.

1-átvitel Az $\boldsymbol{a} = (1, a_2, \ldots a_n)$ indexvektor első eleme elérte az 1-et, és azt az $(\boldsymbol{a} \rfloor \boldsymbol{b}) \longrightarrow \left({}^{-}\boldsymbol{a} \rfloor {}^{+}\boldsymbol{b}\right)$, illetve $(\boldsymbol{a} \rfloor \boldsymbol{b}) \longrightarrow \left({}^{-}\boldsymbol{a} \rfloor {}_{+}\boldsymbol{b}\right)$ lépések valamelyikével (akár mind a kettővel) átvisszük a $\boldsymbol{b}$ vektorba.

1-ürítés Az a speciális 1-átvitel, amikor az $\boldsymbol{a} = (1)$ vektor egyetlen 1 elemét visszük át a $\boldsymbol{b}$ vektorba, és igy az $\boldsymbol{a}$ vektor kiürül.

Nagyon fontos fogalom még a *hasadás*, amikor egy lépést és annak duális párját egyszerre alkalmazzuk.

Az a sejtésünk, hogy a különböző polilogaritmikus integrálok egyértelműen meghatározzák, hogy a négy fázisban milyen lépéseket, milyen előjellel, illetve hogy azokat hasadással vagy anélkül kell-e végrehajtani. Ezen sejtésünket konkrét példák vizsgálatával kezdjük.

1. Példa: Az $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{(2,3)}(x) \cdot \mathrm{Li}_{(4,1)}(x)}{x}\, \mathrm{d}x$ integrál kiszámítása

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{Li}_{(2,3)}(x) \cdot \mathrm{Li}_{(4,1)}(x)}{x}\, \mathrm{d}x = {} & \mathrm{Li}_{(2,3)}(x) \cdot \mathrm{Li}_{(5,1)}(x) - \mathrm{Li}_{(1,3)}(x) \cdot \mathrm{Li}_{(6,1)}(x) + \mathrm{Li}_{(3)}(x) \cdot \mathrm{Li}_{(1,6,1)}(x) - \mathrm{Li}_{(2)}(x) \cdot \mathrm{Li}_{(2,6,1)}(x) + \\
& + \mathrm{Li}_{(1)}(x) \cdot \mathrm{Li}_{(3,6,1)}(x) - \mathrm{Li}_{(1,3,6,1)}(x)
\end{aligned}$$

$$(2,3 \rfloor 5,1) - (1,3 \rfloor 6,1) + (3 \rfloor 1,6,1) - (2 \rfloor 2,6,1) + (1 \rfloor 3,6,1) - (1,3,6,1)$$

Inicializálás $(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow (\boldsymbol{a}\rfloor_+\boldsymbol{b})$

$$(2,3);(4,1) \longrightarrow (2,3\rfloor 5,1)\dots$$

Sztandard lépés $(\boldsymbol{a}\rfloor\boldsymbol{b}) \longrightarrow -(_-\boldsymbol{a}\rfloor_+\boldsymbol{b})$

$$(2,3\rfloor 5,1)-(1,3\rfloor 6,1)+(3\rfloor 1,6,1)-(2\rfloor 2,6,1)+(1\rfloor 3,6,1)-(1,3,6,1)$$

1-átvitel $(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow -\left({}^-\boldsymbol{a} \mid {}^+\boldsymbol{b}\right)$

$$(2,3\rfloor 5,1)-(1,3\rfloor 6,1)+(3\rfloor 1,6,1)-(2\rfloor 2,6,1)+(1\rfloor 3,6,1)-(1,3,6,1)$$

1-ürítés = 1-átvitel

$$(2,3\rfloor 5,1)-(1,3\rfloor 6,1)+(3\rfloor 1,6,1)-(2\rfloor 2,6,1)+(1\rfloor 3,6,1)-(1,3,6,1)$$

2. Példa: Az $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Le}_{(4,1)}(x)\cdot \mathrm{Le}_{(-2,3)}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ integrál kiszámítása

$$\int \frac{\mathrm{Le}_{(4,1)}(x)\cdot \mathrm{Le}_{(-2,3)}(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Le}_{(4,1)}(x)\cdot\mathrm{Le}_{(-1,3)}(x)-\mathrm{Le}_{(3,1)}(x)\cdot\mathrm{Le}_{(0,3)}(x)+\mathrm{Le}_{(2,1)}(x)\cdot\mathrm{Le}_{(1,3)}(x)-\mathrm{Le}_{(1,1)}(x)\cdot\mathrm{Le}_{(2,3)}(x)+ \\ +\mathrm{Le}_{(1)}(x)\cdot\mathrm{Le}_{(1,2,3)}(x)-\mathrm{Le}_{(1,1,2,3)}(x)+\mathrm{Le}_{(2,2,3)}(x)$$

$$(4,1\rfloor -1,3)-(3,1\rfloor 0,3)+(2,1\rfloor 1,3)-(1,1\rfloor 2,3)+(1\rfloor 1,2,3)-(1,1,2,3)+(2,2,3)$$

Inicializálás $(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow (\boldsymbol{a}\rfloor_+\boldsymbol{b})$

$$(4,1);(-2,3) \longrightarrow (4,1\rfloor -1,3)\dots$$

Sztandard lépés $(\boldsymbol{a}\rfloor\boldsymbol{b}) \longrightarrow -(_-\boldsymbol{a}\rfloor_+\boldsymbol{b})$

$$(4,1\rfloor -1,3)-(3,1\rfloor 0,3)+(2,1\rfloor 1,3)-(1,1\rfloor 2,3)+(1\rfloor 1,2,3)-(1,1,2,3)+(2,2,3)$$

1-átvitel $(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow -\left({}^-\boldsymbol{a} \mid {}^+\boldsymbol{b}\right)$

$$(4,1\rfloor -1,3)-(3,1\rfloor 0,3)+(2,1\rfloor 1,3)-(1,1\rfloor 2,3)+(1\rfloor 1,2,3)-(1,1,2,3)+(2,2,3)$$

1-ürítés Hasadás: $(\boldsymbol{a}\rfloor\boldsymbol{b}) \longrightarrow -\left({}^-\boldsymbol{a}\rfloor^+\boldsymbol{b}\right)+\left({}^-\boldsymbol{a}\rfloor_+\boldsymbol{b}\right)$

$$(4,1\rfloor -1,3)-(3,1\rfloor 0,3)+(2,1\rfloor 1,3)-(1,1\rfloor 2,3)+(1\rfloor 1,2,3)-(1,1,2,3)+(2,2,3)$$

3. Példa: Az $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{(3,3)}(x)\cdot \mathrm{Li}_{(-3,4)}(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$ integrál kiszámítása

$$\int \frac{\mathrm{Le}_{(3,3)}(x)\cdot \mathrm{Le}_{(-4,3)}(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Le}_{(3,3)}(x)\cdot\mathrm{Le}_{(1,-4,3)}(x)-\mathrm{Le}_{(2,3)}(x)\cdot\mathrm{Le}_{(2,-4,3)}(x)+\mathrm{Le}_{(1,3)}(x)\cdot\mathrm{Le}_{(3,-4,3)}(x)- \\ -\mathrm{Le}_{(3)}(x)\cdot\mathrm{Le}_{(1,3,-4,3)}(x)+\mathrm{Le}_{(2)}(x)\cdot\mathrm{Le}_{(2,3,-4,3)}(x)-\mathrm{Le}_{(1)}(x)\cdot\mathrm{Le}_{(3,3,-4,3)}(x)+\mathrm{Le}_{(1,3,3,-4,3)}(x)-\mathrm{Le}_{(4,3,-4,3)}(x)- \\ \overset{(2)}{-}\mathrm{Le}_{(3,3)}(x)\cdot\mathrm{Le}_{(-3,3)}(x)+\mathrm{Le}_{(2,3)}(x)\cdot\mathrm{Le}_{(-2,3)}(x)-\mathrm{Le}_{(1,3)}(x)\cdot\mathrm{Le}_{(-1,3)}(x)+\mathrm{Le}_{(3)}(x)\cdot\mathrm{Le}_{(1,-1,3)}(x)- \\ -\mathrm{Le}_{(2)}(x)\cdot\mathrm{Le}_{(2,-1,3)}(x)+\mathrm{Le}_{(1)}(x)\cdot\mathrm{Le}_{(3,-1,3)}(x)-\mathrm{Le}_{(1,3,-1,3)}(x)+\mathrm{Le}_{(4,-1,3)}(x)$$

1. feladat

$$(3,3\rfloor 1,-4,3)-(2,3\rfloor 2,-4,3)+(1,3\rfloor 3,-4,3)-(3\rfloor 1,3,-4,3)+(2\rfloor 2,3,-4,3)-(1\rfloor 3,3,-4,3)+(1,3,3,-4,3)-(4,3,-4,3)$$

2.feladat

$$-(3,3\rfloor -3,3)+(2,3\rfloor -2,3)-(1,3\rfloor -1,3)+(3\rfloor 1,-1,3)-(2\rfloor 2,-1,3)+(1\rfloor 3,-1,3)-(1,3,-1,3)+(4,-1,3)$$

A feladat az inicializálásnál széthasad, és így lényegében két feladatot kell megoldani. (1. feladat, 2. feladat)

Inicializálás $(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow \left(\boldsymbol{a}\rfloor^{+}\boldsymbol{b}\right) - \left(\boldsymbol{a}\rfloor_{+}\boldsymbol{b}\right)$

$$\begin{array}{lll}
 & & (4,1\rfloor 1,-3,4)\ldots \\
 & \nearrow & \left(\boldsymbol{a}\rfloor^{+}\boldsymbol{b}\right) \\
(3,3);(-3,4) & & \\
 & \searrow & -\left(\boldsymbol{a}\rfloor_{+}\boldsymbol{b}\right) \\
 & & -(3,3\rfloor -3,3)
\end{array}$$

1. feladat

Sztandard lépés $(\boldsymbol{a}\rfloor\boldsymbol{b}) \longrightarrow -\left({}_{-}\boldsymbol{a}\rfloor_{+}\boldsymbol{b}\right)$

$$(3,3\rfloor 1,-4,3) - (2,3\rfloor 2,-4,3) + (1,3\rfloor 3,-4,3) - (3\rfloor 1,3,-4,3) + (2\rfloor 2,3,-4,3) - (1\rfloor 3,3,-4,3) + (1,3,3,-4,3) - (4,3,-4,3)$$

1-átvitel $(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow -\left({}^{-}\boldsymbol{a} \mid {}^{+}\boldsymbol{b}\right)$

$$(3,3\rfloor 1,-4,3) - (2,3\rfloor 2,-4,3) + (1,3\rfloor 3,-4,3) - (3\rfloor 1,3,-4,3) + (2\rfloor 2,3,-4,3) - (1\rfloor 3,3,-4,3) + (1,3,3,-4,3) - (4,3,-4,3)$$

1-ürítés Hasadás: $(\boldsymbol{a}\rfloor\boldsymbol{b}) \longrightarrow -\left({}^{-}\boldsymbol{a}\rfloor^{+}\boldsymbol{b}\right) + \left({}^{-}\boldsymbol{a}\rfloor_{+}\boldsymbol{b}\right)$

$$(3,3\rfloor 1,-4,3) - (2,3\rfloor 2,-4,3) + (1,3\rfloor 3,-4,3) - (3\rfloor 1,3,-4,3) + (2\rfloor 2,3,-4,3) - (1\rfloor 3,3,-4,3) + (1,3,3,-4,3) - (4,3,-4,3)$$

2. feladat

Sztandard lépés $(\boldsymbol{a}\rfloor\boldsymbol{b}) \longrightarrow -\left({}_{-}\boldsymbol{a}\rfloor_{+}\boldsymbol{b}\right)$

$$-(3,3\rfloor -3,3) + (2,3\rfloor -2,3) - (1,3\rfloor -1,3) + (3\rfloor 1,-1,3) - (2\rfloor 2,-1,3) + (1\rfloor 3,-1,3) - (1,3,-1,3) + (4,-1,3)$$

1-átvitel $(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow -\left({}^{-}\boldsymbol{a} \mid {}^{+}\boldsymbol{b}\right)$

$$-(3,3\rfloor -3,3) + (2,3\rfloor -2,3) - (1,3\rfloor -1,3) + (3\rfloor 1,-1,3) - (2\rfloor 2,-1,3) + (1\rfloor 3,-1,3) - (1,3,-1,3) + (4,-1,3)$$

1-ürítés Hasadás: $(\boldsymbol{a}\rfloor\boldsymbol{b}) \longrightarrow -\left({}^{-}\boldsymbol{a}\rfloor^{+}\boldsymbol{b}\right) + \left({}^{-}\boldsymbol{a}\rfloor_{+}\boldsymbol{b}\right)$

$$-(3,3\rfloor -3,3) + (2,3\rfloor -2,3) - (1,3\rfloor -1,3) + (3\rfloor 1,-1,3) - (2\rfloor 2,-1,3) + (1\rfloor 3,-1,3) - (1,3,-1,3) + (4,-1,3)$$

Vagyis, a két feladat fázisaiban a lépések már megegyeznek.
Sokkal komplikáltabb a kiürítési feladat alakulása a következő példában, mert minden sztandard lépésnél hasadás lép fel.

4. Példa: Az $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Le}_{(2,3)}(1-x)\cdot \mathrm{Le}_{(4)}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ integrál kiszámítása

Inicializálás $(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow \left(\boldsymbol{a}\rfloor_{+}\boldsymbol{b}\right)$

Sztandard lépés Hasadás: $(\boldsymbol{a}\rfloor\boldsymbol{b}) \longrightarrow -\left({}_{-}\boldsymbol{a}\rfloor_{+}\boldsymbol{b}\right) + \left({}_{-}\boldsymbol{a}\rfloor^{+}\boldsymbol{b}\right)$

1-átvitel $(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow \left({}^{-}\boldsymbol{a} \mid {}_{+}\boldsymbol{b}\right)$

1-ürítés $=$ 1-átvitel

$$\begin{array}{lllllllll}
 & & & & & & & -(1\rfloor 1,1,1,6) & -(2,1,1,6) \\
 & & & & & & \nearrow & & \\
 & & & & -(2\rfloor 1,1,6) & & \to & +(1\rfloor 2,1,6) & +(3,1,6) \\
 & & & \nearrow & & & & & \\
 & & -(1,3\rfloor 6) & -(3\rfloor 1,6) & \to & +(2\rfloor 2,6) & \to & +(1\rfloor 1,2,6) & +(2,2,6) \\
 & \nearrow & & & & & \searrow & & \\
 & & & & & & & -(1\rfloor 3,6) & -(4,6) \\
(2,3\rfloor 5) & & & & & & & & \\
 & & & & & & & -(1\rfloor 2,1,1,5) & -(3,1,1,5) \\
 & \searrow & & & & & \nearrow & & \\
 & & +(1,3\rfloor 1,5) & +(3\rfloor 1,1,5) & \longrightarrow & +(2\rfloor 1,1,1,5) & \to & +(1\rfloor 1,1,1,1,5) & +(2,1,1,1,5) \\
 & & & & \searrow & & & & \\
 & & & & & -(2\rfloor 2,1,5) & \to & -(1\rfloor 1,2,1,5) & -(2,2,1,5) \\
 & & & & & & \searrow & & \\
 & & & & & & & +(1\rfloor 3,1,5) & +(4,1,5)
\end{array}$$

3 Fázisok táblázatai

Inicializálás	$\int \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{1-x}$
$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)$	${}_{+}\boldsymbol{b}$	${}^{+}\boldsymbol{b}$
$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$
$\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)$	${}_{+}\boldsymbol{b}$	${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$
$\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$

Sztandard lépés	$\mathrm{L}_{\boldsymbol{a}}(x)$	$\mathrm{L}_{\boldsymbol{a}}(1-x)$
$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)$	${}_{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$
$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}_{+}\boldsymbol{b}$
$\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)$	${}_{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$
$\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}_{+}\boldsymbol{b}$

Megjegyzés: A sztandard lépés tánlázata csak annyiban különbözik az inicializálás táblázatától, hogy a második oszlopot -1-gyel megszorozzuk.

1-átvitel	$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)$	$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)$	$\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x)$	$\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(1-x)$
$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)$	${}^{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$
$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}^{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}$
$\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)$	${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}^{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$
$\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}^{+}\boldsymbol{b}$

1-ürítés	$\mathrm{L}_{\boldsymbol{a}}(x)$	$\mathrm{L}_{\boldsymbol{a}}(1-x)$
$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)$	${}^{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$
$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}^{+}\boldsymbol{b}$
$\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)$	${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$
$\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$

Megjegyzés: Az 1-ürítés tánlázata megegyezik az 1-átvitel táblázatának első két oszlopával.

Az alábbi táblázat tartalmazza az mind a 32 lehetséges esetet

		$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)$		$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)$		$\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x)$		$\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(1-x)$	
$\int \frac{1}{x}$	$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)$	${}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b}$	${}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b}$	${}_{+}\boldsymbol{b}$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}$	${}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b}$	${}_{+}\boldsymbol{b}$ $-\left({}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$
	$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$ ${}^{+}\boldsymbol{b}$	${}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$ $-\left({}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$ ${}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}$	${}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b}$
	$\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)$	${}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$	${}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$	${}_{+}\boldsymbol{b}$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}_{+}\boldsymbol{b}-{}^{+}\boldsymbol{b}$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b}$	${}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$	${}_{+}\boldsymbol{b}$ $-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}_{+}\boldsymbol{b}-{}^{+}\boldsymbol{b}$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$
	$\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$ ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$	${}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$ $-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$ ${}^{+}\boldsymbol{b}$	${}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$
$\int \frac{1}{1-x}$	$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)$	${}^{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b}$	${}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b}$	${}^{+}\boldsymbol{b}$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}^{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}$	${}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b}$	${}^{+}\boldsymbol{b}$ $-\left({}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$
	$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$ ${}^{+}\boldsymbol{b}$	${}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$ $-\left({}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$ ${}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}$	${}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b}$
	$\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)$	${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$	${}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$	${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}_{+}\boldsymbol{b}-{}^{+}\boldsymbol{b}$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b}$	${}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$	${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$ $-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}_{+}\boldsymbol{b}-{}^{+}\boldsymbol{b}$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$
	$\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$ ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$	${}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$ $-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$ ${}^{+}\boldsymbol{b}$	${}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$

4 A polilogaritmus integrálok 10 alapesete

Elegendő az alábbi tíz esetet tisztázni, mert ezekből az összes többi tükrözéssel pozíciócserével megkapható.

LiLi (1) $\int \frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x) \cdot \mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x} \,\mathrm{d}x$ (2) $\int \frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x) \cdot \mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)}{1-x} \,\mathrm{d}x$ (3) $\int \frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x) \cdot \mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x} \,\mathrm{d}x$

LeLe (4) $\int \frac{\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x) \cdot \mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x} \,\mathrm{d}x$ (5) $\int \frac{\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x) \cdot \mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{1-x} \,\mathrm{d}x$ (6) $\int \frac{\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(1-x) \cdot \mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x} \,\mathrm{d}x$

LiLe (7) $\int \frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x) \cdot \mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x} \,\mathrm{d}x$ (8) $\int \frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x) \cdot \mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{1-x} \,\mathrm{d}x$ (9) $\int \frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x) \cdot \mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x} \,\mathrm{d}x$ (10) $\int \frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x) \cdot \mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)}{x} \,\mathrm{d}x$

zo

1	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}$ $\begin{array}{cc} {}_{+}\boldsymbol{b} & {}_{+}\boldsymbol{b} \\ {}^{+}\boldsymbol{b} & {}^{+}\boldsymbol{b} \end{array}$		$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)}{1-x}$ $\begin{array}{cc} -({}_{+}\boldsymbol{b}) & {}_{+}\boldsymbol{b} \\ {}^{+}\boldsymbol{b} & {}^{+}\boldsymbol{b} \end{array}$	
2	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)}{1-x}$ $\begin{array}{cc} {}^{+}\boldsymbol{b} & {}_{+}\boldsymbol{b} \\ {}^{+}\boldsymbol{b} & {}^{+}\boldsymbol{b} \end{array}$		$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)}{x}$ $\begin{array}{cc} -({}^{+}\boldsymbol{b}) & {}_{+}\boldsymbol{b} \\ {}^{+}\boldsymbol{b} & {}^{+}\boldsymbol{b} \end{array}$	
3	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}$ $\begin{array}{cc} {}_{+}\boldsymbol{b} & -({}^{+}\boldsymbol{b}) \\ -({}_{+}\boldsymbol{b}) & -({}_{+}\boldsymbol{b}) \end{array}$	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)\cdot\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)}{x}$ $\begin{array}{cc} -({}^{+}\boldsymbol{b}) & -({}^{+}\boldsymbol{b}) \\ -({}_{+}\boldsymbol{b}) & -({}_{+}\boldsymbol{b}) \end{array}$	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)}{1-x}$ $\begin{array}{cc} -({}_{+}\boldsymbol{b}) & -({}^{+}\boldsymbol{b}) \\ -({}_{+}\boldsymbol{b}) & -({}_{+}\boldsymbol{b}) \end{array}$	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)\cdot\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)}{1-x}$ $\begin{array}{cc} {}^{+}\boldsymbol{b} & -({}^{+}\boldsymbol{b}) \\ -({}_{+}\boldsymbol{b}) & -({}_{+}\boldsymbol{b}) \end{array}$
4	$\frac{\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}$ $\begin{array}{cc} {}_{+}\boldsymbol{b} & {}_{+}\boldsymbol{b} \\ {}^{+}\boldsymbol{b} & {}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b} \end{array}$		$\frac{\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)}{1-x}$ $\begin{array}{cc} -({}_{+}\boldsymbol{b}) & {}_{+}\boldsymbol{b} \\ {}^{+}\boldsymbol{b} & {}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b} \end{array}$	
5	$\frac{\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{1-x}$ $\begin{array}{cc} {}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b} & {}_{+}\boldsymbol{b} \\ {}^{+}\boldsymbol{b} & {}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b} \end{array}$		$\frac{\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}1-(x)}{x}$ $\begin{array}{cc} -({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}) & {}_{+}\boldsymbol{b} \\ {}^{+}\boldsymbol{b} & {}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b} \end{array}$	
6	$\frac{\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}$ $\begin{array}{cc} {}_{+}\boldsymbol{b} & -({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}) \\ -({}^{+}\boldsymbol{b}) & -({}_{+}\boldsymbol{b}) \end{array}$	$\frac{\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x)}{x}$ $\begin{array}{cc} -({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}) & -({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}) \\ -({}^{+}\boldsymbol{b}) & -({}_{+}\boldsymbol{b}) \end{array}$	$\frac{\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)}{1-x}$ $\begin{array}{cc} -({}_{+}\boldsymbol{b}) & -({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}) \\ -({}^{+}\boldsymbol{b}) & -({}_{+}\boldsymbol{b}) \end{array}$	$\frac{\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(1-x)}{1-x}$ $\begin{array}{cc} {}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b} & -({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}) \\ -({}^{+}\boldsymbol{b}) & -({}_{+}\boldsymbol{b}) \end{array}$
7	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}$ $\begin{array}{cc} {}_{+}\boldsymbol{b} & {}_{+}\boldsymbol{b} \\ {}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b} & {}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b} \end{array}$	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x)}{x}$ $\begin{array}{cc} {}_{+}\boldsymbol{b} & {}_{+}\boldsymbol{b} \\ {}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b} & {}^{+}\boldsymbol{b} \end{array}$	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)}{1-x}$ $\begin{array}{cc} -({}_{+}\boldsymbol{b}) & {}_{+}\boldsymbol{b} \\ {}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b} & {}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b} \end{array}$	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(1-x)}{1-x}$ $\begin{array}{cc} -({}_{+}\boldsymbol{b}) & {}_{+}\boldsymbol{b} \\ {}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b} & {}^{+}\boldsymbol{b} \end{array}$
8	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{1-x}$ $\begin{array}{cc} {}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b} & {}_{+}\boldsymbol{b} \\ {}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b} & {}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b} \end{array}$	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x)}{1-x}$ $\begin{array}{cc} {}^{+}\boldsymbol{b} & {}_{+}\boldsymbol{b} \\ {}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b} & {}^{+}\boldsymbol{b} \end{array}$	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)}{x}$ $\begin{array}{cc} -({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}) & {}_{+}\boldsymbol{b} \\ {}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b} & {}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b} \end{array}$	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(1-x)}{x}$ $\begin{array}{cc} -({}^{+}\boldsymbol{b}) & {}_{+}\boldsymbol{b} \\ {}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b} & {}^{+}\boldsymbol{b} \end{array}$
9	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}$ $\begin{array}{cc} {}_{+}\boldsymbol{b} & -({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}) \\ -({}_{+}\boldsymbol{b}) & -({}_{+}\boldsymbol{b}) \end{array}$	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x)}{x}$ $\begin{array}{cc} -({}^{+}\boldsymbol{b}) & -({}^{+}\boldsymbol{b}) \\ -({}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}) & -({}_{+}\boldsymbol{b}) \end{array}$	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)}{1-x}$ $\begin{array}{cc} -({}_{+}\boldsymbol{b}) & -({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}) \\ -({}_{+}\boldsymbol{b}) & -({}_{+}\boldsymbol{b}) \end{array}$	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(1-x)}{1-x}$ $\begin{array}{cc} {}^{+}\boldsymbol{b} & -({}^{+}\boldsymbol{b}) \\ -({}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}) & -({}_{+}\boldsymbol{b}) \end{array}$
10	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)}{x}$ $\begin{array}{cc} -({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}) & -({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}) \\ -({}_{+}\boldsymbol{b}) & -({}_{+}\boldsymbol{b}) \end{array}$	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(1-x)}{x}$ $\begin{array}{cc} {}_{+}\boldsymbol{b} & -({}^{+}\boldsymbol{b}) \\ -({}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}) & -({}_{+}\boldsymbol{b}) \end{array}$	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{1-x}$ $\begin{array}{cc} {}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b} & -({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}) \\ -({}_{+}\boldsymbol{b}) & -({}_{+}\boldsymbol{b}) \end{array}$	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x)}{1-x}$ $\begin{array}{cc} -({}_{+}\boldsymbol{b}) & -({}^{+}\boldsymbol{b}) \\ -({}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}) & -({}_{+}\boldsymbol{b}) \end{array}$