1 Tetszőleges $w \in \mathfrak{h}$ szó $\sum_i w_i \sqcup x^j$, $(w_j \in \mathfrak{h}y)$ felbontásatása, $\mathrm{reg}^0_{\sqcup}(w)$

Shu OI and Kimio UENO; Fundamental Solutions of the Knizhnik-Zamolodchikov Equation of One Variable and the Riemann-Hilbert Problem, PROPOSITION 4 ([R]), TOKYO J. MATH. VOL. 41, NO. 1, 2018

The algebra $(\mathfrak{h}, \sqcup)$ is a polynomialalgebra of x whose coefficients are in $\mathfrak{h}y$, and is a polynomial algebra of x, y whose coefficients are in $x\mathfrak{h}y$; $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}y\,[x]$, $\mathfrak{h} = xy\mathfrak{h}\,[x, y]$. That is, any word w in $\mathfrak{h}$ can be written as $\sum_i w_i \sqcup x^j = \sum_{i,j} y^j \sqcup w_{i,j} \sqcup x^j$ uniquely, where $w_j \in \mathfrak{h}y$ and $w_{i,j} \in x\mathfrak{h}y$.

A $(\mathfrak{h}, \sqcup)$ algebra egy egyváltozós polinomalgebra az x változóval, melynek együthatói a $\mathfrak{h}y$ szavaiból kerülnek ki, és ugyanakkor egy kétváltozós polinomalgebra is x, y változókkal, melynek együthatói az $x\mathfrak{h}y$ szavaiból kerülnek ki; $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}y\,[x]$, $\mathfrak{h} = xy\mathfrak{h}\,[x, y]$. Vagyis, minden $\mathfrak{h}$-beli w szó felírható

$$\sum_i w_i \sqcup x^j = \sum_{i,j} y^j \sqcup w_{i,j} \sqcup x^j$$

alakban, ahol $w_j \in \mathfrak{h}y$ és $w_{i,j} \in x\mathfrak{h}y$, és ez a felírás egyértelmű.

$\mathbb{Z}[x]$: Az egész együtthatós x válozós polinomok algebrája. Elemei a $p(x) = z_0x^0 + z_1x^1 + z_2x^2 + \ldots + z_nx^n$ $(z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{Z})$ alakú polinomok. Azért algebra, mert az egész együtthatós x válozós polinomok vektorteret alkotnak, és értelmezve van egy szorzat a polinomokon.

$\mathbb{R}[x]$: A valós együtthatós x válozós polinomok algebrája. Elemei a $p(x) = r_0x^0 + r_1x^1 + r_2x^2 + \ldots + r_nx^n$ $(r_0, r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{R})$ alakú polinomok. Azért algebra, mert a valós együtthatós x válozós polinomok vektorteret alkotnak, és értelmezve van egy szorzat a polinomokon.

A $\mathfrak{h} = (\mathfrak{h}, \sqcup) = \mathfrak{h}y\,[x]$ azt fejezi ki, hogy a

$$p(x) = w_0 \sqcup x^0 + w_1 \sqcup x^1 + w_2 \sqcup x^2 + \ldots + w_n \sqcup x^n \in \mathfrak{h}y\,[x]$$

$(w_0, w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathfrak{h}y)$ alakú polinomok éppen a $(\mathfrak{h}, \sqcup)$ algebrát adják. Vagyis, $\mathfrak{h}$ minden w eleme egyértelműen felírható

$$w = w_0 \sqcup x^0 + w_1 \sqcup x^1 + \ldots + w_n \sqcup x^n \;(w_0, w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathfrak{h}y) \tag{1.1}$$

alakban.

Ezen egyértelmű felbontás segítségével definiálhatjuk tetszőleges $w \in \mathfrak{h}$ szó $\mathrm{reg}^0_{\sqcup}(w)$ regularizáltját, ami nem más, mint az (1.1) felbontásban a w_0 konstans együttható. Azaz,

$$\mathrm{reg}^0_{\sqcup}(w) = w_0 \iff w = w_0 \sqcup x^0 + w_1 \sqcup x^1 + \ldots + w_n \sqcup x^n \in \mathfrak{h}y\,[x]$$

A definícióból rögtön következik, hogy tetszőleges $w \in \mathfrak{h}$ szóra $\mathrm{reg}^0_{\sqcup}(w) \in \mathfrak{h}y$ és, hogy $\mathrm{reg}^0_{\sqcup}(u) = u$ minden $u \in \mathfrak{h}y$ szóra. Egy nem $\mathfrak{h}y$-beli w szó egyértelműen felírható ux^n, $u \in \mathfrak{h}y$, $n \geq 0$ alakban, melynek a regularizáltját az alábbi explicit képlet adja meg.

Tetszőleges $u \in \mathfrak{h}y$ y-ra végződő szóra, és tetszőleges $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ számra

$$\mathrm{reg}^0_{\sqcup}(ux^n) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j ux^{n-j} \sqcup x^j \;\; \in \mathfrak{h}y \tag{A}$$

$$\mathrm{reg}^0_{\sqcup}(ux^n) = ux^n - ux^{n-1} \sqcup x + ux^{n-2} \sqcup x^2 - \ldots + (-1)^{n-1}ux \sqcup x^{n-1} + (-1)^n u \sqcup x^n$$

Ezzel ekvivalens az

$$ux^n = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{reg}^0_{\sqcup}(ux^{n-j}) \sqcup x^j \tag{A'}$$

$$ux^n = \mathrm{reg}^0_{\sqcup}(ux^n + \mathrm{reg}^0_{\sqcup}(ux^{n-1}) \sqcup x + \mathrm{reg}^0_{\sqcup}(ux^{n-2}) \sqcup x^2 - \ldots + \mathrm{reg}^0_{\sqcup}(ux) \sqcup x^{n-1} + \mathrm{reg}^0_{\sqcup}(u) \sqcup x^n$$

felbontás.

Az (A') képlet szerint egy $w = ux^n$, $(u \in \mathfrak{h}y)$ szó

$$w = ux^n = w_0 \sqcup\!\sqcup\, x^0 + w_1 \sqcup\!\sqcup\, x^1 + \ldots + w_n \sqcup\!\sqcup\, x^n \ (w_0, w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathfrak{h}y)$$

felbontásában tetszőleges w_k $(0 \leq k \leq n)$ együttható megkapható a

$$w_k = \mathrm{reg}^0_{\sqcup\!\sqcup}(ux^{n-k}) \sqcup\!\sqcup\, x^k = \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j ux^{n-k-j} \sqcup\!\sqcup\, x^j$$

formulával. Az (A) és a vele ekvivalens (A') felbontásból levezetünk egy harmadik, (A") felbontást.

$$ux^n \overset{(A')}{=} \sum_{j=0}^{n} \mathrm{reg}^0_{\sqcup\!\sqcup}(ux^{n-j}) \sqcup\!\sqcup\, x^j \overset{(A)}{=} \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{n-j} (-1)^j ux^{n-j-i} \sqcup\!\sqcup\, x^i \right) \sqcup\!\sqcup\, x^j = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-j} (-1)^j ux^{n-j-i} \sqcup\!\sqcup \left(x^i \sqcup\!\sqcup\, x^j \right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-j} (-1)^j ux^{n-j-i} \sqcup\!\sqcup \binom{i+j}{j} x^{i+j} \overset{k=i+j}{=} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} ux^{n-k} \sqcup\!\sqcup\, x^k$$

Itt kihasználtuk, hogy $x^i \sqcup\!\sqcup\, x^j = \binom{i+j}{j} x^{i+j}$ és, hogy a $\sqcup\!\sqcup$-szorzat asszociatív.

Tetszőleges $u \in \mathfrak{h}y$ y-ra végződő szóra, és tetszőleges $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ számra

$$\mathrm{reg}^0_{\sqcup\!\sqcup}(ux^n) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} ux^{n-k} \sqcup\!\sqcup\, x^k \tag{A"}$$

A következőkben az (A), (A'), illetve (A") felbontásokra adunk egy-egy példát, és ismertetjük, hogy a program hogyan segít bennünket a szükséges számítások elvégzésében.

Példa (A): Legyen $w = xxyxyxxx \notin \mathfrak{h}y$. Ekkor $u = xxyxy$, és $n = 3$. Az (A) felbontás szerint

$$\mathrm{reg}^0_{\sqcup\!\sqcup}(xxyxyxxx) = xxyxyxxx \sqcup\!\sqcup - xxyxyxx \sqcup\!\sqcup\, x + xxyxyx \sqcup\!\sqcup\, xx - xxyxy \sqcup\!\sqcup\, xxx$$

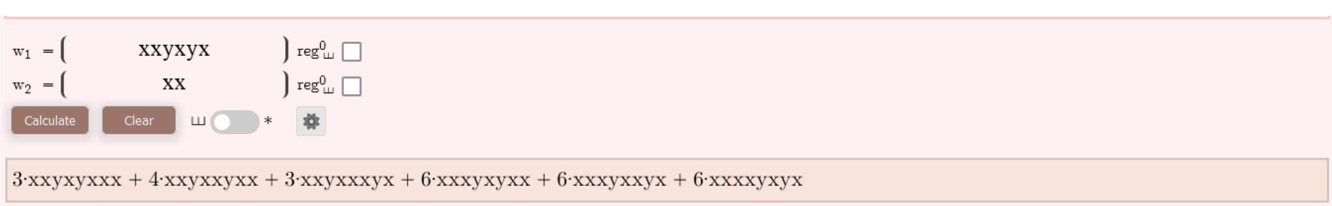
$(x^0 := (\,) := \mathbf{1}$, és $w \sqcup\!\sqcup\, \mathbf{1} = w)$

I. A kártya segítségével ezt kiszámíthatjuk tagonként:

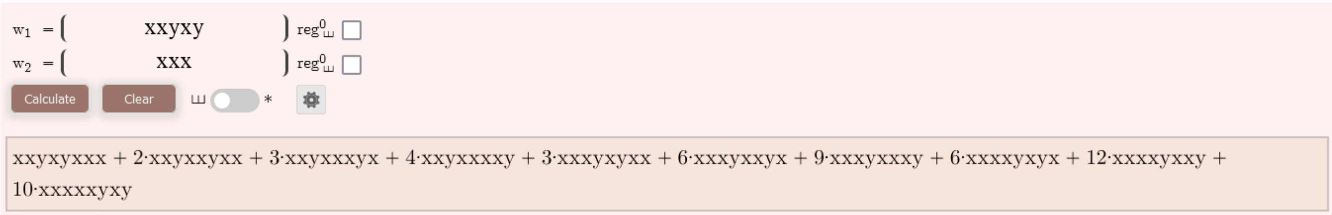
1. w_1-input: $xxyxyxxx$; w_2-input: (üres) $\Longrightarrow$ Calculate

2. w_1-input: $xxyxyxx$; w_2-input: x $\Longrightarrow$ Calculate

3. w_1-input: $xxyxyx$; w_2-input: xx $\Longrightarrow$ Calculate



4. w_1-input: $xxyxy$; w_2-input: xxx $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Calculate}}$



A kapott eredményeket pedig (a megfelelő előjellel ellátva) összevonhatjuk:

1.

$\cancel{xxyxyxxx} - (\cancel{3 \cdot xxyxyxxx} + 2 \cdot xxyxxyxx + 3 \cdot xxxyxyxx) + (\cancel{3 \cdot xxyxyxxx} + 4 \cdot xxyxxyxx + 3 \cdot xxyxxxyx + 6 \cdot xxxyxyxx + 6 \cdot xxxyxxyx + 6 \cdot xxxxyxyx) - (\cancel{xxyxyxxx} + 2 \cdot xxyxxyxx + 3 \cdot xxyxxxyx + 4 \cdot xxyxxxxy + 3 \cdot xxxyxyxx + 6 \cdot xxxyxxyx + 9 \cdot xxxyxxxy + 6 \cdot xxxxyxyx + 12 \cdot xxxxyxxy + 10 \cdot xxxxxyxy) =$

2.

$= -(\cancel{2 \cdot xxyxxyxx} + 3 \cdot xxxyxyxx) + (\cancel{4 \cdot xxyxxyxx} + 3 \cdot xxyxxxyx + 6 \cdot xxxyxyxx + 6 \cdot xxxyxxyx + 6 \cdot xxxxyxyx) - (\cancel{2 \cdot xxyxxyxx} + 3 \cdot xxyxxxyx + 4 \cdot xxyxxxxy + 3 \cdot xxxyxyxx + 6 \cdot xxxyxxyx + 9 \cdot xxxyxxxy + 6 \cdot xxxxyxyx + 12 \cdot xxxxyxxy + 10 \cdot xxxxxyxy) =$

3.

$= -(\cancel{3 \cdot xxxyxyxx}) + (3 \cdot xxyxxxyx + \cancel{6 \cdot xxxyxyxx} + 6 \cdot xxxyxxyx + 6 \cdot xxxxyxyx) - (3 \cdot xxyxxxyx + 4 \cdot xxyxxxxy + \cancel{3 \cdot xxxyxyxx} + 6 \cdot xxxyxxyx + 9 \cdot xxxyxxxy + 6 \cdot xxxxyxyx + 12 \cdot xxxxyxxy + 10 \cdot xxxxxyxy) =$

4.

$= (\cancel{3 \cdot xxyxxxyx} + 6 \cdot xxxyxxyx + 6 \cdot xxxxyxyx) - (\cancel{3 \cdot xxyxxxyx} + 4 \cdot xxyxxxxy + 6 \cdot xxxyxxyx + 9 \cdot xxxyxxxy + 6 \cdot xxxxyxyx + 12 \cdot xxxxyxxy + 10 \cdot xxxxxyxy) =$

5.

$= (\cancel{6 \cdot xxxyxxyx} + 6 \cdot xxxxyxyx) - (4 \cdot xxyxxxxy + \cancel{6 \cdot xxxyxxyx} + 9 \cdot xxxyxxxy + 6 \cdot xxxxyxyx + 12 \cdot xxxxyxxy + 10 \cdot xxxxxyxy) =$

6.

$= (\cancel{6 \cdot xxxxyxyx}) - (4 \cdot xxyxxxxy + 9 \cdot xxxyxxxy + \cancel{6 \cdot xxxxyxyx} + 12 \cdot xxxxyxxy + 10 \cdot xxxxxyxy) =$

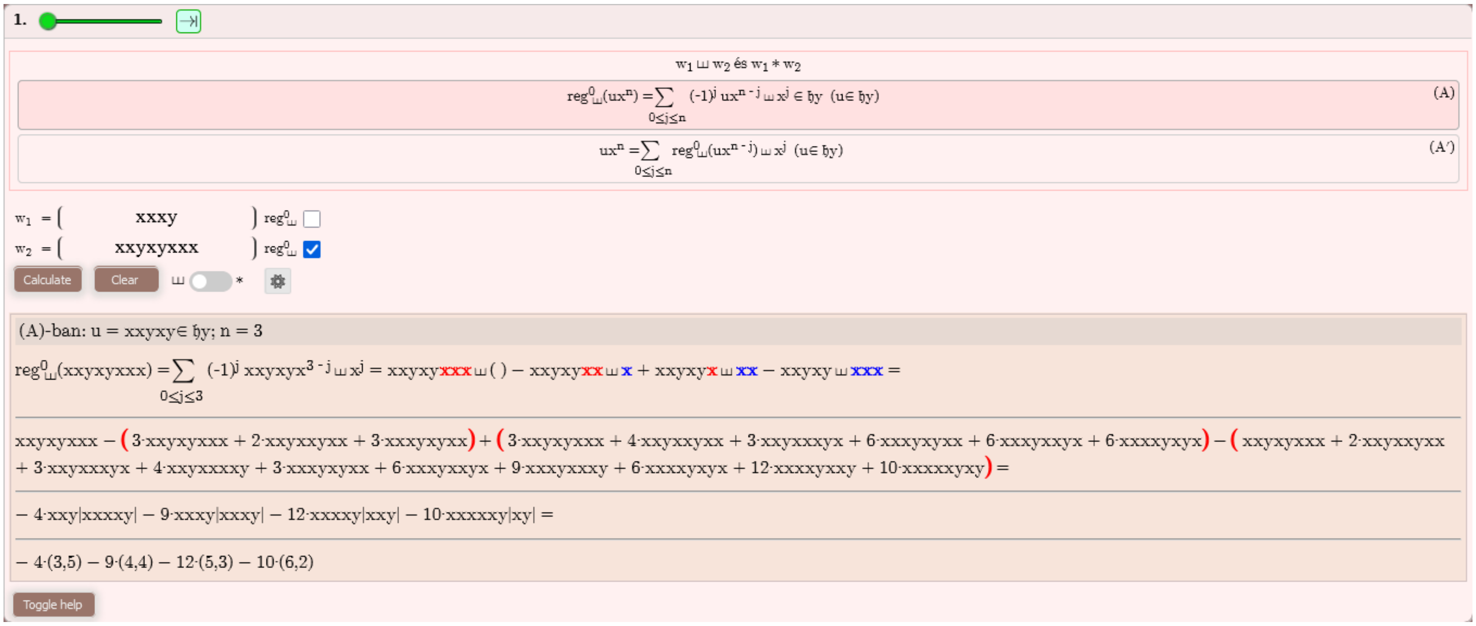
7.

$= -(4 \cdot xxyxxxxy + 9 \cdot xxxyxxxy + 12 \cdot xxxxyxxy + 10 \cdot xxxxxyxy)$

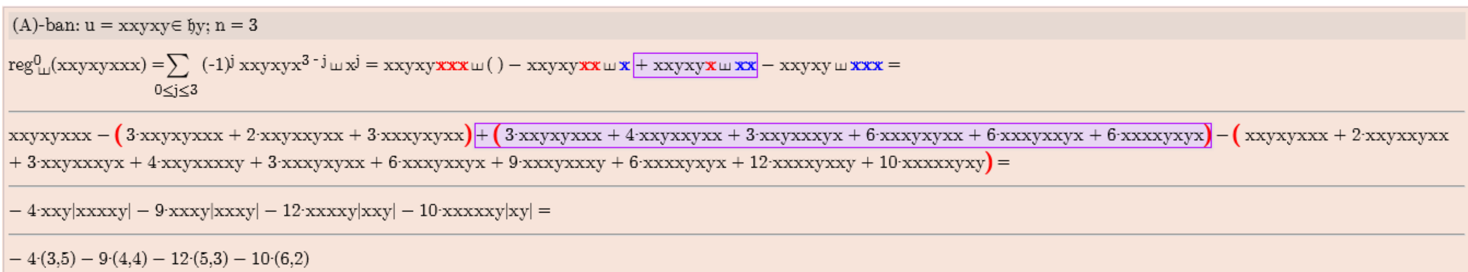
Így a végeredmény: $\mathrm{reg}^0_{\sqcup\!\sqcup}(xxyxyxxx) = -4 \cdot xxyxxxxy - 9 \cdot xxxyxxxy - 12 \cdot xxxxyxxy - 10 \cdot xxxxxyxy$.

Egy fontos észrevétel: *A megmaradó $\mathfrak{h}y$-beli szavak mind az utolsó $xxyxy \sqcup\!\sqcup xxx$ szorzatból kerülnek ki.*

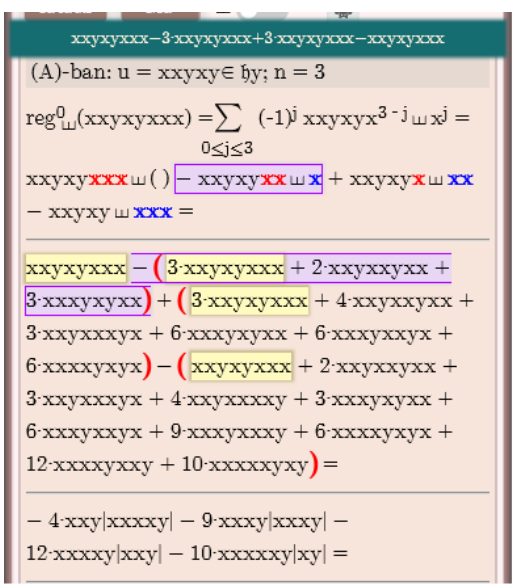
II. Ugyanezt az eredményt egyszerűbben, közvetlenül is megkaphatjuk. A $w_1$vagy w_2 beviteli mezők valamelyikébe bevisszük a teljes $w = xxyxyxxx$ szót (a másik mezőbe bármi lehet), és a mögötte található $\mathrm{reg}^0_{\sqcup\!\sqcup}$ cimkével felíratozott jelölőnégyzetet kipipáljuk. Az alábbi ábrán a w_2 beviteli mezőbe írtuk be az $xxyxyxxx$ szót. ***Arra ügyelni kell, hogy közben az (A) képlet legyen kijelölve (kattintással, piros háttér)***. A kimenet szürke hátterű sorában csak a kiválasztott képlet és bevitt adatok tükröződnek, közvetlenül alatta pedig az (A) felbontási képlet tömör, illetve kibontott formában, kitöltve a megfelelő paraméterekkel. A második sávban az egyes kiszámított előjeles shuffle szorzatok piros zárójellel csoportosítva jelennek meg. A harmadik sávban az összevont végeredmény, míg a negyedikben a végeredmény vektor tartójú multihalmaz megfelelője jelenik meg.

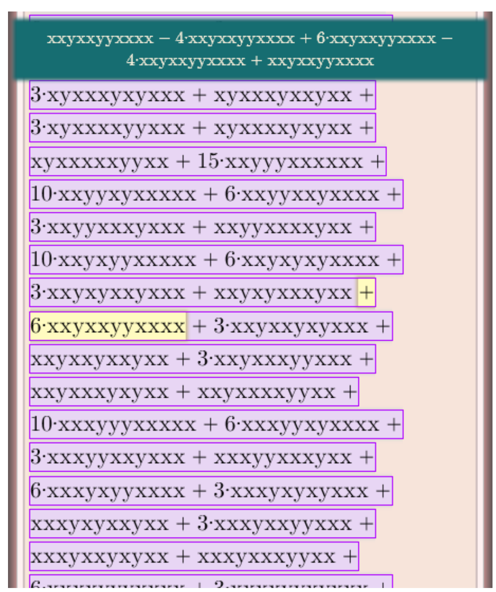


Ha a felbontás valamelyik tagjára kattintunk, akkor a hozzátartozó, kiszámított előjeles shuffle szorzatot kékkel emeli ki a program. A kapcsolat fordítva is működik: a második sávban egy tetszőleges tagra kattintva kijelöli a képlet azon szorzatát, amelyből a tag származik.



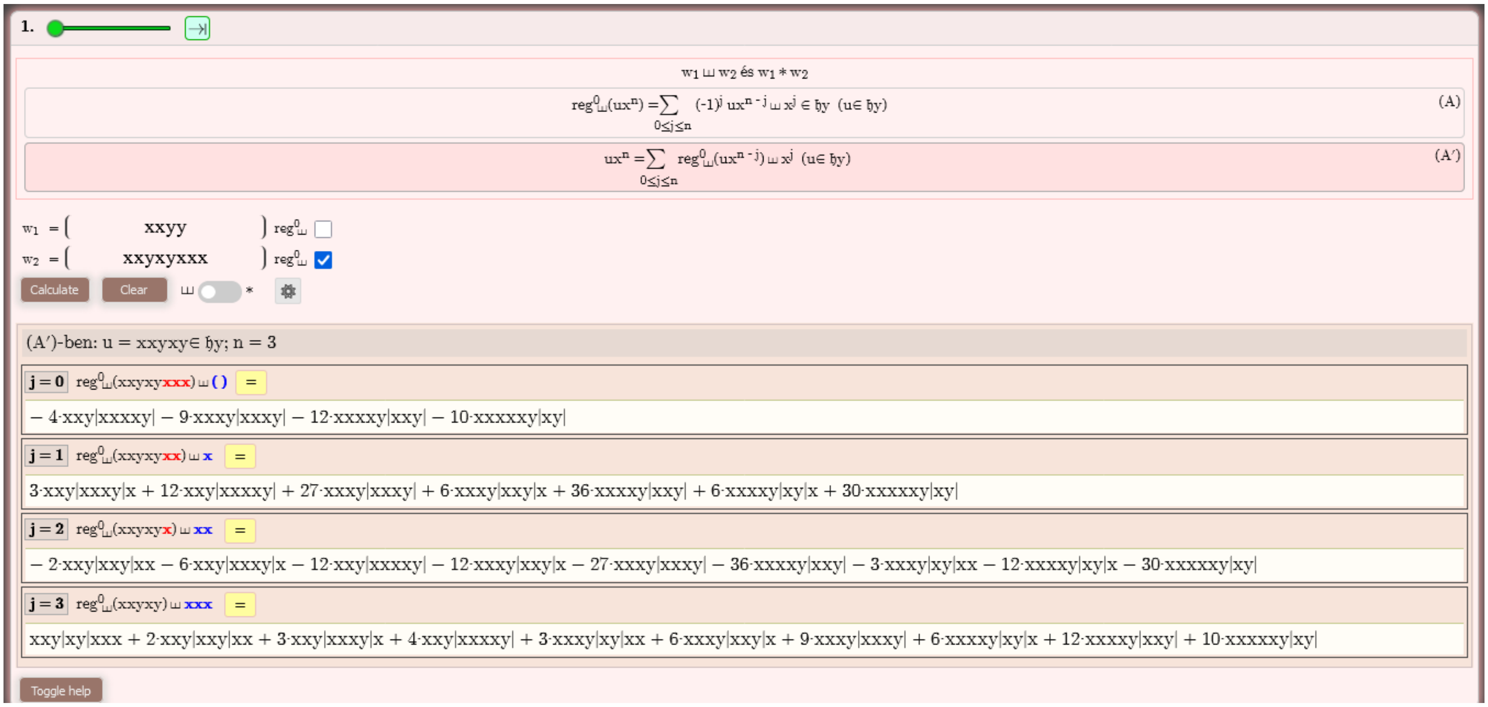
Ha a kiszámított shuffle szorzatban egy tetszőleges tagra kattintunk, akkor az előbbi kék kijelöléssel együtt, az egymást kiejtő tagok sárga alpú kijelölése, illetve a képernyő tetején megjelenő kék alapú mezőben, ezen egymást kiejtő tagok előjeles összege segíti a fenti összevonás elvégzését. Az utóbbi akkor tűnik el, ha tetszőleges olyan helyre kattintunk a képernyőn, amely nem a szóban forgó shuffle szorzat egy tagja. (Vagyis, nem a második sávba.)



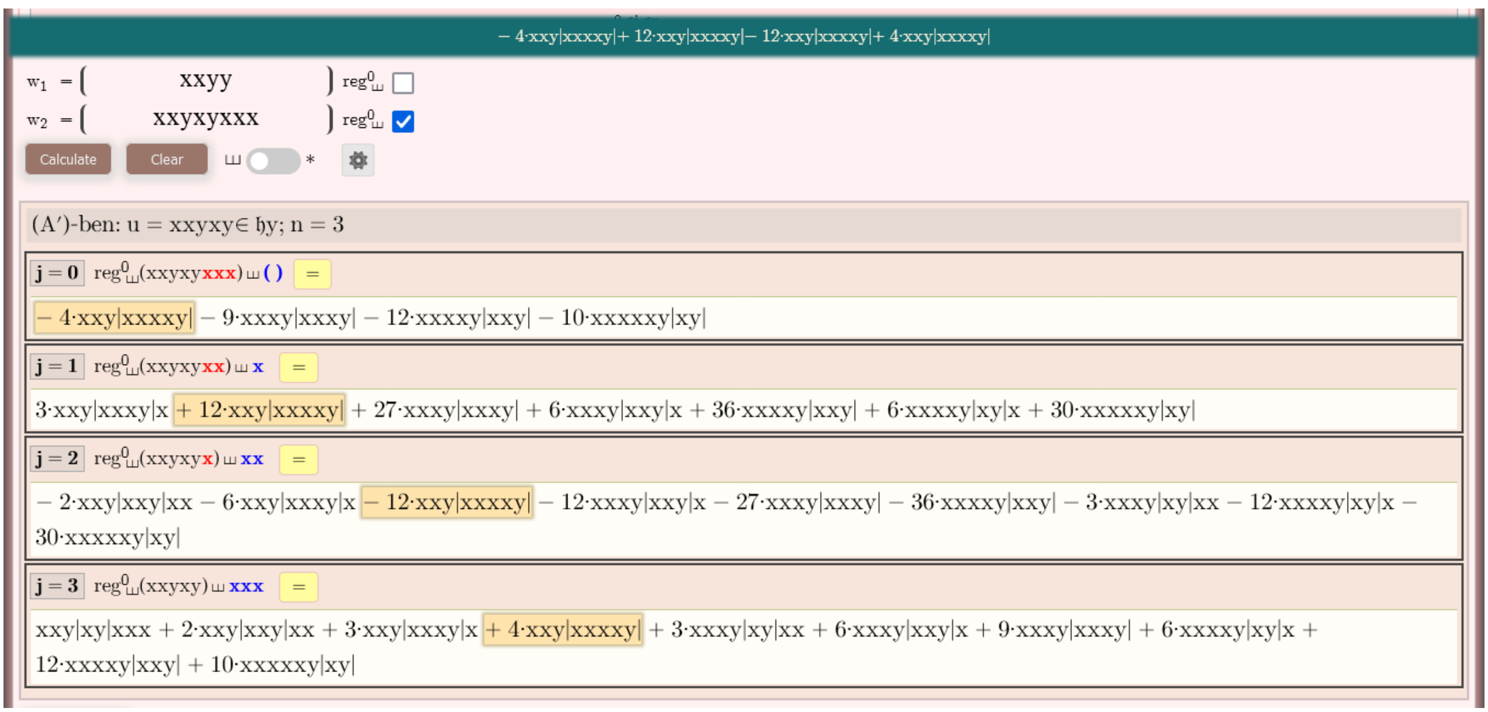


A képernyő tetején kéken felugró kék mező különösen akkor hasznos, ha az előjeles kiszámított shuffle szorzat olyan nagy, hogy az egymást kiejtő tagok közül csak néhány, vagy talán csak egy látható.

III. Ha az (A') felbontást szeretnénk megkapni, akkor a legutóbbi beállítás mellett csak az (A') képletre kell kattintanunk, amely ekkor pirosabb háttérszínt kap. Az első (szürke hátterű) sorban most is csak a kiválasztott képlet és a bevitt adatok tükröződnek: $w = xxyxyxxx = ux^n$ ($u \in \mathfrak{h}y$), ahol $u = xxyxy$ és $n = 3$. Ezt követően minden $0 \le j \le n$ számra (feketével keretezett, elkülönülő mezőkben) az első sorban megjelenik az összegben szereplő $\mathrm{reg}^0_{\sqcup\!\sqcup}(ux^{n-j}) \sqcup\!\sqcup\, x^j$ formula (a megfelelő j értékkel kitöltve), a második (világosabb) sorban pedig a szorzat kiszámított értéke.

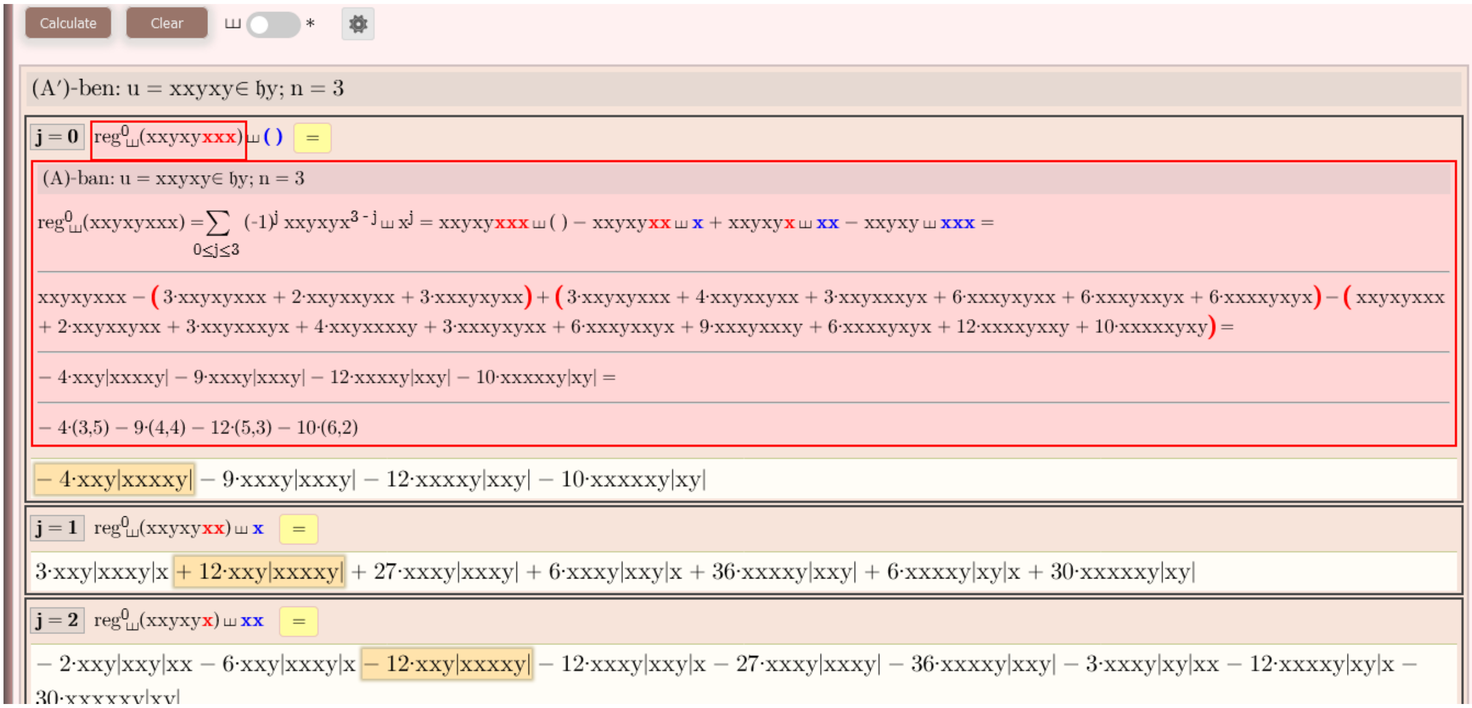


A teljes összeg tagjainak az összevonását a program most is úgy segíti, hogy a fehér sorok tetszőleges tagjára kattintva a különböző j értékekhez tartozó azonos szavakat narancssárgával kiemeli, illetve a képernyő tetején felugró kék mezőben előjeles összeg formájában megjeleníti.

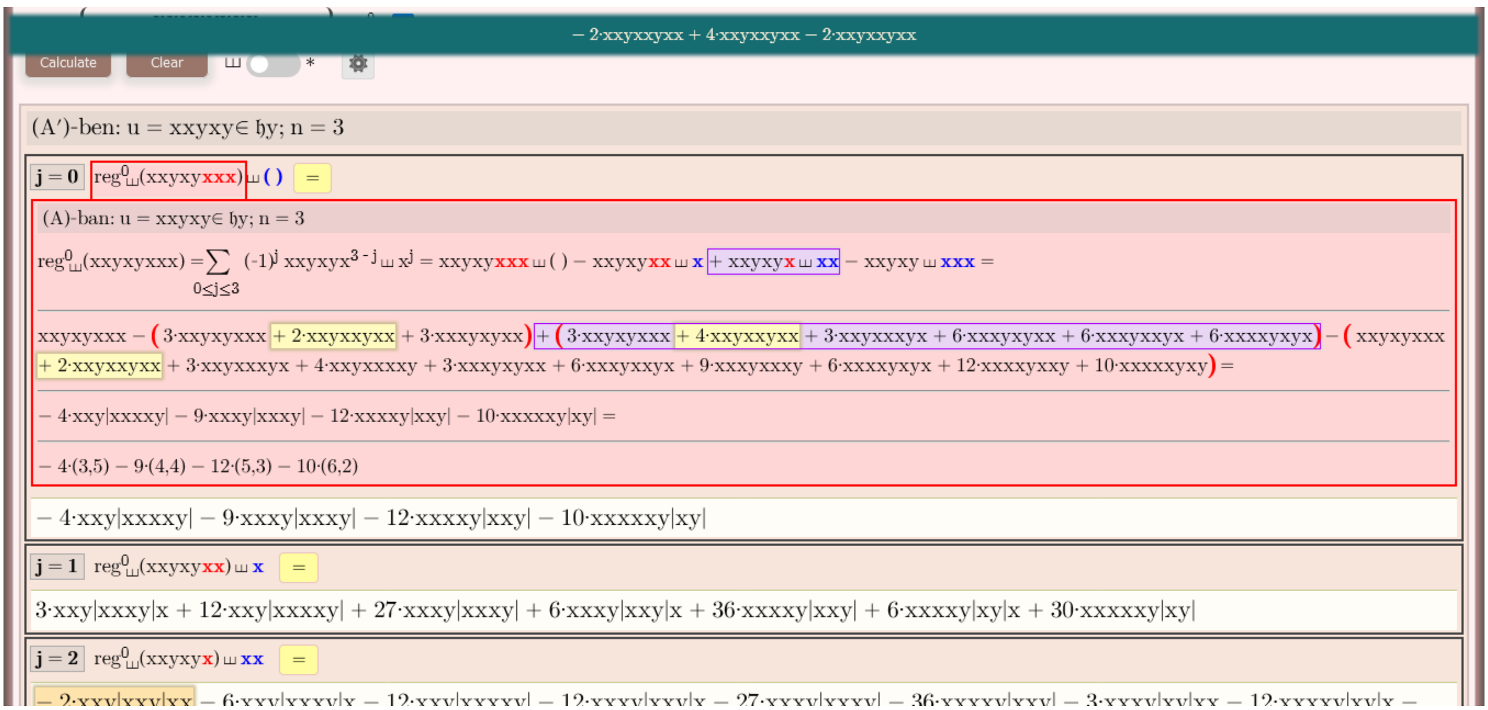


Az (A”) képlet nincs is implementálva, hiszen az csak azt állítja, hogy a $j = n$ értékhez tartozó sor első tagjától eltekintve tetszőleges sorban, az összeg tetszőleges tagjára kattintva, az összevonás eredménye mindig 0 lesz. A $j = n$ értékhez tartozó összeg első tagjára kattintva ($xxyxyxxx$) pedig az összevonás után magát az $w = xxyxyxxx$ szót fogjuk megkapni.

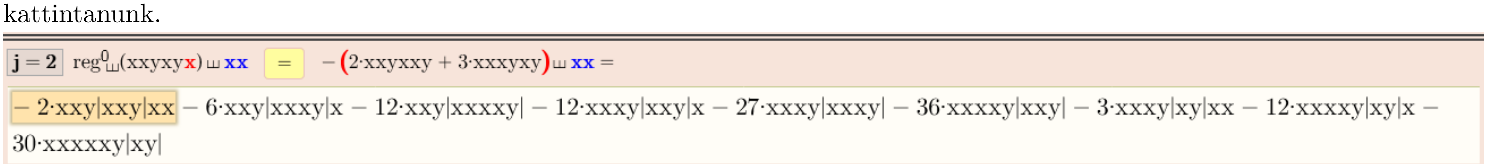
Minden egyes j érték mezőjében részeredményeket is megjeleníthetünk. Ha például a $\mathrm{reg}^0_{\sqcup\!\sqcup}(ux^{n-j})$ formulára kattintunk, akkor az piros háttérszínt kap, és alatta ugyanilyen piros hátterű mezőben láthatjuk annak részletes kiszámítását ugyanúgy, mintha a $\mathrm{reg}^0_{\sqcup\!\sqcup}(ux^{n-j})$ értékét az (A) képletállás mellett számítanánk ki. A részeredmény kiírására szolgáló piros keret úgy zárható be, hogy vagy ugyanezen, vagy egy másik j értékhez tartozó sor ugyanilyen $\mathrm{reg}^0_{\sqcup\!\sqcup}(ux^{n-j})$ formulájára kattintunk. A piros keret kimenete teljesen egyenértékű az (A) képletállás melletti kimenettel, abban az összevonást segítő kijelölések ugyanúgy működnek.



(A piros kereten belüli részbe kattintva ugyanúgy működnek az összevonást segítő kiemelések.)



Az egyes j értékekhez tartozó mezők alsó fehér soraiban a $\mathrm{reg}^0_{\sqcup\!\sqcup}(ux^{n-j}) \sqcup\!\sqcup\, x^j$ szorzat kiszámított és összevont eredményét látjuk. Ha a kiszámítás előtti formulát szeretnénk megjeleníteni, akkor az első sor végén található, sárgás hátterű egyenlőségjelre kell kattintanunk.



Egy tetszőleges $w = ux^n$ $(u \in \mathfrak{h}y)$ szó $\mathrm{reg}^0_{\sqcup\!\sqcup}(ux^n)$ regularizáltjában pontosan akkor lépnek fel non-admissible tagok, ha az u szó non-admissible. Például, a $w = yyxyxx$ szó $\mathrm{reg}^0_{\sqcup\!\sqcup}(yyxyxx)$ regularizáltjára a $3\cdot y|y|xxxy| + 2\cdot y|xy|xxy| + y|xxy|xy| + 2\cdot xy|y|xxy| + xy|xy|xy| + xxy|y|xy|$ polinomot kapjuk, melynek vektor tartójú multihalmaz megfelelője a $3*(1,1,4)+2*(1,2,3)+(1,3,2)+2*(2,1,3)+(2,2,2)+(3,1,2)$ multihalmaz. Viszont a $w = xxyxxyxxxx$ szó $\mathrm{reg}^0_{\sqcup\!\sqcup}(xxyxxyxxxx) = 15\cdot xxy|xxxxxxy| + 30\,\cdot$

$xxxy|xxxxxy|+36\cdot xxxxy|xxxxy|+30\cdot xxxxxy|xxxy|+15\cdot xxxxxxy|xxy| \approx 15*(3,7)+30*(4,6)+36*(5,5)+30*(6,4)+15*(7,3)$ regularizáltjában nem lépnek fel non-admissible tagok.

Gyakorlatok:

1. A program segítségével vizsgálja meg az $x^n \sqcup\!\sqcup\, x^m = \binom{n+m}{n} x^{n+m}$, illetve $y^n \sqcup\!\sqcup\, y^m = \binom{n+m}{n} y^{n+m}$, $(n, m \geq 0)$ azonosságok teljesülését.
2. A program segítségével vizsgálja meg a $\mathrm{reg}^0_{\sqcup\!\sqcup}(yx^n) = (yx^n)^{-1} = x^n y$, $(n \geq 0)$ azonosság teljesülését.

2 Alapformula

Legyen δ egy tetszőleges derivált. Ekkor

- $\delta_*(w) := (\delta w^*)^*$ is egy derivált, amelyet a δ *konjugált deriváltjának* nevezünk
- $\delta_-(w) := (\delta w^-)^-$ is egy derivált, amelyet a δ *inverz deriváltjának* nevezünk
- $\delta_\dagger(w) := \left(\delta w^\dagger\right)^\dagger = \delta_{-*}(w) := (\delta w^{-*})^{-*}$ is egy derivált, amelyet a δ *duális(inverz-konjugált) deriváltjának* nevezünk

Ha mást nem mondunk, akkor a ∂ azt a deriváltat jelöli, amelyet a $\partial x = xx$ és $\partial y = xy$ egyenletek határoznak meg.

$$\partial : \begin{cases} x \longmapsto \boldsymbol{x}x \\ y \longmapsto \boldsymbol{x}y \end{cases} \quad \partial_- : \begin{cases} x \longmapsto x\boldsymbol{x} \\ y \longmapsto y\boldsymbol{x} \end{cases} \quad \partial_* : \begin{cases} x \longmapsto \boldsymbol{y}x \\ y \longmapsto \boldsymbol{y}y \end{cases} \quad \partial_\dagger : \begin{cases} x \longmapsto x\boldsymbol{y} \\ y \longmapsto y\boldsymbol{y} \end{cases}$$

Tehát

- ∂ minden betű *elé* egy x betűt fűz
- ∂_- minden betű *mögé* egy x betűt fűz
- ∂_* minden betű *elé* egy y betűt fűz
- $\partial_{-*} = \partial_\dagger$ minden betű *mögé* egy y betűt fűz

Tétel: Tetszőleges $w \in \mathfrak{h}$ szóval, illetve $n \in \mathbb{N}$ számmal teljesül az alábbi nyolc (ekvivalens) formula:

(1.a)	$w \sqcup\!\sqcup\, x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial^k w}{k!} \bullet x^{n-k}$	(2.a)	$y^n \sqcup\!\sqcup\, w = \sum_{k=0}^{n} y^{n-k} \bullet \frac{\partial_\dagger^k w}{k!}$
(1.b)	$w \bullet x^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\partial^k w}{k!} \sqcup\!\sqcup\, x^{n-k}$	(2.b)	$y^n \bullet w = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\partial_\dagger^k w}{k!} \sqcup\!\sqcup\, y^{n-k}$
(3.a)	$x^n \sqcup\!\sqcup\, w = \sum_{k=0}^{n} x^{n-k} \bullet \frac{\partial_-^k w}{k!}$	(4.a)	$w \sqcup\!\sqcup\, y^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial_*^k w}{k!} \bullet y^{n-k}$
(3.b)	$x^n \bullet w = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\partial_-^k w}{k!} \sqcup\!\sqcup\, x^{n-k}$	(4.b)	$w \bullet y^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\partial_*^k w}{k!} \sqcup\!\sqcup\, y^{n-k}$