

# 1 Az $\mathbf{a} \succeq \mathbf{b}$ finomsági reláció

Két tetszőleges hosszúságú nem negatív számokból álló vektor között értelmezzünk egy részbenrendezési relációt. Azt mondjuk, hogy az  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  vektor *finomabb* mint a  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$  vektor (jelölése  $\mathbf{a} \succeq \mathbf{b}$ ), ha a  $\mathbf{b}$  vektor megkapható az  $\mathbf{a}$  vektorból valahány „,” karakter „+” karakterre cserélésével. Például,  $(2, 3, 1, 0, 2) \succeq (5, 1, 2)$ , mert  $(2 + 3, 1, 0 + 2) = (5, 1, 2)$ , és  $(2, 3, 1, 4) \succeq (2, 8)$ , mert  $(2, 3 + 1 + 4) = (2, 8)$ . Könnyen megadható az  $\mathbf{a}$  vektornál *durvább* összes  $\mathbf{k}$  vektor  $\{\mathbf{k} : \mathbf{k} \preceq \mathbf{a}\}$  halmaza. Egyszerűen minden lehetséges módon kicseréljük a „,” karaktereket „+” karakterekre. Mivel egy  $n$  elemű vektorban  $n - 1$  vessző található, ezért  $|\{\mathbf{k} : \mathbf{k} \preceq (a_1, a_2, \dots, a_n)\}| = 2^{n-1}$ .

$$\{\mathbf{k} : \mathbf{k} \preceq (2, 3, 1)\} := \{(2, 3, 1), (2 + 3, 1), (2, 3 + 1), (2 + 3 + 1)\} = \{(2, 3, 1), (5, 1), (2, 4), (6)\}$$

Sokkal nehezebb megadni egy  $\mathbf{a}$  vektornál finomabb összes  $\mathbf{k}$  vektor  $\{\mathbf{k} : \mathbf{a} \preceq \mathbf{k}\}$  halmazát. Az nyilvánvaló, hogy az  $n$  számot tartalmazó egyelemű ( $n$ ) vektornál finomabb  $\mathbf{k}$  vektorok  $\{\mathbf{k} : \mathbf{a} \preceq \mathbf{k}\}$  halmazát az  $n$  szám felbontásai alkotják.

$$\{\mathbf{k} : (n) \preceq \mathbf{k}\} = \left\{ \mathbf{k} : \sum \mathbf{k} = n \right\}$$

Például,  $\{\mathbf{k} : (4) \preceq \mathbf{k}\} = \{\mathbf{k} : \sum \mathbf{k} = 4\} = \{(4), (1, 3), (3, 1), (2, 2), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}$ . Közismert, hogy az  $n$  szám összes felbontásainak száma  $2^{n-1}$ , és ezért  $|\{\mathbf{k} : (n) \preceq \mathbf{k}\}| = 2^{n-1}$ . Ezen egyszerű megállapítás segítségével tetszőleges  $\mathbf{a}$  vektorhoz kiszámíthatjuk a  $\{\mathbf{k} : \mathbf{a} \preceq \mathbf{k}\}$  halmazt az alábbi (bizonyítás nélkül közölt) tétel alkalmazásával.

**Tétel.** Ha  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m)$  az  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$  vektorok egybefűzésével kapott vektor, akkor

$$\{\mathbf{k} : \mathbf{a} \preceq \mathbf{k}\} = \{\mathbf{k} : \mathbf{a}_1 \preceq \mathbf{k}\} \times \{\mathbf{k} : \mathbf{a}_2 \preceq \mathbf{k}\} \times \dots \times \{\mathbf{k} : \mathbf{a}_m \preceq \mathbf{k}\}$$

Ha ezt a tételt alkalmazzuk az egyelemű  $\mathbf{a}_1 = (a_1), \mathbf{a}_2 = (a_2), \dots, \mathbf{a}_m = (a_m)$  vektorokra, akkor  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m) = (a_1, a_2, \dots, a_m)$  és

$$\begin{aligned} \{\mathbf{k} : (a_1, a_2, \dots, a_m) \preceq \mathbf{k}\} &= \{\mathbf{k} : (a_1) \preceq \mathbf{k}\} \times \{\mathbf{k} : (a_2) \preceq \mathbf{k}\} \times \dots \times \{\mathbf{k} : (a_m) \preceq \mathbf{k}\} = \\ &= \left\{ \mathbf{k} : \sum \mathbf{k} = a_1 \right\} \times \left\{ \mathbf{k} : \sum \mathbf{k} = a_2 \right\} \times \dots \times \left\{ \mathbf{k} : \sum \mathbf{k} = a_m \right\} \end{aligned}$$

Ebből az is következik, hogy  $|\{\mathbf{k} : (a_1, a_2, \dots, a_m) \preceq \mathbf{k}\}| = 2^{a_1-1} \cdot 2^{a_2-1} \dots 2^{a_m-1} = 2^{\sum \mathbf{a} - |\mathbf{a}|}$ .

Példa:  $\{\mathbf{k} : (2, 3, 1) \preceq \mathbf{k}\} = \{\mathbf{k} : \sum \mathbf{k} = 2\} \times \{\mathbf{k} : \sum \mathbf{k} = 3\} \times \{\mathbf{k} : \sum \mathbf{k} = 1\} = \{(2), (1, 1)\} \times \{(3), (1, 2), (2, 1), (1, 1, 1)\} \times \{(1)\} = \{(2, 3, 1), (2, 1, 2, 1), (2, 2, 1, 1), (2, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 3, 1), (1, 1, 1, 2, 1), (1, 1, 2, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1, 1)\}$ .

Egyszerűen balátható, hogy a most bevezetett  $\mathbf{a} \succeq \mathbf{b}$  reláció valóban részbenrendezés, azaz

- reflexív:  $\mathbf{a} \succeq \mathbf{a}$
- antiszimmetrikus: Ha  $\mathbf{a} \succeq \mathbf{b}$  és  $\mathbf{b} \succeq \mathbf{a}$ , akkor  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$
- tranzitív: Ha  $\mathbf{a} \succeq \mathbf{b}$  és  $\mathbf{b} \succeq \mathbf{c}$ , akkor  $\mathbf{a} \succeq \mathbf{c}$

## 2 Landen kapcsolat (Landen's connection)

**Tétel** (Landen's connection). Tetszőleges nem negatív számokból álló  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_r)$  vektorral

$$\text{Li}_{\mathbf{s}} \left( \frac{x}{x-1} \right) = (-1)^{|\mathbf{s}|} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{s}} \text{Li}_{\mathbf{k}}(x)$$

Néhány ekvivalens változat:

$$\text{Li}_{\mathbf{s}}(x) = (-1)^{|\mathbf{s}|} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{s}} \text{Li}_{\mathbf{k}} \left( \frac{x}{x-1} \right) \quad \left( 0 < x < \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{Li}_{\mathbf{s}}(1-x) = (-1)^{|\mathbf{s}|} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{s}} \text{Li}_{\mathbf{k}} \left( \frac{x-1}{x} \right) \quad \left( \frac{1}{2} < x < 1 \right)$$

### 3 Általános integráloperátor

**Definíció:**

$$\mathcal{J}(a_1, \bar{b}_1, a_2, \bar{b}_2, \dots, a_n, \bar{b}_n) := \left( \int \frac{1}{x} \right)^{a_1} \left( \int \frac{1}{1-x} \right)^{b_1} \left( \int \frac{1}{x} \right)^{a_2} \left( \int \frac{1}{1-x} \right)^{b_2} \dots \left( \int \frac{1}{x} \right)^{a_n} \left( \int \frac{1}{1-x} \right)^{b_n}$$

**Példák:**

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(2, \bar{3}, 4, \bar{1}) &= \left( \int \frac{1}{x} \right)^2 \left( \int \frac{1}{1-x} \right)^3 \left( \int \frac{1}{x} \right)^4 \left( \int \frac{1}{1-x} \right) \\ \mathcal{J}(\bar{2}, 3, \bar{4}) &= \left( \int \frac{1}{1-x} \right)^2 \left( \int \frac{1}{x} \right)^3 \left( \int \frac{1}{1-x} \right)^4 \\ \mathcal{J}(4, \bar{1}, 3) &= \left( \int \frac{1}{x} \right)^4 \left( \int \frac{1}{1-x} \right) \left( \int \frac{1}{x} \right)^3 \end{aligned}$$

Könnyen átgondolható, hogy  $\mathcal{J}(2, 4, \bar{3}, \bar{1}, 2) = \mathcal{J}(2 + 4, \bar{3} + \bar{1}, 2) = \mathcal{J}(6, \bar{4}, 2)$ , ezért mindig feltételezhető, hogy egy integráloperátorban a felülhúzott és sima számok felváltva követik egymást.

### 4 Az általános integráloperátor hatása az $\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(X)$ függvényeken. Polilogaritmikus integrálok redukciója.

Az  $\mathcal{J}(a_1, \bar{b}_1, a_2, \bar{b}_2, \dots, a_n, \bar{b}_n)$  integráloperátort leggyakrabban  $\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(X)$  általánosított polilogaritmus függvényekre alkalmazzuk, ahol az  $X$  argumentum legtöbbször az  $x, 1-x, \frac{1}{x}, \frac{1}{1-x}, \frac{x}{x-1}, \frac{x-1}{x}, \dots$  kifejezések valamelyike. Sorra megvizsgáljuk az  $\mathcal{J}(1)$ , illetve  $\mathcal{J}(\bar{1})$  integráloperátorok hatását a különböző argumentummal vett  $\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(X)$  függvényeken.

$$1. \quad \mathcal{J}(1) [\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(x)] := \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(x)}{x} dx = \text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)}(x)$$

$$2. \quad \mathcal{J}(\bar{1}) [\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(x)] := \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(x)}{1-x} dx = \text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)}(x)$$

$$3. \quad \mathcal{J}(1) [\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(1-x)] := \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(1-x)}{x} dx = -\text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)}(1-x)$$

$$4. \quad \mathcal{J}(\bar{1}) [\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(1-x)] := \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(1-x)}{1-x} dx = -\text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)}(1-x)$$

$$5. \quad \mathcal{J}(1) [\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(\frac{1}{x})] := \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(\frac{1}{x})}{x} dx = -\text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)}(\frac{1}{x})$$

$$\begin{aligned} \text{Mert, } \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(\frac{1}{x})}{x} dx &= / u = \frac{1}{x}, x = \frac{1}{u}, dx = -\frac{du}{u^2} / = - \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{\frac{1}{u}} \frac{du}{u^2} = - \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u} du = \\ &= -\text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)}(u) = \text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)}(\frac{1}{x}) \end{aligned}$$

$$6. \quad \mathcal{J}(\bar{1}) \left[ \text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{1}{x} \right) \right] := \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{1}{x} \right)}{1-x} dx = \text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{1}{x} \right) + \text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{1}{x} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Mert, } \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{1}{x} \right)}{1-x} dx &= / u = \frac{1}{x}, x = \frac{1}{u}, dx = -\frac{du}{u^2} / = -\int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{1-\frac{1}{u}} \frac{du}{u^2} = -\int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{\frac{u-1}{u}} \frac{du}{u^2} = \\ &= -\int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{(u-1)u} du = -\left( \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u-1} du - \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u} du \right) = -\int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u-1} du + \\ &+ \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u} du = \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{1-u} du + \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u} du = \text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)}(u) + \text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)}(u) \end{aligned}$$

$$7. \quad \mathcal{J}(1) \left[ \text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{1}{1-x} \right) \right] := \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{1}{1-x} \right)}{x} dx = -\text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{1}{1-x} \right) - \text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{1}{1-x} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Mert, } \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{1}{1-x} \right)}{x} dx &= / u = \frac{1}{1-x}, x = \frac{u-1}{u}, dx = \frac{du}{u^2} / = \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{\frac{u-1}{u}} \frac{du}{u^2} = \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u(u-1)} du = \\ &= \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u-1} du - \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u} du = -\int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{1-u} du - \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u} du = \\ &= -\text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)}(u) - \text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)}(u) = -\text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{1}{1-x} \right) - \text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{1}{1-x} \right) \end{aligned}$$

$$8. \quad \mathcal{J}(\bar{1}) \left[ \text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{1}{1-x} \right) \right] := \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{1}{1-x} \right)}{1-x} dx = \text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{1}{1-x} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Mert, } \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{1}{1-x} \right)}{1-x} dx &= / u = \frac{1}{1-x}, x = \frac{u-1}{u}, dx = \frac{du}{u^2} / = \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{1-\frac{u-1}{u}} \frac{du}{u^2} = -\int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{\frac{1}{u}} \frac{du}{u^2} = \\ &= \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u} du = \text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)}(u) = \text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{1}{1-x} \right) \end{aligned}$$

$$9. \quad \mathcal{J}(1) \left[ \text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{x}{x-1} \right) \right] := \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{x}{x-1} \right)}{x} dx = \text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{x}{x-1} \right) + \text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{x}{x-1} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Mert, } \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{x}{x-1} \right)}{x} dx &= / u = \frac{x}{x-1}, x = \frac{u}{u-1}, dx = -\frac{du}{(u-1)^2} / = -\int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{\frac{u}{u-1}} \frac{du}{(u-1)^2} = \\ &= -\int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u(u-1)} du = -\left( \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u-1} du - \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u} du \right) = \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{1-u} du + \\ &+ \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u} du = \text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)}(u) + \text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)}(u) = \text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{x}{x-1} \right) + \text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{x}{x-1} \right) \end{aligned}$$

$$10. \quad \mathcal{J}(\bar{1}) \left[ \text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{x}{x-1} \right) \right] := \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{x}{x-1} \right)}{1-x} dx = -\text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{x}{x-1} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Mert, } \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{x}{x-1} \right)}{1-x} dx &= / u = \frac{x}{x-1}, x = \frac{u}{u-1}, dx = -\frac{du}{(u-1)^2} / = -\int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{1-\frac{u}{u-1}} \frac{du}{(u-1)^2} = \\ &= \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u-1} du = -\int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{1-u} du = -\text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)}(u) = -\text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{x}{x-1} \right) \end{aligned}$$

$$11. \quad \mathcal{J}(1) [\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{x-1}{x} \right)] := \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{x-1}{x} \right)}{x} dx = \text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{x-1}{x} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Mert, } \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{x-1}{x} \right)}{x} dx &= / u = \frac{x-1}{x}, x = \frac{1}{1-u}, dx = \frac{du}{(1-u)^2} / = \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{\frac{1}{1-u}} \frac{du}{(1-u)^2} = \\ &= \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{1-u} du = \text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)}(u) = \text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{x-1}{x} \right) \end{aligned}$$

$$12. \quad \mathcal{J}(\bar{1}) [\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{x-1}{x} \right)] := \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{x-1}{x} \right)}{1-x} dx = -\text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{x-1}{x} \right) - \text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{x-1}{x} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Mert, } \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{x-1}{x} \right)}{1-x} dx &= / u = \frac{x-1}{x}, x = \frac{1}{1-u}, dx = \frac{du}{(1-u)^2} / = \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{1 - \frac{1}{1-u}} \frac{du}{(1-u)^2} = \\ &= - \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u(1-u)} du = - \left( \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{1-u} du + \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u} du \right) = - \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{1-u} du - \\ &- \int \frac{\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(u)}{u} du = -\text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)}(u) - \text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)}(u) = -\text{Li}_{(1, s_1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{x-1}{x} \right) - \text{Li}_{(s_1+1, s_2, \dots, s_r)} \left( \frac{x-1}{x} \right) \end{aligned}$$

A fenti eredményekben az a közös, hogy polilogaritmus függvény indexvektorában az  $s_2, \dots, s_r$  elemek nem változnak meg. Ez azt jelenti, hogy egy általános integráloperátornak tetszőleges általánosított polilogaritmus függvényen vett hatása mindig megkapható az integráloperátornak egy (szimpla) polilogaritmus függvényen vett hatásából. Formálisan:

$$\text{Ha } \mathcal{J}(a_1, \bar{a}_2, a_3, \dots) [\text{Li}_{(s_1)}(X)] = \text{Li}_{(t_1, t_2, \dots, t_k)}(X), \text{ akkor } \mathcal{J}(a_1, \bar{a}_2, a_3, \dots) [\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(X)] = \text{Li}_{(t_1, t_2, \dots, t_k, s_2, \dots, s_r)}(X)$$

$$\text{Például, ha } \mathcal{J}(a_1, \bar{a}_2, a_3, \dots) [\text{Li}_{(2)}(X)] = \text{Li}_{(1, 2, 4, 1)}(X), \text{ akkor } \mathcal{J}(a_1, \bar{a}_2, a_3, \dots) [\text{Li}_{(2, 3, 2)}(X)] = \text{Li}_{(1, 2, 4, 1, 3, 2)}(X).$$

Ezzen rendkívül jelentős tétel hatásával találkozhatunk az  $\int \frac{\text{Li}_{(2,3)}(x) \text{Li}_{(2,1,4)}(x)}{x} dx$  integrál kiszámításakor is.

$\frac{\text{Li}_a(x)}{\text{Li}_b(x)} \mid \begin{array}{c} (2, 3) \\ (2, 1, 4) \end{array}$	$\xrightarrow{\text{init}} \frac{+ (2, 3)}{+ (3, 1, 4)}$	$\xrightarrow{\text{std}} \frac{- (1, 3)}{+ (4, 1, 4)}$	$\xrightarrow{\text{aty}} \frac{+ (3)}{+ (1, 4, 1, 4)}$	$\xrightarrow{\text{std}} \frac{- (2)}{+ (2, 4, 1, 4)}$	$\xrightarrow{\text{std}} \frac{+ (1)}{+ (3, 4, 1, 4)}$	$\xrightarrow{\text{veg}} \frac{- ()}{+ (1, 3, 4, 1, 4)}$
-----------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------

A tétel szerint elegendő csak az  $\int \frac{\text{Li}_{(2,3)}(x) \text{Li}_{(2,1,4)}(x)}{x} dx$  integrált kiszámítani majd minden vektor végéhez az 1, 4 elemeket fűzni.

$\frac{\text{Li}_a(x)}{\text{Li}_b(x)} \mid \begin{array}{c} (2, 3) \\ (2) \end{array}$	$\xrightarrow{\text{init}} \frac{+ (2, 3)}{+ (3)}$	$\xrightarrow{\text{std}} \frac{- (1, 3)}{+ (4)}$	$\xrightarrow{\text{aty}} \frac{+ (3)}{+ (1, 4)}$	$\xrightarrow{\text{std}} \frac{- (2)}{+ (2, 4)}$	$\xrightarrow{\text{std}} \frac{+ (1)}{+ (3, 4)}$	$\xrightarrow{\text{veg}} \frac{- ()}{+ (1, 3, 4)}$
-----------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------	---------------------------------------------------	---------------------------------------------------	---------------------------------------------------	---------------------------------------------------	-----------------------------------------------------

Tetszőleges integrálnál ugyanezt tapasztalhatjuk. Ha az  $\int \frac{\text{Le}_{(2,3)}(x) \cdot \text{Li}_{(5, 2, 1)}(1-x)}{1-x} dx$  integrált számítjuk ki, akkor

$\frac{\text{Le}_a(x)}{\text{Li}_b(1-x)} \mid \begin{array}{c} (2, 3) \\ (5, 2, 1) \end{array}$	$\xrightarrow{\text{init}} \frac{+ (2, 3)}{- (6, 2, 1)}$	$\xrightarrow{\text{std}} \frac{- (1, 3)}{+ (1, 6, 2, 1)}$	$\xrightarrow{\text{aty}} \frac{+ (3)}{- (1, 1, 6, 2, 1)}$	$\xrightarrow{\text{std}} \frac{- (2)}{+ (1, 1, 1, 6, 2, 1)}$	$\xrightarrow{\text{std}} \frac{+ (1)}{+ (1, 2, 6, 2, 1)}$	$\xrightarrow{\text{veg}} \frac{- ()}{- (1, 1, 2, 6, 2, 1)}$
$- ()$	$+ (2, 1, 1, 1, 6, 2, 1)$	$+ (2, 1, 2, 6, 2, 1)$	$- (1, 1, 1, 1, 6, 2, 1)$	$- (1, 1, 2, 6, 2, 1)$	$- (1, 1, 2, 6, 2, 1)$	$- (1, 1, 2, 6, 2, 1)$

Most is elegendő lenne csak az  $\int \frac{\text{Le}_{(2,3)}(x) \cdot \text{Li}_{(5)}(1-x)}{1-x} dx$  integrált kiszámítani:

$\frac{\text{Le}_a(x)}{\text{Li}_b(1-x)} \mid \begin{array}{c} (2, 3) \\ (5) \end{array}$	$\xrightarrow{\text{init}} \frac{+ (2, 3)}{- (6)}$	$\xrightarrow{\text{std}} \frac{- (1, 3)}{+ (1, 6)}$	$\xrightarrow{\text{aty}} \frac{+ (3)}{- (1, 1, 6)}$	$\xrightarrow{\text{std}} \frac{- (2)}{+ (1, 1, 1, 6)}$	$\xrightarrow{\text{std}} \frac{+ (1)}{- (1, 1, 1, 1, 6)}$	$\xrightarrow{\text{veg}} \frac{- ()}{+ (2, 1, 1, 1, 6)}$
$- (2, 6)$	$+ (1, 2, 6)$	$- (1, 1, 2, 6)$	$+ (2, 1, 2, 6)$	$- (1, 1, 2, 6)$	$- (1, 1, 2, 6)$	$+ (2, 1, 2, 6)$

Sőt, még ennél is többet állíthatunk: az  $\int \frac{\text{Le}_{(2,3)}(x) \cdot \text{Li}_{(5)}(1-x)}{1-x} dx$  integrál helyett elegendő az  $\int \frac{\text{Le}_{(2,3)}(x) \cdot \text{Li}_{(0)}(1-x)}{1-x} dx$  integrált kiszámítani. Ebből ugyanis az  $\int \frac{\text{Le}_{(2,3)}(x) \cdot \text{Li}_{(5)}(1-x)}{1-x} dx$  integrál megkapató úgy, hogy az integráló sorban **minden** vektor utolsó elemét (ibolya) 5-tel megnöveljük.

$\frac{\text{Le}_a(x)}{\text{Li}_b(1-x)}$	$\frac{(2, 3)}{(0)}$	$\xrightarrow{\text{init}}$	$\frac{+(2, 3)}{-(1)}$	$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{-(1, 3)}{+(1, 1)}$	$\xrightarrow{\text{atv}}$	$\frac{+(3)}{-(1, 1, 1)}$	$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{-(2)}{+(1, 1, 1, 1)}$	$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{+(1)}{-(1, 1, 1, 1, 1)}$	$\xrightarrow{\text{veg}}$	$\frac{-()}{+(2, 1, 1, 1, 1)}$
							$-(2, 1)$		$+(1, 2, 1)$		$-(1, 1, 2, 1)$		$+(2, 1, 2, 1)$

Az  $\int \frac{\text{Le}_{(4,2,3)}(x) \cdot \text{Li}_{(4,3,5,3)}(1-x)}{1-x} dx =$

$\frac{\text{Le}_a(x)}{\text{Li}_b(1-x)}$	$\frac{(4, 2, 3)}{(4, 3, 5, 3)}$	$\xrightarrow{\text{init}}$	$\frac{+(4, 2, 3)}{-(5, 3, 5, 3)}$	$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{-(3, 2, 3)}{+(1, 5, 3, 5, 3)}$	$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{+(2, 2, 3)}{-(1, 1, 5, 3, 5, 3)}$	$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{-(1, 2, 3)}{+(1, 1, 1, 5, 3, 5, 3)}$	$\xrightarrow{\text{atv}}$
$\xrightarrow{\text{atv}}$	$\frac{+(2, 3)}{-(1, 1, 1, 1, 5, 3, 5, 3)}$		$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{-(1, 3)}{+(1, 1, 1, 1, 1, 5, 3, 5, 3)}$		$\xrightarrow{\text{atv}}$	$\frac{+(3)}{-(1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 3, 5, 3)}$	$\xrightarrow{\text{std}}$		
	$-(2, 1, 1, 5, 3, 5, 3)$			$+(1, 2, 1, 1, 5, 3, 5, 3)$			$-(1, 1, 2, 1, 1, 5, 3, 5, 3)$		$-(2, 1, 1, 1, 1, 5, 3, 5, 3)$	
							$-(2, 2, 1, 1, 5, 3, 5, 3)$			
$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{-(2)}{+(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 3, 5, 3)}$		$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{+(1)}{-(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 3, 5, 3)}$		$\xrightarrow{\text{veg}}$	$\frac{-()}{+(2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 3, 5, 3)}$			
	$+(1, 1, 1, 2, 1, 1, 5, 3, 5, 3)$			$-(1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 5, 3, 5, 3)$			$+(2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 5, 3, 5, 3)$			
	$+(1, 2, 1, 1, 1, 1, 5, 3, 5, 3)$			$-(1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 5, 3, 5, 3)$			$+(2, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 5, 3, 5, 3)$			
	$+(1, 2, 2, 1, 1, 5, 3, 5, 3)$			$-(1, 1, 2, 2, 1, 1, 5, 3, 5, 3)$			$+(2, 1, 2, 2, 1, 1, 5, 3, 5, 3)$			

integrál megkapható az  $\int \frac{\text{Le}_{(4,2,3)}(x) \cdot \text{Li}_{(0)}(1-x)}{1-x} dx =$

$\frac{\text{Le}_a(x)}{\text{Li}_b(1-x)}$	$\frac{(4, 2, 3)}{(0)}$	$\xrightarrow{\text{init}}$	$\frac{+(4, 2, 3)}{-(1)}$	$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{-(3, 2, 3)}{+(1, 1)}$	$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{+(2, 2, 3)}{-(1, 1, 1)}$	$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{-(1, 2, 3)}{+(1, 1, 1, 1)}$	$\xrightarrow{\text{atv}}$	$\frac{+(2, 3)}{-(1, 1, 1, 1, 1)}$	$\xrightarrow{\text{std}}$	
											$-(2, 1, 1, 1)$		
$\xrightarrow{\text{atv}}$	$\frac{-(1, 3)}{+(1, 1, 1, 1, 1, 1)}$		$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{+(3)}{-(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)}$		$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{-(2)}{+(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)}$		$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{+(1)}{-(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)}$	$\xrightarrow{\text{veg}}$	$\frac{-()}{+(2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)}$	
	$+(1, 2, 1, 1, 1)$			$-(1, 1, 2, 1, 1, 1)$			$+(1, 1, 1, 2, 1, 1, 1)$		$-(1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1)$		$+(2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1)$		$+(2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1)$
				$-(2, 1, 1, 1, 1, 1)$			$+(1, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$		$-(1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$		$+(2, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$		$+(2, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$
				$-(2, 2, 1, 1, 1, 1)$			$+(1, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$		$-(1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$		$+(2, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$		$+(2, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$

integrálból úgy, hogy az integráló sorban minden vektor utolsó eleméhez hozzáadunk 4-et és a kapott vektor végéhez az 3, 5, 3 elemeket fűzzük:

$\frac{\text{Le}_a(x)}{\text{Li}_b(1-x)}$	$\frac{(4, 2, 3)}{(0+4, 3, 5, 3)}$	$\xrightarrow{\text{init}}$	$\frac{+(4, 2, 3)}{-(1+4, 3, 5, 3)}$	$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{-(3, 2, 3)}{+(1, 1+4, 3, 5, 3)}$	$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{+(2, 2, 3)}{-(1, 1, 1+4, 3, 5, 3)}$	$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{-(1, 2, 3)}{+(1, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)}$	$\xrightarrow{\text{atv}}$	
$\xrightarrow{\text{atv}}$	$\frac{+(2, 3)}{-(1, 1, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)}$		$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{-(1, 3)}{+(1, 1, 1, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)}$		$\xrightarrow{\text{atv}}$	$\frac{+(3)}{-(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)}$	$\xrightarrow{\text{std}}$			
	$-(2, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)$			$+(1, 2, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)$			$-(1, 1, 2, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)$		$-(2, 1, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)$		$-(2, 2, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)$
$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{-(2)}{+(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)}$		$\xrightarrow{\text{std}}$	$\frac{+(1)}{-(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)}$		$\xrightarrow{\text{veg}}$	$\frac{-()}{+(2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)}$				
	$+(1, 1, 1, 2, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)$			$-(1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)$			$+(2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)$				
	$+(1, 2, 1, 1, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)$			$-(1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)$			$+(2, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)$				
	$+(1, 2, 2, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)$			$-(1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)$			$+(2, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1+4, 3, 5, 3)$				

A fentieket az alábbi tételben foglalhatjuk össze:

**Tétel.** Az  $L_a = \text{Li}/\text{Le}$ ,  $L_b = \text{Li}/\text{Le}$  függvényekkel, illetve  $X_a, X_b = x/1 - x/\frac{1}{x}/\frac{1}{1-x}/\frac{x}{x-1}/\frac{x-1}{x}, \dots$  változókkal felírt általános

$$\int \frac{L_a(X_a) \cdot L_b(X_b)}{X} dx$$

integrál, ahol  $L_a$  mindig az integrálsorba,  $L_b$  pedig a deriválsorba kerülő függvényt jelöli, egyszerűen megkapható az

$$\int \frac{L_a(X_a) \cdot L_{(0)}(X_b)}{X} dx$$

integrálból. Ezt nevezzük az *általános polilogaritmikus integrálok redukciójának*.

Példa: Az **(A)**

$$\int \frac{\text{Le}_{(5,3,2)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(2,4)}(x)}{1-x} dx \quad \left[ \begin{array}{cc} +b & -(+b) \\ -(+b + +b) & -(+b) \end{array} \right]$$

általános integrálási feladat helyett elegendő az **(A0)**

$$\int \frac{\text{Le}_{(5,3,2)}(1-x) \cdot \text{Li}_{(0)}(x)}{1-x} dx \quad \left[ \begin{array}{cc} +b & -(+b) \\ -(+b + +b) & -(+b) \end{array} \right]$$

feladatot megoldani, majd az integrálsorban minden vektor utolsó elemét **5-tel megnövelni**, majd a **(3, 2)** vektorral a végén **megtoldani**. Az **(A0) megoldása**:

$\frac{\text{Le}_a(1-x)}{\text{Li}_b(x)} \mid \begin{array}{c} (2, 4) \\ (0) \end{array}$	$\xrightarrow{\text{init}} \frac{+(2, 4)}{+(1, 0)}$	$\xrightarrow{\text{std}} \frac{-(1, 4)}{-(1, 1, 0)}$	$\xrightarrow{\text{atv}} \frac{+(4)}{+(1, 1, 1, 0)}$	$\xrightarrow{\text{std}} \frac{-(3)}{-(1, 1, 1, 1, 0)}$	$\xrightarrow{\text{std}} \frac{+(2)}{+(1, 1, 1, 1, 1, 0)}$	$\xrightarrow{\text{std}}$
$\frac{-(1)}{-(1, 1, 1, 1, 1, 1, 0)}$	$\xrightarrow{\text{veg}} \frac{+()}{+(2, 1, 1, 1, 1, 1, 0)}$					
$\frac{-(1, 1, 1, 1, 1, 1, 0)}{-(1, 1, 1, 2, 1, 0)}$	$\frac{+(2, 1, 1, 1, 1, 1, 0)}{+(2, 1, 1, 2, 1, 0)}$					

A szükséges növeléssel és toldással megkapjuk **(A)** az megoldását:

$\frac{\text{Le}_a(1-x)}{\text{Li}_b(x)} \mid \begin{array}{c} (2, 4) \\ (0+5, 3, 2) \end{array}$	$\xrightarrow{\text{init}} \frac{+(2, 4)}{+(1, 0+5, 3, 2)}$	$\xrightarrow{\text{std}} \frac{-(1, 4)}{-(1, 1, 0+5, 3, 2)}$	$\xrightarrow{\text{atv}} \frac{+(4)}{+(1, 1, 1, 0+5, 3, 2)}$	$\xrightarrow{\text{std}}$
$\frac{-(3)}{-(1, 1, 1, 1, 0+5, 3, 2)}$	$\xrightarrow{\text{std}} \frac{+(2)}{+(1, 1, 1, 1, 1, 0+5, 3, 2)}$	$\xrightarrow{\text{std}} \frac{-(1)}{-(1, 1, 1, 1, 1, 1, 0+5, 3, 2)}$	$\xrightarrow{\text{veg}} \frac{+()}{+(2, 1, 1, 1, 1, 1, 0+5, 3, 2)}$	
$\frac{-(1, 2, 1, 0+5, 3, 2)}{-(1, 2, 1, 0+5, 3, 2)}$	$\frac{+(1, 1, 2, 1, 0+5, 3, 2)}{+(1, 1, 2, 1, 0+5, 3, 2)}$	$\frac{-(1, 1, 1, 2, 1, 0+5, 3, 2)}{-(1, 1, 1, 2, 1, 0+5, 3, 2)}$	$\frac{+(2, 1, 1, 2, 1, 0+5, 3, 2)}{+(2, 1, 1, 2, 1, 0+5, 3, 2)}$	

## 5 Az $\int_0^{\frac{1}{2}} x^n \text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(x) dx$ ( $s_1, \dots, s_r \geq 1$ ) határozatlan integrál kiszámítása a $[0, \frac{1}{2}]$ intervallumon

Az  $\int x^n \text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(x) dx$  integrál kiszámítása során használni fogjuk az  $\text{Li}_{(\underbrace{a, \dots, a}_n, \underbrace{b, \dots, b}_m)}(x) = \text{Li}_{(a^n, b^m, \dots)}(x)$  jelölést,

illetve az alábbi azonosságokat

$$\text{Li}_{(0^m)}\left(\frac{x}{x-1}\right) = (-x)^m \quad \left(0 < x < \frac{1}{2}\right) \quad (1)$$

$$\text{Li}_{(0^m)}\left(\frac{x}{x-1}\right) \cdot \text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}\left(\frac{x}{x-1}\right) = \text{Li}_{(0^m, s_1, s_2, \dots, s_r)}\left(\frac{x}{x-1}\right) \quad \left(0 < x < \frac{1}{2}\right) \quad (2)$$

A fenti eredményekre támaszkodva a keresett határozatlan integrál egy lehetséges kiszámítása az alábbi:

$$\int x^n \text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(x) \, dx = \int \frac{x^{n+1}}{x} \text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(x) \, dx = \int \frac{(-1)^{n+1} \text{Li}_{(0^{n+1})}\left(\frac{x}{x-1}\right) (-1)^{|s|} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{s}} \text{Li}_{\mathbf{k}}\left(\frac{x}{x-1}\right)}{x} \, dx =$$

$$= (-1)^{|s|+n+1} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{s}} \int \frac{\text{Li}_{(0^{n+1})}\left(\frac{x}{x-1}\right) \text{Li}_{\mathbf{k}}\left(\frac{x}{x-1}\right)}{x} \, dx = (-1)^{|s|+n+1} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{s}} \int \frac{\text{Li}_{(0^{n+1}, \mathbf{k})}\left(\frac{x}{x-1}\right)}{x} \, dx = \int u = \frac{x}{x-1},$$

$$, x = \frac{u}{u-1}, \, dx = -\frac{du}{(u-1)^2} \int = (-1)^{|s|+n} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{s}} \int \frac{\text{Li}_{(0^{n+1}, \mathbf{k})}(u)}{\frac{u}{u-1}} \frac{du}{(u-1)^2} = (-1)^{|s|+n} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{s}} \int \frac{\text{Li}_{(0^{n+1}, \mathbf{k})}(u)}{u(u-1)} \, du =$$

$$= (-1)^{|s|+n} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{s}} \int \left( \frac{\text{Li}_{(0^{n+1}, \mathbf{k})}(u)}{u-1} - \frac{\text{Li}_{(0^{n+1}, \mathbf{k})}(u)}{u} \right) \, du = (-1)^{|s|+n} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{s}} \int \left( -\frac{\text{Li}_{(0^{n+1}, \mathbf{k})}(u)}{1-u} - \frac{\text{Li}_{(0^{n+1}, \mathbf{k})}(u)}{u} \right) \, du =$$

$$= (-1)^{|s|+n+1} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{s}} \int \left( \frac{\text{Li}_{(0^{n+1}, \mathbf{k})}(u)}{1-u} + \frac{\text{Li}_{(0^{n+1}, \mathbf{k})}(u)}{u} \right) \, du = (-1)^{|s|+n+1} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{s}} [\text{Li}_{(1, 0^{n+1}, \mathbf{k})}(u) + \text{Li}_{(1, 0^n, \mathbf{k})}(u)] =$$

$$= (-1)^{|s|+n+1} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{s}} \left[ \text{Li}_{(1, 0^{n+1}, \mathbf{k})}\left(\frac{x}{x-1}\right) + \text{Li}_{(1, 0^n, \mathbf{k})}\left(\frac{x}{x-1}\right) \right]$$

**6 Az  $\int x^n \text{Li}_{(b_1, b_2, \dots, b_t)}(x) \text{Li}_{(a_1, a_2, \dots, a_r)}(1-x) \, dx$  ( $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \geq 1$ ) határozatlan integrál kiszámítása a  $[0, \frac{1}{2}]$  intervallumon**

Az alábbi azonosságokat használjuk

$$\text{Li}_{\mathbf{s}}(x) = (-1)^{|s|} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{s}} \text{Li}_{\mathbf{k}}\left(\frac{x}{x-1}\right) \quad \left(0 < x < \frac{1}{2}\right) \quad (\text{Landen's connection}) \quad (3)$$

$$\text{Li}_{(0^m)}\left(\frac{x}{x-1}\right) = (-x)^m \quad \left(0 < x < \frac{1}{2}\right) \quad (4)$$

$$\text{Li}_{(0^m)}\left(\frac{x}{x-1}\right) \cdot \text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}\left(\frac{x}{x-1}\right) = \text{Li}_{(0^m, s_1, s_2, \dots, s_r)}\left(\frac{x}{x-1}\right) \quad \left(0 < x < \frac{1}{2}\right) \quad (5)$$

Az  $x^n \text{Li}_{\mathbf{b}}(x) \text{Li}_{\mathbf{a}}(1-x)$  integranduszt a fenti azonosságok segítségével átalakítjuk.

$$x^n \text{Li}_{\mathbf{b}}(x) \text{Li}_{\mathbf{a}}(1-x) = \frac{x^{n+1}}{x} \text{Li}_{\mathbf{b}}(x) \text{Li}_{\mathbf{a}}(1-x) = \frac{(-1)^{t+1} \text{Li}_{(0^{t+1})} \left( \frac{x}{x-1} \right) (-1)^{|\mathbf{b}|} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{b}} \text{Li}_{\mathbf{k}} \left( \frac{x}{x-1} \right) \text{Li}_{\mathbf{a}}(1-x)}{x} =$$

$$= (-1)^{|\mathbf{b}|+n+1} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{b}} \frac{\text{Li}_{(0^{t+1})} \left( \frac{x}{x-1} \right) \text{Li}_{\mathbf{k}} \left( \frac{x}{x-1} \right) \text{Li}_{\mathbf{a}}(1-x)}{x} = (-1)^{|\mathbf{b}|+n+1} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{b}} \frac{\text{Li}_{(0^{t+1}, \mathbf{k})} \left( \frac{x}{x-1} \right) \text{Li}_{\mathbf{a}}(1-x)}{x} =$$

$$= (-1)^{|\mathbf{b}|+n+1} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{b}} \frac{\text{Li}_{(0^{t+1}, \mathbf{k})} \left( \frac{x}{x-1} \right) \text{Li}_{\mathbf{a}}(1-x)}{x}$$

Ezzel az  $\int x^n \text{Li}_{\mathbf{b}}(x) \text{Li}_{\mathbf{a}}(1-x) dx$  integrált visszavezettük  $\int \frac{\text{Li}_{(0^{t+1}, \mathbf{k})} \left( \frac{x}{x-1} \right) \text{Li}_{\mathbf{a}}(1-x)}{x} dx$  integrálokra, így elegendő az

$$\int \frac{\text{Li}_{\mathbf{a}}(1-x) \text{Li}_{\mathbf{b}} \left( \frac{x}{x-1} \right)}{x} dx$$

általános integrálokat megadni. Feladatunk az inicializálás, standard lépés, 1-átvitel és 1-ürítés kiszámítása lenne. Az alábbi indulást választjuk

$\mathcal{D}$	$\text{Li}_{(a_1, a_2, \dots, a_n)}(1-x)$	$\dots$	$\dots$
$\mathcal{J}$	$\frac{\text{Li}_{(b_1, b_2, \dots, b_m)} \left( \frac{x}{x-1} \right)}{x}$	$\dots$	$\dots$

### Inicializálás

$\mathcal{D}$	$\text{Li}_{(a_1, a_2, \dots, a_r)}(1-x)$	$\dots$	$\dots$
$\mathcal{J}$	$\frac{\text{Li}_{(\textcolor{red}{b}_1, \textcolor{red}{b}_2, \dots, \textcolor{red}{b}_t)} \left( \frac{x}{x-1} \right)}{x}$	$\text{Li}_{(\textcolor{red}{1}, \textcolor{red}{b}_1, \textcolor{red}{b}_2, \dots, \textcolor{red}{b}_t)} \left( \frac{x}{x-1} \right) + \text{Li}_{(\textcolor{red}{1}+\textcolor{red}{b}_1, \textcolor{red}{b}_2, \dots, \textcolor{red}{b}_t)} \left( \frac{x}{x-1} \right)$	$\dots$

$\mathbf{b} \rightarrow {}^+\mathbf{b} + {}_+\mathbf{b}$ , azaz  $(\lfloor b_1, \dots \rfloor) \xrightarrow{\text{init}} \begin{pmatrix} \lfloor 1, b_1, \dots \rfloor \\ \lfloor 1 + b_1, \dots \rfloor \end{pmatrix}$

Ez azt jelenti, hogy rögtön az inicializáláskor hasadás lép fel.

### Standard lépés

$\text{Li}_{(a_1, a_2, \dots, a_n)}(1-x)$	$\dots$	$\text{Li}_{(\textcolor{red}{3}, \dots)}(1-x)$	$-\frac{\text{Li}_{(2, \dots)}(1-x)}{1-x}$	$-\text{Li}_{(2, \dots)}(x)$	$\dots$	$\dots$
$\frac{\text{Li}_{(b_1, b_2, \dots, b_t)} \left( \frac{x}{x-1} \right)}{x}$	$\dots$	$\dots$	$\text{Li}_{(\textcolor{red}{5}, \dots)} \left( \frac{x}{x-1} \right)$	$-\frac{\text{Li}_{(5, \dots)} \left( \frac{x}{x-1} \right)}{1-x}$	$-\text{Li}_{(\textcolor{red}{1}, \textcolor{red}{5}, \dots)} \left( \frac{x}{x-1} \right)$	$\dots$

$\mathbf{b} \rightarrow {}^+\mathbf{b}$ , azaz  $(a, \dots \lfloor b, \dots \rfloor) \xrightarrow{\text{std}} (a-1, \dots \lfloor 1, b, \dots \rfloor)$



## 1-átvitel

$\text{Li}_{(a_1, a_2, \dots, a_n)}(1-x)$	...	$\text{Li}_{(\mathbf{1}, \mathbf{3}, \dots)}(1-x)$	$-\frac{\text{Li}_{(3, \dots)}(1-x)}{x}$	$-\text{Li}_{(\mathbf{3}, \dots)}(x)$	...	...
$-\frac{\text{Li}_{(0)}\left(\frac{x}{x-1}\right)}{1-x}$	...	...	$\text{Li}_{(\mathbf{5}, \dots)}\left(\frac{x}{x-1}\right)$	$\frac{\text{Li}_{(5, \dots)}\left(\frac{x}{x-1}\right)}{x}$	$\text{Li}_{(\mathbf{1}, \mathbf{5}, \dots)}\left(\frac{x}{x-1}\right) + \text{Li}_{(\mathbf{1}+\mathbf{5}, \dots)}\left(\frac{x}{x-1}\right)$	...
$\mathbf{b} \rightarrow -(\mathbf{+b} + \mathbf{+b})$ , azaz $(1, a, \dots \lfloor b, \dots) \xrightarrow{\text{atv}} \begin{matrix} -(a, \dots \lfloor 1, b, \dots) \\ -(a, \dots \lfloor b+1, \dots) \end{matrix}$						

## 1-ürítés

$\text{Li}_{(a_1, a_2, \dots, a_n)}(1-x)$	...	$\text{Li}_{(\mathbf{1})}(1-x)$	$-\frac{\text{Li}_{(0)}(1-x)}{1-x} = -\frac{1}{x}$	$-\text{Li}_{(\mathbf{0})}(x) = -1$	0
$-\frac{\text{Li}_{(0)}\left(\frac{x}{x-1}\right)}{1-x}$	...	...	$\text{Li}_{(\mathbf{5}, \dots)}\left(\frac{x}{x-1}\right)$	$\frac{\text{Li}_{(5, \dots)}\left(\frac{x}{x-1}\right)}{x}$	$\text{Li}_{(\mathbf{1}, \mathbf{5}, \dots)}\left(\frac{x}{x-1}\right) + \text{Li}_{(\mathbf{1}+\mathbf{5}, \dots)}\left(\frac{x}{x-1}\right)$
$\mathbf{b} \rightarrow -(\mathbf{+b} + \mathbf{+b})$ , azaz $(1 \lfloor b, \dots) \xrightarrow{\text{atv}} \begin{matrix} -(\lfloor 1, b, \dots) \\ -(\lfloor b+1, \dots) \end{matrix}$					

Az  $\int \frac{\text{Li}_{\mathbf{a}}(1-x) \text{Li}_{\mathbf{b}}\left(\frac{x}{x-1}\right)}{x} dx$  feladat fázisátmenet mátrixa

$$\begin{bmatrix} \xrightarrow{\text{init}} & \xrightarrow{\text{std}} \\ \xrightarrow{\text{atv}} & \xrightarrow{\text{veg}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{+b} + \mathbf{+b} & \mathbf{+b} \\ -(\mathbf{+b} + \mathbf{+b}) & -(\mathbf{+b} + \mathbf{+b}) \end{bmatrix}$$

1. Példa:  $\int \frac{\text{Li}_{(2)}(1-x) \text{Li}_{(3)}\left(\frac{x}{x-1}\right)}{x} dx$

$$\frac{\text{Li}_a(1-x)}{\text{Le}_b\left(\frac{x}{x-1}\right)} \Big| \begin{matrix} (2) \\ (3) \end{matrix} \xrightarrow{\text{init}} \frac{(2)}{+(1,3)} \xrightarrow{\text{std}} \frac{-(1)}{+(1,1,3)} \xrightarrow{\text{veg}} \frac{()}{-(1,1,1,3)} \begin{matrix} -(1,1,1,3) \\ -(1,1,4) \\ -(2,1,3) \\ -(2,4) \end{matrix}$$

Ha redukciót alkalmazunk, akkor

$$\frac{\text{Li}_a(1-x)}{\text{Le}_b\left(\frac{x}{x-1}\right)} \Big| \begin{matrix} (2) \\ (0) \end{matrix} \xrightarrow{\text{init}} \frac{(2)}{+(1,0)} \xrightarrow{\text{std}} \frac{-(1)}{+(1,1,0)} \xrightarrow{\text{veg}} \frac{()}{-(1,1,1,0)} \begin{matrix} -(1,1,1,0) \\ -(1,1,1) \\ -(2,1,0) \\ -(2,1) \end{matrix}$$

Most már rátérhetünk  $\int x^n \text{Li}_{(3)}(x) \text{Li}_{(2,2)}(1-x) dx$  kiszámítására

$$\text{I. } \int x^2 \text{Li}_{(3)}(x) \text{Li}_{(2,2)}(1-x) dx = (-1)^{1+2+1} \sum_{\mathbf{k} \succeq (3)} \int \frac{\text{Li}_{(0^2, \mathbf{k})}\left(\frac{x}{x-1}\right) \text{Li}_{(2,2)}(1-x)}{x} dx$$

$$\{\mathbf{k} : (3) \preceq \mathbf{k}\} = \{(3), (1,2), (2,1), (1,1,1)\}$$

II. Redukciót alkalmazva a  $(0, \mathbf{k})$  vektorral az integrálsorban elegendő az  $\int \frac{\text{Li}_{(0)}\left(\frac{x}{x-1}\right) \text{Li}_{(2,2)}(1-x)}{x} dx$  integrált kiszámítani

[illegible]

**7** Az  $\int x^n \text{Li}_{(b_1, b_2, \dots, b_t)}(x) \text{Li}_{(a_1, a_2, \dots, a_r)}(1-x) \, dx$  ( $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \geq 1$ ) határozatlan integrál kiszámítása az  $[\frac{1}{2}, 1]$  intervallumon

Az alábbi azonosságokat használjuk

$$\text{Li}_s(1-x) = (-1)^{|s|} \sum_{\mathbf{k} \succ s} \text{Li}_{\mathbf{k}}\left(\frac{x-1}{x}\right) \quad \left(\frac{1}{2} < x < 1\right) \quad (\text{Landen's connection}) \quad (6)$$

$$\frac{1}{x^n} = \frac{\text{Le}_{(\underbrace{0, \dots, 0}_n)(1-x)}}{1-x} \quad (0 < x < 1) \implies \frac{\text{Le}_{(\underbrace{0, \dots, 0}_{n+1})\left(\frac{x-1}{x}\right)}}{x-1} = x^n \quad \left(\frac{1}{2} < x < 1\right) \quad (7)$$

$$\text{Le}_{(0^{n+1})} \left( \frac{x-1}{x} \right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \text{Li}_{(0^{k+1})} \left( \frac{x-1}{x} \right) \quad \left( \frac{1}{2} < x < 1 \right) \quad (8)$$

$$\text{Li}_{(0^m)}\left(\frac{x-1}{x}\right) \cdot \text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}\left(\frac{x-1}{x}\right) = \text{Li}_{(0^m, s_1, s_2, \dots, s_r)}\left(\frac{x-1}{x}\right) \quad \left(\frac{1}{2} < x < 1\right) \quad (9)$$

Most is átalakítjuk a  $x^n \operatorname{Li}_b(x) \operatorname{Li}_a(1-x)$  integranduszt a fenti azonosságokat felhasználva.

$$x^n \operatorname{Li}_{\mathbf{b}}(x) \operatorname{Li}_{\mathbf{a}}(1-x) = \frac{\operatorname{Le}_{(0^{n+1})}\left(\frac{x-1}{x}\right)}{x-1} \operatorname{Li}_{\mathbf{b}}(x) (-1)^{|\mathbf{a}|} \sum_{\mathbf{k} \succ \mathbf{a}} \operatorname{Li}_{\mathbf{k}}\left(\frac{x-1}{x}\right) = (-1)^{|\mathbf{a}|} \sum_{\mathbf{k} \succ \mathbf{a}} \frac{\operatorname{Le}_{(0^{n+1})}\left(\frac{x-1}{x}\right) \operatorname{Li}_{\mathbf{k}}\left(\frac{x-1}{x}\right) \operatorname{Li}_{\mathbf{b}}(x)}{x-1} =$$

$$= (-1)^{|\mathbf{a}|} \sum_{\mathbf{k} \succ \mathbf{a}} \frac{\sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \text{Li}_{(0^l+1)} \left( \frac{x-1}{x} \right) \text{Li}_{\mathbf{k}} \left( \frac{x-1}{x} \right) \text{Li}_{\mathbf{b}}(x)}{x-1} = (-1)^{|\mathbf{a}|+1} \sum_{\mathbf{k} \succ \mathbf{a}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \frac{\text{Li}_{(0^{l+1}, \mathbf{k})} \left( \frac{x-1}{x} \right) \text{Li}_{\mathbf{b}}(x)}{1-x} =$$

$$= (-1)^{|\mathbf{a}|+1} \sum_{\mathbf{k} \succ \mathbf{a}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \frac{\text{Li}_{(0^{l+1}, \mathbf{k})} \left( \frac{x-1}{x} \right) \text{Li}_{\mathbf{b}}(x)}{1-x} = (-1)^{|\mathbf{a}|+1} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \sum_{\mathbf{k} \succ \mathbf{a}} \frac{\text{Li}_{(0^{l+1}, \mathbf{k})} \left( \frac{x-1}{x} \right) \text{Li}_{\mathbf{b}}(x)}{1-x}$$

Ezzel az  $\int x^n \text{Li}_{\mathbf{b}}(x) \text{Li}_{\mathbf{a}}(1-x) \, dx$  integrált visszavezettük  $\int \frac{\text{Li}_{(\mathbf{a}^{(t+1), \mathbf{k}})}(\frac{x}{x-1}) \text{Li}_{\mathbf{b}}(x)}{1-x} \, dx$  integrálokra, így elegendő az

$$\int \frac{\text{Li}_{\mathbf{a}}\left(\frac{x-1}{x}\right) \text{Li}_{\mathbf{b}}(x)}{1-x} dx$$

általános integrálokat megadni. Feladatunk az inicializálás, standard lépés, 1-átvitel és 1-ürítés kiszámítása lenne. Az alábbi indulást választjuk

$\mathcal{D}$	$\text{Li}_{(b_1, b_2, \dots, b_t)}(x)$	$\dots$	$\dots$
$\mathcal{I}$	$\frac{\text{Li}_{(a_1, a_2, \dots, a_r)}\left(\frac{x-1}{x}\right)}{1-x}$	$\dots$	$\dots$

### Inicializálás

$\mathcal{D}$	$\text{Li}_{(b_1, b_2, \dots, b_t)}(x)$	$\dots$	$\dots$
$\mathcal{I}$	$\frac{\text{Li}_{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r)}\left(\frac{x-1}{x}\right)}{1-x}$	$-\text{Li}_{(\mathbf{1}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r)}\left(\frac{x-1}{x}\right) - \text{Li}_{(\mathbf{1}+\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r)}\left(\frac{x-1}{x}\right)$	$\dots$
$\mathbf{a} \rightarrow -({}^+\mathbf{a} + {}_+\mathbf{a})$ , azaz $(\lfloor a_1, \dots) \xrightarrow{\text{init}} (\lfloor 1, a_1, \dots)$ $(\lfloor 1 + a_1, \dots)$			

Ez azt jelenti, hogy rögtön az inicializáláskor hasadás lép fel.

### Standard lépés

$\text{Li}_{(b_1, b_2, \dots, b_t)}(x)$	$\dots$	$\text{Li}_{(\mathbf{3}, \dots)}(x)$	$\frac{\text{Li}_{(2, \dots)}(x)}{x}$	$\text{Li}_{(\mathbf{2}, \dots)}(x)$	$\dots$	$\dots$
$\frac{\text{Li}_{(a_1, a_2, \dots, a_n)}\left(\frac{x-1}{x}\right)}{1-x}$	$\dots$	$\dots$	$\text{Li}_{(\mathbf{5}, \dots)}\left(\frac{x-1}{x}\right)$	$\frac{\text{Li}_{(5, \dots)}\left(\frac{x-1}{x}\right)}{x}$	$\text{Li}_{(\mathbf{1}, \mathbf{5}, \dots)}\left(\frac{x-1}{x}\right)$	$\dots$
$\mathbf{a} \rightarrow {}^+\mathbf{a}$ , azaz $(a, \dots \lfloor b, \dots) \xrightarrow{\text{std}} (a-1, \dots \lfloor 1, b, \dots)$						

### 1-átvitel

$\text{Li}_{(b_1, b_2, \dots, b_t)}(x)$	$\dots$	$\text{Li}_{(\mathbf{1}, \mathbf{3}, \dots)}(x)$	$\frac{\text{Li}_{(3, \dots)}(x)}{1-x}$	$\text{Li}_{(\mathbf{3}, \dots)}(x)$	$\dots$	$\dots$
$\frac{\text{Li}_{(a_1, a_2, \dots, a_n)}\left(\frac{x-1}{x}\right)}{1-x}$	$\dots$	$\dots$	$\text{Li}_{(\mathbf{5}, \dots)}\left(\frac{x-1}{x}\right)$	$\frac{\text{Li}_{(5, \dots)}\left(\frac{x-1}{x}\right)}{1-x}$	$-\text{Li}_{(\mathbf{1}, \mathbf{5}, \dots)}\left(\frac{x-1}{x}\right) - \text{Li}_{(\mathbf{1}+\mathbf{5}, \dots)}\left(\frac{x-1}{x}\right)$	$\dots$
$\mathbf{a} \rightarrow -({}^+\mathbf{a} + {}_+\mathbf{a})$ , azaz $(1, a, \dots \lfloor b, \dots) \xrightarrow{\text{aty}} \begin{matrix} -(a, \dots \lfloor 1, b, \dots) \\ -(a, \dots \lfloor b+1, \dots) \end{matrix}$						

### 1-ürítés

$\text{Li}_{(b_1, b_2, \dots, b_t)}(x)$	$\dots$	$\text{Li}_{(\mathbf{1})}(x)$	$-\frac{\text{Li}_{(0)}(x)}{x} = \frac{1}{1-x}$	$\text{Li}_{(\mathbf{0})}(x) = 1$	$0$
$\frac{\text{Li}_{(a_1, a_2, \dots, a_n)}\left(\frac{x-1}{x}\right)}{1-x}$	$\dots$	$\dots$	$\text{Li}_{(\mathbf{5}, \dots)}\left(\frac{x-1}{x}\right)$	$\frac{\text{Li}_{(5, \dots)}\left(\frac{x-1}{x}\right)}{1-x}$	$-\text{Li}_{(\mathbf{1}, \mathbf{5}, \dots)}\left(\frac{x-1}{x}\right) - \text{Li}_{(\mathbf{1}+\mathbf{5}, \dots)}\left(\frac{x-1}{x}\right)$
$\mathbf{a} \rightarrow -({}^+\mathbf{a} + {}_+\mathbf{a})$ , azaz $(1 \lfloor a, \dots) \xrightarrow{\text{aty}} \begin{matrix} -(\lfloor 1, a, \dots) \\ -(\lfloor a+1, \dots) \end{matrix}$					

Az  $\int \frac{\text{Li}_{\mathbf{a}}\left(\frac{x-1}{x}\right) \text{Li}_{\mathbf{b}}(x)}{1-x} dx$  feladat fázisátmenet mátrixa

$$\begin{bmatrix} \xrightarrow{\text{init}} & \xrightarrow{\text{std}} \\ \xrightarrow{\text{aty}} & \xrightarrow{\text{veg}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(+\mathbf{a} + +\mathbf{a}\right) & +\mathbf{a} \\ -\left(+\mathbf{a} + +\mathbf{a}\right) & -\left(+\mathbf{a} + +\mathbf{a}\right) \end{bmatrix}$$

Megjegyzés: Az  $\int \frac{\text{Li}_{\mathbf{a}}\left(\frac{x-1}{x}\right) \text{Li}_{\mathbf{b}}(x)}{1-x} dx$  integrálási feladat megkapható az  $\int \frac{\text{Li}_{\mathbf{b}}\left(\frac{x}{x-1}\right) \text{Li}_{\mathbf{a}}(1-x)}{x} dx$  integrálási feladatból az  $\mathbf{a} \leftrightarrow \mathbf{b}$  pozíciócserével, és  $x \leftrightarrow 1-x$  tükrözés együttesével.