

1 Alapvető vektorműveletek, lépések

Az alábbiakban definiálunk négy darab egyváltozós vektorműveletet, amelyek mindegyike egy vektor elejét változtatja meg.

$$\begin{aligned} + (a_1, a_2, \dots, a_n) &= (1, a_1, a_2, \dots, a_n) \\ - (1, a_2, \dots, a_n) &= (a_2, a_3, \dots, a_n) \\ + (a_1, a_2, \dots, a_n) &= (a_1 + 1, a_2, \dots, a_n) \\ - (a_1, a_2, \dots, a_n) &= (a_1 - 1, a_2, \dots, a_n) \end{aligned}$$

Ezen egyváltozós műveletek segítségével négy kétváltozós vektorműveletet definiálunk. Ezek mindegyike az általánosított polilogaritmusok integrálásakor alkalmazott lépések egyike. Az első kettő a sztandard lépés, illetve annak duálisa, míg a második kettő a 1-átvitel és annak duálisa.

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \mid \mathbf{b}) &\longrightarrow (-\mathbf{a} \mid +\mathbf{b}) & (a_1, a_2, \dots, a_n \mid b_1, b_2, \dots, b_m) &\longrightarrow (a_1 - 1, a_2, \dots, a_n \mid b_1 + 1, b_2, \dots, b_m) \\ (\mathbf{a} \mid \mathbf{b}) &\longrightarrow (-\mathbf{a} \mid +\mathbf{b}) & (a_1, a_2, \dots, a_n \mid b_1, b_2, \dots, b_m) &\longrightarrow (a_1 - 1, a_2, \dots, a_n \mid 1, b_1, b_2, \dots, b_m) \\ (\mathbf{a} \mid \mathbf{b}) &\longrightarrow (-\mathbf{a} \mid +\mathbf{b}) & (1, a_2, \dots, a_n \mid b_1, b_2, \dots, b_m) &\longrightarrow (a_2, \dots, a_n \mid 1, b_1, b_2, \dots, b_m) \\ (\mathbf{a} \mid \mathbf{b}) &\longrightarrow (-\mathbf{a} \mid +\mathbf{b}) & (1, a_2, \dots, a_n \mid b_1, b_2, \dots, b_m) &\longrightarrow (a_2, \dots, a_n \mid b_1 + 1, b_2, \dots, b_m) \end{aligned}$$

Ha az $(a_1, a_2, \dots, a_n \mid b_1, b_2, \dots, b_m)$ párosban $a_1 > 1$, akkor a sztandard lépés, ha pedig $a_1 = 1$, akkor az 1-átvitel valamelyik változatát hajtjuk végre.

Szükségünk lesz még az alábbi két kétváltozós vektorműveletre, amelyek az általánosított polilogaritmusok integrálásakor az inicializálás megfelelői.

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \mid \mathbf{b}) &\longrightarrow (\mathbf{a} \mid +\mathbf{b}) & (a_1, a_2, \dots, a_n \mid b_1, b_2, \dots, b_m) &\longrightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n \mid b_1 + 1, b_2, \dots, b_m) \\ (\mathbf{a} \mid \mathbf{b}) &\longrightarrow (\mathbf{a} \mid +\mathbf{b}) & (a_1, a_2, \dots, a_n \mid b_1, b_2, \dots, b_m) &\longrightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n \mid 1, b_1, b_2, \dots, b_m) \end{aligned}$$

2 Példák vizsgálata

A továbbiakban feltesszük, hogy az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ indexvektor minden komponense pozitív, azaz $a_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), és mindig az \mathbf{a} vektort ürítjük.

A polilogaritmus függvények integrálásakor négy fázist különböztethetünk meg.

Inicializáció Az \mathbf{a}, \mathbf{b} vektorpárosból megalkotjuk az integrálási/kiürítési sor *első* tagját.

Sztandard lépés Az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ indexvektor első eleme nagyobb 1-nél és azt az $(\mathbf{a} \mid \mathbf{b}) \longrightarrow (-\mathbf{a} \mid +\mathbf{b})$, illetve $(\mathbf{a} \mid \mathbf{b}) \longrightarrow (-\mathbf{a} \mid +\mathbf{b})$ lépések valamelyikével (akár mind a kettővel) csökkentjük 1-gyel.

1-átvitel Az $\mathbf{a} = (1, a_2, \dots, a_n)$ indexvektor első eleme elérte az 1-et, és azt az $(\mathbf{a} \mid \mathbf{b}) \longrightarrow (-\mathbf{a} \mid +\mathbf{b})$, illetve $(\mathbf{a} \mid \mathbf{b}) \longrightarrow (-\mathbf{a} \mid +\mathbf{b})$ lépések valamelyikével (akár mind a kettővel) átvisszük a \mathbf{b} vektorba.

1-ürítés Az a speciális 1-átvitel, amikor az $\mathbf{a} = (1)$ vektor egyetlen 1 elemét visszük át a \mathbf{b} vektorba, és így az \mathbf{a} vektor kiürül.

Nagyon fontos fogalom még a *hasadás*, amikor egy lépést és annak duális párját egyszerre alkalmazzuk.

Az a sejtésünk, hogy a különböző polilogaritmusos integrálok egyértelműen meghatározzák, hogy a négy fázisban milyen lépéseket, milyen előjellel, illetve hogy azokat hasadással vagy anélkül kell-e végrehajtani. Ezen sejtésünket konkrét példák vizsgálatával kezdjük.

1. Példa: Az $\int \frac{\text{Li}_{(2,3)}(x) \cdot \text{Li}_{(4,1)}(x)}{x} dx$ integrál kiszámítása

$$\int \frac{\text{Li}_{(2,3)}(x) \cdot \text{Li}_{(4,1)}(x)}{x} dx = \text{Li}_{(2,3)}(x) \cdot \text{Li}_{(5,1)}(x) - \text{Li}_{(1,3)}(x) \cdot \text{Li}_{(6,1)}(x) + \text{Li}_{(3)}(x) \cdot \text{Li}_{(1,6,1)}(x) - \text{Li}_{(2)}(x) \cdot \text{Li}_{(2,6,1)}(x) +$$

$$+ \text{Li}_{(1)}(x) \cdot \text{Li}_{(3,6,1)}(x) - \text{Li}_{(1,3,6,1)}(x)$$

$$(2, 3 \rfloor 5, 1) - (1, 3 \rfloor 6, 1) + (3 \rfloor 1, 6, 1) - (2 \rfloor 2, 6, 1) + (1 \rfloor 3, 6, 1) - (1, 3, 6, 1)$$

Inicializálás $(a \mid b) \longrightarrow (a \rfloor_+ b)$

$$(2, 3); (4, 1) \longrightarrow (2, 3 \rfloor 5, 1) \dots$$

Sztandard lépés $(a \rfloor b) \longrightarrow -(-a \rfloor_+ b)$

$$(2, 3 \rfloor 5, 1) - (1, 3 \rfloor 6, 1) + (3 \rfloor 1, 6, 1) - (2 \rfloor 2, 6, 1) + (1 \rfloor 3, 6, 1) - (1, 3, 6, 1)$$

1-átvitel $(a \mid b) \longrightarrow -(\neg a \mid +b)$

$$(2, 3 \rfloor 5, 1) - (1, 3 \rfloor 6, 1) + (3 \rfloor 1, 6, 1) - (2 \rfloor 2, 6, 1) + (1 \rfloor 3, 6, 1) - (1, 3, 6, 1)$$

1-ürítés = 1-átvitel

$$(2, 3 \rfloor 5, 1) - (1, 3 \rfloor 6, 1) + (3 \rfloor 1, 6, 1) - (2 \rfloor 2, 6, 1) + (1 \rfloor 3, 6, 1) - (1, 3, 6, 1)$$

2. Példa: Az $\int \frac{\text{Le}_{(4,1)}(x) \cdot \text{Le}_{(-2,3)}(x)}{x} dx$ integrál kiszámítása

$$\int \frac{\text{Le}_{(4,1)}(x) \cdot \text{Le}_{(-2,3)}(x)}{x} dx = \text{Le}_{(4,1)}(x) \cdot \text{Le}_{(-1,3)}(x) - \text{Le}_{(3,1)}(x) \cdot \text{Le}_{(0,3)}(x) + \text{Le}_{(2,1)}(x) \cdot \text{Le}_{(1,3)}(x) - \text{Le}_{(1,1)}(x) \cdot \text{Le}_{(2,3)}(x) +$$

$$+ \text{Le}_{(1)}(x) \cdot \text{Le}_{(1,2,3)}(x) - \text{Le}_{(1,1,2,3)}(x) + \text{Le}_{(2,2,3)}(x)$$

$$(4, 1 \rfloor -1, 3) - (3, 1 \rfloor 0, 3) + (2, 1 \rfloor 1, 3) - (1, 1 \rfloor 2, 3) + (1 \rfloor 1, 2, 3) - (1, 1, 2, 3) + (2, 2, 3)$$

Inicializálás $(a \mid b) \longrightarrow (a \rfloor_+ b)$

$$(4, 1); (-2, 3) \longrightarrow (4, 1 \rfloor -1, 3) \dots$$

Sztandard lépés $(a \rfloor b) \longrightarrow -(-a \rfloor_+ b)$

$$(4, 1 \rfloor -1, 3) - (3, 1 \rfloor 0, 3) + (2, 1 \rfloor 1, 3) - (1, 1 \rfloor 2, 3) + (1 \rfloor 1, 2, 3) - (1, 1, 2, 3) + (2, 2, 3)$$

1-átvitel $(a \mid b) \longrightarrow -(\neg a \mid +b)$

$$(4, 1 \rfloor -1, 3) - (3, 1 \rfloor 0, 3) + (2, 1 \rfloor 1, 3) - (1, 1 \rfloor 2, 3) + (1 \rfloor 1, 2, 3) - (1, 1, 2, 3) + (2, 2, 3)$$

1-ürítés Hasadás: $(a \rfloor b) \longrightarrow -(\neg a \rfloor_+ b) + (\neg a \rfloor_+ b)$

$$(4, 1 \rfloor -1, 3) - (3, 1 \rfloor 0, 3) + (2, 1 \rfloor 1, 3) - (1, 1 \rfloor 2, 3) + (1 \rfloor 1, 2, 3) - (1, 1, 2, 3) + (2, 2, 3)$$

3. Példa: Az $\int \frac{\text{Li}_{(3,3)}(x) \cdot \text{Li}_{(-3,4)}(x)}{1-x} dx$ integrál kiszámítása

$$\int \frac{\text{Le}_{(3,3)}(x) \cdot \text{Le}_{(-4,3)}(x)}{1-x} dx = \text{Le}_{(3,3)}(x) \cdot \text{Le}_{(1,-4,3)}(x) - \text{Le}_{(2,3)}(x) \cdot \text{Le}_{(2,-4,3)}(x) + \text{Le}_{(1,3)}(x) \cdot \text{Le}_{(3,-4,3)}(x) -$$

$$- \text{Le}_{(3)}(x) \cdot \text{Le}_{(1,3,-4,3)}(x) + \text{Le}_{(2)}(x) \cdot \text{Le}_{(2,3,-4,3)}(x) - \text{Le}_{(1)}(x) \cdot \text{Le}_{(3,3,-4,3)}(x) + \text{Le}_{(1,3,3,-4,3)}(x) - \text{Le}_{(4,3,-4,3)}(x) -$$

$$\begin{aligned} & -\text{Le}_{(3,3)}(x) \cdot \text{Le}_{(-3,3)}(x) + \text{Le}_{(2,3)}(x) \cdot \text{Le}_{(-2,3)}(x) - \text{Le}_{(1,3)}(x) \cdot \text{Le}_{(-1,3)}(x) + \text{Le}_{(3)}(x) \cdot \text{Le}_{(1,-1,3)}(x) - \\ & - \text{Le}_{(2)}(x) \cdot \text{Le}_{(2,-1,3)}(x) + \text{Le}_{(1)}(x) \cdot \text{Le}_{(3,-1,3)}(x) - \text{Le}_{(1,3,-1,3)}(x) + \text{Le}_{(4,-1,3)}(x) \end{aligned}$$

1. feladat

$$(3, 3]1, -4, 3) - (2, 3]2, -4, 3) + (1, 3]3, -4, 3) - (3]1, 3, -4, 3) + (2]2, 3, -4, 3) - (1]3, 3, -4, 3) + (1, 3, 3, -4, 3) - (4, 3, -4, 3)$$

2.feladat

$$-(3, 3] - 3, 3) + (2, 3] - 2, 3) - (1, 3] - 1, 3) + (3]1, -1, 3) - (2]2, -1, 3) + (1]3, -1, 3) - (1, 3, -1, 3) + (4, -1, 3)$$

A feladat az inicializálásnál széthasad, és így lényegében két feladatot kell megoldani. (1. feladat, 2. feladat)

Inicializálás $(a \mid b) \longrightarrow (a]^{+b}) - (a]_{+b})$

$$\begin{aligned} & (4, 1]1, -3, 4) \dots \\ & \nearrow (a]^{+b}) \\ & (3, 3); (-3, 4) \\ & \searrow - (a]_{+b}) \\ & - (3, 3] - 3, 3) \end{aligned}$$

1. feladat

Sztandard lépés $(a \mid b) \longrightarrow -(-a]_{+b})$

$$(3, 3]1, -4, 3) - (2, 3]2, -4, 3) + (1, 3]3, -4, 3) - (3]1, 3, -4, 3) + (2]2, 3, -4, 3) - (1]3, 3, -4, 3) + (1, 3, 3, -4, 3) - (4, 3, -4, 3)$$

1-átvitel $(a \mid b) \longrightarrow -(\neg a \mid +b)$

$$(3, 3]1, -4, 3) - (2, 3]2, -4, 3) + (1, 3]3, -4, 3) - (3]1, 3, -4, 3) + (2]2, 3, -4, 3) - (1]3, 3, -4, 3) + (1, 3, 3, -4, 3) - (4, 3, -4, 3)$$

1-ürítés Hasadás: $(a \mid b) \longrightarrow -(\neg a]^{+b}) + (\neg a]_{+b})$

$$(3, 3]1, -4, 3) - (2, 3]2, -4, 3) + (1, 3]3, -4, 3) - (3]1, 3, -4, 3) + (2]2, 3, -4, 3) - (1]3, 3, -4, 3) + (1, 3, 3, -4, 3) - (4, 3, -4, 3)$$

2. feladat

Sztandard lépés $(a \mid b) \longrightarrow -(-a]_{+b})$

$$-(3, 3] - 3, 3) + (2, 3] - 2, 3) - (1, 3] - 1, 3) + (3]1, -1, 3) - (2]2, -1, 3) + (1]3, -1, 3) - (1, 3, -1, 3) + (4, -1, 3)$$

1-átvitel $(a \mid b) \longrightarrow -(\neg a \mid +b)$

$$-(3, 3] - 3, 3) + (2, 3] - 2, 3) - (1, 3] - 1, 3) + (3]1, -1, 3) - (2]2, -1, 3) + (1]3, -1, 3) - (1, 3, -1, 3) + (4, -1, 3)$$

1-ürítés Hasadás: $(a \mid b) \longrightarrow -(\neg a]^{+b}) + (\neg a]_{+b})$

$$-(3, 3] - 3, 3) + (2, 3] - 2, 3) - (1, 3] - 1, 3) + (3]1, -1, 3) - (2]2, -1, 3) + (1]3, -1, 3) - (1, 3, -1, 3) + (4, -1, 3)$$

Vagyis, a két feladat fázisaiban a lépések már megegyeznek.

Sokkal komplikáltabb a kiürítési feladat alakulása a következő példában, mert minden sztandard lépésnél hasadás lép fel.

4. Példa: Az $\int \frac{\text{Le}_{(2,3)}(1-x) \cdot \text{Le}_{(4)}(x)}{1-x} dx$ integrál kiszámítása

Inicializálás $(a \mid b) \longrightarrow (a]_+ b)$

Sztandard lépés Hasadás: $(a]b) \longrightarrow -(-a]_+ b) + (-a]^+ b)$

1-átvitel $(a \mid b) \longrightarrow (\neg a \mid +b)$

1-űrités = 1-átvitel

