1 Tetszőleges $w \in \mathfrak{h}$ szó különböző felbontásatásai

Shu OI and Kimio UENO; Fundamental Solutions of the Knizhnik-Zamolodchikov Equation of One Variable and the Riemann-Hilbert Problem, PROPOSITION 4 ([R]), TOKYO J. MATH. VOL. 41, NO. 1, 2018

The algebra $(\mathfrak{h}, ⧢)$ is a polynomialalgebra of x whose coefficients are in $\mathfrak{h}y$, and is a polynomial algebra of x, y whose coefficients are in $x\mathfrak{h}y$; $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}y\,[x]$, $\mathfrak{h} = xy\mathfrak{h}\,[x, y]$. That is, any word w in $\mathfrak{h}$ can be written as $\sum_i w_i ⧢ x^j = \sum_{i,j} y^j ⧢ w_{i,j} ⧢ x^j$ uniquely, where $w_j \in \mathfrak{h}y$ and $w_{i,j} \in x\mathfrak{h}y$.

A $(\mathfrak{h}, ⧢)$ algebra egy egyváltozós polinomalgebra az x változóval, melynek együthatói a $\mathfrak{h}y$ szavaiból kerülnek ki, és ugyanakkor egy kétváltozós polinomalgebra is x, y változókkal, melynek együthatói az $x\mathfrak{h}y$ szavaiból kerülnek ki; $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}y\,[x]$, $\mathfrak{h} = xy\mathfrak{h}\,[x, y]$. Vagyis, minden $\mathfrak{h}$-beli w szó felírható

$$\sum_i w_i ⧢ x^j = \sum_{i,j} y^j ⧢ w_{i,j} ⧢ x^j$$

alakban, ahol $w_j \in \mathfrak{h}y$ és $w_{i,j} \in x\mathfrak{h}y$, és ez a felírás egyértelmű.

$\mathbb{Z}[x]$: Az egész együtthatós x válozós polinomok algebrája. Elemei a $p(x) = z_0x^0 + z_1x^1 + z_2x^2 + \ldots + z_nx^n$ $(z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{Z})$ alakú polinomok. Azért algebra, mert az egész együtthatós x válozós polinomok vektorteret alkotnak, és értelmezve van egy szorzat a polinomokon.

$\mathbb{R}[x]$: A valós együtthatós x válozós polinomok algebrája. Elemei a $p(x) = r_0x^0 + r_1x^1 + r_2x^2 + \ldots + r_nx^n$ $(r_0, r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{R})$ alakú polinomok. Azért algebra, mert a valós együtthatós x válozós polinomok vektorteret alkotnak, és értelmezve van egy szorzat a polinomokon.

A $\mathfrak{h} = (\mathfrak{h}, ⧢) = \mathfrak{h}y\,[x]$ azt fejezi ki, hogy a

$$p(x) = w_0 ⧢ x^0 + w_1 ⧢ x^1 + w_2 ⧢ x^2 + \ldots + w_n ⧢ x^n \in \mathfrak{h}y\,[x]$$

$(w_0, w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathfrak{h}y)$ alakú polinomok éppen a $(\mathfrak{h}, ⧢)$ algebrát adják. Vagyis, $\mathfrak{h}$ minden w eleme egyértelműen felírható

$$w = w_0 ⧢ x^0 + w_1 ⧢ x^1 + \ldots + w_n ⧢ x^n \; (w_0, w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathfrak{h}y) \tag{1.1}$$

alakban.

Ezen egyértelmű felbontás segítségével definiálhatjuk tetszőleges $w \in \mathfrak{h}$ szó $\mathrm{reg}^0_{⧢}(w)$ regularizáltját, ami nem más, mint az (1.1) felbontásban a w_0 konstans együttható. Azaz,

$$\mathrm{reg}^0_{⧢}(w) = w_0 \iff w = w_0 ⧢ x^0 + w_1 ⧢ x^1 + \ldots + w_n ⧢ x^n \in \mathfrak{h}y\,[x]$$

A definícióból rögtön következik, hogy tetszőleges $w \in \mathfrak{h}$ szóra $\mathrm{reg}^0_{⧢}(w) \in \mathfrak{h}y$ és, hogy $\mathrm{reg}^0_{⧢}(u) = u$ minden $u \in \mathfrak{h}y$ szóra. Egy nem $\mathfrak{h}y$-beli w szó egyértelműen felírható ux^n, $u \in \mathfrak{h}y$, $n \geq 0$ alakban, melynek a regularizáltját az alábbi explicit képlet adja meg.

Tetszőleges $u \in \mathfrak{h}y$ y-ra végződő szóra, és tetszőleges $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ számra

$$\mathrm{reg}^0_{⧢}(ux^n) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j ux^{n-j} ⧢ x^j \;\; \in \mathfrak{h}y \tag{A}$$

$$\mathrm{reg}^0_{⧢}(ux^n) = ux^n - ux^{n-1} ⧢ x + ux^{n-2} ⧢ x^2 - \ldots + (-1)^{n-1}ux ⧢ x^{n-1} + (-1)^n u ⧢ x^n$$

Példa: Legyen $w = xxyxyxxx \notin \mathfrak{h}y$. Ekkor $u = xxyxy$, és $n = 3$. A képlet szerint

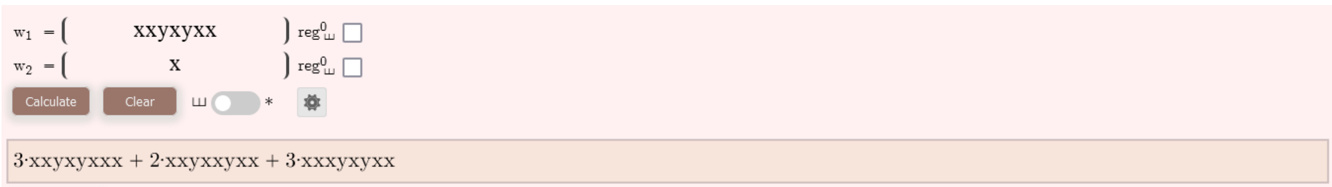
$$\mathrm{reg}^0_{⧢}(xxyxyxxx) = xxyxyxxx ⧢ - xxyxyxx ⧢ x + xxyxyx ⧢ xx - xxyxy ⧢ xxx$$

$(x^0 := (\,) := \mathbf{1}$, és $w ⧢ \mathbf{1} = w)$

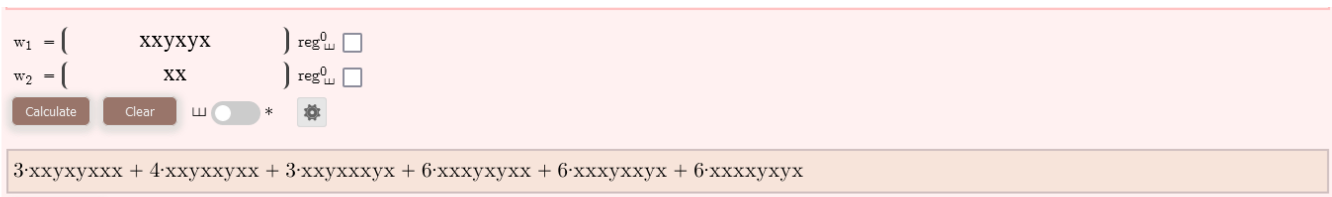
I. A kártya segítségével ezt kiszámíthatjuk tagonként.

1. $w_1$input: $xxyxyxxx$; $w_2$input: (üres) $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Calculate}}$

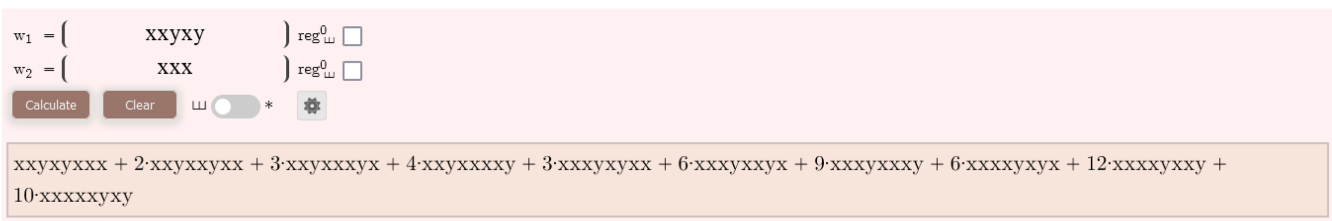
2. $w_1$input: $xxyxyxx$; $w_2$input: x $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Calculate}}$



3. $w_1$input: $xxyxyx$; $w_2$input: xx $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Calculate}}$



4. $w_1$input: $xxyxy$; $w_2$input: xxx $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Calculate}}$



A kapott eredményeket pedig (a megfelelő előjellel ellátva) összevonhatjuk:

1.

$$\cancel{xxyxyxxx}-(\cancel{3\cdot xxyxyxxx}+2\cdot xxyxxyxx+3\cdot xxxyxyxx)+(\cancel{3\cdot xxyxyxxx}+4\cdot xxyxxyxx+3\cdot xxyxxxyx+6\cdot xxxyxyxx+6\cdot xxxyxxyx+ +6\cdot xxxxyxyx)-(\cancel{xxyxyxxx}+2\cdot xxyxxyxx+3\cdot xxyxxxyx+4\cdot xxyxxxxy+3\cdot xxxyxyxx+6\cdot xxxyxxyx+9\cdot xxxyxxxy+6\cdot xxxxyxyx+ +12\cdot xxxxyxxy+10\cdot xxxxxyxy)=$$

2.

$$=-(\cancel{2\cdot xxyxxyxx}+3\cdot xxxyxyxx)+(\cancel{4\cdot xxyxxyxx}+3\cdot xxyxxxyx+6\cdot xxxyxyxx+6\cdot xxxyxxyx+6\cdot xxxxyxyx)-(\cancel{2\cdot xxyxxyxx}+ +3\cdot xxyxxxyx+4\cdot xxyxxxxy+3\cdot xxxyxyxx+6\cdot xxxyxxyx+9\cdot xxxyxxxy+6\cdot xxxxyxyx+12\cdot xxxxyxxy+10\cdot xxxxxyxy)=$$

3.

$$=-(\cancel{3\cdot xxxyxyxx})+(3\cdot xxyxxxyx+\cancel{6\cdot xxxyxyxx}+6\cdot xxxyxxyx+6\cdot xxxxyxyx)-(3\cdot xxyxxxyx+4\cdot xxyxxxxy+\cancel{3\cdot xxxyxyxx}+ +6\cdot xxxyxxyx+9\cdot xxxyxxxy+6\cdot xxxxyxyx+12\cdot xxxxyxxy+10\cdot xxxxxyxy)=$$

4.

$$=(\cancel{3\cdot xxyxxxyx}+6\cdot xxxyxxyx+6\cdot xxxxyxyx)-(\cancel{3\cdot xxyxxxyx}+4\cdot xxyxxxxy+6\cdot xxxyxxyx+9\cdot xxxyxxxy+6\cdot xxxxyxyx+ +12\cdot xxxxyxxy+10\cdot xxxxxyxy)=$$

5.

$$=(\cancel{6\cdot xxxyxxyx}+6\cdot xxxxyxyx)-(4\cdot xxyxxxxy+\cancel{6\cdot xxxyxxyx}+9\cdot xxxyxxxy+6\cdot xxxxyxyx+12\cdot xxxxyxxy+10\cdot xxxxxyxy)=$$

6.

$$=(\cancel{6\cdot xxxxyxyx})-(4\cdot xxyxxxxy+9\cdot xxxyxxxy+\cancel{6\cdot xxxxyxyx}+12\cdot xxxxyxxy+10\cdot xxxxxyxy)=$$

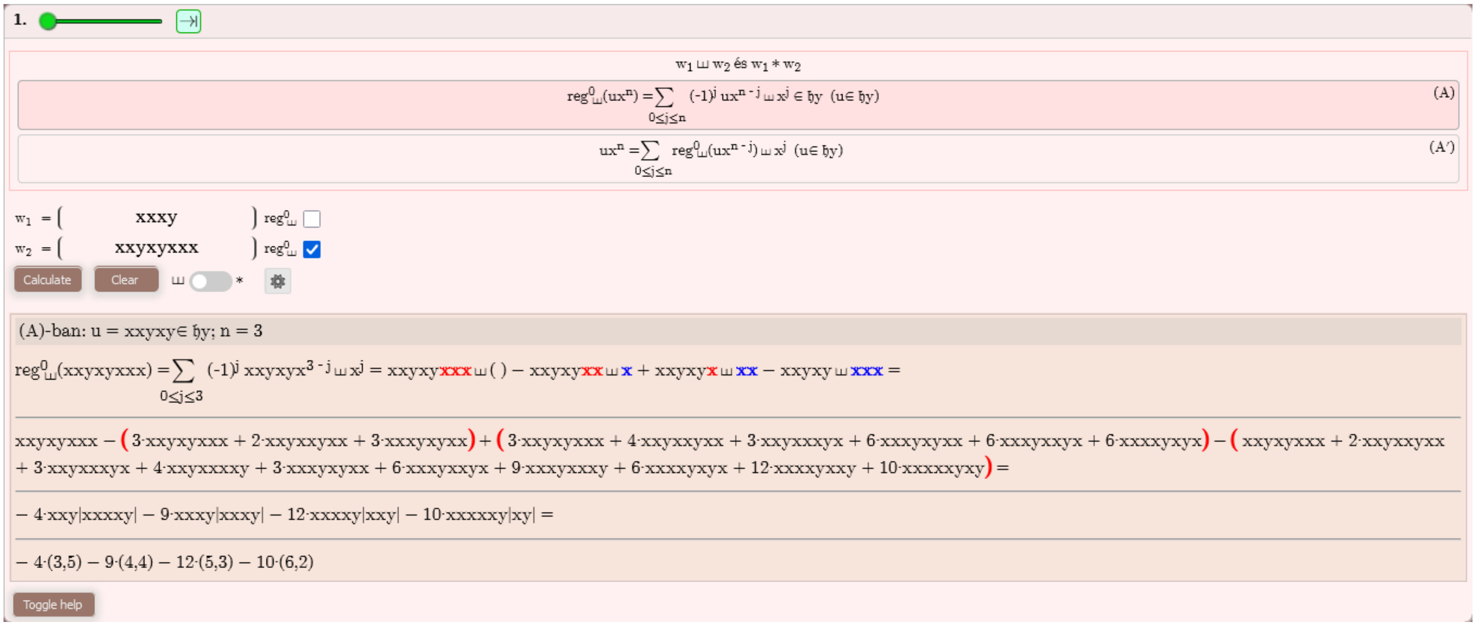
7.

$$=-(4\cdot xxyxxxxy+9\cdot xxxyxxxy+12\cdot xxxxyxxy+10\cdot xxxxxyxy)$$

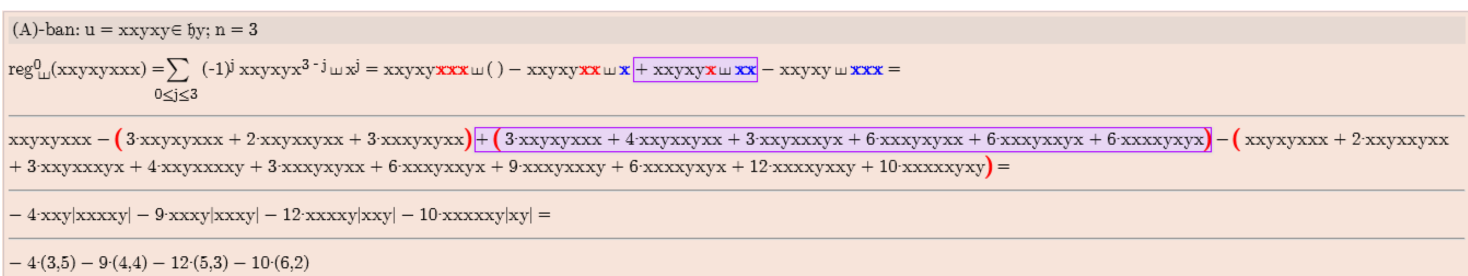
A végeredmény pedig: $\mathrm{reg}^0_{\sqcup\!\sqcup}(xxyxyxxx) = -4 \cdot xxyxxxxy - 9 \cdot xxxyxxxy - 12 \cdot xxxxyxxy - 10 \cdot xxxxxyxy$.

Egy fontos észrevétel: *A megmaradó $\mathfrak{h}y$-beli szavak mind az utolsó $xxyxy \sqcup\!\sqcup xxx$ szorzatból kerülnek ki.*

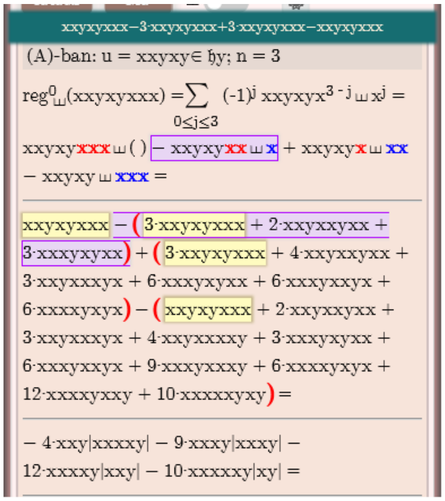
II. Ugyanezt az eredményt egyszerűbben is megkaphatjuk. A $w_1$vagy w_2 beviteli mezők valamelyikébe bevisszük az $xxyxyxxx$ szót (a másik mezőbe bármi lehet) és a mögötte található $\mathrm{reg}^0_{\sqcup\!\sqcup}$ cimkével felíratozott jelölőnégyzetet kipipáljuk. Az alábbi ábrán a w_2 beviteli mezőbe írtuk be az $xxyxyxxx$ szót. ***Arra ügyelni kell, hogy közben az (A) képlet legyen kijelölve (kattintással, piros háttér)***. A szürke hátterű sorban csak a bevitt adatok láthatók, közvetlenül alatta pedig az (A) felbontási képlet, a megfelelő paraméterekkel tömören, illetve kibontva. A második sávban az egyes kiszámított előjeles shuffle szorzatok piros zárójellel csoportosítva jelennek meg. A harmadik sávban az összevont végeredmény, míg a negyedikben a végeredmény vektor tartójú multihalmaz megfelelője látható.

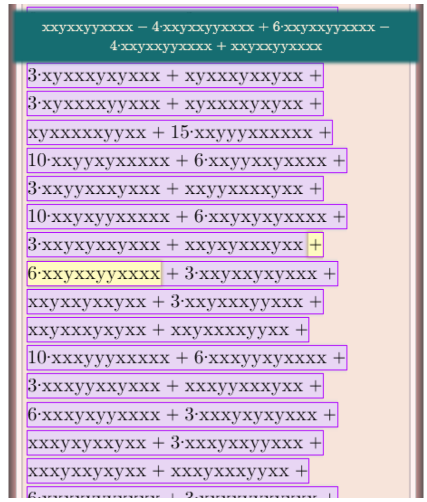


Ha a felbontás valamelyik tagjára kattintunk, akkor a hozzátartozó, kiszámított előjeles shuffle szorzatot kékkel kiemelve láthatjuk. A kapcsolat fordítva is működik: a második sávban egy tetszőleges tagra kattintva kijelöli a képlet azon szorzatát, amelyből a tag származik.



Ha a kiszámított shuffle szorzatban egy tetszőleges tagra kattintunk, akkor az előbbi kék kijelöléssel együtt, az egymást kiejtő tagok sárga alpú kijelölése, illetve a képernyő tetején megjelenő kék alapú mezőben, ezen egymást kiejtő tagok, előjeles összege segíti a fenti összevonás elvégzését. Az utóbbi akkor tűnik el, ha tetszőleges olyan helyre kattintunk a képernyőn, amely nem a szóban forgó shuffle szorzat egy tagja. (Vagyis, nem a második sávba.)





A képernyő tetején kéken felugró sáv különösen akkor hasznos, ha az előjeles kiszámított shuffle szorzat olyan nagy, hogy az egymást kiejtő elemek közül csak néhány, esetleg csak egy látható.

zutzu