1 Alapvető vektorműveletek, lépések

Az alábbiakban definiálunk négy darab egyváltozós vektorműveletet, amelyek mindegyike egy vektor elejét változtatja meg.

$$
\begin{aligned}
{}^{+}(a_1, a_2, \ldots a_n) &= (1, a_1, a_2, \ldots a_n) \\
{}^{-}(1, a_2, \ldots a_n) &= (a_2, a_3, \ldots a_n) \\
{}_{+}(a_1, a_2, \ldots a_n) &= (a_1 + 1, a_2, \ldots a_n) \\
{}_{-}(a_1, a_2, \ldots a_n) &= (a_1 - 1, a_2, \ldots a_n)
\end{aligned}
$$

Ezen egyváltozós műveletek segítségével négy kétváltozós vektorműveletet definiálunk. Ezek mindegyike az általánosított polilogaritmusok integrálásakor alkalmazott lépések egyike. Az első kettő a sztandard lépés, illetve annak duálisa, míg a második kettő at 1-átvitel és annak duálisa.

$$
\begin{array}{ll}
(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow ({}_{-}\boldsymbol{a} \mid {}_{+}\boldsymbol{b}) & (a_1, a_2, \ldots a_n \mid b_1, b_2, \ldots, b_m) \longrightarrow (a_1 - 1, a_2, \ldots a_n \mid b_1 + 1, b_2, \ldots, b_m) \\
(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow \left({}_{-}\boldsymbol{a} \mid {}^{+}\boldsymbol{b}\right) & (a_1, a_2, \ldots a_n \mid b_1, b_2, \ldots, b_m) \longrightarrow (a_1 - 1, a_2, \ldots a_n \mid 1, b_1, b_2, \ldots, b_m) \\
(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow \left({}^{-}\boldsymbol{a} \mid {}^{+}\boldsymbol{b}\right) & (1, a_2, \ldots a_n \mid b_1, b_2, \ldots, b_m) \longrightarrow (a_2, \ldots a_n \mid 1, b_1, b_2, \ldots, b_m) \\
(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow \left({}^{-}\boldsymbol{a} \mid {}_{+}\boldsymbol{b}\right) & (1, a_2, \ldots a_n \mid b_1, b_2, \ldots, b_m) \longrightarrow (a_2, \ldots a_n \mid b_1 + 1, b_2, \ldots, b_m)
\end{array}
$$

Ha az $(a_1, a_2, \ldots a_n \mid b_1, b_2, \ldots, b_m)$ párosban $a_1 > 1$, akkor a sztandard lépés, ha pedig $a_1 = 1$, akkor az 1-átvitel valamelyik változatát hajtjuk végre.

Szükségünk lesz még az alábbi két kétváltozós vektorműveletre, amelyek az általánosított polilogaritmusok integrálásakor az inicializálás megfelelői.

$$
\begin{array}{ll}
(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow (\boldsymbol{a} \mid {}_{+}\boldsymbol{b}) & (a_1, a_2, \ldots a_n \mid b_1, b_2, \ldots, b_m) \longrightarrow (a_1, a_2, \ldots a_n \mid b_1 + 1, b_2, \ldots, b_m) \\
(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow \left(\boldsymbol{a} \mid {}^{+}\boldsymbol{b}\right) & (a_1, a_2, \ldots a_n \mid b_1, b_2, \ldots, b_m) \longrightarrow (a_1, a_2, \ldots a_n \mid 1, b_1, b_2, \ldots, b_m)
\end{array}
$$

2 Példák vizsgálata

A továbbiakban feltesszük, hogy az $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots a_n)$ indexvektor minden komponense potitív, azaz $a_i > 0 \ \ (i = 1, 2, \ldots, n)$, és mindig az $\boldsymbol{a}$ vektort ürítjük.

A polilogaritmus függvények integrálásakor négy *fázist* különböztethetünk meg.

Inicializáció Az $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ vektorpárosból megalkotjuk az integrálási/kiürítési sor *első* tagját.

Sztandard lépés Az $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots a_n)$ indexvektor első eleme nagyobb 1-nél és azt az $(\boldsymbol{a}\rfloor\boldsymbol{b}) \longrightarrow ({}_{-}\boldsymbol{a}\rfloor{}_{+}\boldsymbol{b})$, illetve $(\boldsymbol{a}\rfloor\boldsymbol{b}) \longrightarrow \left({}_{-}\boldsymbol{a}\rfloor{}^{+}\boldsymbol{b}\right)$ lépések valamelyikével (akár mind a kettővel) csökkentjük 1-gyel.

1-átvitel Az $\boldsymbol{a} = (1, a_2, \ldots a_n)$ indexvektor első eleme elérte az 1-et, és azt az $(\boldsymbol{a}\rfloor\boldsymbol{b}) \longrightarrow \left({}^{-}\boldsymbol{a}\rfloor{}^{+}\boldsymbol{b}\right)$, illetve $(\boldsymbol{a}\rfloor\boldsymbol{b}) \longrightarrow \left({}^{-}\boldsymbol{a}\rfloor{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$ lépések valamelyikével (akár mind a kettővel) átvisszük a $\boldsymbol{b}$ vektorba.

1-ürítés Az a speciális 1-átvitel, amikor az $\boldsymbol{a} = (1)$ vektor egyetlen 1 elemét visszük át a $\boldsymbol{b}$ vektorba, és igy az $\boldsymbol{a}$ vektor kiürül.

Nagyon fontos fogalom még a *hasadás*, amikor egy lépést és annak duális párját egyszerre alkalmazzuk.

Az a sejtésünk, hogy a különböző polilogaritmikus integrálok egyértelműen meghatározzák, hogy a négy fázisban milyen lépéseket, milyen előjellel, illetve hogy azokat hasadással vagy anélkül kell-e végrehajtani. Ezen sejtésünket konkrét példák vizsgálatával kezdjük.

1. Példa: Az $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{(2,3)}(x) \cdot \mathrm{Li}_{(4,1)}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ integrál kiszámítása

$$\int \frac{\mathrm{Li}_{(2,3)}(x)\cdot \mathrm{Li}_{(4,1)}(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Li}_{(2,3)}(x)\cdot \mathrm{Li}_{(5,1)}(x) - \mathrm{Li}_{(1,3)}(x)\cdot \mathrm{Li}_{(6,1)}(x) + \mathrm{Li}_{(3)}(x)\cdot \mathrm{Li}_{(1,6,1)}(x) - \mathrm{Li}_{(2)}(x)\cdot \mathrm{Li}_{(2,6,1)}(x)+$$
$$+\,\mathrm{Li}_{(1)}(x)\cdot \mathrm{Li}_{(3,6,1)}(x) - \mathrm{Li}_{(1,3,6,1)}(x)$$

$$(2,3\rfloor 5,1) - (1,3\rfloor 6,1) + (3\rfloor 1,6,1) - (2\rfloor 2,6,1) + (1\rfloor 3,6,1) - (1,3,6,1)$$

Inicializálás $(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow (\boldsymbol{a}\rfloor_{+}\boldsymbol{b})$

$$(2,3);(4,1) \longrightarrow (2,3\rfloor 5,1)\ldots$$

Sztandard lépés $(\boldsymbol{a}\rfloor \boldsymbol{b}) \longrightarrow -\,({}_{-}\boldsymbol{a}\rfloor_{+}\boldsymbol{b})$

$$\textcolor{red}{(2,3\rfloor 5,1)} - (1,3\rfloor 6,1) + \textcolor{red}{(3\rfloor 1,6,1)} - \textcolor{red}{(2\rfloor 2,6,1)} + (1\rfloor 3,6,1) - (1,3,6,1)$$

1-átvitel $(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow -\left({}^{-}\boldsymbol{a} \mid {}^{+}\boldsymbol{b}\right)$

$$(2,3\rfloor 5,1) - \textcolor{red}{(1,3\rfloor 6,1)} + (3\rfloor 1,6,1) - (2\rfloor 2,6,1) + (1\rfloor 3,6,1) - (1,3,6,1)$$

1-ürítés $=$ 1-átvitel

$$(2,3\rfloor 5,1) - (1,3\rfloor 6,1) + (3\rfloor 1,6,1) - (2\rfloor 2,6,1) + \textcolor{red}{(1\rfloor 3,6,1)} - (1,3,6,1)$$

2. Példa: Az $\int \frac{\mathrm{Le}_{(4,1)}(x)\cdot \mathrm{Le}_{(-2,3)}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ integrál kiszámítása

$$\int \frac{\mathrm{Le}_{(4,1)}(x)\cdot \mathrm{Le}_{(-2,3)}(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Le}_{(4,1)}(x)\cdot \mathrm{Le}_{(-1,3)}(x) - \mathrm{Le}_{(3,1)}(x)\cdot \mathrm{Le}_{(0,3)}(x) + \mathrm{Le}_{(2,1)}(x)\cdot \mathrm{Le}_{(1,3)}(x) - \mathrm{Le}_{(1,1)}(x)\cdot \mathrm{Le}_{(2,3)}(x)+$$
$$+\,\mathrm{Le}_{(1)}(x)\cdot \mathrm{Le}_{(1,2,3)}(x) - \mathrm{Le}_{(1,1,2,3)}(x) + \mathrm{Le}_{(2,2,3)}(x)$$

$$(4,1\rfloor -1,3) - (3,1\rfloor 0,3) + (2,1\rfloor 1,3) - (1,1\rfloor 2,3) + (1\rfloor 1,2,3) - (1,1,2,3) + (2,2,3)$$

Inicializálás $(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow (\boldsymbol{a}\rfloor_{+}\boldsymbol{b})$

$$(4,1);(-2,3) \longrightarrow (4,1\rfloor -1,3)\ldots$$

Sztandard lépés $(\boldsymbol{a}\rfloor \boldsymbol{b}) \longrightarrow -\,({}_{-}\boldsymbol{a}\rfloor_{+}\boldsymbol{b})$

$$\textcolor{red}{(4,1\rfloor -1,3)} - \textcolor{red}{(3,1\rfloor 0,3)} + \textcolor{red}{(2,1\rfloor 1,3)} - (1,1\rfloor 2,3) + (1\rfloor 1,2,3) - (1,1,2,3) + (2,2,3)$$

1-átvitel $(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow -\left({}^{-}\boldsymbol{a} \mid {}^{+}\boldsymbol{b}\right)$

$$(4,1\rfloor -1,3) - (3,1\rfloor 0,3) + (2,1\rfloor 1,3) - \textcolor{red}{(1,1\rfloor 2,3)} + (1\rfloor 1,2,3) - (1,1,2,3) + (2,2,3)$$

1-ürítés Hasadás: $(\boldsymbol{a}\rfloor \boldsymbol{b}) \longrightarrow -\left({}^{-}\boldsymbol{a}\rfloor^{+}\boldsymbol{b}\right) + \left({}^{-}\boldsymbol{a}\rfloor_{+}\boldsymbol{b}\right)$

$$(4,1\rfloor -1,3) - (3,1\rfloor 0,3) + (2,1\rfloor 1,3) - (1,1\rfloor 2,3) + \textcolor{red}{(1\rfloor 1,2,3)} - \textcolor{blue}{(1,1,2,3) + (2,2,3)}$$

3. Példa: Az $\int \frac{\mathrm{Li}_{(3,3)}(x)\cdot \mathrm{Li}_{(-3,4)}(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$ integrál kiszámítása

$$\int \frac{\mathrm{Le}_{(3,3)}(x)\cdot \mathrm{Le}_{(-4,3)}(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Le}_{(3,3)}(x)\cdot \mathrm{Le}_{(1,-4,3)}(x) - \mathrm{Le}_{(2,3)}(x)\cdot \mathrm{Le}_{(2,-4,3)}(x) + \mathrm{Le}_{(1,3)}(x)\cdot \mathrm{Le}_{(3,-4,3)}(x)-$$
$$-\mathrm{Le}_{(3)}(x)\cdot \mathrm{Le}_{(1,3,-4,3)}(x) + \mathrm{Le}_{(2)}(x)\cdot \mathrm{Le}_{(2,3,-4,3)}(x) - \mathrm{Le}_{(1)}(x)\cdot \mathrm{Le}_{(3,3,-4,3)}(x) + \mathrm{Le}_{(1,3,3,-4,3)}(x) - \mathrm{Le}_{(4,3,-4,3)}(x)-$$

$$\stackrel{(2)}{=}\mathrm{Le}_{(3,3)}(x)\cdot\mathrm{Le}_{(-3,3)}(x)+\mathrm{Le}_{(2,3)}(x)\cdot\mathrm{Le}_{(-2,3)}(x)-\mathrm{Le}_{(1,3)}(x)\cdot\mathrm{Le}_{(-1,3)}(x)+\mathrm{Le}_{(3)}(x)\cdot\mathrm{Le}_{(1,-1,3)}(x)-$$
$$-\mathrm{Le}_{(2)}(x)\cdot\mathrm{Le}_{(2,-1,3)}(x)+\mathrm{Le}_{(1)}(x)\cdot\mathrm{Le}_{(3,-1,3)}(x)-\mathrm{Le}_{(1,3,-1,3)}(x)+\mathrm{Le}_{(4,-1,3)}(x)$$

1. feladat

$$(3,3\rfloor 1,-4,3)-(2,3\rfloor 2,-4,3)+(1,3\rfloor 3,-4,3)-(3\rfloor 1,3,-4,3)+(2\rfloor 2,3,-4,3)-(1\rfloor 3,3,-4,3)+(1,3,3,-4,3)-(4,3,-4,3)$$

2.feladat

$$-(3,3\rfloor -3,3)+(2,3\rfloor -2,3)-(1,3\rfloor -1,3)+(3\rfloor 1,-1,3)-(2\rfloor 2,-1,3)+(1\rfloor 3,-1,3)-(1,3,-1,3)+(4,-1,3)$$

A feladat az inicializálásnál széthasad, és így lényegében két feladatot kell megoldani. (1. feladat, 2. feladat)

Inicializálás $(\boldsymbol{a}\mid\boldsymbol{b})\longrightarrow\big(\boldsymbol{a}\rfloor^{+}\boldsymbol{b}\big)-(\boldsymbol{a}\rfloor_{+}\boldsymbol{b})$

$$\begin{array}{lll} & & (4,1\rfloor 1,-3,4)\ldots \\ & \nearrow & (\boldsymbol{a}\rfloor^{+}\boldsymbol{b}) \\ (3,3);(-3,4) & & \\ & \searrow & -(\boldsymbol{a}\rfloor_{+}\boldsymbol{b}) \\ & & -(3,3\rfloor -3,3) \end{array}$$

1. feladat

Sztandard lépés $(\boldsymbol{a}\rfloor\boldsymbol{b})\longrightarrow-({}_{-}\boldsymbol{a}\rfloor_{+}\boldsymbol{b})$

$$(3,3\rfloor 1,-4,3)-(2,3\rfloor 2,-4,3)+(1,3\rfloor 3,-4,3)-(3\rfloor 1,3,-4,3)+(2\rfloor 2,3,-4,3)-(1\rfloor 3,3,-4,3)+(1,3,3,-4,3)-(4,3,-4,3)$$

1-átvitel $(\boldsymbol{a}\mid\boldsymbol{b})\longrightarrow-\big({}^{-}\boldsymbol{a}\mid{}^{+}\boldsymbol{b}\big)$

$$(3,3\rfloor 1,-4,3)-(2,3\rfloor 2,-4,3)+(1,3\rfloor 3,-4,3)-(3\rfloor 1,3,-4,3)+(2\rfloor 2,3,-4,3)-(1\rfloor 3,3,-4,3)+(1,3,3,-4,3)-(4,3,-4,3)$$

1-ürítés Hasadás: $(\boldsymbol{a}\rfloor\boldsymbol{b})\longrightarrow-\big({}^{-}\boldsymbol{a}\rfloor^{+}\boldsymbol{b}\big)+\big({}^{-}\boldsymbol{a}\rfloor_{+}\boldsymbol{b}\big)$

$$(3,3\rfloor 1,-4,3)-(2,3\rfloor 2,-4,3)+(1,3\rfloor 3,-4,3)-(3\rfloor 1,3,-4,3)+(2\rfloor 2,3,-4,3)-(1\rfloor 3,3,-4,3)+(1,3,3,-4,3)-(4,3,-4,3)$$

2. feladat

Sztandard lépés $(\boldsymbol{a}\rfloor\boldsymbol{b})\longrightarrow-({}_{-}\boldsymbol{a}\rfloor_{+}\boldsymbol{b})$

$$-(3,3\rfloor -3,3)+(2,3\rfloor -2,3)-(1,3\rfloor -1,3)+(3\rfloor 1,-1,3)-(2\rfloor 2,-1,3)+(1\rfloor 3,-1,3)-(1,3,-1,3)+(4,-1,3)$$

1-átvitel $(\boldsymbol{a}\mid\boldsymbol{b})\longrightarrow-\big({}^{-}\boldsymbol{a}\mid{}^{+}\boldsymbol{b}\big)$

$$-(3,3\rfloor -3,3)+(2,3\rfloor -2,3)-(1,3\rfloor -1,3)+(3\rfloor 1,-1,3)-(2\rfloor 2,-1,3)+(1\rfloor 3,-1,3)-(1,3,-1,3)+(4,-1,3)$$

1-ürítés Hasadás: $(\boldsymbol{a}\rfloor\boldsymbol{b})\longrightarrow-\big({}^{-}\boldsymbol{a}\rfloor^{+}\boldsymbol{b}\big)+\big({}^{-}\boldsymbol{a}\rfloor_{+}\boldsymbol{b}\big)$

$$-(3,3\rfloor -3,3)+(2,3\rfloor -2,3)-(1,3\rfloor -1,3)+(3\rfloor 1,-1,3)-(2\rfloor 2,-1,3)+(1\rfloor 3,-1,3)-(1,3,-1,3)+(4,-1,3)$$

Vagyis, a két feladat fázisaiban a lépések már megegyeznek.
Sokkal komplikáltabb a kiürítési feladat alakulása a következő példában, mert minden sztandard lépésnél hasadás lép fel.

4. Példa: Az $\displaystyle\int\frac{\mathrm{Le}_{(2,3)}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{(4)}(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$ integrál kiszámítása

Inicializálás $(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow (\boldsymbol{a}\rfloor_{+}\boldsymbol{b})$

Sztandard lépés Hasadás: $(\boldsymbol{a}\rfloor\boldsymbol{b}) \longrightarrow -\left({}_{-}\boldsymbol{a}\rfloor_{+}\boldsymbol{b}\right) + \left({}_{-}\boldsymbol{a}\rfloor^{+}\boldsymbol{b}\right)$

1-átvitel $(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow \left({}^{-}\boldsymbol{a} \mid {}_{+}\boldsymbol{b}\right)$

1-ürítés $=$ 1-átvitel

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & & -(1\rfloor 1,1,7) & -(2,1,7) \\
 & & & & & & \nearrow & & \\
 & & & & & -(2\rfloor 1,7) & \rightarrow & +(1\rfloor 2,7) & +(3,7) \\
 & & & & \nearrow & & & & \\
 & & -(1,3\rfloor 6) & -(3\rfloor 7) & \rightarrow & +(2\rfloor 8) & \rightarrow & +(1\rfloor 1,8) & +(2,8) \\
 & \nearrow & & & & & \searrow & & \\
 & & & & & & & -(1\rfloor 9) & -(10) \\
(2,3\rfloor 5) & & & & & & & & \\
 & & & & & & & -(1\rfloor 2,2,5) & -(3,2,5) \\
 & \searrow & & & & & \nearrow & & \\
 & & +(1,3\rfloor 1,5) & +(3\rfloor 2,5) & \longrightarrow & +(2\rfloor 1,2,5) & \rightarrow & +(1\rfloor 1,1,2,5) & +(2,1,2,5) \\
 & & & & \searrow & & & & \\
 & & & & & +(2\rfloor 3,5) & \rightarrow & +(1\rfloor 4,5) & +(5,5) \\
 & & & & & & \searrow & & \\
 & & & & & & & -(1\rfloor 1,3,5) & -(2,3,5)
\end{array}
$$

3 A polilogaritmus integrálok 10 alapesete

Elegendő az alábbi tíz esetet tisztázni, mert ezekből az összes többi tükrözéssel megkapható

LiLi (1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot \mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ (2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot \mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$ (3) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot \mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$

LeLe (4) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot \mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ (5) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot \mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$ (6) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot \mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$

LiLe (7) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot \mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ (8) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot \mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$ (9) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot \mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ (10) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot \mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x$