1 Fésű-szorzat (shuffle-szorzat)

(1) Multihalmazok: Multihalmazon olyan objektumot értünk, amelyben egy elem többször is előfordulhat. Egy elem előfordulását az elem *multiplicitásának* nevezzük. Például az $A = [a, a, b, b, b, b, c, c, c]$ multihalmazban az b elem multiplicitása 4, a c elemé pedig 3. Az $\{a, b, c\}$ hagyományos halmazt az A multihalmaz *tartójának* nevezzük. A multihalmazok felírására két bevett jelölés terjedt el.

Multiplikatív felírás: $A = a^2b^4c^3$. Általánosan $A = \{a_1^{m_1}a_2^{m_2}\cdots a_k^{m_k}\}$, ahol A az $\{a_1, a_2, \ldots a_k\}$ tartójú $\{m_1, m_2, \ldots m_k\}$ multiplicitású multihalmaz

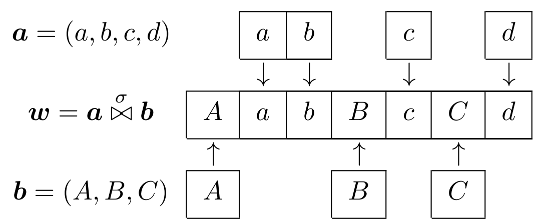
Additív felírás: $A = 2*a + 4*b + 3*c$. Általánosan $A = m_1*a_1 + m_2*a_2 + \cdots + m_k*a_k$, ahol A az $\{a_1, a_2, \ldots a_k\}$ tartójú $\{m_1, m_2, \ldots m_k\}$ multiplicitású multihalmaz

Mi a továbbiakban az additív felírást követjük, mert ez jobban megfelel a céljainknak.

(2) Összefésülés (shuffle-keverés): Két tetszőleges $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektor *egy konkrét összefésülésén (shuffle-keverésén)* a két vektor olyan összekeverését értjük, amelyben mind a két vektor megtartja az eredeti sorrendet, pontosan úgy, ahogyan az alábbi ábrán egymásba „pörgetünk" két pakli kártyát (riffle-shuffle). Az egyik pakli az $\boldsymbol{a}$ vektornak felel meg, míg a másik pakli a $\boldsymbol{b}$ vektornak. Egy n hosszú $\boldsymbol{a}$ vektornak és egy m hosszú $\boldsymbol{b}$ vektornak (multiplicitással számolva) pontosan $\binom{n+m}{n}$ összefésülése van, hiszen az $n+m$ együttes hosszúságú vektorból elegendő kiválasztani azt az n darab helyet, ahová az n hosszú $\boldsymbol{a}$ vektort beírjuk. Ekkor a maradék m helyre az m hosszú $\boldsymbol{b}$ vektort –az eredeti sorrendet megtartva– már csak egyféleképpen írható be. Ebből az is kiderült, hogy az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok minen egyes konkrét összefésülésének megadása teljesen egyenértékű egy az $\{1, 2, 3, \ldots |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|\}$ halmazból történő $|\boldsymbol{a}|$ elemszámú σ részhalmaz kiválasztásával. Ezért az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok egy konkrét összefésülését $\boldsymbol{a} \overset{\sigma}{\bowtie} \boldsymbol{b}$ fogja jelölni, ahol $\sigma \subseteq \{1, 2, 3, \ldots |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|\}$, $|\sigma| = |\boldsymbol{a}|$. (Az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok összefésülései a $\sigma \subseteq \{1, 2, 3, \ldots |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|\}$, $|\sigma| = |\boldsymbol{a}|$ részhalmazokkal paraméterezhetők.)

Riffle-shuffle

$$\boldsymbol{w} = (a, b, c, d) \overset{\sigma}{\bowtie} (A, B, C)$$
$$\sigma = \{2, 3, 5, 7\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$



Példa: az $\boldsymbol{a} = (x, y)$ és $\boldsymbol{b} = (A, B, C)$ vektoroknak pontosan $\binom{5}{2} = 10$ összefésülése van. Ezek az alábbiak:

$\sigma_1 = \{1, 2, 3\}$	$\sigma_2 = \{1, 2, 4\}$	$\sigma_3 = \{1, 3, 5\}$	$\sigma_4 = \{1, 3, 4\}$	$\sigma_5 = \{1, 3, 5\}$
(A, B, C, x, y)	(A, B, x, C, y)	(A, B, x, y, C)	(A, x, B, C, y)	(A, x, B, y, C)
$\sigma_6 = \{1, 4, 5\}$	$\sigma_7 = \{2, 3, 4\}$	$\sigma_8 = \{2, 3, 5\}$	$\sigma_9 = \{2, 4, 5\}$	$\sigma_{10} = \{3, 4, 5\}$
(A, x, y, B, C)	(x, A, B, C, y)	(x, A, B, y, C)	(x, A, y, B, C)	(x, y, A, B, C)

A kapott tíz összefésülés mind különböző, ezért egy halmazt alkotnak. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz tetszőleges különböző kételemű σ_1 és σ_2 részhalmazához az $\boldsymbol{a} \overset{\sigma_1}{\bowtie} \boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{a} \overset{\sigma_2}{\bowtie} \boldsymbol{b}$ összefésülések is különbözőek lesznek. Ha viszont az $\boldsymbol{a}$, illetve $\boldsymbol{b}$ vektorok valamelyike egy elemet többször is tartalmaz, vagy a két vektornak van közös eleme, akkor az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok összes összefésülése általában már egy multihalmazt alkot. Példaként kiszámítjuk az $\boldsymbol{a} = (c, b)$ és $\boldsymbol{b} = (b, c, c)$ vektorok összes lehetséges összefésülését. Azért, hogy a két vektor között könnyebben különbséget tudjunk tenni, az $\boldsymbol{a}$ vektor elemeit pirossal szedjük. Minden keverést két lépésre bontva érdemes kiszámítani.

(1) Az öt hosszú vektorból választunk az $\boldsymbol{a} = (c, b)$ vektornak két helyet (választunk egy $\sigma \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ részhalmazt):

$$(\bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet) \to (\bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet)$$

(2) Az $\boldsymbol{a} = (c, b)$ és $\boldsymbol{b} = (b, c, c)$ vektorokat beírjuk a megfelelő helyekre az eredeti sorrendben:

$$\begin{array}{ccc} (b, c, c) & & (c, b) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (b, \bullet, c, \bullet, c) & \to & (b, c, c, b, c) \end{array}$$

A tíz összefésülés pedig az alábbi lesz:

$$\begin{array}{ccccc}
\sigma_1 = \{1,2\} & \sigma_2 = \{1,3\} & \sigma_3 = \{1,4\} & \sigma_4 = \{1,5\} & \sigma_5 = \{2,3\} \\
(c,b,b,c,c) & (c,b,b,c,c) & (c,b,c,b,c) & (c,b,c,c,b) & (b,c,b,c,c) \\
\\
\sigma_6 = \{2,4\} & \sigma_7 = \{2,5\} & \sigma_8 = \{3,4\} & \sigma_9 = \{3,5\} & \sigma_{10} = \{4,5\} \\
(b,c,c,b,c) & (b,c,c,c,b) & (b,c,c,b,c) & (b,c,c,c,b) & (b,c,c,c,b)
\end{array}$$

Ebben a felsorolásban már bizonyos vektorok többször is előfordulnak. Más megfogalmazásban, az $\{1,2,3,4,5\}$ halmaz két különböző kételemű σ_i és σ_j részhalmazai által meghatározott $\boldsymbol{a} \overset{\sigma_i}{\bowtie} \boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{a} \overset{\sigma_j}{\bowtie} \boldsymbol{b}$ összefésülések nem feltétlenül különbözőek. Például $\boldsymbol{a} \overset{\sigma_1}{\bowtie} \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \overset{\sigma_2}{\bowtie} \boldsymbol{b} = (c,b,b,c,c)$, sőt $\boldsymbol{a} \overset{\sigma_7}{\bowtie} \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \overset{\sigma_9}{\bowtie} \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \overset{\sigma_{10}}{\bowtie} \boldsymbol{b} = (b,c,c,c,b)$. A multiplicitások megállapításához az egyformákat egymás alá gyűjtjük:

$$\begin{array}{cccccc}
(c,b,b,c,c) & (c,b,c,b,c) & (c,b,c,c,b) & (b,c,b,c,c) & (b,c,c,b,c) & (b,c,c,c,b) \\
(c,b,b,c,c) & & & & (b,c,c,b,c) & (b,c,c,c,b) \\
 & & & & & (b,c,c,c,b)
\end{array}$$

Ezt a táblázatot már csak egy multihalmazzal írhatjuk le. **Ezt a multihalmazt nevezzük az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok *összefésülésének,* amit $\boldsymbol{a} \bowtie \boldsymbol{b}$-vel jelölünk**. **Vagyis, az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok $\boldsymbol{a} \bowtie \boldsymbol{b}$ *összefésülésén* az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok *összes* lehetséges öszefésülését tartalmazó multihalmazt értjük**.

$$\boldsymbol{a} \bowtie \boldsymbol{b} = \left\{ \boldsymbol{a} \overset{\sigma}{\bowtie} \boldsymbol{b} : \sigma \subset \{1,2,3,\ldots |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|\}, \, |\sigma| = |\boldsymbol{a}| \right\} = \sum_{\sigma \subset \{1,2,3,\ldots |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|\}, \, |\sigma|} \boldsymbol{a} \overset{\sigma}{\bowtie} \boldsymbol{b}$$

Ezzel a jelöléssel a fenti számítások eredménye tömören így írható:

$$(c,b) \bowtie (b,c,c) = 2 * (c,b,b,c,c) + (c,b,c,b,c) + (c,b,c,c,b) + (b,c,b,c,c) + 2 * (b,c,c,b,c) + 3 * (b,c,c,c,b)$$

Könnyen átgondolható, hogy a vektorok összefésülése kommutatív, azaz

$$\boldsymbol{a} \bowtie \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \bowtie \boldsymbol{a}$$

Az asszociativitásról már nem beszélhetünk, mert a bevezetett $\boldsymbol{a} \bowtie \boldsymbol{b}$ *összefésülés nem is művelet*, hiszen egy H halmazon értelmezett kétváltozós $\circ$ műveleten a $H \times H$ halmaz önmagába való leképezését értjük:

$$\begin{gathered} \circ : H \times H \to H \\ (h_1, h_2) \to h_1 \circ h_2 \end{gathered}$$

A fentebb értelmezett összefésülés pedig két vektorhoz egy multihalmazt, és nem egy vektort rendel. Viszont egy $\boldsymbol{a}$ vektor és az $\boldsymbol{a}$ vektort tartalmazó egyelemű $1 * \boldsymbol{a}$ multihalmaz kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak. (A vektorok *beágyazhatók* a vektorokat tartalmazó multihalmazok halmazába.) Ha a vektorokat tartalmazó multihalmazok halmazát $\mathscr{H}$-val jelöljük, akkor az összefésülés $\mathscr{H}$-ra történő *lineáris kiterjesztése* már művelet lesz $\mathscr{H}$-n.

$$\bowtie : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathscr{H}; \quad \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i * \boldsymbol{a}_i \right) \bowtie \left(\sum_{j=1}^{s} \beta_j * \boldsymbol{b}_j \right) := \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \alpha_i \cdot \beta_j * (\boldsymbol{b}_j \bowtie \boldsymbol{a}_i)$$

Ez valóban kiterjesztése a korábban definiált összefésülésnek, hiszen a fent említett $\boldsymbol{a} \leftrightarrow 1 * \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \leftrightarrow 1 * \boldsymbol{b}$ beágyazással

$$\boldsymbol{a} \bowtie \boldsymbol{b} \leftrightarrow 1 * \boldsymbol{a} \bowtie 1 * \boldsymbol{b} := (1 \cdot 1) * \boldsymbol{a} \bowtie \boldsymbol{b} = 1 * \boldsymbol{a} \bowtie \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \bowtie \boldsymbol{b}$$

Ha csak két vektor összefésülését vesszük, akkor –az egyértelmű megfeleltetést kihasználva– továbbra is használni fogjuk a rövidebb $\boldsymbol{a} \bowtie \boldsymbol{b}$ jelölést az $1 * \boldsymbol{a} \bowtie 1 * \boldsymbol{b}$ felírás helyett.

Könnyen átgondolható, hogy az így kiterjesztett összefésülés kommutatív, asszociatív és létezik egységeleme, ami az egyetlen *üresvektort* tartalmazó $\iota = \{()\} = 1 * ()$ multihalmaz.

$$\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i * \boldsymbol{a}_i \right) \bowtie \left(\sum_{j=1}^{s} \beta_j * \boldsymbol{b}_j \right) = \left(\sum_{j=1}^{s} \beta_j * \boldsymbol{b}_j \right) \bowtie \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i * \boldsymbol{a}_i \right)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i * \boldsymbol{a}_i\right) \bowtie \left[\left(\sum_{j=1}^{s}\beta_j * \boldsymbol{b}_j\right) \bowtie \left(\sum_{k=1}^{t}\gamma_k * \boldsymbol{b}_k\right)\right] = \left[\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i * \boldsymbol{a}_i\right) \bowtie \left(\sum_{j=1}^{s}\beta_j * \boldsymbol{b}_j\right)\right] \bowtie \left(\sum_{k=1}^{t}\gamma_k * \boldsymbol{b}_k\right)$$

$$\iota \bowtie \left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i * \boldsymbol{a}_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i * \boldsymbol{a}_i\right)$$

(3) Vektorok bináris kódólása: Tekintsük az $\boldsymbol{a} = (2,3,4,1,0,2)$ vektort. Ha ezt a vektort binárisan szeretnénk kódolni, akkor egy kézenfekvő megoldás az lehetne, hogy a vektor komponenseinek megfelelő számú nullákat választunk el egyesekkel (mint határoló jelekkel).

$$\boldsymbol{a} = (2,3,4,1,0,2) \leftrightarrow 0,0,\mathbf{1},0,0,0,\mathbf{1},0,0,0,0,\mathbf{1},0,\mathbf{1},\mathbf{1},0,0,\mathbf{1}$$

Ezt az ötletet fogalmazza meg matematikai precizitással a következő állítás. A nemnegatív $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vektorok és az *1-re végződő, pontosan n darab 1-et tartalmazó* bináris vektor között kölcsönösen egyértelmű kapcsolatot létesít az

$$\omega(\boldsymbol{a}) := (\underbrace{0,0,\ldots,0}_{a_1},\mathbf{1},\underbrace{0,0,\ldots,0}_{a_2},\mathbf{1},\ldots,\underbrace{0,0,\ldots,0}_{a_n},\mathbf{1})$$

megfeleltetés. (Az i-edik 1-es elé a_i darab 0-át írunk.)

Példák:

$$\begin{aligned}
\omega((2,3,1,2)) &= (0,0,\mathbf{1},0,0,0,\mathbf{1},0,\mathbf{1},0,0,\mathbf{1})\\
\omega((3,0,0,1,0)) &= (0,0,0,\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},0,\mathbf{1},\mathbf{1})\\
\omega^{-1}((\mathbf{1},\mathbf{1},0,0,0,\mathbf{1},0,\mathbf{1},0,0,\mathbf{1})) &= (0,0,3,1,2)\\
\omega^{-1}((\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1})) &= (0,0,0,0)
\end{aligned}$$

Érdemes megjegyezni, hogy tetszőleges nemnegatív $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vektorra

$$\begin{aligned}
|\omega(\boldsymbol{a})| &= \sum \boldsymbol{a} + |\boldsymbol{a}| = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + n\\
\sum \omega(\boldsymbol{a}) &= |\boldsymbol{a}| = n
\end{aligned}$$

(4) Fésű-szorzat (shuffle-szorzat): A fent bevezetett összefésülés, multihalmazok additív felírása, illetve $\omega(\boldsymbol{a})$ bináris oda-vissza kódolás fogalmak segítségével már könnyen értelmezhető egy nemnegatív $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ és $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ vektor $\boldsymbol{a} \sqcup \boldsymbol{b}$ *fésű-szorzata (shuffle-szorzata)* is. Vegyük az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektor $\omega(\boldsymbol{a})$, illetve $\omega(\boldsymbol{b})$ bináris képeinek az összefésülését, ami általában egy multihalmaz, és ebben minden vektort kódoljunk vissza. Az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok $\boldsymbol{a} \sqcup \boldsymbol{b}$ fésű-szorzatán ezt a visszakódolt multihalmazt értjük.

$$\boldsymbol{a} \sqcup \boldsymbol{b} := \omega^{-1}\left(\omega(\boldsymbol{a}) \bowtie \omega(\boldsymbol{b})\right)$$

Nézzünk egy konkrét példát. Legyen $\boldsymbol{a} = (2,1)$ és $\boldsymbol{b} = (1)$. Ekkor $\omega(\boldsymbol{a}) = (0,0,1,0,1)$ és $\omega(\boldsymbol{b}) = (0,1)$. Ezen két bináris vektornak pontosan $\binom{7}{2} = 21$ összefésülése van. Azért, hogy a két vektor között különbséget tudjunk tenni az $\omega(\boldsymbol{b})$ vektor elemeit pirossal szedjük.

Ahogy azt korábban már javasoltuk, most is minden ilyen keverést két lépésre bontva érdemes kiszámítani. (1) A hét hosszú vektorból választunk az $\omega(\boldsymbol{b}) = ({\color{red}0,1})$ vektornak két helyet:

$$(\bullet,\bullet,\bullet,\bullet,\bullet,\bullet,\bullet) \to (\bullet,\bullet,{\color{red}\bullet},\bullet,\bullet,{\color{red}\bullet},\bullet)$$

(2) Az $\omega(\boldsymbol{a}) = (0,0,1,0,1)$ és $\omega(\boldsymbol{b}) = ({\color{red}0,1})$ vektorokat beírjuk a megfelelő helyekre az eredeti sorrendben:

$$\begin{array}{ccc}
(0,0,1,0,1) & & ({\color{red}0,1})\\
\downarrow & & \downarrow\\
(0,0,{\color{red}\bullet},1,0,{\color{red}\bullet},1) & \to & (0,0,0,{\color{red}1},0,{\color{red}1},1)
\end{array}$$

A 21 összefésülés pedig az alábbi:

$$(0,0,1,0,1,0,1);\ (0,0,1,0,0,1,1);\ (0,0,1,0,0,1,1);\ (0,0,0,1,0,1,1);\ (0,0,0,1,0,1,1);\ (0,0,0,1,0,1,1);\ (0,0,1,0,0,1,1)$$
$$(0,0,1,0,0,1,1);\ (0,0,0,1,0,1,1);\ (0,0,0,1,0,1,1);\ (0,0,0,1,0,1,1);\ (0,0,1,0,1,0,1);\ (0,0,0,1,1,0,1);\ (0,0,0,1,1,0,1);$$
$$(0,0,0,1,1,0,1);\ (0,0,0,1,1,0,1);\ (0,0,0,1,1,0,1);\ (0,0,0,1,1,0,1);\ (0,0,1,0,1,0,1);\ (0,0,1,0,1,0,1);\ (0,1,0,0,1,0,1)$$

A 21 vektor között vanak egyformák. Egy táblázatban összegyűjtjük az egyes vektorok előfordulását (multiplicitását).

$(0,1,0,0,1,0,1)$	$(0,0,1,0,1,0,1)$	$(0,0,1,0,0,1,1)$	$(0,0,0,1,1,0,1)$	$(0,0,0,1,0,1,1)$	$\sum$
1	4	4	6	6	21

Most minden vektort visszafordítunk, azaz vesszük az ω^{-1} melletti képét.

$(1,2,1)$	$(2,1,1)$	$(2,2,0)$	$(3,0,1)$	$(3,1,0)$	$\sum$
1	4	4	6	6	21

Végül az eredményt additív multihalmazos jelöléssel felírva megkapjuk a két vektor $\boldsymbol{a} \sqcup\!\sqcup \boldsymbol{b}$ shuffle-szorzatát:

$$\boldsymbol{a} \sqcup\!\sqcup \boldsymbol{b} = (1,2,1) + 4*(2,1,1) + 4*(2,2,0) + 6*(3,0,1) + 6*(3,1,0)$$

Mivel az összefésülés nem változtatja meg a tényezők komponenseit, ezért *a nemnegatív $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok $\boldsymbol{a} \sqcup\!\sqcup \boldsymbol{b}$ fésű-szorzatában a $\sum \boldsymbol{a} + \sum \boldsymbol{b}$ pozitív szám $|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$ hosszú nemnegatív kompozíciói szerepelnek*, de általában nem az összes. Mint ismeretes, az $\sum \boldsymbol{a} + \sum \boldsymbol{b}$ pozitív szám összes $|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$ hosszú nemnegatív kompozícióinak száma $\binom{\sum \boldsymbol{a} + \sum \boldsymbol{b} + |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| - 1}{|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| - 1}$, ami általában nagyobb, mint az $\boldsymbol{a} \sqcup\!\sqcup \boldsymbol{b}$ fésű-szorzat tartóhalmazának elemszáma.

Implementáció: A program jelenleg csak két vektor összefésülését tudja kiszámítani, multihalmazokét még nem. Viszont az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok $\boldsymbol{a} \bowtie \boldsymbol{b}$ összefésülésének additív felírásán kívűl a fent említett kombinatorikus számokról is informál. Például az $\boldsymbol{a} = (2,3)$, $\boldsymbol{b} = (1,2)$ vektorok beírásakor a kimenet első sorában vastagon szedve látható a $\binom{\sum \boldsymbol{a} + \sum \boldsymbol{b} + |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| - 1}{|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| - 1} = \binom{5+3+2+2-1}{2+2-1} = \binom{11}{3}$ =**165**, ami a 8 szám összes nemnegatív 4 hosszú kompozíciója, illetve a $\boldsymbol{a} \bowtie \boldsymbol{b}$ összefésülés tartójának elemszáma, ami most **42**. (Ez azt jelenti, hogy az összeg 42 tagú.)

A számítás mérete: 990 (gyorsítás: ×1.32) futás. 8-nak(nek) összesen **165** darab 4 hosszú nemnegatív kompozíciója van. Az összegben ezekből **42** szerepel. Vagyis, nagyjából minden 3.929-dik.

(2,3)⊔⊔(1,2) = 2∗(1,2,2,3) + 4∗(1,2,3,2) + 10∗(1,2,4,1) + 20∗(1,2,5,0) + 6∗(1,3,1,3) + 6∗(1,3,2,2) + 12∗(1,3,3,1) + 24∗(1,3,4,0) + 12∗(1,4,0,3) + 6∗(1,4,1,2) + 6∗(1,4,2,1) + 12∗(1,4,3,0) + 3∗(2,1,2,3) + 12∗(2,1,3,2) + 30∗(2,1,4,1) + 60∗(2,1,5,0) + 6∗(2,2,1,3) + 12∗(2,2,2,2) + 28∗(2,2,3,1) + 56∗(2,2,4,0) + 12∗(2,3,0,3) + 10∗(2,3,1,2) + 15∗(2,3,2,1) + 30∗(2,3,3,0) + 8∗(2,4,0,2) + 4∗(2,4,1,1) + 8∗(2,4,2,0) + 6∗(3,0,2,3) + 24∗(3,0,3,2) + 60∗(3,0,4,1) + 120∗(3,0,5,0) + 3∗(3,1,1,3) + 12∗(3,1,2,2) + 30∗(3,1,3,1) + 60∗(3,1,4,0) + 6∗(3,2,0,3) + 6∗(3,2,1,2) + 12∗(3,2,2,1) + 24∗(3,2,3,0) + 6∗(3,3,0,2) + 3∗(3,3,1,1) + 6∗(3,3,2,0)

A számítás mérete pedig $\binom{\sum \boldsymbol{a} + \sum \boldsymbol{b} + |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| - 1}{|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| - 1} \cdot \binom{|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|} = \binom{11}{3} \cdot \binom{4}{2} = 165 \cdot 6 = 990$. Később ismertetni fogunk egy igen szép formulát, amely tetszőleges $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ pozítív vektorpáros esetén megmondja, hogy a $\sum \boldsymbol{a} + \sum \boldsymbol{b}$ pozitív szám $|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$ hosszú nemnegatív $\boldsymbol{c}$ kompozíciója benne van-e az $\boldsymbol{a} \sqcup\!\sqcup \boldsymbol{b}$ fésű-szorzatban, és ha igen, akkor megadja annak multiplicitását is. Ez sokban hasonlít a Zhonghua Li , Chen Qin: Shuffle product formulas of multiple zeta values cikkében felírt képletre, de a jól eltalált fogalmaknak köszönhetően sokkal tömörebb. Az implementációban használt algoritmusnak is ez a formula az elméleti alapja.

(4) Altalánosított polilogaritmusok és a fésű-szorzat:

Tetszőleges $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vektor komponensenkénti 1-gyel növelését (csökkentését) jelölje

$$\boldsymbol{a}^{\vee} := (a_1 - 1, a_2 - 1, \ldots, a_n - 1) = \boldsymbol{a} - (1, 1, \ldots, 1)$$

$$\boldsymbol{a}^{\wedge} := (a_1 + 1, a_2 + 1, \ldots, a_n + 1) = \boldsymbol{a} + (1, 1, \ldots, 1)$$

A fogalom természetes módon terjeszthető ki multihalmazokra is:

$$(\alpha_1 * \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 * \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k * \boldsymbol{a}_k)^{\vee} := \alpha_1 * \boldsymbol{a}_1^{\vee} + \alpha_2 * \boldsymbol{a}_2^{\vee} + \ldots + \alpha_k * \boldsymbol{a}_k^{\vee}$$

$$(\alpha_1 * \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 * \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k * \boldsymbol{a}_k)^{\wedge} := \alpha_1 * \boldsymbol{a}_1^{\wedge} + \alpha_2 * \boldsymbol{a}_2^{\wedge} + \ldots + \alpha_k * \boldsymbol{a}_k^{\wedge}$$

Az általánosított polilogaritmus függvényeket is kiterjeszthetők multihalmaz indexekre az alábbi definíció szerint

$$\mathrm{Li}_{\alpha_1 * \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 * \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k * \boldsymbol{a}_k}(x) := \alpha_1 \cdot \mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}_1}(x) + \alpha_2 \cdot \mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}_2}(x) + \cdots + \alpha_k \cdot \mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}_k}(x)$$

A fenti fogalmak és jelölések segítségével az általánosított polilogaritmus függvényekre az alábbi tételt fogalmazhatjuk meg.

Tétel: *Tetszőleges* $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *és* $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ *pozitív vektorokra*

$$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x) \cdot \mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x) = \mathrm{Li}_{(\boldsymbol{a}^\vee \sqcup\!\sqcup\, \boldsymbol{b}^\vee)^\wedge}(x)$$

Példa: $\boldsymbol{a} = (2,3)$, és $\boldsymbol{b} = (1,2)$ vektorokkal $\boldsymbol{a}^\vee = (1,2)$ és $\boldsymbol{b}^\vee = (0,1)$. Az implementációban végzett számítás szerint,

$$\begin{aligned}(1,2) \sqcup\!\sqcup\, (0,1) = {} & 2*(0,1,1,2) + 3*(0,1,2,1) + 6*(0,1,3,0) + 4*(0,2,0,2) + 2*(0,2,1,1) + 4*(0,2,2,0) + 2*(1,0,1,2) + \\ & + 6*(1,0,2,1) + 12*(1,0,3,0) + 2*(1,1,0,2) + 3*(1,1,1,1) + 6*(1,1,2,0) + 2*(1,2,0,1) + 2*(1,2,1,0).\end{aligned}$$

Ebben az eredményben minden vektort komponensenként eggyel megnövelve:

$$\begin{aligned}((1,2) \sqcup\!\sqcup\, (0,1))^\wedge = {} & 2*(0,1,1,2)^\wedge + 3*(0,1,2,1)^\wedge + 6*(0,1,3,0)^\wedge + 4*(0,2,0,2)^\wedge + 2*(0,2,1,1)^\wedge + 4*(0,2,2,0)^\wedge + 2*(1,0,1,2)^\wedge + \\ & + 6*(1,0,2,1)^\wedge + 12*(1,0,3,0)^\wedge + 2*(1,1,0,2)^\wedge + 3*(1,1,1,1)^\wedge + 6*(1,1,2,0)^\wedge + 2*(1,2,0,1)^\wedge + 2*(1,2,1,0)^\wedge = \\ & = 2*(1,2,2,3) + 3*(1,2,3,2) + 6*(1,2,4,1) + 4*(1,3,1,3) + 2*(1,3,2,2) + 4*(1,3,3,1) + 2*(2,1,2,3) + 6*(2,1,3,2) + \\ & + 12*(2,1,4,1) + 2*(2,2,1,3) + 3*(2,2,2,2) + 6*(2,2,3,1) + 2*(2,3,1,2) + 2*(2,3,2,1).\end{aligned}$$

A tétel szerint a két általánosított polilogaritmus függvény szorzata az alábbi lineáris kombinációra bomlik fel:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Li}_{(2,3)}(x) \cdot \mathrm{Li}_{(1,2)}(x) = 2 \cdot \mathrm{Li}_{(1,2,2,3)}(x) + 3 \cdot \mathrm{Li}_{(1,2,3,2)}(x) + 6 \cdot \mathrm{Li}_{(1,2,4,1)}(x) + 4 \cdot \mathrm{Li}_{(1,3,1,3)}(x) + 2 \cdot \mathrm{Li}_{(1,3,2,2)}(x) + 4 \cdot \mathrm{Li}_{(1,3,3,1)}(x) + \\ &+ 2 \cdot \mathrm{Li}_{(2,1,2,3)}(x) + 6 \cdot \mathrm{Li}_{(2,1,3,2)}(x) + 12 \cdot \mathrm{Li}_{(2,1,4,1)}(x) + 2 \cdot \mathrm{Li}_{(2,2,1,3)}(x) + 3 \cdot \mathrm{Li}_{(2,2,2,2)}(x) + 6 \cdot \mathrm{Li}_{(2,2,3,1)}(x) + 2 \cdot \mathrm{Li}_{(2,3,1,2)}(x) + 2 \cdot \mathrm{Li}_{(2,3,2,1)}(x).\end{aligned}$$

(5) Az $A \subseteq \{1,2,3,\ldots,n\}$ **halmazok deriváltja:** ∂A

$$i \in \partial A \Leftrightarrow \begin{cases} i = 1 \\ i \in A \text{ és } i-1 \in A \\ i \notin A \text{ és } i-1 \notin A \end{cases}$$

Szavakban, az $A \subseteq \{1,2,3,\ldots,n\}$ halmaz ∂A deriváltjában az 1 mindig benne van. Tetszőleges $1 \le i \le n$ elem pontosan akkor eleme ∂A-nak, ha i is és $i-1$ is, vagy ha i sem és $i-1$ sem eleme A-nak. Mégegyszerűbben leírhatjuk a ∂A halmazt, ha annak digitális megfelelőjét vesszük.Tekintsük az $A = \{2,3,4,7,8,9\} \subseteq \{1,2,3,\ldots,11\}$ halmaznak megfelelő digitális vektort:

$$\begin{array}{rccccccccccc} & 1. & 2. & 3. & 4. & 5. & 6. & 7. & 8. & 9. & 10. & 11. \\ A = & (0, & 1, & 1, & 0, & 0, & 0, & 1, & 1, & 1, & 0, & 0) \\ \partial A = & (1, & 0, & 1, & 0, & 1, & 1, & 0, & 1, & 1, & 0, & 1) \end{array}$$

Az első helyen mindig 1 áll. A többi i-edik helyen pontosan akkor áll 1-es a ∂A vektorban , ha A vektorban az i-edik és az $i-1$-edik bit megegyezik.

Nagyon fontos lesz a későbbiekben az alábbi tétel

$$\partial\,(A \triangle B) = \overline{\partial A \triangle \partial B}$$

2 Fésű-szorzat (shuffle-szorzat) kiszámítása

Legyen $\boldsymbol{a} = (2,3)$ és $\boldsymbol{b} = (2,1)$.Az $a \sqcup\!\sqcup\, b$ gombra kattintva megkapjuk az $\boldsymbol{a} \sqcup\!\sqcup\, \boldsymbol{b}$ fésű-szorzatot.

A számítás mérete: 990 (gyorsítás: $\times 1.32$) futás. 8-nak(nek) összesen **165** darab 4 hosszú nemnegatív kompozíciója van. Az összegben ezekből **37** szerepel. Vagyis, nagyjából minden 4.459-dik.

(2,3)⊔(2,1) = (2,1,2,3) + 4∗(2,2,1,3) + 4∗(2,2,2,2) + 8∗(2,2,3,1) + 16∗(2,2,4,0) + 6∗(2,3,0,3) + 6∗(2,3,1,2) + 13∗(2,3,2,1) + 24∗(2,3,3,0) + 16∗(2,4,1,1) + 24∗(2,4,2,0) + 20∗(2,5,0,1) + 20∗(2,5,1,0) + 9∗(3,1,1,3) + 12∗(3,1,2,2) + 24∗(3,1,3,1) + 48∗(3,1,4,0) + 12∗(3,2,0,3) + 12∗(3,2,1,2) + 24∗(3,2,2,1) + 48∗(3,2,3,0) + 21∗(3,3,1,1) + 36∗(3,3,2,0) + 24∗(3,4,0,1) + 24∗(3,4,1,0) + 12∗(4,0,1,3) + 24∗(4,0,2,2) + 48∗(4,0,3,1) + 96∗(4,0,4,0) + 12∗(4,1,0,3) + 12∗(4,1,1,2) + 24∗(4,1,2,1) + 48∗(4,1,3,0) + 12∗(4,2,1,1) + 24∗(4,2,2,0) + 12∗(4,3,0,1) + 12∗(4,3,1,0)

$\sum \boldsymbol{a} = 2+3 = 5$; $\sum \boldsymbol{b} = 2+1 = 3$; $|\boldsymbol{a}| = 2$; $|\boldsymbol{b}| = 2\binom{\sum \boldsymbol{a}+\sum \boldsymbol{b}+|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|-1}{|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|-1} = \binom{5+3+2+2-1}{2+2-1} = \binom{11}{3} = 165$. Az összegben 37 kompozíció szerepel.

$\boldsymbol{a} \sqcup \boldsymbol{b} = (2,3) \sqcup (2,1)$-ben az $\sum \boldsymbol{a} + \sum \boldsymbol{b} = 8$-nak $|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| = 4$ hosszú nemnegatív felbontásai (kompozíciói) szerepelnek, de láthatóan nem mind a 165 darab, hanem csak 37 darab. *Hogyan mondható meg, hogy mely nemnegatív felbontások fordulnak elő, és hogyan adható meg az előfordulók együtthatója?* A válasz meglepően egyszerű, de a tömör megfogalmazás érdekében még két egyszerű fogalmat vezetünk be.

Multi-index jelölés (Bővebben itt, angolul) A továbbiakban csak az alábbi multi-index jelölésre lesz szükségünk. Legyen $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ és $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \dots, n_n)$ két n-dimenziós vektor, ekkor

$$\binom{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} := \binom{a_1}{b_1}\binom{a_2}{b_2}\cdots\binom{a_n}{b_n}$$

Egy vektor (függvény) A **halmazon vett differenciája**. Legyen $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ egy n-dimenziós vektor és A az $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ halmaz tetszőleges részhalmaza. Az $\boldsymbol{a}$ vektor A halmazon vett differenciáján a

$$\boldsymbol{v} = \begin{cases} \Delta v_i = v_i - v_{i-1} & i \in A \\ v_i & i \notin A \end{cases}$$

vektort értjük, és $\Delta_A \boldsymbol{a}$-val jelöljük.

Példa:

$$\Delta_{\{3,5,6,9\}}(2,3,\underline{4},2,\underline{6},\underline{8},1,2,\underline{7},0,3) = (2,3,\underline{1},2,\underline{4},\underline{8},1,2,\underline{5},0,3)$$

Az $\boldsymbol{a} \overset{\sigma}{\bowtie} \boldsymbol{b}$ összefésülés fogalmát használva az alábbi nyilvánvaló egyenlőség írható:

$$\Delta_A \boldsymbol{a} = (\Delta \boldsymbol{a}) \overset{A}{\bowtie} \boldsymbol{a}$$

(Ahol Δ a teljes $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ indexhalmazon vett szokásos differencia-operátort jelenti, $\Delta_{[n]}\boldsymbol{a} = \Delta \boldsymbol{a}$.) Az is könnyen átgondolható, hogy egy rögzített $A \subseteq [n]$ halmazon a Δ_A operátor lineáris. Vagyis,

$$\Delta_A(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \Delta_A \boldsymbol{a} + \Delta_A \boldsymbol{b} \text{ és } \Delta_A(\alpha \cdot \boldsymbol{a}) = \alpha \cdot \Delta_A \boldsymbol{a}.$$

A most bevezetett fogalmak segítségével:

A $\sum \boldsymbol{a} + \sum \boldsymbol{b} = a_1 + \ldots + a_{|\boldsymbol{a}|} + b_1 + \ldots + b_{|\boldsymbol{b}|}$ szám egy $|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$ hoszú nemnegatív $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \dots, c_{|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|})$ kompozíciója pontosan akkor szerepel az $\boldsymbol{a} \sqcup \boldsymbol{b}$ fésű-szorzatban, ha

$$\boldsymbol{0} \le \Delta_{\partial \mathscr{I}} \sum \left(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a} \overset{\mathscr{I}}{\bowtie} \boldsymbol{b}\right) \le \boldsymbol{c} \quad \text{valamely } \mathscr{I} \subseteq \{1, 2, \dots, |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|\}, \, |\mathscr{I}| = |\boldsymbol{a}| \text{ halmazzal,}$$

és ekkor az együtthatója a szorzatban

$$\binom{\boldsymbol{c}}{\Delta_{\partial \mathscr{I}} \sum (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a} \overset{\mathscr{I}}{\bowtie} \boldsymbol{b})}$$

Vagyis,

$$\boxed{\boldsymbol{a} \sqcup \boldsymbol{b} = \sum_{\substack{\boldsymbol{c} \Vdash \sum \boldsymbol{a} + \sum \boldsymbol{b} \\ |\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|}} \left(\sum_{\substack{\mathscr{I} \subseteq \{1,2,\dots,|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|\} \\ |\mathscr{I}| = |\boldsymbol{a}|}} \binom{\boldsymbol{c}}{\Delta_{\partial \mathscr{I}} \sum (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a} \overset{\mathscr{I}}{\bowtie} \boldsymbol{b})} * \boldsymbol{c} \right)}$$

Az $\boldsymbol{a} \sqcup\!\sqcup \boldsymbol{b}$ fésű-szorzatot megadó, általam ismert egyetlen formula ZHONGHUA LI AND CHEN QIN *“Shuffle product formulas of multiple zeta values* című” 2016-os cikkében található, amely vélhetően ekvivalens a mi formulánkkal, de nem ilyen tömör, sőt, inkább nehézkes.

Theorem 2.1. *Let r, s be two positive integers and let $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s$ be nonnegative integers. Then we have*

$$\begin{aligned} & x^{a_1} y \cdots x^{a_r} y \sqcup\!\sqcup x^{b_1} y \cdots x^{b_s} y \\ = & \sum_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_{r+s}=\sum_{i=1}^{r} a_i+\sum_{j=1}^{s} b_j \\ \alpha_1,\dots,\alpha_{r+s}\geqslant 0}} c_{\alpha_1,\dots,\alpha_{r+s}} x^{\alpha_1} y x^{\alpha_2} y \cdots x^{\alpha_{r+s}} y, \end{aligned} \tag{2.1}$$

where the coefficients

$$\begin{aligned} c_{\alpha_1,\dots,\alpha_{r+s}} = & \sum_{\substack{l_1+\cdots+l_{p+1}=r \\ n_1+\cdots+n_p=s \\ p\geqslant 1, l_i\geqslant 1, n_j\geqslant 1}} \prod_{i=1}^{L_p+s} \binom{\alpha_i}{\beta_i} \prod_{j=L_p+s+2}^{r+s} \delta_{\alpha_j, a_{j-s}} \\ & + \sum_{\substack{l_1+\cdots+l_p=r \\ n_1+\cdots+n_p=s \\ p\geqslant 1, l_i\geqslant 1, n_j\geqslant 1}} \prod_{i=1}^{r+N_{p-1}} \binom{\alpha_i}{\beta_i} \prod_{j=r+N_{p-1}+2}^{r+s} \delta_{\alpha_j, b_{j-r}} \\ & + \sum_{\substack{l_1+\cdots+l_p=r \\ n_1+\cdots+n_{p+1}=s \\ p\geqslant 1, l_i\geqslant 1, n_j\geqslant 1}} \prod_{i=1}^{r+N_p} \binom{\alpha_i}{\gamma_i} \prod_{j=r+N_p+2}^{r+s} \delta_{\alpha_j, b_{j-r}} \\ & + \sum_{\substack{l_1+\cdots+l_p=r \\ n_1+\cdots+n_p=s \\ p\geqslant 1, l_i\geqslant 1, n_j\geqslant 1}} \prod_{i=1}^{L_{p-1}+s} \binom{\alpha_i}{\gamma_i} \prod_{j=L_{p-1}+s+2}^{r+s} \delta_{\alpha_j, a_{j-s}}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Here for positive integers $l_1, \dots, l_p(, l_{p+1})$ and $n_1, \dots, n_p(, n_{p+1})$ appearing in the summations above, we define

$$\begin{cases} \beta_{L_j+N_j+1} = \sum_{i=1}^{L_j+1} a_i + \sum_{i=1}^{N_j} b_i - \sum_{i=1}^{L_j+N_j} \alpha_i, & \text{for } j = 0, 1, \dots, p, \\ \beta_{L_j+N_j+t} = a_{L_j+t}, \quad (2 \leqslant t \leqslant l_{j+1}) & \\ \beta_{L_{j+1}+N_j+1} = \sum_{i=1}^{L_{j+1}} a_i + \sum_{i=1}^{N_j+1} b_i - \sum_{i=1}^{L_{j+1}+N_j} \alpha_i, & \text{for } j = 0, 1, \dots, p-1, \\ \beta_{L_{j+1}+N_j+t} = b_{N_j+t}, \quad (2 \leqslant t \leqslant n_{j+1}) & \end{cases} \tag{2.3}$$

and

$$\begin{cases} \gamma_{L_j+N_j+1} = \sum_{i=1}^{L_j} a_i + \sum_{i=1}^{N_j+1} b_i - \sum_{i=1}^{L_j+N_j} \alpha_i, & \text{for } j = 0, 1, \dots, p, \\ \gamma_{L_j+N_j+t} = b_{N_j+t}, \quad (2 \leqslant t \leqslant n_{j+1}) & \\ \gamma_{L_j+N_{j+1}+1} = \sum_{i=1}^{L_j+1} a_i + \sum_{i=1}^{N_{j+1}} b_i - \sum_{i=1}^{L_j+N_{j+1}} \alpha_i, & \text{for } j = 0, 1, \dots, p-1, \\ \gamma_{L_j+N_{j+1}+t} = a_{L_j+t}, \quad (2 \leqslant t \leqslant l_{j+1}) & \end{cases} \tag{2.4}$$

with $L_j = l_1 + \cdots + l_j$, $N_j = n_1 + \cdots + n_j$ for $j \geqslant 0$ and $L_0 = N_0 = 0$. And δ_{ij} is Kronecker's delta symbol defined as

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Mivel rögzített $\mathscr{I}$ indexhalmazzal az $\boldsymbol{u} \to \Delta_{\partial \mathscr{I}} \sum \boldsymbol{u}$ oprátor lineáris, ezért megadható a mátrixa. Ezt a későbbiekben fel is írjuk.

Megtaláltuk azt a cikket, amelyben a fenti formula is megjelenik kicsit más formában.

LI GUO AND BINGYONG XIE: EXPLICIT DOUBLE SHUFFLE RELATIONS AND A GENERALIZATION OF EULER'S DECOMPOSITION FORMULA (2008) Itt érhető el

The statement of the main theorems We first introduce some notations. For positive integers k and ℓ, denote $[k] = \{1, \cdots, k\}$ and $[k+1, k+\ell] = \{k+1, \cdots, k+\ell\}$. Define

$$\mathcal{I}_{k,\ell} = \left\{ (\varphi, \psi) \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi : [k] \to [k+\ell], \psi : [\ell] \to [k+\ell] \text{ are order preserving} \\ \text{injective maps and } \operatorname{im}(\varphi) \sqcup \operatorname{im}(\psi) = [k+\ell] \end{array} \right\} \tag{2.5}$$

Let $\vec{r} = (r_1, \cdots, r_k) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^k$, $\vec{s} = (s_1, \cdots, s_\ell) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^\ell$ and $\vec{t} = (t_1, \cdots, t_{k+\ell}) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^{k+\ell}$ with $|\vec{r}| + |\vec{s}| = |\vec{t}|$. Here $|\vec{r}| = r_1 + \cdots + r_k$ and similarly for $|\vec{s}|$ and $|\vec{t}|$. With these notations, we define

$$c_{\vec{r},\vec{s}}^{\vec{t},(\varphi,\psi)}(i) = \begin{cases} \binom{t_i - 1}{h_{(\varphi,\psi),i} - 1} & \text{if } i = 1, \text{if } i-1, i \in \operatorname{im}(\varphi) \\ & \text{or if } i-1, i \in \operatorname{im}(\psi), \\ \binom{t_i - 1}{T_i - R_{|\varphi^{-1}([i])|} - S_{|\psi^{-1}([i])|}} & \\ = \binom{t_i - 1}{\sum_{j=1}^{i} t_j - \sum_{j=1}^{i} h_{(\varphi,\psi),j}} & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.6}$$