1 Az általánosított polilogaritmusok integráljai

$$(1)\int \frac{\mathrm{Li}_{(b_1,\ldots.b_n)}(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Li}_{(b_1+1,\ldots.b_n)}(x)$$

$$(1')\int \frac{\mathrm{Li}_{(b_1,\ldots.b_n)}(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{Li}_{(b_1+1,\ldots.b_n)}(1-x)$$

$$(3)\int \frac{\mathrm{Li}_{(b_1,\ldots.b_n)}(x)}{x\cdot(1-x)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Li}_{(1,b_1,\ldots.b_n)}(x)+\mathrm{Li}_{(b_1+1,,\ldots.b_n)}(x)$$

$$(3')\int \frac{\mathrm{Li}_{(b_1,\ldots.b_n)}(1-x)}{x\cdot(1-x)}\,\mathrm{d}x = -\left(\mathrm{Li}_{(1,b_1,\ldots.b_n)}(1-x)+\mathrm{Li}_{(b_1+1,\ldots.b_n)}(1-x)\right)$$

$$(2)\int \frac{\mathrm{Li}_{(b_1,\ldots.b_n)}(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Li}_{(1,b_1,\ldots.b_n)}(x)$$

$$(2')\int \frac{\mathrm{Li}_{(b_1,\ldots.b_n)}(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{Li}_{(1,b_1,\ldots.b_n)}(1-x)$$

$$(1)\int \frac{\mathrm{Le}_{(b_1,\ldots.b_n)}(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Le}_{(b_1+1,\ldots.b_n)}(x)$$

$$(1')\int \frac{\mathrm{Le}_{(b_1,\ldots.b_n)}(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{Le}_{(b_1+1,\ldots.b_n)}(1-x)$$

$$(3)\int \frac{\mathrm{Le}_{(b_1,\ldots.b_n)}(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Le}_{(1,b_1,\ldots.b_n)}(x)-\mathrm{Li}_{(b_1+1,\ldots.b_n)}(x)$$

$$(3')\int \frac{\mathrm{Le}_{(b_1,\ldots.b_n)}(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\left(\mathrm{Le}_{(1,b_1,\ldots.b_n)}(1-x)-\mathrm{Le}_{(b_1+1,\ldots.b_n)}(1-x)\right)$$

$$(2)\int \frac{\mathrm{Le}_{(b_1,\ldots.b_n)}(x)}{x\cdot(1-x)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Le}_{(1,b_1,\ldots.b_n)}(x)$$

$$(2')\int \frac{\mathrm{Li}_{(b_1,\ldots.b_n)}(1-x)}{x\cdot(1-x)}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{Le}_{(1,b_1,\ldots.b_n)}(1-x)$$

Az 1-átvitel kiszámítása néhány esetben

$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)$	...	$\mathrm{Li}_{(1,a_1,\ldots.a_n)}(x)$	$\frac{\mathrm{Li}_{(0,a_1,\ldots.a_n)}(x)}{x}=\frac{\mathrm{Li}_{(a_1,\ldots.a_n)}(x)}{1-x}$	$\mathrm{Li}_{(a_1,\ldots.a_n)}(x)$	$\frac{\mathrm{Li}_{(a_1-1,\ldots.a_n)}(x)}{x}$	...
$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}$	...	$\frac{\mathrm{Li}_{(b_1-1,\ldots.b_m)}(x)}{x}$	$\mathrm{Li}_{(b_1,\ldots.b_m)}(x)$	$\frac{\mathrm{Li}_{(b_1,\ldots.b_m)}(x)}{1-x}$	$\mathrm{Li}_{(1,b_1,\ldots.b_n)}(x)$	...

$$\boldsymbol{b}\to{}^{+}\boldsymbol{b}$$

$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)$	...	$\mathrm{Li}_{(1,a_1,\ldots.a_n)}(1-x)$	$-\frac{\mathrm{Li}_{(0,a_1,\ldots.a_n)}(1-x)}{1-x}=-\frac{\mathrm{Li}_{(a_1,\ldots.a_n)}(x)}{x}$	$\mathrm{Li}_{(a_1,\ldots.a_n)}(1-x)$	$\frac{\mathrm{Li}_{(a_1-1,\ldots.a_n)}(1-x)}{x}$	...
$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}$	...	$\frac{\mathrm{Li}_{(b_1-1,\ldots.b_m)}(x)}{x}$	$\mathrm{Li}_{(b_1,\ldots.b_m)}(x)$	$-\frac{\mathrm{Li}_{(b_1,\ldots.b_m)}(x)}{x}$	$-\mathrm{Li}_{(b_1+1,\ldots.b_n)}(x)$	...

$$\boldsymbol{b}\to-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$$

$\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x)$	...	$\mathrm{Le}_{(1,a_1,\ldots.a_n)}(x)$	$\frac{\mathrm{Le}_{(0,a_1,\ldots.a_n)}(x)}{x}=\frac{\mathrm{Le}_{(a_1,\ldots.a_n)}(x)}{x\cdot(1-x)}$	$\mathrm{Le}_{(a_1,\ldots.a_n)}(x)$	$\frac{\mathrm{Le}_{(a_1-1,\ldots.a_n)}(x)}{x}$	...
$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}$	...	$\frac{\mathrm{Li}_{(b_1-1,\ldots.b_m)}(x)}{x}$	$\mathrm{Li}_{(b_1,\ldots.b_m)}(x)$	$\frac{\mathrm{Li}_{(b_1,\ldots.b_m)}(x)}{x\cdot(1-x)}$	$\mathrm{Li}_{(1,b_1,\ldots.b_n)}(x)+\mathrm{Li}_{(1+b_1,\ldots.b_n)}(x)$	...

$$\boldsymbol{b}\to{}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}$$

<table>
<tr><td>$\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(1-x)$</td><td>...</td><td>$\mathrm{Le}_{(1,a_1,\dots,a_n)}(1-x)$</td><td>$-\frac{\mathrm{Le}_{(0,a_1,\dots,a_n)}(1-x)}{1-x} = -\frac{\mathrm{Le}_{(a_1,\dots,a_n)}(1-x)}{x\cdot(1-x)}$</td><td>$\mathrm{Le}_{(a_1,\dots,a_n)}(1-x)$</td></tr>
<tr><td>$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}$</td><td>...</td><td>$\frac{\mathrm{Li}_{(b_1-1,\dots,b_m)}(x)}{x}$</td><td>$\mathrm{Li}_{(b_1,\dots,b_m)}(x)$</td><td>$-\frac{\mathrm{Li}_{(b_1,\dots,b_m)}(x)}{x\cdot(1-x)}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>$\frac{\mathrm{Le}_{(a_1-1,\dots,a_n)}(1-x)}{x}$</td><td>...</td></tr>
<tr><td>$-\left(\mathrm{Li}_{(1,b_1,\dots,b_n)}(x) - \mathrm{Li}_{(1+b_1,\dots,b_n)}(x)\right)$</td><td>...</td></tr>
</table>

$$\boldsymbol{b} \to {}^{+}\boldsymbol{b} + {}_{+}\boldsymbol{b}$$

2 Alapvető vektorműveletek, lépések

Az alábbiakban definiálunk négy darab egyváltozós vektorműveletet, amelyek mindegyike egy vektor elejét változtatja meg.

$$
\begin{aligned}
{}^{+}(a_1, a_2, \dots a_n) &= (1, a_1, a_2, \dots a_n) \\
{}^{-}(1, a_2, \dots a_n) &= (a_2, a_3, \dots a_n) \\
{}_{+}(a_1, a_2, \dots a_n) &= (a_1 + 1, a_2, \dots a_n) \\
{}_{-}(a_1, a_2, \dots a_n) &= (a_1 - 1, a_2, \dots a_n)
\end{aligned}
$$

Ezen egyváltozós műveletek segítségével négy kétváltozós vektorműveletet definiálunk. Ezek mindegyike az általánosított polilogaritmusok integrálásakor alkalmazott lépések egyike. Az első kettő a sztandard lépés, illetve annak duálisa, míg a második kettő at 1-átvitel és annak duálisa.

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) &\longrightarrow ({}_{-}\boldsymbol{a} \mid {}_{+}\boldsymbol{b}) & (a_1, a_2, \dots a_n \mid b_1, b_2, \dots, b_m) &\longrightarrow (a_1 - 1, a_2, \dots a_n \mid b_1 + 1, b_2, \dots, b_m) \\
(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) &\longrightarrow \left({}_{-}\boldsymbol{a} \mid {}^{+}\boldsymbol{b}\right) & (a_1, a_2, \dots a_n \mid b_1, b_2, \dots, b_m) &\longrightarrow (a_1 - 1, a_2, \dots a_n \mid 1, b_1, b_2, \dots, b_m) \\
(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) &\longrightarrow \left({}^{-}\boldsymbol{a} \mid {}^{+}\boldsymbol{b}\right) & (1, a_2, \dots a_n \mid b_1, b_2, \dots, b_m) &\longrightarrow (a_2, \dots a_n \mid 1, b_1, b_2, \dots, b_m) \\
(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) &\longrightarrow \left({}^{-}\boldsymbol{a} \mid {}_{+}\boldsymbol{b}\right) & (1, a_2, \dots a_n \mid b_1, b_2, \dots, b_m) &\longrightarrow (a_2, \dots a_n \mid b_1 + 1, b_2, \dots, b_m)
\end{aligned}
$$

Ha az $(a_1, a_2, \dots a_n \mid b_1, b_2, \dots, b_m)$ párosban $a_1 > 1$, akkor a sztandard lépés, ha pedig $a_1 = 1$, akkor az 1-átvitel valamelyik változatát hajtjuk végre.

Szükségünk lesz még az alábbi két kétváltozós vektorműveletre, amelyek az általánosított polilogaritmusok integrálásakor az inicializálás megfelelői.

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) &\longrightarrow (\boldsymbol{a} \mid {}_{+}\boldsymbol{b}) & (a_1, a_2, \dots a_n \mid b_1, b_2, \dots, b_m) &\longrightarrow (a_1, a_2, \dots a_n \mid b_1 + 1, b_2, \dots, b_m) \\
(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) &\longrightarrow \left(\boldsymbol{a} \mid {}^{+}\boldsymbol{b}\right) & (a_1, a_2, \dots a_n \mid b_1, b_2, \dots, b_m) &\longrightarrow (a_1, a_2, \dots a_n \mid 1, b_1, b_2, \dots, b_m)
\end{aligned}
$$

3 Fázisok táblázatai

Az $\boldsymbol{a}$ vektor egyértelműen meghatározza a végrehajtandó lépések sorozatát. Például $\boldsymbol{a} = (4, 1, 3)$ indexvektor esetén a lépések sora így alakul:

$$
(4, 1, 3) \overset{\text{std}}{\to} (3, 1, 3) \overset{\text{std}}{\to} (2, 1, 3) \overset{\text{std}}{\to} (1, 1, 3) \overset{\text{1-átv}}{\to} (1, 3) \overset{\text{1-átv}}{\to} (3) \overset{\text{std}}{\to} (2) \overset{\text{std}}{\to} (1) \overset{\text{1-ürit}}{\to} ()
$$

Sokkal nehezebb megmondani, hogy egy konkrét integrálási feladatban az egyes fázisokban (lépések végrehajtásakor) mi történik a $\boldsymbol{b}$ vektorral. Egy általános

$$
\int \frac{\mathrm{L}_{\boldsymbol{a}}(X_a) \cdot \mathrm{L}_{\boldsymbol{b}}(X_b)}{X} \, \mathrm{d}x
$$

integrálási feladat az $\mathrm{L}_{\boldsymbol{a}} = \mathrm{Li}/\mathrm{Le}$, $\mathrm{L}_{\boldsymbol{b}} = \mathrm{Li}/\mathrm{Le}$, $X_a = x/1 - x$, $X_b = x/1 - x$, $X = x/1 - x$ változók megválasztásától függ, amely összesen $2^5 = 32$ lehetőséget jelent. Ezek mindegyikében megadható a $\boldsymbol{b}$ vektor alakulása a négy különböző fázisban. Ezeket foglaltuk össze az alábbi táblázatokban.

Inicializálás	$\int \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{1-x}$
$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)$	${}_{+}\boldsymbol{b}$	${}^{+}\boldsymbol{b}$
$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-({}_{+}\boldsymbol{b})$
$\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)$	${}_{+}\boldsymbol{b}$	${}^{+}\boldsymbol{b} - {}_{+}\boldsymbol{b}$
$\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b} - {}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-({}_{+}\boldsymbol{b})$

Sztandard lépés	$\mathrm{L}_{\boldsymbol{a}}(x)$	$\mathrm{L}_{\boldsymbol{a}}(1-x)$
$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)$	${}_{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$
$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}_{+}\boldsymbol{b}$
$\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)$	${}_{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b} - {}_{+}\boldsymbol{b}\right)$
$\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b} - {}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}_{+}\boldsymbol{b}$

Megjegyzés: A sztandard lépés tánlázata csak annyiban különbözik az inicializálás táblázatától, hogy a második oszlopot -1-gyel megszorozzuk.

1-átvitel	$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)$	$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)$	$\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x)$	$\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(1-x)$
$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)$	${}^{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$
$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}^{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}$
$\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)$	${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}^{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$
$\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}^{+}\boldsymbol{b}$

1-ürítés	$\mathrm{L}_{\boldsymbol{a}}(x)$	$\mathrm{L}_{\boldsymbol{a}}(1-x)$
$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)$	${}^{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$
$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}^{+}\boldsymbol{b}$
$\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)$	${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$
$\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$

Megjegyzés: Az 1-ürítés tánlázata megegyezik az 1-átvitel táblázatának első két oszlopával.

A 32 lehetséges esetet egy összefoglaló táblázata:

		$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)$		$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)$		$\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x)$		$\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(1-x)$	
$\int \frac{1}{x}$	$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)$	${}_{+}\boldsymbol{b}$	${}_{+}\boldsymbol{b}$	${}_{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}_{+}\boldsymbol{b}$	${}_{+}\boldsymbol{b}$	${}_{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$
		${}^{+}\boldsymbol{b}$	${}^{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}$	${}^{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$
	$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}_{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}_{+}\boldsymbol{b}$
		$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}^{+}\boldsymbol{b}$	${}^{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}$	${}^{+}\boldsymbol{b}$
	$\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)$	${}_{+}\boldsymbol{b}$	${}_{+}\boldsymbol{b}$	${}_{+}\boldsymbol{b}$	${}_{+}\boldsymbol{b}-{}^{+}\boldsymbol{b}$	${}_{+}\boldsymbol{b}$	${}_{+}\boldsymbol{b}$	${}_{+}\boldsymbol{b}$	${}_{+}\boldsymbol{b}-{}^{+}\boldsymbol{b}$
		${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$	${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}^{+}\boldsymbol{b}$	${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$
	$\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}_{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}_{+}\boldsymbol{b}$
		$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$	${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}^{+}\boldsymbol{b}$	${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$
$\int \frac{1}{1-x}$	$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)$	${}^{+}\boldsymbol{b}$	${}_{+}\boldsymbol{b}$	${}^{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}^{+}\boldsymbol{b}$	${}_{+}\boldsymbol{b}$	${}^{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$
		${}^{+}\boldsymbol{b}$	${}^{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}$	${}^{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$
	$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}_{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}_{+}\boldsymbol{b}$
		$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}^{+}\boldsymbol{b}$	${}^{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}$	${}^{+}\boldsymbol{b}$
	$\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)$	${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$	${}_{+}\boldsymbol{b}$	${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$	${}_{+}\boldsymbol{b}-{}^{+}\boldsymbol{b}$	${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$	${}_{+}\boldsymbol{b}$	${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$	${}_{+}\boldsymbol{b}-{}^{+}\boldsymbol{b}$
		${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$	${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}^{+}\boldsymbol{b}$	${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$
	$\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}_{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}_{+}\boldsymbol{b}$
		$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$	${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$	$-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$	$-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	${}^{+}\boldsymbol{b}$	${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$

4 A polilogaritmus integrálok 10 alapesete

Elegendő az alábbi tíz esetet tisztázni, mert ezekből az összes többi tükrözéssel, illetve pozíciócserével megkapható.

$$\int \frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot \mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)}{1-x}\,\mathbf{d}x \xrightarrow{\textbf{tükrözés}} \int \frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot \mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}\,\mathbf{d}x \quad \text{és} \quad \int \frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot \mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{pozíció csere}} \int \frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)\cdot \mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

LiLi (1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot \mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ (2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot \mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$ (3) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot \mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$

LeLe (4) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot \mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ (5) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot \mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$ (6) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot \mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$

LiLe (7) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot \mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ (8) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot \mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$ (9) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot \mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ (10) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot \mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x$

1	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}$ ${}_{+}\boldsymbol{b} \qquad {}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b} \qquad {}^{+}\boldsymbol{b}$		$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)}{1-x}$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right) \qquad {}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b} \qquad {}^{+}\boldsymbol{b}$	
2	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)}{1-x}$ ${}^{+}\boldsymbol{b} \qquad {}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b} \qquad {}^{+}\boldsymbol{b}$		$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)}{x}$ $-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right) \qquad {}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b} \qquad {}^{+}\boldsymbol{b}$	
3	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}$ ${}_{+}\boldsymbol{b} \qquad -\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right) \qquad -\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)\cdot\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)}{x}$ $-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right) \qquad -\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right) \qquad -\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)}{1-x}$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right) \qquad -\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right) \qquad -\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)\cdot\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)}{1-x}$ ${}^{+}\boldsymbol{b} \qquad -\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right) \qquad -\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$
4	$\frac{\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}$ ${}_{+}\boldsymbol{b} \qquad {}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b} \qquad {}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$		$\frac{\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)}{1-x}$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right) \qquad {}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b} \qquad {}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$	
5	$\frac{\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{1-x}$ ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b} \qquad {}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b} \qquad {}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$		$\frac{\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}1-(x)}{x}$ $-\left({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}\right) \qquad {}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b} \qquad {}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$	
6	$\frac{\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}$ ${}_{+}\boldsymbol{b} \qquad -\left({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$ $-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right) \qquad -\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$\frac{\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x)}{x}$ $-\left({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}\right) \qquad -\left({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$ $-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right) \qquad -\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$\frac{\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)}{1-x}$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right) \qquad -\left({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$ $-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right) \qquad -\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$\frac{\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(1-x)}{1-x}$ ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b} \qquad -\left({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$ $-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right) \qquad -\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$
7	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}$ ${}_{+}\boldsymbol{b} \qquad {}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b} \qquad {}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x)}{x}$ ${}_{+}\boldsymbol{b} \qquad {}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b} \qquad {}^{+}\boldsymbol{b}$	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)}{1-x}$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right) \qquad {}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b} \qquad {}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(1-x)}{1-x}$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right) \qquad {}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b} \qquad {}^{+}\boldsymbol{b}$
8	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{1-x}$ ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b} \qquad {}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b} \qquad {}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x)}{1-x}$ ${}^{+}\boldsymbol{b} \qquad {}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b} \qquad {}^{+}\boldsymbol{b}$	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)}{x}$ $-\left({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}\right) \qquad {}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b} \qquad {}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}$	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(1-x)}{x}$ $-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right) \qquad {}_{+}\boldsymbol{b}$ ${}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b} \qquad {}^{+}\boldsymbol{b}$
9	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{x}$ ${}_{+}\boldsymbol{b} \qquad -\left({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right) \qquad -\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x)}{x}$ $-\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right) \qquad -\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$ $-\left({}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}\right) \qquad -\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)}{1-x}$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right) \qquad -\left({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right) \qquad -\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(1-x)}{1-x}$ ${}^{+}\boldsymbol{b} \qquad -\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$ $-\left({}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}\right) \qquad -\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$
10	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(1-x)}{x}$ $-\left({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}\right) \qquad -\left({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right) \qquad -\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(1-x)}{x}$ ${}_{+}\boldsymbol{b} \qquad -\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$ $-\left({}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}\right) \qquad -\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{a}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{b}}(x)}{1-x}$ ${}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b} \qquad -\left({}^{+}\boldsymbol{b}-{}_{+}\boldsymbol{b}\right)$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right) \qquad -\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$	$\frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(1-x)\cdot\mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(x)}{1-x}$ $-\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right) \qquad -\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right)$ $-\left({}^{+}\boldsymbol{b}+{}_{+}\boldsymbol{b}\right) \qquad -\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right)$

A fenti táblázat a tíz alapesetet, és azok transzformáltjait tartalmazza. A táblázatból kiderül, hogy a tíz alapfeladat mindegyikének van olyan ekvivalens változata, amelyben legfeljebb csak egyetlen fázisban jelentkezik a $\boldsymbol{b}$ vektor hasadása.

5 Példák

1. példa

Az $\mathrm{L}_{\boldsymbol{a}} = \mathrm{Li}$, $\mathrm{L}_{\boldsymbol{b}} = \mathrm{Le}$, $X_a = 1 - x$, $X_b = x$, $X = x$, illetve $\boldsymbol{a} = (2, 3)$ és $\boldsymbol{b} = (4)$ paraméterek beállításával a szürke kijelzőben rögtön az alábbi kimenet látható:

$$\int \frac{\mathrm{Li}_{(2,3)}(1-x)\cdot \mathrm{Le}_{(4)}(x)}{x}\,\mathrm{d}x \qquad\qquad \begin{bmatrix} {}_{+}\boldsymbol{b} & {}_{+}\boldsymbol{b} - {}^{+}\boldsymbol{b} \\ -({}_{+}\boldsymbol{b}) & -({}_{+}\boldsymbol{b}) \end{bmatrix}$$

Az integrál csak jól kivehetően mutatja a bevitt feladatot. Az elöző táblázatból az is kiolvasható, hogy ez éppen a 9. alapfeladat, melynek *fázismátrixa* jelenik meg az integrál után. Ebből azt tudjuk meg, hogy a négy különböző fázisban mi történik a $\boldsymbol{b}$ vektorral az integrálási feladat során:

$$\text{inicializálás: } \boldsymbol{b} \to {}_{+}\boldsymbol{b} \qquad \text{standard lépés: } \boldsymbol{b} \to -\left({}^{+}\boldsymbol{b} - {}_{+}\boldsymbol{b}\right) = {}_{+}\boldsymbol{b} - {}^{+}\boldsymbol{b}$$

$$\text{1-átvitel: } \boldsymbol{b} \to -({}_{+}\boldsymbol{b}) \qquad\qquad \text{1-ürítés: } \boldsymbol{b} \to -({}_{+}\boldsymbol{b})$$

Az $\boldsymbol{a}$ vektor pedig egyértelműen meghatározza a végrehajtandó lépések sorozatát:

$$\overset{\text{init}}{\to} (2,3) \overset{\text{std}}{\to} (1,3) \overset{\text{atv}}{\to} (3) \overset{\text{std}}{\to} (2) \overset{\text{std}}{\to} (1) \overset{\text{veg}}{\to} ()$$

(A fázisokra a következő rövidítéseket használjuk. initializálás: `init`; standard lépés: `std`; 1-átvitel: `atv`; 1-ürítés: `veg`)

A `Calculate` gombra kattintva az alábbi kimentet kapjuk:

$$\begin{array}{c|l} \mathrm{Li}_a(1-x) & (2,3) \\ \hline \mathrm{Le}_b(x) & (4) \end{array} \overset{\text{init}}{\to} \begin{array}{l} +(2,3) \\ \hline +(5) \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \overset{\text{std}}{\to} \begin{array}{l} -(1,3) \\ \hline -(1,5) \\ +(6) \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \overset{\text{atv}}{\to} \begin{array}{l} +(3) \\ \hline +(2,5) \\ -(7) \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \overset{\text{std}}{\to} \begin{array}{l} -(2) \\ \hline -(1,2,5) \\ +(1,7) \\ +(3,5) \\ -(8) \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \overset{\text{std}}{\to} \begin{array}{l} +(1) \\ \hline +(1,1,2,5) \\ -(1,1,7) \\ -(1,3,5) \\ +(1,8) \\ -(2,2,5) \\ +(2,7) \\ +(4,5) \\ -(9) \end{array} \overset{\text{veg}}{\to} \begin{array}{l} -() \\ \hline -(2,1,2,5) \\ +(2,1,7) \\ +(2,3,5) \\ -(2,8) \\ +(3,2,5) \\ -(3,7) \\ -(5,5) \\ +(10) \end{array}$$

A sor legelső tagja csak a bevitt feladatot jeleníti meg. Minden egyes táblázat fejlécében az $\boldsymbol{a}$ vektor található, a parciális integrálás során fellépő szokásos előjelváltásokkal együtt. A fázismátrix szerint a $\boldsymbol{b} = (4)$ vektor inicializáláskor a $\boldsymbol{b} \to {}_{+}\boldsymbol{b}$ szabály szerint változik. Ez konkrétan a $+(4) \to +(5)$ eredményt adja. A következő egy standard lépés, amely során a $\boldsymbol{b}$ vektor a $\boldsymbol{b} \to {}_{+}\boldsymbol{b} - {}^{+}\boldsymbol{b}$ hasadást szenvedi. Vagyis, az egyetlen $\boldsymbol{b} = (5)$ vektorból képeznünk kell a ${}_{+}(5) = (6)$, illetve a $-({}^{+}(5)) = -(1,5)$ vektorokat tartalmazó $\{(-(1,5); (6)\}$ vektorhalmazt. Az ezt követő 1-átvitelkor a fázismátrix szerint a $\boldsymbol{b} \to -({}_{+}\boldsymbol{b})$ átalakítást kell elvégeznünk a $\{(-(1,5); (6)\}$ vektorhalmaz minden egyes elmén: $\{(-(1,5); (6)\} \to \{(2,5); -(7)\}$, ami szerencsére nem okozott hasadást. A következő két standard lépés során viszont hasadni fog a most már kételemű $\boldsymbol{b}$ vektorhalmaz, így nyolc eleműre duzzad:

$$\begin{array}{lccccccc} +(3) & & & & -(2) & & & +(1) \\ \hline +(2,5) & \to & \boldsymbol{b} \to -({}^{+}\boldsymbol{b}) & \to & -(1,2,5) & & & +(1,1,2,5) \\ -(7) & \searrow & & & +(1,7) & \to & \boldsymbol{b} \to -({}^{+}\boldsymbol{b}) \quad \to & -(1,1,7) \\ & & \boldsymbol{b} \to {}_{+}\boldsymbol{b} & & +(3,5) & & & -(1,3,5) \\ & & & \to & -(8) & \searrow & & +(1,8) \\ & & & & & & & -(2,2,5) \\ & & & & & & \boldsymbol{b} \to {}_{+}\boldsymbol{b} \quad \to & +(2,7) \\ & & & & & & & +(4,5) \\ & & & & & & & -(9) \end{array}$$

Végül a befejező 1-ürítéskor a fázismátrix szerint a $\boldsymbol{b} \to -({}_{+}\boldsymbol{b})$ transzformációt kell alkalmazni a $\boldsymbol{b}$ vektorhalmazon, ami szerencsére nem jelent további hasadást.

$$
\begin{array}{ccccc}
+\,(1) & & & & -\,() \\
\hline
+\,(1,1,2,5) & & & & -\,(2,1,2,5) \\
-\,(1,1,7) & & & & +\,(2,1,7) \\
-\,(1,3,5) & & & & +\,(2,3,5) \\
+\,(1,8) & & & & -\,(2,8) \\
-\,(2,2,5) & \to & \boldsymbol{b} \to -\,({}_{+}\boldsymbol{b}) & \to & +\,(3,2,5) \\
+\,(2,7) & & & & -\,(3,7) \\
+\,(4,5) & & & & -\,(5,5) \\
-\,(9) & & & & +\,(10)
\end{array}
$$

Az integrált pedig az összes $\boldsymbol{a}$ vektor és az oszlopában található $\boldsymbol{b}$ vektorok előjeles szorzatösszege adja. Ezt a programmal is kiírathatjuk, ha a kétállású gomb átállításával a `HTML` kimenet helyett a `MathJax` kimenetet vállasztjuk, és a beállításokban a `Show math as functions` jelölő négyzetet kipipáljuk.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{Li}_{(2,3)}(1-x)\cdot \mathrm{Le}_{(4)}(x)}{x}\,\mathrm{d}x = {} & \mathrm{Li}_{(2,3)}(1-x)\cdot \mathrm{Le}_{(5)}(x) - \mathrm{Li}_{(1,3)}(1-x)\cdot\left[-\mathrm{Le}_{(1,5)}(x)+\mathrm{Le}_{(6)}(x)\right] + \\
& +\mathrm{Li}_{(3)}(1-x)\cdot\left[\mathrm{Le}_{(2,5)}(x)-\mathrm{Le}_{(7)}(x)\right] - \mathrm{Li}_{(2)}(1-x)\cdot\left[-\mathrm{Le}_{(1,2,5)}(x)+\mathrm{Le}_{(1,7)}(x)+\mathrm{Le}_{(3,5)}(x)-\mathrm{Le}_{(8)}(x)\right] + \\
& +\mathrm{Li}_{(1)}(1-x)\cdot\left[\mathrm{Le}_{(1,1,2,5)}(x)-\mathrm{Le}_{(1,1,7)}(x)-\mathrm{Le}_{(1,3,5)}(x)+\mathrm{Le}_{(1,8)}(x)-\mathrm{Le}_{(2,2,5)}(x)+\mathrm{Le}_{(2,7)}(x)+\mathrm{Le}_{(4,5)}(x)-\mathrm{Le}_{(9)}(x)\right] - \\
& -\mathrm{Li}_{()}(1-x)\cdot\left[-\mathrm{Le}_{(2,1,2,5)}(x)+\mathrm{Le}_{(2,1,7)}(x)+\mathrm{Le}_{(2,3,5)}(x)-\mathrm{Le}_{(2,8)}(x)+\mathrm{Le}_{(3,2,5)}(x)-\mathrm{Le}_{(3,7)}(x)-\mathrm{Le}_{(5,5)}(x)+\mathrm{Le}_{(10)}(x)\right]
\end{aligned}
$$