

1 $\frac{1}{x} \cdot \text{Li}_{(a_1, \dots, a_n)}(x) \cdot \text{Li}_{(b_1, \dots, b_m)}(x)$ és $\frac{1}{x} \cdot \text{Le}_{(a_1, \dots, a_n)}(x) \cdot \text{Le}_{(b_1, \dots, b_m)}(x)$ integrálása

Fogalmak

$$\underbrace{(a_1, \dots, a_n)}_{\text{D-sor}} \mid \underbrace{(b_1, \dots, b_m)}_{\text{I-sor}}$$

Az a kedvező, ha a D-sor első eleme pozitív, vagy ha az I-sor első eleme negatív.

Az alább ismertetendő lépések mindegyike olyan, hogy a két sor együttes hosszát, illetve a két sor elemeinek együttes összegét változatlanul hagyja. Ez a tény is segíthet az egyébként nem komplikált lépések memorizálásában.

Alaplépések

(1) Csere

Jele: $(D \circ I)$

$$(a_1, \dots, a_n \lfloor b_1, \dots, b_m) \longrightarrow (b_1, \dots, b_m \rfloor a_1, \dots, a_n)$$

(2) **Standard lépés** (A D-sor első elemét 1-gyel csökkentjük, miközben az I-sor első elemét 1-gyel megnöveljük.)

Jele: $(D-1 > I+1)$. Ezzel érhetjük el, hogy egy pozitívval/negatívval kezdődő D-sor/I-sor elejére 1/0 kerüljön.

$$(a_1, \dots, a_n \mid b_1, \dots, b_m) \longrightarrow (a_1 - \mathbf{1}, \dots, a_n \mid b_1 + \mathbf{1}, \dots, b_m)$$

(3) **1-átrakás** (A D-sor elejéről 1 átvihető az I-sor elejére.)

Jele: $(D1 > I1)$. Ezzel a lépéssel tudjuk a D-sor hosszát eggyel csökkenteni, miközben az I-sor hossza eggyel megnő.

$$(\mathbf{1}, a_2, \dots, a_n \rfloor b_1, \dots, b_m) \longrightarrow (a_2, \dots, a_n \rfloor \mathbf{1}, b_1, \dots, b_m)$$

A következő lépés már *származtatható* az első három alaplépésből, de gyakran lesz rá szükség, ezért érdemes megjegyezni.

(4) **0-átrakás** (Az I-sor elejéről 0 átvihető a D-sor elejére, miközben a maradék részen egy standard lépést hajtunk végre.)

Jele: $(D0 < I0)$. Ezzel a lépéssel tudjuk egy egynél hosszabb I-sor hosszát eggyel csökkenteni, miközben az D-sor hossza eggyel megnő.

$$(a_1, \dots, a_n \lfloor \mathbf{0}, b_2, \dots, b_m) \longrightarrow (\mathbf{0}, a_1 - \mathbf{1}, \dots, a_n \rfloor b_2 + \mathbf{1}, \dots, b_m)$$

A 0-átrakás megkapható egy standard lépés, egy azt követő csere, egy 1-átrakás, egy újabb csere, és végül egy újabb standard lépés eredményeként.

$$(a, \dots \lfloor \mathbf{0}, b, \dots) - (a-1, \dots \lfloor 1, b, \dots) + (1, b, \dots \rfloor a-1, \dots) - (b, \dots \rfloor 1, a-1, \dots) + (1, a-1, \dots \rfloor b, \dots) - (\mathbf{0}, a-1, \dots \rfloor b+1, \dots)$$

Viszont egy csere mindig kiesik az előtte lévő lépéssel együtt, mert tagjaik megegyeznek de ellenkező előjelűek.

$$(a, \dots \lfloor \mathbf{0}, b, \dots) - \cancel{(a-1, \dots \lfloor 1, b, \dots)} + \cancel{(1, b, \dots \rfloor a-1, \dots)} - \cancel{(b, \dots \rfloor 1, a-1, \dots)} + \cancel{(1, a-1, \dots \rfloor b, \dots)} - (\mathbf{0}, a-1, \dots \rfloor b+1, \dots)$$

$$\text{Jelekkel: } (D0 < I0) \equiv \cancel{(D-1 > I+1)} \longrightarrow \cancel{(D \circ I)} \longrightarrow \cancel{(D1 > I1)} \longrightarrow \cancel{(D \circ I)} \longrightarrow (D-1 > I+1)$$

Láthatóan sok kieső, felesleges lépéstől kimél meg, ha megtanuljuk 0-átrakást.

Befejező lépések

(5) **1-ürítés = 1-átvitel** (A D-sor egyetlen 1 elemét átvisszük az I-sor elejére)

Jele: $(D1 > END)$. Ezzel a lépéssel egy egyetlen 1-et tartalmazó D-sor véglegesen kiüríthető.

$$(\mathbf{1} \rfloor b_1, \dots, b_m) \longrightarrow (\mathbf{1}, b_1, \dots, b_m)$$

Ennek a lépésnek a *duálisa* 0-ürítés, amely megkapható az 1-ürítésből.

(6) **0-ürítés** (A I-sor egyetlen 0 elemét elhagyjuk, a D-sor első elemét eggyel csökkentjük, és elé írunk egy 1-et.)

Jele: $(I0 > END)$. Ezzel a lépéssel egy egyetlen 0-át tartalmazó I-sor véglegesen kiüríthető.

$$(a_1, \dots, a_n | \mathbf{0}) \longrightarrow (\mathbf{1}, a_1 - \mathbf{1}, \dots, a_n)$$

A 0-ürítés megkapható egy standard lépés, egy azt követő csere (ezek most is kiejtik egymást), majd egy 1-ürítés eredményeként.

$$(a_1, \dots, a_n | \mathbf{0}) \equiv \cancel{(a_1 - \mathbf{1}, \dots, a_n | \mathbf{1})} - \cancel{(\mathbf{1} | a_1 - \mathbf{1}, \dots, a_n)} + (\mathbf{1}, a_1 - \mathbf{1}, \dots, a_n)$$

(7) **1-rápakolás** (A vektor első $\mathbf{1}$ elemét elhagyjuk és hozzáadjuk a másodikhoz)

Jele: $(Le > END)$. Ez a lépés az Le függvény integrálásának befejező lépése. **Csak ebben tér el az Li függvény integrálásától.**

$$(\mathbf{1}, a_2, \dots, a_n) \longrightarrow (a_2 + \mathbf{1}, \dots, a_n)$$

A lépéseket egy közös táblázatban is megadjuk

A lépés neve	A lépés képlete	A lépés jele
cseré	$(a_1, \dots, a_n b_1, \dots, b_m) \longrightarrow (b_1, \dots, b_m a_1, \dots, a_n)$	$(D \circ I)$
standard lépés	$(a_1, \dots, a_n b_1, \dots, b_m) \longrightarrow (a_1 - \mathbf{1}, \dots, a_n b_1 + \mathbf{1}, \dots, b_m)$	$(D-1 > I+1)$
1-átrakás	$(\mathbf{1}, a_2, \dots, a_n b_1, \dots, b_m) \longrightarrow (a_2, \dots, a_n \mathbf{1}, b_1, \dots, b_m)$	$(D1 > I1)$
0-átrakás	$(a_1, \dots, a_n \mathbf{0}, b_2, \dots, b_m) \longrightarrow (\mathbf{0}, a_1 - \mathbf{1}, \dots, a_n b_2 + \mathbf{1}, \dots, b_m)$	$(D0 < I0)$
1-ürítés~1-átrakás	$(\mathbf{1} b_1, \dots, b_m) \longrightarrow (\mathbf{1}, b_1, \dots, b_m)$	$(D1 > END)$
0-ürítés	$(a_1, \dots, a_n \mathbf{0}) \longrightarrow (\mathbf{1}, a_1 - \mathbf{1}, \dots, a_n)$	$(I0 > END)$
1-rápakolás	$(\mathbf{1}, a_2, \dots, a_n) \longrightarrow (a_2 + \mathbf{1}, \dots, a_n)$	$(Le > END)$

Kiürítési feladatok (az egyes lépések gyakorlati alkalmazása)

A végső cél mindig az, hogy a D-sor vagy az I-sor kiürüljön. Ezt csak valamelyik sor hosszának egyenkénti csökkentésével érhetjük el. Csak két olyan lépésünk van amely valamely *legalább két elemből álló* sor hosszát eggyel csökkenti (miközben a másikat eggyel növeli): Az 1-átrakás a D-sor hosszát, a 0-átrakás pedig az I-sor hosszát csökkenti eggyel. Ehhez viszont el kell érniünk, hogy a D-sor elején egy 1-es vagy, az I-sor elején egy 0 legyen. Mivel a standard lépés a D-sor első elemét mindig 1-gyel csökkenti, ezért csak pozitív számokon keresztül érhetjük el, hogy standard lépések sorának alkalmazásával végül a D-sor elején egy 1-es álljon. Röviden, *egy legalább két elemből álló D-sort hosszát csak akkor tudjuk csökkenteni eggyel, ha annak első eleme pozitív.* A 0-átrakással az I-sor hosszát tudjuk eggyel csökkenteni. Mivel a standard lépés az I-sor első elemét mindig megnöveli 1-gyel, ezért csak negatív számokon keresztül érhetjük el, hogy standard lépések sorának alkalmazásával végül az I-sor elején egy 0 álljon. Röviden, *egy legalább két elemből álló I-sort hosszát csak akkor tudjuk csökkenteni eggyel, ha annak első eleme negatív.* A cserékkel mindig megoldható hogy egy sort csökkenthetők pozícióba hozzunk. Az 1-ürítés, illetve 0-ürítés pedig az egyetlen 1, illetve 0 elemből álló sorokat csökkenti zerus hosszúságú üressorrá. Az alábbi példákban (és általában is) \rfloor , illetve \rfloor jelek használatával jelöljük, hogy melyik sort hosszát szeretnénk csökkenteni.

Az $\int \frac{\mathbf{Li}_{(a_1, \dots, a_n)} \cdot \mathbf{Li}_{(b_1, \dots, b_m)}}{x} dx$ integrálok kiszámításának egy algoritmus

Az integrál kiszámítása lényegében a fentiekben tárgyalt kiürítési feladattal ekvivalens. Csak arra kell ügyelni, hogy a kiürítési feladat a lehető legjobban induljon (a lehető legkevesebb összeget eredményezze). Az algoritmust csak azért közöljük *teljesen egyértelműen*, hogy a feladatok megoldásakor mindig ugyanazt az eredményt kapjuk. Egyébként eltérő módon is kaphatunk más, ugyanolyan helyes eredményt.

Inicializálás:

(i) Kiszámítjuk az $|A| := |a_1| + \dots + |a_n|$, illetve $|B| := |b_1| + \dots + |b_m|$ összegeket.

Ha $|A| < |B|$, akkor az (a_1, \dots, a_n) vektort választjuk kiürítendőnek.

Ha $|B| < |A|$, akkor az (b_1, \dots, b_m) vektort választjuk kiürítendőnek.

Ha $|A| = |B|$, akkor $n \leq m$ esetében az (a_1, \dots, a_n) vektort választjuk kiürítendőnek, ellenkező esetben a (b_1, \dots, b_m) vektort.

(ii) *A kiürítendő vektort mindig csökkenthető pozícióban írjuk be úgy, hogy az I-sorba kerülő vektor első elemét mindig 1-gyel megnöveljük.* Vagyis, ha a kiürítendő vektornak az (a_1, \dots, a_n) vektor adódott és $a_1 \geq 0$, akkor az $(a_1, \dots, a_n \lfloor b_1 + 1, \dots, b_m)$, ha pedig $a_1 < 0$, akkor a $(b_1, \dots, b_m \lfloor a_1 + 1, \dots, a_n)$ feladatot képezzük. Ugyanígy, ha a kiürítendő vektornak a (b_1, \dots, b_m) vektor adódott és $b_1 \geq 0$, akkor a $(b_1, \dots, b_m \lfloor a_1 + 1, \dots, a_n)$, ha pedig $b_1 < 0$, akkor az $(a_1, \dots, a_n \lfloor b_1 + 1, \dots, b_m)$ feladatot képezzük. Így összesen négy kiürítési feladat lehet az inicializálás kimenete:

$$(a_1, \dots, a_n \lfloor b_1 + 1, \dots, b_m), (a_1, \dots, a_n \lfloor b_1 + 1, \dots, b_m), (b_1, \dots, b_m \lfloor a_1 + 1, \dots, a_n), (a_1, \dots, a_n \lfloor b_1 + 1, \dots, b_m)$$

Kiszámítás:

Az inicializálás során kapott kiürítési feladat megoldásából az $\int \frac{\text{Li}_{(a_1, \dots, a_n)} \cdot \text{Li}_{(b_1, \dots, b_m)}}{x} dx$, illetve $\int \frac{\text{Le}_{(a_1, \dots, a_n)} \cdot \text{Le}_{(b_1, \dots, b_m)}}{x} dx$ integrál értékét megkaphatjuk úgy, hogy minden a megoldásban előforduló $\pm (c_1, \dots, c_k \mid d_1, \dots, d_l)$ előjeles sornak megfeleltetjük a $\pm \text{Le}_{(c_1, \dots, c_k)} \cdot \text{Le}_{(d_1, \dots, d_l)}$ előjeles szorzatot.

Példa: Az $\int \frac{\text{Li}_{(-2,4,0,2)} \cdot \text{Li}_{(2,-2,2,3)}}{x} dx$, illetve $\int \frac{\text{Le}_{(-2,4,0,2)} \cdot \text{Le}_{(2,-2,2,3)}}{x} dx$ integrálok kiszámítása. (A két integrál kiszámítása szinte teljesen megegyezik. Le integrálja csak annyiban tér el Li integráljától, hogy a végén az 1-rápakolást hozzá kell vennünk.)

Inicializálás: (i) Kiszámítjuk az $|A| = |-2| + |4| + |0| + |2| = 8$, illetve $|B| = |2| + |-2| + |2| + |3| = 9$ összegeket. Mivel $|A| < |B|$, ezért a $(-2, 4, 0, 2)$ vektort választjuk kiürítendőnek, és a kiürítési feladat pedig $(2-223 \lfloor -1402)$ lesz.

Kiszámítás (Li): A kiürítési feladat megoldásában cserék során kieső párokat kékkel kiemeljük.

$$(2-223 \lfloor -1402) - (1-223 \lfloor 0402) + (00-223 \lfloor 502) - (502 \lfloor 00-223) + (402 \lfloor 10-223) - (302 \lfloor 20-223) + (202 \lfloor 30-223) - (102 \lfloor 40-223) + \\ + (02 \lfloor 140-223) - (140-223 \lfloor 02) + (0040-223 \lfloor 3) - (3 \lfloor 0040-223) + (2 \lfloor 1040-223) - (1 \lfloor 2040-223) + (12040-223)$$

A keresett integrál ebből már könnyen felírható:

$$\int \frac{\text{Li}_{(-2,4,0,2)} \cdot \text{Li}_{(2,-2,2,3)}}{x} dx = \text{Li}_{(-1,4,0,2)}(x) \text{Li}_{(2,-2,2,3)}(x) - \text{Li}_{(0,4,0,2)}(x) \text{Li}_{(1,-2,2,3)}(x) + \text{Li}_{(4,0,2)}(x) \text{Li}_{(1,0,-2,2,3)}(x) - \\ - \text{Li}_{(3,0,2)}(x) \text{Li}_{(2,0,-2,2,3)}(x) + \text{Li}_{(2,0,2)}(x) \text{Li}_{(3,0,-2,2,3)}(x) - \text{Li}_{(1,0,2)}(x) \text{Li}_{(4,0,-2,2,3)}(x) + \text{Li}_{(2)}(x) \text{Li}_{(1,0,4,0,-2,2,3)}(x) - \\ - \text{Li}_{(1)}(x) \text{Li}_{(2,0,4,0,-2,2,3)}(x) + \text{Li}_{(1,2,0,4,0,-2,2,3)}(x)$$

Kiszámítás (Le): A kiürítési feladat teljesen megegyezik az Li kiürítési feladatával, csak a végéhez az 1-rápakolást hozzá kell vennünk.

$$(2-223 \lfloor -1402) - (1-223 \lfloor 0402) + (00-223 \lfloor 502) - (502 \lfloor 00-223) + (402 \lfloor 10-223) - (302 \lfloor 20-223) + (202 \lfloor 30-223) - (102 \lfloor 40-223) + \\ + (02 \lfloor 140-223) - (140-223 \lfloor 02) + (0040-223 \lfloor 3) - (3 \lfloor 0040-223) + (2 \lfloor 1040-223) - (1 \lfloor 2040-223) + (12040-223) - (3040-223)$$

A keresett integrál ebből már ugyanúgy felírható:

$$\int \frac{\text{Le}_{(-2,4,0,2)} \cdot \text{Le}_{(2,-2,2,3)}}{x} dx = \text{Le}_{(-1,4,0,2)}(x) \text{Le}_{(2,-2,2,3)}(x) - \text{Le}_{(0,4,0,2)}(x) \text{Le}_{(1,-2,2,3)}(x) + \text{Le}_{(4,0,2)}(x) \text{Le}_{(1,0,-2,2,3)}(x) - \\ - \text{Le}_{(3,0,2)}(x) \text{Le}_{(2,0,-2,2,3)}(x) + \text{Le}_{(2,0,2)}(x) \text{Le}_{(3,0,-2,2,3)}(x) - \text{Le}_{(1,0,2)}(x) \text{Le}_{(4,0,-2,2,3)}(x) + \text{Le}_{(2)}(x) \text{Le}_{(1,0,4,0,-2,2,3)}(x) - \\ - \text{Le}_{(1)}(x) \text{Le}_{(2,0,4,0,-2,2,3)}(x) + \text{Le}_{(1,2,0,4,0,-2,2,3)}(x) - \text{Le}_{(3,0,4,0,-2,2,3)}(x)$$

2 $\frac{1}{x} \cdot \overleftarrow{\text{Le}}_{(a_1, \dots, a_n)}(x) \cdot \overleftarrow{\text{Le}}_{(b_1, \dots, b_m)}(x)$ integrálása

Fogalmak

$$\underbrace{(a_1, \dots, a_n)}_{\text{D-sor}} \mid \underbrace{(b_1, \dots, b_m)}_{\text{I-sor}}$$

Az a kedvező, ha a D-sor utolsó eleme pozitív, vagy ha az I-sor utolsó eleme negatív.

Az alább ismertetendő lépések mindegyike olyan, hogy a két sor együttes hosszát, illetve a két sor elemeinek együttes összegét változatlanul hagyja. Ez a tény is segíthet az egyébként nem komplikált lépések memorizálásában.

Alaplépések

(1) Csere

Jele: $(D \circ I)$

$$(a_1, \dots, a_n \lfloor b_1, \dots, b_m) \longrightarrow (b_1, \dots, b_m \rfloor a_1, \dots, a_n)$$

(2) **Standard lépés** (A D-sor utolsó elemét 1-gyel csökkentjük, miközben az I-sor utolsó elemét 1-gyel megnöveljük.)

Jele: $(D-1 > I+1)$ Ezzel érhetjük el, hogy egy pozitív/negatív végű D-sor/I-sor végére 1/0 kerüljön.

$$(a_1, \dots, a_n \mid b_1, \dots, b_m) \longrightarrow (a_1, \dots, a_n - 1 \mid b_1, \dots, b_m + 1)$$

(3) **1-átrakás** (A D-sor végéről 1 átvihető az I-sor végére.)

Jele: $(D1 > I1)$ Ezzel a lépéssel tudjuk egynél hosszabb D-sor hosszát eggyel csökkenteni.

$$(a_1, \dots, a_n, 1 \rfloor b_1, \dots, b_m) \longrightarrow (a_1, \dots, a_n \rfloor b_1, \dots, b_m, 1)$$

A következő lépés már *származtatható* az első három alaplépésből, de gyakran lesz rá szükség, ezért érdemes megjegyezni.

(4) **0-átrakás** (Az I-sor végéről 0 átvihető a D-sor végére, miközben a maradék részen egy standard lépést hajtunk végre.)

Jele: $(D0 < I0)$ Ezzel a lépéssel tudjuk egy egynél hosszabb I-sor hosszát eggyel csökkenteni.

$$(a_1, \dots, a_n \lfloor b_1, \dots, b_m, 0) \longrightarrow (a_1, \dots, a_n - 1, 0 \rfloor b_1, \dots, b_m + 1)$$

A 0-átrakás megkapható egy standard lépés, egy azt követő csere, egy 1-átrakás, egy újabb csere, és végül egy újabb standard lépés eredményeként.

$$(\dots, a \lfloor \dots, b, 0) - (\dots, a - 1 \lfloor \dots, b, 1) + (\dots, b \rfloor \dots, a - 1) - (\dots, b \rfloor \dots, a - 1, 1) + (\dots, a - 1, 1 \rfloor \dots, b) - (\dots, a - 1, 0 \rfloor \dots, b + 1)$$

Viszont egy csere mindig kiesik az előtte lévő lépéssel együtt, mert tagjaik megegyeznek de ellenkező előjelűek.

$$(\dots, a \lfloor \dots, b, 0) - \cancel{(\dots, a - 1 \lfloor \dots, b, 1)} + \cancel{(\dots, b \rfloor \dots, a - 1)} - \cancel{(\dots, b \rfloor \dots, a - 1, 1)} + \cancel{(\dots, a - 1, 1 \rfloor \dots, b)} - (\dots, a - 1, 0 \rfloor \dots, b + 1)$$

$$\text{Jelekkel: } (D0 < I0) \equiv (D-1 > I+1) \xrightarrow{\text{standard lépés}} (D \circ I) \xrightarrow{\text{csere}} (D1 > I1) \xrightarrow{\text{1-átrakás}} (D \circ I) \xrightarrow{\text{csere}} (D-1 > I+1)$$

Láthatóan sok kieső, felesleges lépéstől kimél meg, ha megtanuljuk 0-átrakást.

Befejező lépések

(5) **1-ürítés** (A D-sor egyetlen 1 elemét átviesszük az I-sor végére, és ebből kivonjuk azt, amikor az D-sor egyetlen 1 elemét hozzáadjuk az I-sor utolsó eleméhez.)

Jele: $(D1 > END)$ Ezzel a lépéssel egy egyetlen 1-et tartalmazó D-sor véglegesen kiüríthető.

$$(1 \rfloor b_1, \dots, b_m) \longrightarrow (b_1, \dots, b_m, 1) - (b_1, \dots, b_m + 1)$$

Ennek a lépésnek a *duálisa* 0-ürítés, amely megkapható az 1-ürítésből.

(6) **0-ürítés** (A I-sor egyetlen 0 elemét elhagyjuk, a D-sor utolsó elemét eggyel csökkentjük és hozzáfűzünk a végéhez egy 1-et, majd ebből kivonjuk a D-sort.)

Jele: ($I0 > END$) Ezzel a lépéssel egy egyetlen 0-át tartalmazó I-sor véglegesen kiüríthető.

$$(a_1, \dots, a_n | 0) \longrightarrow (a_1, \dots, a_n - 1, 1) - (a_1, \dots, a_n)$$

A 0-ürítés megkapható egy standard lépés, egy azt követő csere (ezek most is kiejtik egymást), majd egy 1-ürítés eredményeként.

$$(a_1, \dots, a_n | 0) \equiv \cancel{(a_1, \dots, a_n - 1 | 1)} - \cancel{(1 | a_1, \dots, a_n - 1)} + (a_1, \dots, a_n - 1, 1) - (a_1, \dots, a_n | 1)$$

A lépéseket egy közös táblázatban is megadjuk

A lépés neve	A lépés képlete	A lépés jele
cseré	$(a_1, \dots, a_n b_1, \dots, b_m) \longrightarrow (b_1, \dots, b_m a_1, \dots, a_n)$	$(D \circ I)$
standard lépés	$(a_1, \dots, a_n b_1, \dots, b_m) \longrightarrow (a_1, \dots, a_n - 1 b_1, \dots, b_m + 1)$	$(D-1 > I+1)$
1-átrakás	$(a_1, \dots, a_n, 1 b_1, \dots, b_m) \longrightarrow (a_1, \dots, a_n b_1, \dots, b_m, 1)$	$(D1 > I1)$
0-átrakás	$(a_1, \dots, a_n b_1, \dots, b_m, 0) \longrightarrow (a_1, \dots, a_n - 1, 0 b_1, \dots, b_m + 1)$	$(D0 < I0)$
1-ürítés	$(1 b_1, \dots, b_m) \longrightarrow (b_1, \dots, b_m, 1) - (b_1, \dots, b_m + 1)$	$(D1 > END)$
0-ürítés	$(a_1, \dots, a_n 0) \longrightarrow (a_1, \dots, a_n - 1, 1) - (a_1, \dots, a_n)$	$(I0 > END)$

Kiürítési feladatok (az egyes lépések gyakorlati alkalmazása)

A végső cél mindig az, hogy a D-sor vagy az I-sor kiürüljön. Ezt csak valamelyik sor hosszának egyenkénti csökkentésével érhetjük el. Csak két olyan lépésünk van amely valamely legalább két elemből álló sor hosszát eggyel csökkenti (miközben a másikat eggyel növeli): Az 1-átrakás a D-sor hosszát, a 0-átrakás pedig az I-sor hosszát csökkenti eggyel. Ehhez viszont el kell érniünk, hogy a D-sor végén egy 1-es vagy, az I-sor végén egy 0 legyen. Mivel a standard lépés a D-sor utolsó elemét mindig 1-gyel csökkenti, ezért csak pozitív számokon keresztül érhetjük el, hogy standard lépések sorának alkalmazásával végül a D-sor végén egy 1-es álljon. Röviden, egy legalább két elemből álló D-sort hosszát csak akkor tudjuk csökkenteni eggyel, ha annak utolsó eleme pozitív. A 0-átrakással az I-sor hosszát tudjuk eggyel csökkenteni. Mivel a standard lépés az I-sor utolsó elemét mindig megnöveli 1-gyel, ezért csak negatív számokon keresztül érhetjük el, hogy standard lépések sorának alkalmazásával végül az I-sor végén egy 0 álljon. Röviden, egy legalább két elemből álló I-sort hosszát csak akkor tudjuk csökkenteni eggyel, ha annak utolsó eleme negatív. A cserékkel mindig megoldható hogy egy sort csökkenthető pozícióba hozzunk. Az 1-ürítés, illetve 0-ürítés pedig az egyetlen 1, illetve 0 elemből álló sorokat csökkenti zérus hosszúságú üressorrá. Az alábbi példákban (és általában is)], illetve [jelek használatával jelöljük, hogy melyik sort hosszát szeretnénk csökkenteni.

1.példa (-2404 | 32-3) Mind a két sor csökkenthető pozícióban van, nincs szükség cserére.

D-sor csökkentése: $(-2404 | 32-5) - (-2403 | 32-4) + (-2402 | 32-3) + (-2401 | 32-2) - (-240 | 32-1)$

I-sor csökkentése: $(-2-54 | 32-5) - (-2403 | 32-4) + (-2402 | 32-3) - (-2401 | 32-2) + (-2400 | 32-1) + (-240-1 | 320) - (-240-20 | 33)$

2.példa (-2404 | 323) A D-sor csökkenthető pozícióban van ezért csökkentéséhez nincs szükség cserére. Ellenben az I-sor nincs csökkenthető pozícióban, ezért cserével hozzuk csökkenthető pozícióba.

D-sor csökkentése: $(-2-54 | 323) - (-2-53 | 324) + (-2-52 | 325) + (-2-51 | 326) - (-2-5 | 3261)$

I-sor csökkentése cserével: $\overset{\circ}{(-2-54 | 323)} - \overset{\circ}{(323 | -2-54)} + (323 | -2-55) - (322 | -2-56) + (321 | -2-57) - (32 | -2-571)$

A következő példában kiürítjük a D-sort.

3.példa (-32-2 | 3-12) Egyik sor sincs csökkenthető pozícióban, és a csökkentések után is olyan sorokat fogunk kapni, amelyek cserét igényelnek.

A (-32-2) D-sort szeretnénk kiüríteni, ezt jelzi a] jel. (-32-2 | 3-12). Mivel standard lépésekkel -2 nem csökkenthető 1-re, ezért cserét hajtunk végre: $\overset{\circ}{(-32-2 | 3-12)} - (3-12 | -30-2)$. Ekkor a] jelet is felcseréljük [jelle azért, hogy lássuk melyik sor csökkentése

a feladat. A két felcserélt vektor kiejti egymást, és két standard lépéssel -2 felnövelhető 0-ra: $(-32-2|3-12) \circ (-3-12|-32-2) + (3-11|-32-1) - (3-10|-320)$. Most már 0-átrakással csökkenthetjük a kiürítendő sort: $-(3-10|-320) + (3-1-10|-33)$. A kettő hosszúságúra csökkent (-33) kiürítendő sor nincs csökkenthető pozícióban, ezért cserélünk: $+(3-1-10|-33) \circ (-33|3-1-10)$. A felcserélt elemek megint kiejtik egymást, és két standard lépéssel a 3-at 1-re csökkenthetjük, amikor már egy 1-átrakással újból eggyel csökkenthető a kiürítendő sor: $+(3-1-10|-33) \circ (-33|3-1-10) + (-32|3-1-11) - (-31|3-1-12) + (-3|3-1-121)$. Az eljárás során egy hosszúságúra csökkent (-3) vektor ismét nincs csökkenthető pozícióban, ezért cserélnünk kell. A felcserélt sorban -3-at három standard lépéssel 0-ra növelhetjük: $+(3-1-12-2|0) - (3-1-12-1|-1) + (3-1-12-2|0)$. A sort véglegesen kiüríthetjük 0-írással: $+(3-1-12-2|0) - (3-1-12-31) + (3-1-12-2)$.

Végül az egész lépéssort egyben is leírjuk:

$$(-32-2|3-12) \circ (-3-12|-32-2) + (3-11|-32-1) - (3-10|-320) + (3-1-10|-33) \circ (-33|3-1-10) + (-32|3-1-11) - (-31|3-1-12) + (-3|3-1-121) \circ (-3-1-121|-3) + (3-1-120|-2) - (3-1-12-1|-1) + (3-1-12-2|0) - (3-1-12-31) + (3-1-12-2).$$

Jelekkel ugyanez:

$$(D \circ I) \rightarrow (D-1 > I+1)^2 \rightarrow (D0 < I0) \rightarrow (D \circ I) \rightarrow (D-1 > I+1)^2 \rightarrow (D1 > I1) \rightarrow (D \circ I) \rightarrow (D-1 > I+1)^3 \rightarrow (I0 > END)$$

A másik sor kiürítését is megadjuk:

$$(-32-2|3-12) \circ (-3-12|-32-2) + (3-11|-32-1) - (3-1|-32-11) + (-32-1|3-1) - (-32-10|30) + (-32-1-10|4) \circ (4|-32-1-10) + (3|-32-1-11) - (2|-32-1-12) + (1|-32-1-13) - (-32-1-131) + (-32-1-14).$$

Jelekkel:

$$(D \circ I) \rightarrow (D-1 > I+1) \rightarrow (D1 > I1) \rightarrow (D \circ I) \rightarrow (D-1 > I+1) \rightarrow (D0 < I0) \rightarrow (D \circ I) \rightarrow (D-1 > I+1)^3 \rightarrow (I1 > END)$$

Láthatóan ez kevesebb tagú összeghez vezetett. Nem nehéz átgondolni, hogy egy sor kiürítése során (a kieső cserék elhagyásával kapott) összeg hossza kapcsolatba hozható a sor elemeinek abszolútértékeiből képezhető összeggel. A fenti példákban ezen abszolútértékekből képezhető összeg rendre $(|-3| + |2| + |-2|) = 7$, illetve $(|3| + |-1| + |2|) = 6$. Később pontos képletet is adunk erre a kapcsolatra, de addig is érdemes azt a sort kiürítendőnek választani, amelyekre ez az összeg kisebb.

Az $\int \frac{\text{Le}_{[a_1, \dots, a_n]} \cdot \text{Le}_{[b_1, \dots, b_m]}}{x} dx$ integrálok kiszámításának egy algoritmus

Az integrál kiszámítása lényegében a fentiekben tárgyalt kiürítési feladattal ekvivalens. Csak arra kell ügyelni, hogy a kiürítési feladat a lehető legjobban induljon (a lehető legkevesebb összeget eredményezze). Az algoritmust csak azért közöljük *teljesen egyértelműen*, hogy a feladatok megoldásakor mindig ugyanazt az eredményt kapjuk. Egyébként eltérő módon is kaphatunk más, ugyanolyan helyes eredményt.

Inicializálás:

(i) Kiszámítjuk az $|A| := |a_1| + \dots + |a_n|$, illetve $|B| := |b_1| + \dots + |b_m|$ összegeket.

Ha $|A| < |B|$, akkor az $[a_1, \dots, a_n]$ vektort választjuk kiürítendőnek.

Ha $|B| < |A|$, akkor az $[b_1, \dots, b_m]$ vektort választjuk kiürítendőnek.

Ha $|A| = |B|$, akkor $n \leq m$ esetében az $[a_1, \dots, a_n]$ vektort választjuk kiürítendőnek, ellenkező esetben a $[b_1, \dots, b_m]$ vektort.

(ii) A kiürítendő vektort mindig csökkenthető pozícióban írjuk be úgy, hogy az I -sorba kerülő vektor utolsó elemét mindig 1-gyel megnöveljük. Vagyis, ha a kiürítendő vektornak az $[a_1, \dots, a_n]$ vektor adódott és $a_n \geq 0$, akkor az $(a_1, \dots, a_n|b_1, \dots, b_m + 1)$, ha pedig $a_n < 0$, akkor a $(b_1, \dots, b_m|a_1, \dots, a_n + 1)$ feladatot képezzük. Ugyanígy, ha a kiürítendő vektornak a $[b_1, \dots, b_m]$ vektor adódott és $b_m \geq 0$, akkor a $(b_1, \dots, b_m|a_1, \dots, a_n + 1)$, ha pedig $b_m < 0$, akkor az $(a_1, \dots, a_n|b_1, \dots, b_m + 1)$ feladatot képezzük. Így összesen négy kiürítési feladat lehet az inicializálás kimenete:

$$(a_1, \dots, a_n|b_1, \dots, b_m + 1), (a_1, \dots, a_n|b_1, \dots, b_m + 1), (b_1, \dots, b_m|a_1, \dots, a_n + 1), (a_1, \dots, a_n|b_1, \dots, b_m + 1)$$

Kiszámítás:

Az inicializálás során kapott kiürítési feladat megoldásából az $\int \frac{\text{Le}_{[a_1, \dots, a_n]} \cdot \text{Le}_{[b_1, \dots, b_m]}}{x} dx$ integrál értékét megkaphatjuk úgy, hogy minden a megoldásban előforduló $\pm(c_1, \dots, c_k | d_1, \dots, d_l)$ előjeles sornak megfeleltetjük a $\pm \text{Le}_{[c_1, \dots, c_k]} \cdot \text{Le}_{[d_1, \dots, d_l]}$ előjeles szorzatot.

Példa: $\int \frac{\text{Le}_{[-2,4,0,2]} \cdot \text{Le}_{[2,-2,2,3]}}{x} dx$ kiszámítása

Inicializálás: (i) Kiszámítjuk az $|A| = |-2| + |4| + |0| + |2| = 8$, illetve $|B| = |2| + |-2| + |2| + |3| = 9$ összegeket. Mivel $|A| < |B|$, ezért a $[-2, 4, 0, 2]$ vektort választjuk kiürítendőnek, és a kiürítési faladat $(-2402]2-224)$ lesz.

Kiszámítás: A kiürítési faladat megoldásában cserék során kieső párokat kékkel kiemeljük.

$$\begin{aligned} & (-2402]2-224) - (-2401]2-225) + (-240]2-2251) - (2-2251[-240) + (2-22500[-25) - (-25]2-22500) + (-24]2-22501) - (-23]2-22502) + \\ & + (-22]2-22503) - (-21]2-22504) + (-2]2-225041) - (2-225041[-2) + (2-225040[-1) - (2-22504-1[0) + (2-22504-21) - (2-22504-1) \end{aligned}$$

A keresett integrál ebből már könnyen felírható:

$$\begin{aligned} \int \frac{\text{Le}_{[-2,4,0,2]} \cdot \text{Le}_{[2,-2,2,3]}}{x} dx &= \text{Le}_{[-2,4,0,2]}(x) \text{Le}_{[2,-2,2,4]}(x) - \text{Le}_{[-2,4,0,1]}(x) \text{Le}_{[2,-2,2,5]}(x) + \text{Le}_{[-2,4]}(x) \text{Le}_{[2,-2,2,5,0,1]}(x) - \\ &- \text{Le}_{[-2,3]}(x) \text{Le}_{[2,-2,2,5,0,2]}(x) + \text{Le}_{[-2,2]}(x) \text{Le}_{[2,-2,2,5,0,3]}(x) - \text{Le}_{[-2,1]}(x) \text{Le}_{[2,-2,2,5,0,4]}(x) + \text{Le}_{[2,-2,2,5,0,4,0]}(x) \text{Le}_{[-1]}(x) - \\ &- \text{Le}_{[2,-2,2,5,0,4,-1]}(x) \text{Le}_{[0]}(x) + \text{Le}_{[2,-2,2,5,0,4,-2,1]}(x) - \text{Le}_{[2,-2,2,5,0,4,-1]}(x) \end{aligned}$$

Az alábbiakban megadjuk néhány integrál kiszámítását

Feladat 1. $\int \frac{\text{Le}_{[-2,4,0]} \cdot \text{Le}_{[2,2,3]}}{x} dx$

$$\begin{aligned} & (-240]224) - (224[-240) + (2230[-25) - (-25]2230) + (-24]2231) - (-23]2232) + (-22]2233) - (-21]2234) + (-2]22341) - \\ & - (22341[-2) + (22340[-1) - (2234-1[0) + (2234-21) - (2234-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\text{Le}_{[-2,4,0]} \cdot \text{Le}_{[2,2,3]}}{x} dx &= \text{Le}_{[-2,4]}(x) \text{Le}_{[2,2,3,1]}(x) - \text{Le}_{[-2,3]}(x) \text{Le}_{[2,2,3,2]}(x) + \text{Le}_{[-2,2]}(x) \text{Le}_{[2,2,3,3]}(x) - \\ &- \text{Le}_{[-2,1]}(x) \text{Le}_{[2,2,3,4]}(x) + \text{Le}_{[2,2,3,4,0]}(x) \text{Le}_{[-1]}(x) - \text{Le}_{[2,2,3,4,-1]}(x) \text{Le}_{[0]}(x) + \text{Le}_{[2,2,3,4,-2,1]}(x) - \text{Le}_{[2,2,3,4,-1]}(x) \end{aligned}$$

Feladat 2. $\int \frac{\text{Le}_{[-1,4]} \cdot \text{Le}_{[2,0,-2]}}{x} dx$

$$(-14[20-1) - (-13[200) + (-120[21) - (21]-120) + (2]-1201) - (1]-1202) + (-12021) - (-1203)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\text{Le}_{[-1,4]} \cdot \text{Le}_{[2,0,-2]}}{x} dx &= \text{Le}_{[-1,4]}(x) \text{Le}_{[2,0,-1]}(x) - \text{Le}_{[-1,3]}(x) \text{Le}_{[2,0,0]}(x) + \text{Le}_{[2]}(x) \text{Le}_{[-1,2,0,1]}(x) - \\ &- \text{Le}_{[1]}(x) \text{Le}_{[-1,2,0,2]}(x) + \text{Le}_{[-1,2,0,2,1]}(x) - \text{Le}_{[-1,2,0,3]}(x) \end{aligned}$$

Feladat 3. $\int \frac{\text{Le}_{[-4]} \cdot \text{Le}_{[-7]}}{x} dx$

$$(-7[-3) - (-8[-2) + (-9[-1) - (-10[0) + (-11,1) - (-10)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\text{Le}_{[-4]} \cdot \text{Le}_{[-7]}}{x} dx &= \text{Le}_{[-7]}(x) \text{Le}_{[-3]}(x) - \text{Le}_{[-8]}(x) \text{Le}_{[-2]}(x) + \text{Le}_{[-9]}(x) \text{Le}_{[-1]}(x) - \text{Le}_{[-10]}(x) \text{Le}_{[0]}(x) + \\ &+ \text{Le}_{[-11,1]}(x) - \text{Le}_{[-10]}(x) \end{aligned}$$

Feladat 4. $\int \frac{\text{Le}_{[2,0,-2]} \cdot \text{Le}_{[-3,4]}}{x} dx$

$$(-34[20-1) - (-33[200) + (-320[21) - (21]-320) + (2]-3201) - (1]-3202) + (-32021) - (-3203)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\text{Le}_{[2,0,-2]} \cdot \text{Le}_{[-3,4]}}{x} dx &= \text{Le}_{[-3,4]}(x) \text{Le}_{[2,0,-1]}(x) - \text{Le}_{[-3,3]}(x) \text{Le}_{[2,0,0]}(x) + \text{Le}_{[2]}(x) \text{Le}_{[-3,2,0,1]}(x) - \\ &- \text{Le}_{[1]}(x) \text{Le}_{[-3,2,0,2]}(x) + \text{Le}_{[-3,2,0,2,1]}(x) - \text{Le}_{[-3,2,0,3]}(x) \end{aligned}$$

Feladat 5. $\int \frac{\mathbf{Le}_{[-4,0,1,-2]} \cdot \mathbf{Le}_{[-2,1,1,0]}}{x} dx$

$$(-2110] - 401-1) - (-401-1[-2110) + (-401-20[-212) - (-212] - 401-20) + (-211] - 401-21) - (-21] - 401-211) + (-2] - 401-2111) -$$

$$- (-401-2111[-2) + (-401-2110[-1) - (-401-211-1[0) + (-401-211-21) - (-401-211-1)$$

$$\int \frac{\mathbf{Le}_{[-4,0,1,-2]} \cdot \mathbf{Le}_{[-2,1,1,0]}}{x} dx = \mathbf{Le}_{[-2,1,1]}(x) \mathbf{Le}_{[-4,0,1,-2,1]}(x) - \mathbf{Le}_{[-2,1]}(x) \mathbf{Le}_{[-4,0,1,-2,1,1]}(x) +$$

$$+ \mathbf{Le}_{[-4,0,1,-2,1,1,0]}(x) \mathbf{Le}_{[-1]}(x) - \mathbf{Le}_{[-4,0,1,-2,1,1,-1]}(x) \mathbf{Le}_{[0]}(x) + \mathbf{Le}_{[-4,0,1,-2,1,1,-2,1]}(x) - \mathbf{Le}_{[-4,0,1,-2,1,1,-1]}(x)$$

Feladat 6. $\int \frac{\mathbf{Le}_{[1,-1,1,-1]} \cdot \mathbf{Le}_{[1,0,1,0]}}{x} dx$

$$(1010]1-110) - (1-110[1010) + (1-11-10[102) - (102]1-11-10) + (101]1-11-11) - (10]1-11-111) + (1-11-111[10) -$$

$$- (1-11-1100[2) + (2]1-11-1100) - (1]1-11-1101) + (1-11-11011) - (1-11-1102)$$

$$\int \frac{\mathbf{Le}_{[1,-1,1,-1]} \cdot \mathbf{Le}_{[1,0,1,0]}}{x} dx = \mathbf{Le}_{[1,0,1]}(x) \mathbf{Le}_{[1,-1,1,-1,1]}(x) - \mathbf{Le}_{[1]}(x) \mathbf{Le}_{[1,-1,1,-1,1,0,1]}(x) + \mathbf{Le}_{[1,-1,1,-1,1,0,1,1]}(x) -$$

$$- \mathbf{Le}_{[1,-1,1,-1,1,0,2]}(x)$$

Feladat 7. $\int \frac{\mathbf{Le}_{[3,-4,2,5]} \cdot \mathbf{Le}_{[1,4,1,2]}}{x} dx$

$$(1412]3-426) - (1411]3-427) + (141]3-4271) - (14]3-42711) + (13]3-42712) - (12]3-42713) + (11]3-42714) -$$

$$- (1]3-427141) + (3-4271411) - (3-427142)$$

$$\int \frac{\mathbf{Le}_{[3,-4,2,5]} \cdot \mathbf{Le}_{[1,4,1,2]}}{x} dx = \mathbf{Le}_{[1,4,1,2]}(x) \mathbf{Le}_{[3,-4,2,6]}(x) - \mathbf{Le}_{[1,4,1,1]}(x) \mathbf{Le}_{[3,-4,2,7]}(x) + \mathbf{Le}_{[1,4,1]}(x) \mathbf{Le}_{[3,-4,2,7,1]}(x) -$$

$$- \mathbf{Le}_{[1,4]}(x) \mathbf{Le}_{[3,-4,2,7,1,1]}(x) + \mathbf{Le}_{[1,3]}(x) \mathbf{Le}_{[3,-4,2,7,1,2]}(x) - \mathbf{Le}_{[1,2]}(x) \mathbf{Le}_{[3,-4,2,7,1,3]}(x) + \mathbf{Le}_{[1,1]}(x) \mathbf{Le}_{[3,-4,2,7,1,4]}(x) -$$

$$- \mathbf{Le}_{[1]}(x) \mathbf{Le}_{[3,-4,2,7,1,4,1]}(x) + \mathbf{Le}_{[3,-4,2,7,1,4,1,1]}(x) - \mathbf{Le}_{[3,-4,2,7,1,4,2]}(x)$$

Természetesen egy kiürítési feladat több különböző sorrendben is megoldható. Így ugyanazon integrálra kapott különböző eredményekből multi-polilogaritmusok közötti azonosságokhoz juthatunk. Egy fontos elméleti kérdés lehet az is, hogy hány különböző eredményt kaphatunk egy konkrét integrálra, vagyis hány különböző megoldása létezik egy kiürítési feladatnak. *Az biztos, hogy a kiválasztott kiürítendő vektor egyértelműen meghatározza a kiürítéssel kapott összeget. Ezért a legfontosabb elméleti probléma ennek az eredménynek a képletes felírása.*