1 $\frac{1}{x} \cdot \mathrm{Li}_{(a_1,\dots,a_n)}(x) \cdot \mathrm{Li}_{(b_1,\dots,b_m)}(x)$ és $\frac{1}{x} \cdot \mathrm{Le}_{(a_1,\dots,a_n)}(x) \cdot \mathrm{Le}_{(b_1,\dots,b_m)}(x)$ integrálása

Fogalmak

$$(\underbrace{a_1,\dots,a_n}_{\text{D-sor}} \mid \underbrace{b_1,\dots,b_m}_{\text{I-sor}})$$

Az a kedvező, ha a D-sor első eleme pozitív, vagy ha az I-sor első eleme negatív.

Az alább ismertetendő lépések mindegyike olyan, hogy a két sor együttes hosszát, illetve a két sor elemeinek együttes összegét változatlanul hagyja. Ez a tény is segíthet az egyébként nem komplikált lépések memorizálásában.

Alaplépések

(**1**) **Csere**
Jele: $(D \circlearrowleft I)$

$$(a_1,\dots,a_n \lfloor b_1,\dots,b_m) \longrightarrow (b_1,\dots,b_m \rfloor a_1,\dots,a_n)$$

(**2**) **Standard lépés** (A D-sor első elemét 1-gyel csökkentjük, miközben az I-sor első elemét 1-gyel megnöveljük.)
Jele: $(D\text{-}1 > I{+}1)$. Ezzel érhetjük el, hogy egy pozitívval/negatívval kezdödő D-sor/I-sor elejére 1/0 kerüljön.

$$(a_1,\dots,a_n \mid b_1,\dots,b_m) \longrightarrow (a_1-\mathbf{1},\dots,a_n \mid b_1+\mathbf{1},\dots,b_m)$$

(**3**) **1-átrakás** (A D-sor elejéről **1** átvihető az I-sor elejére.)
Jele: $(D1 > I1)$. Ezzel a lépéssel tudjuk a D-sor hosszát eggyel csökkenteni, miközben az I-sor hossza eggyel megnő.

$$(\mathbf{1},a_2,\dots,a_n \rfloor b_1,\dots,b_m) \longrightarrow (a_2,\dots,a_n \rfloor \mathbf{1},b_1,\dots,b_m)$$

A következő lépés már *származtatható* az első három alaplépésből, de gyakran lesz rá szükség, ezért érdemes megjegyezni.
(**4**) **0-átrakás** (Az I-sor elejéről **0** átvihető a D-sor elejére, miközben a maradék részen egy standard lépést hajtunk végre.)
Jele: $(D0 < I0)$. Ezzel a lépéssel tudjuk egy egynél hosszabb I-sor hosszát eggyel csökkenteni, miközben az D-sor hossza eggyel megnő.

$$(a_1,\dots,a_n \lfloor \mathbf{0},b_2,\dots,b_m) \longrightarrow (\mathbf{0},a_1-\mathbf{1},\dots,a_n \lfloor b_2+\mathbf{1},\dots,b_m)$$

A 0-átrakás megkapható egy standard lépés, egy azt követő csere, egy 1-átrakás, egy újabb csere, és végül egy újabb standard lépés eredményeként.
$(a,\dots \lfloor \mathbf{0},b,\dots,) - (a-1,\dots \lfloor 1,b,\dots) + (1,b,\dots \rfloor a-1,\dots) - (b,\dots \rfloor 1,a-1,\dots) + (1,a-1,\dots \lfloor b,\dots) - (\mathbf{0},a-1,\dots \lfloor b+1,\dots)$
Viszont egy csere mindig kiesik az elötte lévő lépéssel együtt, mert tagjaik megegyeznek de ellenkező előjelüek.
$(a,\dots \lfloor \mathbf{0},b,\dots,) - \cancel{(a-1,\dots \lfloor 1,b,\dots)} + \cancel{(1,b,\dots \rfloor a-1,\dots)} - \cancel{(b,\dots \rfloor 1,a-1,\dots)} + \cancel{(1,a-1,\dots \lfloor b,\dots)} - (\mathbf{0},a-1,\dots \lfloor b+1,\dots)$
Jelekkel: $(D0 < I0) \equiv \cancel{(D\text{-}1 > I{+}1) \longrightarrow (D \circlearrowleft I)} \longrightarrow \cancel{(D1 > I1) \longrightarrow (D \circlearrowleft I)} \longrightarrow (D\text{-}1 > I{+}1)$
Láthatóan sok kieső, felesleges lépéstől kimél meg, ha megtanuljuk 0-átrakást.

Befejező lépések

(**5**) **1-ürítés = 1-átvitel** (A D-sor egyetlen 1 elemét átvisszük az I-sor elejére)
Jele: $(D1 > END)$. Ezzel a lépéssel egy egyetlen 1-et tartalmazó D-sor véglegesen kiüríthető.

$$(\mathbf{1} \rfloor b_1,\dots,b_m) \longrightarrow (\mathbf{1},b_1,\dots,b_m)$$

Ennek a lépésnek a *duálisa* 0-ürítés, amely megkapható az 1-ürítésből.
(**6**) **0-ürítés** (A I-sor egyetlen 0 elemét elhagyjuk, a D-sor első elemét eggyel csökkentjük, és elé írunk egy 1-et.)

Jele: ($I0 > END$). Ezzel a lépéssel egy egyetlen 0-át tartalmazó I-sor véglegesen kiüríthető.

$$(a_1, \ldots, a_n \lfloor \mathbf{0}) \longrightarrow (\mathbf{1}, a_1 - \mathbf{1}, \ldots, a_n)$$

A 0-ürítés megkapható egy standard lépés, egy azt követő csere (ezek most is kiejtik egymást), majd egy 1-ürítés eredményeként.

$$(a_1, \ldots, a_n \lfloor \mathbf{0}) \equiv \cancel{(a_1 - \mathbf{1}, \ldots, a_n \lfloor \mathbf{1})} - \cancel{(\mathbf{1} \rfloor a_1 - \mathbf{1}, \ldots, a_n)} + (\mathbf{1}, a_1 - \mathbf{1}, \ldots, a_n)$$

(7) **1-rápakolás** (A vektor első **1** elemét elhagyjuk és hozzáadjuk a másodikhoz)
Jele: (Le $> END$). Ez a lépés az Le függvény integrálásának befejező lépése. **Csak ebben tér el az Li függvény integrálásától**.

$$(\mathbf{1}, a_2, \ldots, a_n) \longrightarrow (a_2 + \mathbf{1}, \ldots, a_n)$$

A lépéseket egy közös táblázatban is megadjuk

A lépés neve	A lépés képlete	A lépés jele
csere	$(a_1, \ldots, a_n \lfloor b_1, \ldots, b_m) \longrightarrow (b_1, \ldots, b_m \rfloor a_1, \ldots, a_n)$	$(D \circlearrowleft I)$
standard lépés	$(a_1, \ldots, a_n \mid b_1, \ldots, b_m) \longrightarrow (a_1 - \mathbf{1}, \ldots, a_n \mid b_1 + \mathbf{1}, \ldots, b_m)$	$(D\text{-}1 > I{+}1)$
1-átrakás	$(\mathbf{1}, a_2, \ldots, a_n \rfloor b_1, \ldots, b_m) \longrightarrow (a_2, \ldots, a_n \rfloor \mathbf{1}, b_1, \ldots, b_m)$	$(D1 > I1)$
0-átrakás	$(a_1, \ldots, a_n \lfloor \mathbf{0}, b_2, \ldots, b_m) \longrightarrow (\mathbf{0}, a_1 - \mathbf{1}, \ldots, a_n \lfloor b_2 + \mathbf{1}, \ldots, b_m)$	$(D0 < I0)$
1-ürítés~1-átrakás	$(\mathbf{1} \rfloor b_1, \ldots, b_m) \longrightarrow (\mathbf{1}, b_1, \ldots, b_m)$	$(D1 > END)$
0-ürítés	$(a_1, \ldots, a_n \lfloor \mathbf{0}) \longrightarrow (\mathbf{1}, a_1 - \mathbf{1}, \ldots, a_n)$	$(I0 > END)$
1-rápakolás	$(\mathbf{1}, a_2, \ldots, a_n) \longrightarrow (a_2 + \mathbf{1}, \ldots, a_n)$	(Le $> END$)

Kiürítési feladatok (az egyes lépések gyakorlati alkalmazása)

A végső cél mindig az, hogy a D-sor vagy az I-sor kiürüljön. Ezt csak valamelyik sor hosszának egyenkénti csökkentésével érhetjük el. Csak két olyan lépésünk van amely valamely *legalább két elemből alló* sor hosszát eggyel csökkenti (miközben a másikét eggyel növeli): Az 1-átrakás a D-sor hosszát, a 0-átrakás pedig az I-sor hosszát csökkenti eggyel. Ehhez viszont el kell érnünk, hogy a D-sor elején egy 1-es vagy, az I-sor elején egy 0 legyen. Mivel a standard lépés a D-sor első elemét mindig 1-gyel csökkenti, ezért csak pozitív számokon keresztül érhetjük el, hogy standard lépések sorának alkalmazásával végül a D-sor elején egy 1-es álljon. Röviden, *egy legalább két elemből álló D-sort hosszát csak akkor tudjuk csökkenteni eggyel, ha annak első eleme pozitív.* A 0-átrakással az I-sor hosszát tudjuk eggyel csökkenteni. Mivel a standard lépés az I-sor első elemét mindig megnöveli 1-gyel, ezért csak negatív számokon keresztül érhetjük el, hogy standard lépések sorának alkalmazásával végül az I-sor elején egy 0 álljon. Röviden, *egy legalább két elemből álló I-sort hosszát csak akkor tudjuk csökkenteni eggyel, ha annak első eleme negatív.* A cserékkel mindig megoldható hogy egy sort csökkenthető pozícióba hozzunk. Az 1-ürítés, illetve 0-ürítés pedig az egyetlen 1, illetve 0 elemből álló sorokat csökkenti zerus hosszúságú üressorrá. Az alábbi példákban (és általában is) $\rfloor$, illetve $\lfloor$ jelek használatával jelöljük, hogy melyik sort hosszát szeretnénk csökkenteni.

Az $\displaystyle\int \frac{\mathbf{Li}_{(a_1,\ldots,a_n)} \cdot \mathbf{Li}_{(b_1,\ldots,b_m)}}{x}\,\mathbf{d}x$ integrálok kiszámításának egy algoritmusa

Az integrál kiszámítása lényegében a fentiekben tárgyal kiürítési feladattal ekvivalens. Csak arra kell ügyelni, hogy a kiürítési feladat a lehető legjobban induljon (a lehető legkevesebb összeget eredményezze). Az algoritmust csak azért közöljük *teljesen egyértelműen*, hogy a feladatok megoldásakor mindig ugyanazt az eredményt kapjuk. Egyébként eltérő módon is kaphatunk más, ugyanolyan helyes eredményt.

Inicializálás:
(i) Kiszámítjuk az $|A| := |a_1| + \cdots + |a_n|$, illetve $|B| := |b_1| + \cdots + |b_m|$ összegeket.
Ha $|A| < |B|$, akkor az $(a_1, \ldots, a_n)$ vektort választjuk kiürítendőnek.
Ha $|B| < |A|$, akkor az $(b_1, \ldots, b_m)$ vektort választjuk kiürítendőnek.
Ha $|A| = |B|$, akkor $n \leq m$ esetében az $(a_1, \ldots, a_n)$ vektort választjuk kiürítendőnek, ellenkező esetben a $(b_1, \ldots, b_m)$ vektort.

(ii) *A kiüritendő vektort mindig csökkenthető pozícióban írjuk be úgy, hogy az I-sorba kerülő vektor első elemét mindig 1-gyel megnöveljük* (**növelő inicializálás**). Vagyis, ha a kiürítendő vektornak az $(a_1, \ldots, a_n)$ vektor adódott és $a_1 \geq 0$, akkor az $(a_1, \ldots, a_n \rfloor b_1 + 1, \ldots, b_m)$, ha pedig $a_1 < 0$, akkor a $(b_1, \ldots, b_m \lfloor a_1 + 1, \ldots, a_n)$ feladatot képezzük. Ugyanígy, ha a kiürítendő vektornak a $(b_1, \ldots, b_m)$ vektor adódott és $b_1 \geq 0$, akkor a $(b_1, \ldots, b_m \rfloor a_1 + 1, \ldots, a_n)$, ha pedig $b_1 < 0$, akkor az $(a_1, \ldots, a_n \lfloor b_1 + 1, \ldots, b_m)$ feladatot képezzük. Így összesen négy kiürítési feladat lehet az inicialízálás kimenete:

$$(a_1, \ldots, a_n \rfloor b_1 + 1, \ldots, b_m)\,, \; (a_1, \ldots, a_n \lfloor b_1 + 1, \ldots, b_m)\,, \; (b_1, \ldots, b_m \lfloor a_1 + 1, \ldots, a_n)\,, \; (a_1, \ldots, a_n \lfloor b_1 + 1, \ldots, b_m)$$

Kiszámítás:
Az inicializálás során kapott kiürítési feladat megoldásából az $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{(a_1,\ldots,a_n)} \cdot \mathrm{Li}_{(b_1,\ldots,b_m)}}{x}\,\mathrm{d}x$, illetve $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Le}_{(a_1,\ldots,a_n)} \cdot \mathrm{Le}_{(b_1,\ldots,b_m)}}{x}\,\mathrm{d}x$ integrál értékét megkaphatjuk úgy, hogy minden a megoldásban előforduló $\pm(c_1, \ldots, c_k \mid d_1, \ldots, d_l)$ előjeles sornak megfeleltetjük a $\pm\mathrm{Le}_{(c_1,\ldots,c_k)} \cdot \mathrm{Le}_{(d_1,\ldots,d_l)}$ előjeles szorzatot.

Példa: Az $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{(-2,4,0,2)} \cdot \mathrm{Li}_{(2,-2,2,3)}}{x}\,\mathrm{d}x$, illetve $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Le}_{(-2,4,0,2)} \cdot \mathrm{Le}_{(2,-2,2,3)}}{x}\,\mathrm{d}x$ integrálok kiszámítása. (A két integrál kiszámítása szinte teljesen megegyezik. Le integrálja csak annyiban tér el Li integráljától, hogy a végén az 1-rápakolást hozzá kell vennünk.)

Inicializálás: (i) Kiszámítjuk az $|A| = |-2| + |4| + |0| + |2| = 8$, illetve $|B| = |2| + |-2| + |2| + |3| = 9|$ összegeket. Mivel $|A| < |B|$, ezért a $(-2, 4, 0, 2)$ vektort választjuk kiürítendőnek, és a kiürítési faladat pedig (2-223⌊-1402) lesz.

Kiszámítás (Li): A kiürítési faladat megoldásában cserék során kieső párokat kékkel kiemeljük.

$$\text{(2-223}\lfloor\text{-1402)} - \text{(1-223}\lfloor\text{0402)} + \text{(00-223}\lfloor\text{502)} - \text{(502}\rfloor\text{00-223)} + \text{(402}\rfloor\text{10-223)} - \text{(302}\rfloor\text{20-223)} + \text{(202}\rfloor\text{30-223)} - \text{(102}\rfloor\text{40-223)} +$$
$$+\text{(02}\rfloor\text{140-223)} - \text{(140-223}\lfloor\text{02)} + \text{(0040-223}\lfloor\text{3)} - \text{(3}\rfloor\text{0040-223)} + \text{(2}\rfloor\text{1040-223)} - \text{(1}\rfloor\text{2040-223)} + \text{(12040-223)}$$

A keresett integrál ebből már könnyen felírható:

$$\int \frac{\mathrm{Li}_{(-2,4,0,2)} \cdot \mathrm{Li}_{(2,-2,2,3)}}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Li}_{(-1,4,0,2)}(x)\,\mathrm{Li}_{(2,-2,2,3)}(x) - \mathrm{Li}_{(0,4,0,2)}(x)\,\mathrm{Li}_{(1,-2,2,3)}(x) + \mathrm{Li}_{(4,0,2)}(x)\,\mathrm{Li}_{(1,0,-2,2,3)}(x) -$$
$$-\mathrm{Li}_{(3,0,2)}(x)\,\mathrm{Li}_{(2,0,-2,2,3)}(x) + \mathrm{Li}_{(2,0,2)}(x)\,\mathrm{Li}_{(3,0,-2,2,3)}(x) - \mathrm{Li}_{(1,0,2)}(x)\,\mathrm{Li}_{(4,0,-2,2,3)}(x) + \mathrm{Li}_{(2)}(x)\,\mathrm{Li}_{(1,0,4,0,-2,2,3)}(x) -$$
$$-\mathrm{Li}_{(1)}(x)\,\mathrm{Li}_{(2,0,4,0,-2,2,3)}(x) + \mathrm{Li}_{(1,2,0,4,0,-2,2,3)}(x)$$

Kiszámítás (Le): A kiürítési faladat teljesen megegyezik az Li kiürítési feladatával, csak a végéhez az 1-rápakolást hozzá kell vennünk.

$$\text{(2-223}\lfloor\text{-1402)} - \text{(1-223}\lfloor\text{0402)} + \text{(00-223}\lfloor\text{502)} - \text{(502}\rfloor\text{00-223)} + \text{(402}\rfloor\text{10-223)} - \text{(302}\rfloor\text{20-223)} + \text{(202}\rfloor\text{30-223)} - \text{(102}\rfloor\text{40-223)} +$$
$$+\text{(02}\rfloor\text{140-223)} - \text{(140-223}\lfloor\text{02)} + \text{(0040-223}\lfloor\text{3)} - \text{(3}\rfloor\text{0040-223)} + \text{(2}\rfloor\text{1040-223)} - \text{(1}\rfloor\text{2040-223)} + \text{(12040-223)} - \text{(3040-223)}$$

A keresett integrál ebből már ugyanúgy felírható:

$$\int \frac{\mathrm{Le}_{(-2,4,0,2)} \cdot \mathrm{Le}_{(2,-2,2,3)}}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Le}_{(-1,4,0,2)}(x)\,\mathrm{Le}_{(2,-2,2,3)}(x) - \mathrm{Le}_{(0,4,0,2)}(x)\,\mathrm{Le}_{(1,-2,2,3)}(x) + \mathrm{Le}_{(4,0,2)}(x)\,\mathrm{Le}_{(1,0,-2,2,3)}(x) -$$
$$-\mathrm{Le}_{(3,0,2)}(x)\,\mathrm{Le}_{(2,0,-2,2,3)}(x) + \mathrm{Le}_{(2,0,2)}(x)\,\mathrm{Le}_{(3,0,-2,2,3)}(x) - \mathrm{Le}_{(1,0,2)}(x)\,\mathrm{Le}_{(4,0,-2,2,3)}(x) + \mathrm{Le}_{(2)}(x)\,\mathrm{Le}_{(1,0,4,0,-2,2,3)}(x) -$$
$$-\mathrm{Le}_{(1)}(x)\,\mathrm{Le}_{(2,0,4,0,-2,2,3)}(x) + \mathrm{Le}_{(1,2,0,4,0,-2,2,3)}(x) - \mathrm{Le}_{(3,0,4,0,-2,2,3)}(x)$$

2 $\dfrac{1}{1-x}\cdot \mathrm{Li}_{(a_1,\dots,a_n)}(x)\cdot \mathrm{Li}_{(b_1,\dots,b_m)}(x)$ és $\dfrac{1}{1-x}\cdot \mathrm{Le}_{(a_1,\dots,a_n)}(x)\cdot \mathrm{Le}_{(b_1,\dots,b_m)}(x)$ integrálása

Ezen integrálok szinte ugyanúgy számíthatok ki mint a fentiek, csak egy ujabb inicializálást kell tisztázni: a bővítő inicializálást. A fentiekben már megismerkedtünk a növelő inicializálással.

Növelő inicializálás: *A kiüritendő vektort mindig csökkenthető pozícióban írjuk be úgy, hogy az I-sorba kerülő vektor első elemét mindig 1-gyel megnöveljük.*

Bővítő inicializálás: *A kiüritendő vektort mindig csökkenthető pozícióban írjuk be úgy, hogy az I-sorba kerülő vektor első eleme elé 1-et írunk.*

Néhány példa:

	Növelő inicializálás	Bővítő inicializálás
$(-2,4);(4,1)$	$(4,1\rfloor-2+1,4)=(4,1\rfloor-1,4)$	$(4,1\rfloor 1,-2,4)$
$(-2,1);(4,1)$	$(4,1\lfloor-2+1,1)=(4,1\rfloor-1,1)$	$(4,1\lfloor 1,-2,1)$
$(-2,4);(-4,1)$	$(-4,1\lfloor-2+1,1)=(-4,1\rfloor-1,1)$	$(-4,1\lfloor 1,-2,1)$
$(2,4);(-4,1)$	$(2,1\rfloor-4+1,1)=(2,1\rfloor-3,1)$	$(2,1\rfloor 1,-4,1)$

Minden inicializálás felfogható két vektor összefűzéseként, ahol az összefűzésen azt értjük, hogy a “)(” jelet a “$\rfloor 1+$”; “$\lfloor 1+$”; “$\rfloor 1,$”; “$\lfloor 1,$” négy jel valamelyikére cseréljük: $(4,1)(-2,4)=(4,1\rfloor 1+-2,4)$ $(2,3,8,-2)(2,7,-2,4)=(2,3,8,-2\lfloor 1,2,7,-2,4)$. Így könnyebben megjegyezhetők.

Az $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{(a_1,a_2,\dots,a_n)}\cdot \mathrm{Li}_{(b_1,b_2,\dots,b_m)}}{1-x}\,\mathrm{d}x$ integrál kiszámítása csak annyiban különbözik az $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{(a_1,a_2,\dots,a_n)}\cdot \mathrm{Li}_{(b_1,b_2,\dots,b_m)}}{x}\,\mathrm{d}x$ integrál kiszámításától, hogy *növelő inicializálás helyett bővítő inicializálással indítunk*. Egyébként minden lépés változatlan.

Az $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Le}_{(a_1,a_2,\dots,a_n)}\cdot \mathrm{Le}_{(b_1,b_2,\dots,b_m)}}{1-x}\,\mathrm{d}x$ integrál két fázisban számítható ki. Mind a két inicializálással kiszámítjuk a sorokat, majd *a bővítő inicializálással indított sorból kivonjuk a növelő inicializálással kapott sort.*

Példa:

$$\int \frac{\mathrm{Li}_{(2,1)}(x)\cdot \mathrm{Li}_{(-4,1)}(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{Li}_{(2,1)}(x)\cdot \mathrm{Li}_{(1,-4,1)}(x)-\mathrm{Li}_{(1,1)}(x)\cdot \mathrm{Li}_{(2,-4,1)}(x)+\mathrm{Li}_{(1)}(x)\cdot \mathrm{Li}_{(1,2,-4,1)}(x)-\mathrm{Li}_{(1,1,2,-4,1)}(x)$$

$$(2,1\rfloor 1,-4,1)-(1,1\rfloor 2,-4,1)+(1\rfloor 1,2,-4,1)-(1,1,2,-4,1)$$

Példa:

$$\int \frac{\mathrm{Le}_{(2,1)}(x)\cdot \mathrm{Le}_{(-4,1)}(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{Le}_{(2,1)}(x)\cdot \mathrm{Le}_{(1,-4,1)}(x)-\mathrm{Le}_{(1,1)}(x)\cdot \mathrm{Le}_{(2,-4,1)}(x)+\mathrm{Le}_{(1)}(x)\cdot \mathrm{Le}_{(1,2,-4,1)}(x)-\mathrm{Le}_{(1,1,2,-4,1)}(x)+$$

$$+\mathrm{Le}_{(2,2,-4,1)}(x)\overset{(2)}{-}\mathrm{Le}_{(2,1)}(x)\cdot \mathrm{Le}_{(-3,1)}(x)+\mathrm{Le}_{(1,1)}(x)\cdot \mathrm{Le}_{(-2,1)}(x)-\mathrm{Le}_{(1)}(x)\cdot \mathrm{Le}_{(1,-2,1)}(x)+\mathrm{Le}_{(1,1,-2,1)}(x)-\mathrm{Le}_{(2,-2,1)}(x)$$

$$(2,1\rfloor 1,-4,1)-(1,1\rfloor 2,-4,1)+(1\rfloor 1,2,-4,1)-(1,1,2,-4,1)+(2,2,-4,1)$$

$$2.fázis >>>$$

$$-(2,1\rfloor -3,1)+(1,1\rfloor -2,1)-(1\rfloor 1,-2,1)+(1,1,-2,1)-(2,-2,1)$$

3 $\frac{1}{x}\cdot \overleftarrow{\mathrm{Le}}_{(a_1,\dots,a_n)}(x)\cdot \overleftarrow{\mathrm{Le}}_{(b_1,\dots,b_m)}(x)$ integrálása

Fogalmak

$$(\underbrace{a_1,\dots,a_n}_{\text{D-sor}} \mid \underbrace{b_1,\dots,b_m}_{\text{I-sor}})$$

Az a kedvező, ha a D-sor utólsó eleme pozitív, vagy ha az I-sor utólsó eleme negatív.

Az alább ismertetendő lépések mindegyike olyan, hogy a két sor együttes hosszát, illetve a két sor elemeinek együttes összegét változatlanul hagyja. Ez a tény is segíthet az egyébként nem komplikált lépések memorizálásában.

Alaplépések

(**1**) **Csere**
Jele: $(D \circlearrowleft I)$

$$(a_1,\dots,a_n\lfloor b_1,\dots,b_m) \longrightarrow (b_1,\dots,b_m\rfloor a_1,\dots,a_n)$$

(**2**) **Standard lépés** (A D-sor utolsó elemét 1-gyel csökkentjük, miközben az I-sor utolsó elemét 1-gyel megnöveljük.)
Jele: (D-1 > I+1) Ezzel érhetjük el, hogy egy pozitív/negatív végű D-sor/I-sor végére 1/0 kerüljön.

$$(a_1,\dots,a_n \mid b_1,\dots,b_m) \longrightarrow (a_1,\dots,a_n-\mathbf{1} \mid b_1,\dots,b_m+\mathbf{1})$$

(**3**) **1-átrakás** (A D-sor végéről **1** átvihető az I-sor végére.)
Jele: ($D1 > I1$) Ezzel a lépéssel tudjuk egynél hosszabb D-sor hosszát eggyel csökkenteni.

$$(a_1,\dots,a_n,\mathbf{1}\rfloor b_1,\dots,b_m) \longrightarrow (a_1,\dots,a_n\rfloor b_1,\dots,b_m,\mathbf{1})$$

A következő lépés már *származtatható* az első három alaplépésből, de gyakran lesz rá szükség, ezért érdemes megjegyezni.
(**4**) **0-átrakás** (Az I-sor végéről **0** átvihető a D-sor végére, miközben a maradék részen egy standard lépést hajtunk végre.)
Jele: ($D0 < I0$) Ezzel a lépéssel tudjuk egy egynél hosszabb I-sor hosszát eggyel csökkenteni.

$$(a_1,\dots,a_n\lfloor b_1,\dots,b_m,\mathbf{0}) \longrightarrow (a_1,\dots,a_n-1,\mathbf{0}\lfloor b_1,\dots,b_m+1)$$

A 0-átrakás megkapható egy standard lépés, egy azt követő csere, egy 1-átrakás, egy újabb csere, és végül egy újabb standard lépés eredményeként.

$(\dots,a\lfloor\dots,b,\mathbf{0})-(\dots,a-1\lfloor\dots,b,1)+(\dots,b,1\rfloor\dots,a-1)-(\dots,b\rfloor\dots,a-1,1)+(\dots,a-1,1\lfloor\dots,b)-(\dots,a-1,\mathbf{0}\lfloor\dots,b+1)$

Viszont egy csere mindig kiesik az elötte lévő lépéssel együtt, mert tagjaik megegyeznek de ellenkező előjelüek.

$(\dots,a\lfloor\dots,b,\mathbf{0})-\cancel{(\dots,a-1\lfloor\dots,b,1)}+\cancel{(\dots,b,1\rfloor\dots,a-1)}-\cancel{(\dots,b\rfloor\dots,a-1,1)}+\cancel{(\dots,a-1,1\lfloor\dots,b)}-(\dots,a-1,\mathbf{0}\lfloor\dots,b+1)$

Jelekkel: $(D0 < I0) \equiv \cancel{(D\text{-}1 > I{+}1) \longrightarrow (D \circlearrowleft I)} \longrightarrow \cancel{(D1 > I1) \longrightarrow (D \circlearrowleft I)} \longrightarrow (D\text{-}1 > I{+}1)$

Láthatóan sok kieső, felesleges lépéstől kimél meg, ha megtanuljuk 0-átrakást.

Befejező lépések

(**5**) **1-ürítés** (A D-sor egyetlen 1 elemét átvisszük az I-sor végére, és ebből kivonjuk azt, amikor az D-sor egyetlen 1 elemét hozzáadjuk az I-sor utolsó eleméhez.)
Jele: ($D1 > END$) Ezzel a lépéssel egy egyetlen 1-et tartalmazó D-sor véglegesen kiüríthető.

$$(\mathbf{1}\rfloor b_1,\dots,b_m) \longrightarrow (b_1,\dots,b_m,\mathbf{1}) - (b_1,\dots,b_m+\mathbf{1})$$

Ennek a lépésnek a *duálisa* 0-ürítés, amely megkapható az 1-ürítésből.

(**6**) **0-ürítés** (A I-sor egyetlen 0 elemét elhagyjuk, a D-sor utolsó elemét eggyel csökkentjük és hozzáfűzünk a végéhez egy **1**-et, majd ebből kivonjuk a D-sort.)

Jele: $(I0 > END)$ Ezzel a lépéssel egy egyetlen 0-át tartalmazó I-sor véglegesen kiüríthető.

$$(a_1,\dots,a_n\lfloor\mathbf{0}) \longrightarrow (a_1,\dots,a_n-\mathbf{1},\mathbf{1})-(a_1,\dots,a_n)$$

A 0-ürítés megkapható egy standard lépés, egy azt követő csere (ezek most is kiejtik egymást), majd egy 1-ürítés eredményeként.

$$(a_1,\dots,a_n\lfloor\mathbf{0}) \equiv \cancel{(a_1,\dots,a_n-\mathbf{1}\lfloor\mathbf{1})} - \cancel{(\mathbf{1}\rfloor a_1,\dots,a_n-\mathbf{1})} + (a_1,\dots,a_n-\mathbf{1},\mathbf{1}) - \big(a_1,\dots,a_n\cancel{-\mathbf{1}}+\cancel{\mathbf{1}}\big)$$

A lépéseket egy közös táblázatban is megadjuk

A lépés neve	A lépés képlete	A lépés jele
csere	$(a_1,\dots,a_n\lfloor b_1,\dots,b_m) \longrightarrow (b_1,\dots,b_m\rfloor a_1,\dots,a_n)$	$(D\circlearrowleft I)$
standard lépés	$(a_1,\dots,a_n \mid b_1,\dots,b_m) \longrightarrow (a_1,\dots,a_n-\mathbf{1} \mid b_1,\dots,b_m+\mathbf{1})$	$(D\text{-}1 > I{+}1)$
1-átrakás	$(a_1,\dots,a_n,\mathbf{1}\rfloor b_1,\dots,b_m) \longrightarrow (a_1,\dots,a_n\rfloor b_1,\dots,b_m,\mathbf{1})$	$(D1 > I1)$
0-átrakás	$(a_1,\dots,a_n\lfloor b_1,\dots,b_m,\mathbf{0}) \longrightarrow (a_1,\dots,a_n-1,\mathbf{0}\lfloor b_1,\dots,b_m+1)$	$(D0 < I0)$
1-ürítés	$(\mathbf{1}\rfloor b_1,\dots,b_m) \longrightarrow (b_1,\dots,b_m,\mathbf{1})-(b_1,\dots,b_m+\mathbf{1})$	$(D1 > END)$
0-ürítés	$(a_1,\dots,a_n\lfloor\mathbf{0}) \longrightarrow (a_1,\dots,a_n-\mathbf{1},\mathbf{1})-(a_1,\dots,a_n)$	$(I0 > END)$

Kiürítési feladatok (az egyes lépések gyakorlati alkalmazása)

A végső cél mindig az, hogy a D-sor vagy az I-sor kiürüljön. Ezt csak valamelyik sor hosszának egyenkénti csökkentésével érhetjük el. Csak két olyan lépésünk van amely valamely *legalább két elemből alló* sor hosszát eggyel csökkenti (miközben a másíkét eggyel növeli): Az 1-átrakás a D-sor hosszát, a 0-átrakás pedig az I-sor hosszát csökkenti eggyel. Ehhez viszont el kell érnünk, hogy a D-sor végén egy 1-es vagy, az I-sor végén egy 0 legyen. Mivel a standard lépés a D-sor utolsó elemét mindig 1-gyel csökkenti, ezért csak pozitív számokon keresztül érhetjük el, hogy standard lépések sorának alkalmazásával végül a D-sor végén egy 1-es álljon. Röviden, *egy legalább két elemből álló D-sort hosszát csak akkor tudjuk csökkenteni eggyel, ha annak utolsó eleme pozitív.* A 0-átrakással az I-sor hosszát tudjuk eggyel csökkenteni. Mivel a standard lépés az I-sor utolsó elemét mindig megnöveli 1-gyel, ezért csak negatív számokon keresztül érhetjük el, hogy standard lépések sorának alkalmazásával végül az I-sor végén egy 0 álljon. Röviden, *egy legalább két elemből álló I-sort hosszát csak akkor tudjuk csökkenteni eggyel, ha annak utolsó eleme negatív.* A cserékkel mindig megoldható hogy egy sort csökkenthető pozícióba hozzunk. Az 1-ürítés, illetve 0-ürítés pedig az egyetlen 1, illetve 0 elemből álló sorokat csökkenti zerus hosszúságú üressorrá. Az alábbi példákban (és általában is) ⌋, illetve ⌊ jelek használatával jelöljük, hogy melyik sort hosszát szeretnénk csökkenteni.

1.példa (-2404 | 32-3) Mind a két sor *csökkenthető pozícióban* van, nincs szükség cserére.

D-sor csökkentése: (-2404⌋32-5) − (-2403⌋32-4) + (-2402⌋32-3) + (-2401⌋32-2) − (-240⌋32-21)

I-sor csökkentése: (-2-54⌊32-5) − (-2403⌊32-4) + (-2402⌊32-3) − (-2401⌊32-2) + (-2400⌊32-1) + (-240-1⌊320) − (-240-20⌊33)

2.példa (-2404 | 323) A D-sor csökkenthető pozícióban van ezért csökkentéséhez nincs szükség cserére. Ellenben az I-sor nincs cökkenthető pozícióban, ezért cserével hozzuk csökkenthető pozícióba.

D-sor csökkentése: (-2-54⌋323) − (-2-53⌋324) + (-2-52⌋325) + (-2-51⌋326) − (-2-5⌋3261)

I-sor csökkentése cserével: ~~(-2-54⌊323)~~ $\overset{\circlearrowleft}{-}$ ~~(323⌋-2-54)~~ + (323⌋-2-55) − (322⌋-2-56) + (321⌋-2-57) − (32⌋-2-571)

A következő példában kiürítjük a D-sort.

3.példa (-32-2 | 3-12) Egyik sor sincs csökkenthető pozícióban, és a csökkentések után is olyan sorokat fogunk kapni, amelyek cserét igényelnek.

A (-32-2) D-sort szeretnénk kiüríteni, ezt jelzi a ⌋ jel. (-32-2⌋3-12). Mivel standard lépésekkel -2 nem csökkenthető 1-re, ezért cserét hajtunk végre: (-32-2⌋3-12) $\overset{\circlearrowleft}{-}$ (3-12⌊-30-2). Ekkor a ⌋ jelet is felcseréljük ⌊ jelre azért, hogy lássuk melyik sor csökkentése a feladat. A két felcserélt vektor kiejti egymást, és két standard lépéssel -2 felnövelhető 0-ra: ~~(-32-2⌋3-12)~~ $\overset{\circlearrowleft}{-}$ ~~(3-12⌊-32-2)~~ + + (3-11⌊-32-1) − (3-10⌊-320). Most már 0-átrakással csökkenthetjük a kiürítendő sort: − (3-10⌊-320) + (3-1-10⌊-33). A kettő hosszúságúra csökkent (-33) kiürítendő sor nincs csökkenthető pozícióban, ezért cserélünk: + (3-1-10⌊-33) $\overset{\circlearrowleft}{-}$ (-33⌋3-1-10). A felcserélt elemek megint kiejtik egymást, és két standard lépéssel a 3-at 1-re csökkenthetjük, amikor már egy 1-átrakással újból eggyel csökkenthető a kiürítendő sor: +~~(3-1-10⌊-33)~~ $\overset{\circlearrowleft}{-}$ ~~(-33⌋3-1-10)~~ + (-32⌋3-1-11) − (-31⌋3-1-12) + (-3⌋3-1-121). Az eljárás során egy hosszúságúra csökkent (-3) vektor ismét nincs csökkenthető pozícióban, ezért cserélnünk kell. A felcserélt sorban -3-at három standard lépéssel 0-ra növelhetjük: +~~(-3⌋3-1-121)~~ $\overset{\circlearrowleft}{-}$ ~~(3-1-121⌊-3)~~ + (3-1-120⌊-2) − (3-1-12-1⌊-1) + (3-1-12-2⌊0). A sort véglegesen kiüríthetjük 0-ürítéssel: + (3-1-12-2⌊0) − (3-1-12-31) + (3-1-12-2).

Végül az egész lépéssort egyben is leírjuk:

~~(-32-2⌋3-12)~~ $\overset{\circlearrowleft}{-}$ ~~(3-12⌊-32-2)~~ + (3-11⌊-32-1) − (3-10⌊-320) + ~~(3-1-10⌊-33)~~ $\overset{\circlearrowleft}{-}$ ~~(-33⌋3-1-10)~~ + (-32⌋3-1-11) − (-31⌋3-1-12) + ~~(-3⌋3-1-121)~~ $\overset{\circlearrowleft}{-}$ ~~(3-1-121⌊-3)~~ + (3-1-120⌊-2) − (3-1-12-1⌊-1) + (3-1-12-2⌊0) − (3-1-12-31) + (3-1-12-2).

Jelekkel ugyanez:

$$(D \circlearrowleft I) \to (D\text{-}1 > I{+}1)^2 \to (D0 < I0) \to (D \circlearrowleft I) \to (D\text{-}1 > I{+}1)^2 \to (D1 > I1) \to (D \circlearrowleft I) \to (D\text{-}1 > I{+}1)^3 \to (I0 > END)$$

A másik sor kiürítését is megadjuk:

~~(-32-2⌊3-12)~~ $\overset{\circlearrowleft}{-}$ ~~(3-12⌋-32-2)~~ + (3-11⌋-32-1) − ~~(3-1⌋-32-11)~~ $\overset{\circlearrowleft}{+}$ ~~(-32-11⌊3-1)~~ − (-32-10⌊30) + ~~(-32-1-10⌊4)~~ $\overset{\circlearrowleft}{-}$ ~~(4⌋-32-1-10)~~ + (3⌋-32-1-11) − − (2⌋-32-1-12) + (1⌋-32-1-13) − (-32-1-131) + (-32-1-14).

Jelekkel:

$$(D \circlearrowleft I) \to (D\text{-}1 > I{+}1) \to (D1 > I1) \to (D \circlearrowleft I) \to (D\text{-}1 > I{+}1) \to (D0 < I0) \to (D \circlearrowleft I) \to (D\text{-}1 > I{+}1)^3 \to (I1 > END)$$

Láthatóan ez kevesebb tagú összeghez vezetett. Nem nehéz átgondolni, hogy egy sor kiürítése során (a kieső cserék elhagyásával kapott) összeg hossza kapcsolatba hozható a sor elemeinek abszolútértékeiből képezhető összeggel. A fenti példákban ezen abszolútértékekből képezhető összeg rendre $(|-3| + |2| + |-2|) = 7$, illetve $(|3| + |-1| + |2|) = 6$. Később pontos képletet is adunk erre a kapcsolatra, de addig is érdemes azt a sort kiürítendőnek választani, amelyikre ez az összeg kisebb.

Az $\displaystyle\int \frac{\mathbf{Le}_{[a_1,\ldots,a_n]} \cdot \mathbf{Le}_{[b_1,\ldots,b_m]}}{x}\, \mathrm{d}x$ integrálok kiszámításának egy algoritmusa

Az integrál kiszámítása lényegében a fentiekben tárgyal kiürítési feladattal ekvivalens. Csak arra kell ügyelni, hogy a kiürítési feladat a lehető legjobban induljon (a lehető legkevesebb összeget eredményezze). Az algoritmust csak azért közöljük *teljesen egyértelműen*, hogy a feladatok megoldásakor mindig ugyanazt az eredményt kapjuk. Egyébként eltérő módon is kaphatunk más, ugyanolyan helyes eredményt.

Inicializálás:
(i) Kiszámítjuk az $|A| := |a_1| + \cdots + |a_n|$, illetve $|B| := |b_1| + \cdots + |b_m|$ összegeket.
Ha $|A| < |B|$, akkor az $[a_1, \ldots, a_n]$ vektort választjuk kiürítendőnek.
Ha $|B| < |A|$, akkor az $[b_1, \ldots, b_m]$ vektort választjuk kiürítendőnek.
Ha $|A| = |B|$, akkor $n \le m$ esetében az $[a_1, \ldots, a_n]$ vektort választjuk kiürítendőnek, ellenkező esetben a $[b_1, \ldots, b_m]$ vektort.

(ii) *A kiürítendő vektort mindig csökkenthető pozícióban írjuk be úgy, hogy az I-sorba kerülő vektor utolsó elemét mindig 1-gyel megnöveljük.* Vagyis, ha a kiürítendő vektornak az $[a_1, \ldots, a_n]$ vektor adódott és $a_n \ge 0$, akkor az $(a_1, \ldots, a_n \rfloor b_1, \ldots, b_m + 1)$, ha pedig $a_n < 0$, akkor a $(b_1, \ldots, b_m \lfloor a_1, \ldots, a_n + 1)$ feladatot képezzük. Ugyanígy, ha a kiürítendő vektornak a $[b_1, \ldots, b_m]$ vektor adódott és $b_m \ge 0$, akkor a $(b_1, \ldots, b_m \rfloor a_1, \ldots, a_n + 1)$, ha pedig $b_m < 0$, akkor az $(a_1, \ldots, a_n \lfloor b_1, \ldots, b_m + 1)$ feladatot képezzük. Így összesen négy kiürítési feladat lehet az inicializálás kimenete:

$$(a_1, \ldots, a_n \rfloor b_1, \ldots, b_m + 1)\,,\ (a_1, \ldots, a_n \lfloor b_1, \ldots, b_m + 1)\,,\ (b_1, \ldots, b_m \lfloor a_1, \ldots, a_n + 1)\,,\ (a_1, \ldots, a_n \lfloor b_1, \ldots, b_m + 1)$$

Kiszámítás:
Az inicializálás során kapott kiürítési feladat megoldásából az $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Le}_{[a_1,\ldots,a_n]} \cdot \mathrm{Le}_{[b_1,\ldots,b_m]}}{x}\, \mathrm{d}x$ integrál értékét megkaphatjuk úgy, hogy minden a megoldásban előforduló $\pm(c_1, \ldots, c_k \mid d_1, \ldots, d_l)$ előjeles sornak megfeleltetjük a $\pm\mathrm{Le}_{[c_1,\ldots,c_k]} \cdot \mathrm{Le}_{[d_1,\ldots,d_l]}$ előjeles szorzatot.

Példa: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Le}_{[-2,4,0,2]}\cdot \mathrm{Le}_{[2,-2,2,3]}}{x}\,\mathrm{d}x$ kiszámítása

Inicializálás: (i) Kiszámítjuk az $|A| = |-2|+|4|+|0|+|2| = 8$, illetve $|B| = |2|+|-2|+|2|+|3| = 9|$ összegeket. Mivel $|A| < |B|$, ezért a $[-2,4,0,2]$ vektort választjuk kiürítendőnek, és a kiürítési faladat (-2402⌋2-224) lesz.

Kiszámítás: A kiürítési faladat megoldásában cserék során kieső párokat kékkel kiemeljük.

(-2402⌋2-224) − (-2401⌋2-225) + (-240⌋2-2251) − (2-2251⌊-240) + (2-22500⌊-25) − (-25⌋2-22500) + (-24⌋2-22501) − (-23⌋2-22502) +

+ (-22⌋2-22503) − (-21⌋2-22504) + (-2⌋2-225041) − (2-225041⌊-2) + (2-225040⌊-1) − (2-22504-1⌊0) + (2-22504-21) − (2-22504-1)

A keresett integrál ebből már könnyen felírható:

$$\int \frac{\mathrm{Le}_{[-2,4,0,2]}\cdot \mathrm{Le}_{[2,-2,2,3]}}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Le}_{[-2,4,0,2]}(x)\,\mathrm{Le}_{[2,-2,2,4]}(x) - \mathrm{Le}_{[-2,4,0,1]}(x)\,\mathrm{Le}_{[2,-2,2,5]}(x) + \mathrm{Le}_{[-2,4]}(x)\,\mathrm{Le}_{[2,-2,2,5,0,1]}(x) -$$
$$-\mathrm{Le}_{[-2,3]}(x)\,\mathrm{Le}_{[2,-2,2,5,0,2]}(x) + \mathrm{Le}_{[-2,2]}(x)\,\mathrm{Le}_{[2,-2,2,5,0,3]}(x) - \mathrm{Le}_{[-2,1]}(x)\,\mathrm{Le}_{[2,-2,2,5,0,4]}(x) + \mathrm{Le}_{[2,-2,2,5,0,4,0]}(x)\,\mathrm{Le}_{[-1]}(x) -$$
$$-\mathrm{Le}_{[2,-2,2,5,0,4,-1]}(x)\,\mathrm{Le}_{[0]}(x) + \mathrm{Le}_{[2,-2,2,5,0,4,-2,1]}(x) - \mathrm{Le}_{[2,-2,2,5,0,4,-1]}(x)$$

Az alábbiakban megadjuk néhány integrál kiszámítását

Feladat 1. $\displaystyle\int \frac{\mathbf{Le}_{[-2,4,0]}\cdot \mathbf{Le}_{[2,2,3]}}{x}\,\mathbf{d}x$

(-240⌋224) − (224⌊-240) + (2230⌊-25) − (-25⌋2230) + (-24⌋2231) − (-23⌋2232) + (-22⌋2233) − (-21⌋2234) + (-2⌋22341) −
− (22341⌊-2) + (22340⌊-1) − (2234-1⌊0) + (2234-21) − (2234-1)

$$\int \frac{\mathrm{Le}_{[-2,4,0]}\cdot \mathrm{Le}_{[2,2,3]}}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Le}_{[-2,4]}(x)\,\mathrm{Le}_{[2,2,3,1]}(x) - \mathrm{Le}_{[-2,3]}(x)\,\mathrm{Le}_{[2,2,3,2]}(x) + \mathrm{Le}_{[-2,2]}(x)\,\mathrm{Le}_{[2,2,3,3]}(x) -$$
$$-\mathrm{Le}_{[-2,1]}(x)\,\mathrm{Le}_{[2,2,3,4]}(x) + \mathrm{Le}_{[2,2,3,4,0]}(x)\,\mathrm{Le}_{[-1]}(x) - \mathrm{Le}_{[2,2,3,4,-1]}(x)\,\mathrm{Le}_{[0]}(x) + \mathrm{Le}_{[2,2,3,4,-2,1]}(x) - \mathrm{Le}_{[2,2,3,4,-1]}(x)$$

Feladat 2. $\displaystyle\int \frac{\mathbf{Le}_{[-1,4]}\cdot \mathbf{Le}_{[2,0,-2]}}{x}\,\mathbf{d}x$

(-14⌊20-1) − (-13⌊200) + (-120⌊21) − (21⌋-120) + (2⌋-1201) − (1⌋-1202) + (-12021) − (-1203)

$$\int \frac{\mathrm{Le}_{[-1,4]}\cdot \mathrm{Le}_{[2,0,-2]}}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Le}_{[-1,4]}(x)\,\mathrm{Le}_{[2,0,-1]}(x) - \mathrm{Le}_{[-1,3]}(x)\,\mathrm{Le}_{[2,0,0]}(x) + \mathrm{Le}_{[2]}(x)\,\mathrm{Le}_{[-1,2,0,1]}(x) -$$
$$-\mathrm{Le}_{[1]}(x)\,\mathrm{Le}_{[-1,2,0,2]}(x) + \mathrm{Le}_{[-1,2,0,2,1]}(x) - \mathrm{Le}_{[-1,2,0,3]}(x)$$

Feladat 3. $\displaystyle\int \frac{\mathbf{Le}_{[-4]}\cdot \mathbf{Le}_{[-7]}}{x}\,\mathbf{d}x$

(-7⌊-3) − (-8⌊-2) + (-9⌊-1) − (-10⌊0) + (-11,1) − (-10)

$$\int \frac{\mathrm{Le}_{[-4]}\cdot \mathrm{Le}_{[-7]}}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Le}_{[-7]}(x)\,\mathrm{Le}_{[-3]}(x) - \mathrm{Le}_{[-8]}(x)\,\mathrm{Le}_{[-2]}(x) + \mathrm{Le}_{[-9]}(x)\,\mathrm{Le}_{[-1]}(x) - \mathrm{Le}_{[-10]}(x)\,\mathrm{Le}_{[0]}(x) +$$
$$+\mathrm{Le}_{[-11,1]}(x) - \mathrm{Le}_{[-10]}(x)$$

Feladat 4. $\displaystyle\int \frac{\mathbf{Le}_{[2,0,-2]}\cdot \mathbf{Le}_{[-3,4]}}{x}\,\mathbf{d}x$

(-34⌊20-1) − (-33⌊200) + (-320⌊21) − (21⌋-320) + (2⌋-3201) − (1⌋-3202) + (-32021) − (-3203)

$$\int \frac{\mathrm{Le}_{[2,0,-2]}\cdot \mathrm{Le}_{[-3,4]}}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Le}_{[-3,4]}(x)\,\mathrm{Le}_{[2,0,-1]}(x) - \mathrm{Le}_{[-3,3]}(x)\,\mathrm{Le}_{[2,0,0]}(x) + \mathrm{Le}_{[2]}(x)\,\mathrm{Le}_{[-3,2,0,1]}(x) -$$
$$-\mathrm{Le}_{[1]}(x)\,\mathrm{Le}_{[-3,2,0,2]}(x) + \mathrm{Le}_{[-3,2,0,2,1]}(x) - \mathrm{Le}_{[-3,2,0,3]}(x)$$

Feladat 5. $\displaystyle\int \frac{\mathbf{Le}_{[-4,0,1,-2]} \cdot \mathbf{Le}_{[-2,1,1,0]}}{x}\,\mathbf{d}x$

(-2110⌋-401-1) − (-401-1⌊-2110) + (-401-20⌊-212) − (-212⌋-401-20) + (-211⌋-401-21) − (-21⌋-401-211) + (-2⌋-401-2111) −
− (-401-2111⌊-2) + (-401-2110⌊-1) − (-401-211-1⌊0) + (-401-211-21) − (-401-211-1)

$$\int \frac{\mathrm{Le}_{[-4,0,1,-2]} \cdot \mathrm{Le}_{[-2,1,1,0]}}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Le}_{[-2,1,1]}(x)\,\mathrm{Le}_{[-4,0,1,-2,1]}(x) - \mathrm{Le}_{[-2,1]}(x)\,\mathrm{Le}_{[-4,0,1,-2,1,1]}(x) + \\ + \mathrm{Le}_{[-4,0,1,-2,1,1,0]}(x)\,\mathrm{Le}_{[-1]}(x) - \mathrm{Le}_{[-4,0,1,-2,1,1,-1]}(x)\,\mathrm{Le}_{[0]}(x) + \mathrm{Le}_{[-4,0,1,-2,1,1,-2,1]}(x) - \mathrm{Le}_{[-4,0,1,-2,1,1,-1]}(x)$$

Feladat 6. $\displaystyle\int \frac{\mathbf{Le}_{[1,-1,1,-1]} \cdot \mathbf{Le}_{[1,0,1,0]}}{x}\,\mathbf{d}x$

(1010⌋1-110) − (1-110⌊1010) + (1-11-10⌊102) − (102⌋1-11-10) + (101⌋1-11-11) − (10⌋1-11-111) + (1-11-111⌊10) −
− (1-11-1100⌊2) + (2⌋1-11-1100) − (1⌋1-11-1101) + (1-11-11011) − (1-11-1102)

$$\int \frac{\mathrm{Le}_{[1,-1,1,-1]} \cdot \mathrm{Le}_{[1,0,1,0]}}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Le}_{[1,0,1]}(x)\,\mathrm{Le}_{[1,-1,1,-1,1]}(x) - \mathrm{Le}_{[1]}(x)\,\mathrm{Le}_{[1,-1,1,-1,1,0,1]}(x) + \mathrm{Le}_{[1,-1,1,-1,1,0,1,1]}(x) - \\ - \mathrm{Le}_{[1,-1,1,-1,1,0,2]}(x)$$

Feladat 7. $\displaystyle\int \frac{\mathbf{Le}_{[3,-4,2,5]} \cdot \mathbf{Le}_{[1,4,1,2]}}{x}\,\mathbf{d}x$

(1412⌋3-426) − (1411⌋3-427) + (141⌋3-4271) − (14⌋3-42711) + (13⌋3-42712) − (12⌋3-42713) + (11⌋3-42714) −
− (1⌋3-427141) + (3-4271411) − (3-427142)

$$\int \frac{\mathrm{Le}_{[3,-4,2,5]} \cdot \mathrm{Le}_{[1,4,1,2]}}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Le}_{[1,4,1,2]}(x)\,\mathrm{Le}_{[3,-4,2,6]}(x) - \mathrm{Le}_{[1,4,1,1]}(x)\,\mathrm{Le}_{[3,-4,2,7]}(x) + \mathrm{Le}_{[1,4,1]}(x)\,\mathrm{Le}_{[3,-4,2,7,1]}(x) - \\ - \mathrm{Le}_{[1,4]}(x)\,\mathrm{Le}_{[3,-4,2,7,1,1]}(x) + \mathrm{Le}_{[1,3]}(x)\,\mathrm{Le}_{[3,-4,2,7,1,2]}(x) - \mathrm{Le}_{[1,2]}(x)\,\mathrm{Le}_{[3,-4,2,7,1,3]}(x) + \mathrm{Le}_{[1,1]}(x)\,\mathrm{Le}_{[3,-4,2,7,1,4]}(x) - \\ - \mathrm{Le}_{[1]}(x)\,\mathrm{Le}_{[3,-4,2,7,1,4,1]}(x) + \mathrm{Le}_{[3,-4,2,7,1,4,1,1]}(x) - \mathrm{Le}_{[3,-4,2,7,1,4,2]}(x)$$

Természetesen egy kiürítési faladat több különböző sorrendben is megoldható. Így ugyanazon integrálra kapott különböző eredményekből multi-polilogaritmusok közötti azonosságokhoz juthatunk. Egy fontos elméleti kérdés lehet az is, hogy hány különböző eredményt kaphatunk egy konkrét integrálra, vagyis hány különböző megoldása létezik egy kiürítési feladatnak. *Az biztos, hogy a kiválasztott kiürítendő vektor egyértelműen meghatározza a kiürítéssel kapott összeget. Ezért a legfontosabb elméleti probléma ennek az eredménynek a képletes felírása.*