1 Általánosított polilogaritmus függvények ∞-el az az indexben

$\mathrm{Li}_{(\infty)}(x) = x$

$\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\dots,s_r,\infty)}(x) = (-1)^r \left(\sum_{j=1}^{r} (-1)^j \cdot \mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\dots,s_j)}(x) + x \right)$

$\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\dots,s_r,\infty,w_1,\dots)}(x) = 0$

(Ha ∞-t csak egyetlen szám (lehet végtelen) is követi, akkor zérus, egyébként a ∞ előtti kezdőszeletek előjeles összege.)

$\mathrm{Le}_{(\infty)}(x) = x$

$\mathrm{Le}_{(s_1,s_2,\dots,s_r,\infty)}(x) = \mathrm{Le}_{(s_1,s_2,\dots,s_r)}(x) \ \ (r > 0)$

$\mathrm{Le}_{(s_1,s_2,\dots,s_r,\infty,w_1,\dots)}(x) = \mathrm{Le}_{(s_1,s_2,\dots,s_r)}(x)$

(Mindig az első ∞ előtti rész.)

Példák:

$\mathrm{Li}_{(\infty,2)}(x) = 0$

$\mathrm{Li}_{(2,3,4,\infty)}(x) = -\left(-\mathrm{Li}_{(2)}(x) + \mathrm{Li}_{(2,3)}(x) - \mathrm{Li}_{(2,3,4)}(x) + x\right)$

$\mathrm{Li}_{(2,4,3,\infty,2,3)}(x) = 0$

$\mathrm{Li}_{(2,4,3,\infty,\infty)}(x) = 0$

$\mathrm{Le}_{(\infty,2)}(x) = x$

$\mathrm{Le}_{(2,3,4,\infty)}(x) = \mathrm{Le}_{(2,3,4)}(x)$

$\mathrm{Le}_{(2,4,3,\infty,2,3)}(x) = \mathrm{Le}_{(2,4,3)}(x)$

$\mathrm{Le}_{(2,4,3,\infty,\infty)}(x) = \mathrm{Le}_{(2,4,3)}(x)$

2 $\mathbf{Li}_{(\underbrace{0,\dots,0}_{n})}(x)$ és $\mathbf{Le}_{(\underbrace{0,\dots,0}_{n})}(x)$

$$\mathrm{Li}_{(\underbrace{0,\dots,0}_{n})}(x) = \mathrm{Li}_0^n(x) = \frac{x^n}{(1-x)^n}$$

$$\mathrm{Le}_{(\underbrace{0,\dots,0}_{n})}(x) = (1+\mathrm{Li}_0(x))^n \ \mathrm{Li}_0(x) = \frac{x}{(1-x)^n}$$

Ezekből tükrözéssel az alábbiakat kapjuk:

$$\mathrm{Li}_{(\underbrace{0,\dots,0}_{n})}(1-x) = \mathrm{Li}_0^n(1-x) = \frac{(1-x)^n}{x^n}$$

$$\mathrm{Le}_{(\underbrace{0,\dots,0}_{n})}(1-x) = (1+\mathrm{Li}_0(1-x))^n \ \mathrm{Li}_0(1-x) = \frac{1-x}{x^n}$$

Mind a két egyenlőségekből nagyon fontos reciprok hatvány előállítást kapunk

Ha az $\mathrm{Li}_{(\underbrace{0,\dots,0}_{n})}(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^n$ azonosságba x helyébe $\frac{x}{x-1}$-et írunk, akkor

$$\mathrm{Li}_{(\underbrace{0,\dots,0}_{n})}\left(\frac{x}{x-1}\right) = \left(\frac{\frac{x}{x-1}}{1-\frac{x}{x-1}}\right)^n = \left(\frac{\frac{x}{\cancel{x-1}}}{\frac{x-1-x}{\cancel{x-1}}}\right)^n = (-x)^n$$

$$\mathrm{Li}_{(\underbrace{0,\dots,0}_{n})}\left(\frac{x}{x+1}\right)=x^n\ ,\ \mathrm{Li}_{(\underbrace{0,\dots,0}_{n})}\left(\frac{x}{x-1}\right)=(-x)^n \qquad \text{és} \qquad \mathrm{Li}_{(\underbrace{0,\dots,0}_{n})}\left(\frac{x-1}{x}\right)=(1-x)^n$$

$$\frac{1}{x^n}=\frac{\mathrm{Le}_{(\underbrace{0,\dots,0}_{n})}(1-x)}{1-x} \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{(1-x)^n}=\frac{\mathrm{Le}_{(\underbrace{0,\dots,0}_{n})}(x)}{x}$$

3 $\mathbf{Li}_{(\underbrace{0,\dots,0}_{n},s_1,s_2,\dots,s_r)}(x)$ és $\mathbf{Le}_{(\underbrace{0,\dots,0}_{n},s_1,s_2,\dots,s_r)}(x)$

$$\mathrm{Li}_{(\underbrace{0,\dots 0}_{n},s_1,s_2,\dots,s_r)}(x)=\mathrm{Li}_0^n(x)\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\dots,s_r)}(x)=\frac{x^n}{(1-x)^n}\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\dots,s_r)}(x)=\frac{\mathrm{Li}_\infty^n(x)\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\dots,s_r)}(x)}{(1-x)^n}$$

$$\mathrm{Le}_{(\underbrace{0,\dots,0}_{n},s_1,s_2,\dots,s_r)}(x)=\frac{\mathrm{Li}_{(\underbrace{0,0,\dots 0}_{n})}(x)\mathrm{Le}_{(s_1,s_2,\dots,s_r)}(x)}{x}=\frac{\mathrm{Le}_{(s_1,s_2,\dots,s_r)}(x)}{(1-x)^n}=\frac{\mathrm{Li}_0^n(x)\mathrm{Le}_{(s_1,s_2,\dots,s_r)}(x)}{x^n}$$

Az $n=1$; $r=0$ speciális esetben az első azonosság az $\mathrm{Li}_0(x)=\frac{x}{1-x}\mathrm{Li}_{(\,)}(x)=\frac{x}{1-x}\cdot 1=\frac{x}{1-x}$ egyenletbe megy át.
Ezen szabályokat leggyakrabban a deriváló sorban használjuk $n=1$ speciális esettel az alábbi szituációkban.

$$\text{(a)}\quad \left(\mathrm{Li}_{(1,s_2,\dots,s_r)}(x)\right)'=\mathrm{Li}_{(0,s_2,\dots,s_r)}(x)\frac{1}{x}=\mathrm{Li}_{(s_2,\dots,s_r)}(x)\mathrm{Li}_0(x)\frac{1}{x}=\mathrm{Li}_{(s_2,\dots,s_r)}(x)\frac{\cancel{x}}{1-x}\frac{1}{\cancel{x}}=\frac{\mathrm{Li}_{(s_2,\dots,s_r)}(x)}{1-x}$$

$$\text{(b)}\quad \left(\mathrm{Li}_{(1,s_2,\dots,s_r)}(1-x)\right)'=\mathrm{Li}_{(0,s_2,\dots,s_r)}(1-x)\frac{-1}{1-x}=\mathrm{Li}_{(s_2,\dots,s_r)}(1-x)\mathrm{Li}_0(1-x)\frac{-1}{1-x}=$$

$$=-\mathrm{Li}_{(s_2,\dots,s_r)}(1-x)\frac{\cancel{1-x}}{x}\frac{1}{\cancel{1-x}}=-\frac{\mathrm{Li}_{(s_2,\dots,s_r)}(1-x)}{x}$$

Láthatóan (a) az $\int\frac{\mathrm{Li}_{(s_2,\dots,s_r)}(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{Li}_{(1,s_2,\dots,s_r)}(x)$ azonosságnak, míg (b) az $\int\frac{\mathrm{Li}_{(s_2,\dots,s_r)}(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x=-\mathrm{Li}_{(1,s_2,\dots,s_r)}(1-x)$ azonosságnak felel meg.
Hasonlóan,

$$\text{(a')}\quad \left(\mathrm{Le}_{(1,s_2,\dots,s_r)}(x)\right)'=\mathrm{Le}_{(0,s_2,\dots,s_r)}(x)\frac{1}{x}=\frac{\mathrm{Le}_{(s_2,\dots,s_r)}(x)}{(1-x)\,x}$$

$$\text{(b')}\quad \left(\mathrm{Le}_{(1,s_2,\dots,s_r)}(1-x)\right)'=\mathrm{Le}_{(0,s_2,\dots,s_r)}(1-x)\frac{-1}{1-x}=-\frac{\mathrm{Le}_{(s_2,\dots,s_r)}(1-x)}{x(1-x)}$$

Ekkor(a') az $\int\frac{\mathrm{Le}_{(s_2,\dots,s_r)}(x)}{(1-x)\,x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{Le}_{(1,s_2,\dots,s_r)}(x)$ azonosságnak, míg (b') az $\int\frac{\mathrm{Le}_{(s_2,\dots,s_r)}(1-x)}{x\,(1-x)}\,\mathrm{d}x=-\mathrm{Le}_{(1,s_2,\dots,s_r)}(1-x)$ azonosságnak felel meg.

4 $\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r,\underbrace{0,\ldots,0}_{n})}(x)$ és $\mathrm{Le}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r,\underbrace{0,\ldots,0}_{n})}(x)$

$$\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r,\underbrace{0,\ldots,0}_{n})}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \left[\begin{array}{c} n+1 \\ k \end{array} \right] \mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_{r-1},s_r+1-k)}(x)$$

$$\mathrm{Le}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r,\underbrace{0,\ldots,0}_{n})}(x) = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{n} \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right] \mathrm{Le}_{(s_1,s_2,\ldots,s_{r-1},s_r-k)}(x)$$

5 $\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r,\underbrace{0,\ldots,0}_{n},\underbrace{1,\ldots,1}_{p})}(x)$

Igen nehezen bizonyítható az elöző formula alábbi általánosítása

$$\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r,\underbrace{0,\ldots,0}_{n},\underbrace{1,\ldots,1}_{p})}(x) = \frac{(-1)^{n+p+1}}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \left\{ \sum_{l=1}^{n} (-1)^l \binom{n}{l} \frac{l^k}{l^p} \right\} \left\{ \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \left[\begin{array}{c} n+1 \\ j+1 \end{array} \right] \mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_{r-1},s_r-j,1^k)}(x) \right\}$$

6 $\mathrm{Li}_{(\underbrace{1,\ldots,1}_{n})}(x)$ és $\mathrm{Le}_{(\underbrace{1,\ldots,1}_{n})}(x)$

$$\mathrm{Li}_{(\underbrace{1,\ldots,1}_{n})}(x) = \frac{\mathrm{Li}_1^n(x)}{n!} = \frac{(-1)^n}{n!} \ln^n(1-x)$$

$$\mathrm{Li}_{(\underbrace{1,\ldots,1}_{n})}(1-x) = \frac{\mathrm{Li}_1^n(x)}{n!} = \frac{(-1)^n}{n!} \ln^n(x)$$

$$\mathrm{Le}_{(\underbrace{1,\ldots,1}_{n})}(x) = -\mathrm{Le}_n\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\mathrm{Li}_n\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$\mathrm{Le}_{(\underbrace{1,\ldots,1}_{n})}(1-x) = -\mathrm{Le}_n\left(\frac{x-1}{x}\right) = -\mathrm{Li}_n\left(\frac{x-1}{x}\right)$$