

# 1 Általánosított polilogaritmus függvények $\infty$ -el az az indexben

$$\text{Li}_{(\infty)}(x) = x$$

$$\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r, \infty)}(x) = (-1)^r \left( \sum_{j=1}^r (-1)^j \cdot \text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_j)}(x) + x \right)$$

$$\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r, \infty, w_1, \dots)}(x) = 0$$

(Ha  $\infty$ -t csak egyetlen szám (lehet végtelen) is követi, akkor zérus, egyébként a  $\infty$  előtti kezdőszeletek előjeles összege.)

$$\text{Le}_{(\infty)}(x) = x$$

$$\text{Le}_{(s_1, s_2, \dots, s_r, \infty)}(x) = \text{Le}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(x) \quad (r > 0)$$

$$\text{Le}_{(s_1, s_2, \dots, s_r, \infty, w_1, \dots)}(x) = \text{Le}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(x)$$

(Mindig az első  $\infty$  előtti rész.)

Példák:

$$\text{Li}_{(\infty, 2)}(x) = 0$$

$$\text{Li}_{(2, 3, 4, \infty)}(x) = -(-\text{Li}_{(2)}(x) + \text{Li}_{(2, 3)}(x) - \text{Li}_{(2, 3, 4)}(x) + x)$$

$$\text{Li}_{(2, 4, 3, \infty, 2, 3)}(x) = 0$$

$$\text{Li}_{(2, 4, 3, \infty, \infty)}(x) = 0$$

$$\text{Le}_{(\infty, 2)}(x) = x$$

$$\text{Le}_{(2, 3, 4, \infty)}(x) = \text{Le}_{(2, 3, 4)}(x)$$

$$\text{Le}_{(2, 4, 3, \infty, 2, 3)}(x) = \text{Le}_{(2, 4, 3)}(x)$$

$$\text{Le}_{(2, 4, 3, \infty, \infty)}(x) = \text{Le}_{(2, 4, 3)}(x)$$

## 2 $\text{Li}_{\underbrace{(0, \dots, 0)}_n}(x)$ és $\text{Le}_{\underbrace{(0, \dots, 0)}_n}(x)$

$$\text{Li}_{\underbrace{(0, \dots, 0)}_n}(x) = \text{Li}_0^n(x) = \frac{x^n}{(1-x)^n}$$

$$\text{Le}_{\underbrace{(0, \dots, 0)}_n}(x) = (1 + \text{Li}_0(x))^n \text{Li}_0(x) = \frac{x}{(1-x)^n}$$

Ezekből tükrözéssel az alábbiakat kapjuk:

$$\text{Li}_{\underbrace{(0, \dots, 0)}_n}(1-x) = \text{Li}_0^n(1-x) = \frac{(1-x)^n}{x^n}$$

$$\text{Le}_{\underbrace{(0, \dots, 0)}_n}(1-x) = (1 + \text{Li}_0(1-x))^n \text{Li}_0(1-x) = \frac{1-x}{x^n}$$

A második egyenlőségekből nagyon fontos reciprok hatvány előállításunk

$$\frac{1}{x^n} = \frac{\text{Le}_{\underbrace{(0, \dots, 0)}_n}(1-x)}{1-x} \quad \text{és} \quad \frac{1}{(1-x)^n} = \frac{\text{Le}_{\underbrace{(0, \dots, 0)}_n}(x)}{x}$$

### 3 $\text{Li}_{(\underbrace{0, \dots, 0}_n, s_1, s_2, \dots, s_r)}(x)$ és $\text{Le}_{(\underbrace{0, \dots, 0}_n, s_1, s_2, \dots, s_r)}(x)$

$$\begin{aligned}\text{Li}_{(\underbrace{0, \dots, 0}_n, s_1, s_2, \dots, s_r)}(x) &= \text{Li}_0^n(x) \text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(x) = \frac{x^n}{(1-x)^n} \text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(x) = \frac{\text{Li}_\infty^n(x) \text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(x)}{(1-x)^n} \\ \text{Le}_{(\underbrace{0, \dots, 0}_n, s_1, s_2, \dots, s_r)}(x) &= \frac{\text{Li}_{(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_n)}(x) \text{Le}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(x)}{x} = \frac{\text{Le}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(x)}{(1-x)^n} = \frac{\text{Li}_0^n(x) \text{Le}_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}(x)}{x^n}\end{aligned}$$

Az  $n = 1$ ;  $r = 0$  speciális esetben az első azonosság az  $\text{Li}_0(x) = \frac{x}{1-x} \text{Li}_{()}(x) = \frac{x}{1-x} \cdot 1 = \frac{x}{1-x}$  egyenletbe megy át. Ezen szabályokat leggyakrabban a deriváló sorban használjuk  $n = 1$  speciális esettel az alábbi szituációkban.

$$(a) \quad (\text{Li}_{(1, s_2, \dots, s_r)}(x))' = \text{Li}_{(0, s_2, \dots, s_r)}(x) \frac{1}{x} = \text{Li}_{(s_2, \dots, s_r)}(x) \text{Li}_0(x) \frac{1}{x} = \text{Li}_{(s_2, \dots, s_r)}(x) \frac{\cancel{x}}{1-x} \frac{1}{\cancel{x}} = \frac{\text{Li}_{(s_2, \dots, s_r)}(x)}{1-x}$$

$$\begin{aligned}(b) \quad (\text{Li}_{(1, s_2, \dots, s_r)}(1-x))' &= \text{Li}_{(0, s_2, \dots, s_r)}(1-x) \frac{-1}{1-x} = \text{Li}_{(s_2, \dots, s_r)}(1-x) \text{Li}_0(1-x) \frac{-1}{1-x} = \\ &= -\text{Li}_{(s_2, \dots, s_r)}(1-x) \frac{\cancel{1-x}}{x} \frac{1}{\cancel{1-x}} = -\frac{\text{Li}_{(s_2, \dots, s_r)}(1-x)}{x}\end{aligned}$$

Láthatóan (a) az  $\int \frac{\text{Li}_{(s_2, \dots, s_r)}(x)}{1-x} dx = \text{Li}_{(1, s_2, \dots, s_r)}(x)$  azonosságnak, míg (b) az  $\int \frac{\text{Li}_{(s_2, \dots, s_r)}(1-x)}{x} dx = -\text{Li}_{(1, s_2, \dots, s_r)}(1-x)$  azonosságnak felel meg.

Hasonlóan,

$$(a') \quad (\text{Le}_{(1, s_2, \dots, s_r)}(x))' = \text{Le}_{(0, s_2, \dots, s_r)}(x) \frac{1}{x} = \frac{\text{Le}_{(s_2, \dots, s_r)}(x)}{(1-x)x}$$

$$(b') \quad (\text{Le}_{(1, s_2, \dots, s_r)}(1-x))' = \text{Le}_{(0, s_2, \dots, s_r)}(1-x) \frac{-1}{1-x} = -\frac{\text{Le}_{(s_2, \dots, s_r)}(1-x)}{x(1-x)}$$

Ekkor (a') az  $\int \frac{\text{Le}_{(s_2, \dots, s_r)}(x)}{(1-x)x} dx = \text{Le}_{(1, s_2, \dots, s_r)}(x)$  azonosságnak, míg (b') az  $\int \frac{\text{Le}_{(s_2, \dots, s_r)}(1-x)}{x(1-x)} dx = -\text{Le}_{(1, s_2, \dots, s_r)}(1-x)$  azonosságnak felel meg.

### 4 $\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r, \underbrace{0, \dots, 0}_n)}(x)$ és $\text{Le}_{(s_1, s_2, \dots, s_r, \underbrace{0, \dots, 0}_n)}(x)$

$$\begin{aligned}\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r, \underbrace{0, \dots, 0}_n)}(x) &= \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \left[ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right] \text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_{r-1}, s_r+1-k)}(x) \\ \text{Le}_{(s_1, s_2, \dots, s_r, \underbrace{0, \dots, 0}_n)}(x) &= \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=0}^n \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \text{Le}_{(s_1, s_2, \dots, s_{r-1}, s_r-k)}(x)\end{aligned}$$

## 5 $\text{Li}_{\underbrace{(1, \dots, 1)}_n}(x)$ és $\text{Le}_{\underbrace{(1, \dots, 1)}_n}(x)$

$$\text{Li}_{\underbrace{(1, \dots, 1)}_n}(x) = \frac{\text{Li}_1^n(x)}{n!} = \frac{(-1)^n}{n!} \ln^n(1-x)$$

$$\text{Li}_{\underbrace{(1, \dots, 1)}_n}(1-x) = \frac{\text{Li}_1^n(x)}{n!} = \frac{(-1)^n}{n!} \ln^n(x)$$

$$\text{Le}_{\underbrace{(1, \dots, 1)}_n}(x) = -\text{Le}_n\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\text{Li}_n\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$\text{Le}_{\underbrace{(1, \dots, 1)}_n}(1-x) = -\text{Le}_n\left(\frac{x-1}{x}\right) = -\text{Li}_n\left(\frac{x-1}{x}\right)$$