# 1 Általánosított polilogaritmus függvények $\infty$-el az az indexben

$\mathrm{Li}_{(\infty)}(x) = x$

$$\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\dots,s_r,\infty)}(x) = (-1)^r \left( \sum_{j=1}^{r} (-1)^j \cdot \mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\dots,s_j)}(x) + x \right)$$

$\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\dots,s_r,\infty,w_1,\dots)}(x) = 0$

(Ha $\infty$-t csak egyetlen szám (lehet végtelen) is követi, akkor zérus, egyébként a $\infty$ előtti kezdőszeletek előjeles összege.)

$\mathrm{Le}_{(\infty)}(x) = x$

$\mathrm{Le}_{(s_1,s_2,\dots,s_r,\infty)}(x) = \mathrm{Le}_{(s_1,s_2,\dots,s_r)}(x)\ \ (r > 0)$

$\mathrm{Le}_{(s_1,s_2,\dots,s_r,\infty,w_1,\dots)}(x) = \mathrm{Le}_{(s_1,s_2,\dots,s_r)}(x)$

(Mindig az első $\infty$ előtti rész.)

Példák:

$\mathrm{Li}_{(\infty,2)}(x) = 0$

$\mathrm{Li}_{(2,3,4,\infty)}(x) = -\left(-\mathrm{Li}_{(2)}(x) + \mathrm{Li}_{(2,3)}(x) - \mathrm{Li}_{(2,3,4)}(x) + x\right)$

$\mathrm{Li}_{(2,4,3,\infty,2,3)}(x) = 0$

$\mathrm{Li}_{(2,4,3,\infty,\infty)}(x) = 0$

$\mathrm{Le}_{(\infty,2)}(x) = x$

$\mathrm{Le}_{(2,3,4,\infty)}(x) = \mathrm{Le}_{(2,3,4)}(x)$

$\mathrm{Le}_{(2,4,3,\infty,2,3)}(x) = \mathrm{Le}_{(2,4,3)}(x)$

$\mathrm{Le}_{(2,4,3,\infty,\infty)}(x) = \mathrm{Le}_{(2,4,3)}(x)$

# 2 $\mathrm{Li}_{(\underbrace{0,\dots,0}_{n})}(x)$ és $\mathrm{Le}_{(\underbrace{0,\dots,0}_{n})}(x)$

$$\mathrm{Li}_{(\underbrace{0,\dots,0}_{n})}(x) = \mathrm{Li}_0^n(x) = \frac{x^n}{(1-x)^n}$$

$$\mathrm{Le}_{(\underbrace{0,\dots,0}_{n})}(x) = \left(1 + \mathrm{Li}_0(x)\right)^n \mathrm{Li}_0(x) = \frac{x}{(1-x)^n}$$

Ezekből tükrözéssel az alábbiakat kapjuk:

$$\mathrm{Li}_{(\underbrace{0,\dots,0}_{n})}(1-x) = \mathrm{Li}_0^n(1-x) = \frac{(1-x)^n}{x^n}$$

$$\mathrm{Le}_{(\underbrace{0,\dots,0}_{n})}(1-x) = \left(1 + \mathrm{Li}_0(1-x)\right)^n \mathrm{Li}_0(1-x) = \frac{1-x}{x^n}$$

A második egyenlőségekből nagyon fontos reciprok hatvány előállítást kapunk

$$\frac{1}{x^n} = \frac{\mathrm{Le}_{(\underbrace{0,\dots,0}_{n})}(1-x)}{1-x} \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{(1-x)^n} = \frac{\mathrm{Le}_{(\underbrace{0,\dots,0}_{n})}(x)}{x}$$

## 3 $\mathbf{Li}_{(\underbrace{0,\ldots,0}_{n},s_1,s_2,\ldots,s_r)}(x)$ és $\mathbf{Le}_{(\underbrace{0,\ldots,0}_{n},s_1,s_2,\ldots,s_r)}(x)$

$$\mathrm{Li}_{(\underbrace{0,\ldots 0}_{n},s_1,s_2,\ldots,s_r)}(x)=\mathrm{Li}_0^n(x)\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(x)=\frac{x^n}{(1-x)^n}\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(x)=\frac{\mathrm{Li}_\infty^n(x)\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(x)}{(1-x)^n}$$

$$\mathrm{Le}_{(\underbrace{0,\ldots,0}_{n},s_1,s_2,\ldots,s_r)}(x)=\frac{\mathrm{Li}_{(\underbrace{0,0,\ldots 0}_{n})}(x)\mathrm{Le}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(x)}{x}=\frac{\mathrm{Le}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(x)}{(1-x)^n}=\frac{\mathrm{Li}_0^n(x)\mathrm{Le}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(x)}{x^n}$$

Az $n=1$; $r=0$ speciális esetben az első azonosság az $\mathrm{Li}_0(x)=\frac{x}{1-x}\mathrm{Li}_{()}(x)=\frac{x}{1-x}\cdot 1=\frac{x}{1-x}$ egyenletbe megy át.
Ezen szabályokat leggyakrabban a deriváló sorban használjuk $n=1$ speciális esettel az alábbi szituációkban.

$$\text{(a)}\quad \left(\mathrm{Li}_{(1,s_2,\ldots,s_r)}(x)\right)'=\mathrm{Li}_{(0,s_2,\ldots,s_r)}(x)\frac{1}{x}=\mathrm{Li}_{(s_2,\ldots,s_r)}(x)\mathrm{Li}_0(x)\frac{1}{x}=\mathrm{Li}_{(s_2,\ldots,s_r)}(x)\frac{\cancel{x}}{1-x}\frac{1}{\cancel{x}}=\frac{\mathrm{Li}_{(s_2,\ldots,s_r)}(x)}{1-x}$$

$$\text{(b)}\quad \left(\mathrm{Li}_{(1,s_2,\ldots,s_r)}(1-x)\right)'=\mathrm{Li}_{(0,s_2,\ldots,s_r)}(1-x)\frac{-1}{1-x}=\mathrm{Li}_{(s_2,\ldots,s_r)}(1-x)\mathrm{Li}_0(1-x)\frac{-1}{1-x}=$$
$$=-\mathrm{Li}_{(s_2,\ldots,s_r)}(1-x)\frac{\cancel{1-x}}{x}\frac{1}{\cancel{1-x}}=-\frac{\mathrm{Li}_{(s_2,\ldots,s_r)}(1-x)}{x}$$

Láthatóan (a) az $\int\frac{\mathrm{Li}_{(s_2,\ldots,s_r)}(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{Li}_{(1,s_2,\ldots,s_r)}(x)$ azonosságnak, míg (b) az $\int\frac{\mathrm{Li}_{(s_2,\ldots,s_r)}(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x=-\mathrm{Li}_{(1,s_2,\ldots,s_r)}(1-x)$ azonosságnak felel meg.
Hasonlóan,

$$\text{(a')}\quad \left(\mathrm{Le}_{(1,s_2,\ldots,s_r)}(x)\right)'=\mathrm{Le}_{(0,s_2,\ldots,s_r)}(x)\frac{1}{x}=\frac{\mathrm{Le}_{(s_2,\ldots,s_r)}(x)}{(1-x)\,x}$$

$$\text{(b')}\quad \left(\mathrm{Le}_{(1,s_2,\ldots,s_r)}(1-x)\right)'=\mathrm{Le}_{(0,s_2,\ldots,s_r)}(1-x)\frac{-1}{1-x}=-\frac{\mathrm{Le}_{(s_2,\ldots,s_r)}(1-x)}{x(1-x)}$$

Ekkor(a') az $\int\frac{\mathrm{Le}_{(s_2,\ldots,s_r)}(x)}{(1-x)\,x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{Le}_{(1,s_2,\ldots,s_r)}(x)$ azonosságnak, míg (b') az $\int\frac{\mathrm{Le}_{(s_2,\ldots,s_r)}(1-x)}{x\,(1-x)}\,\mathrm{d}x=-\mathrm{Le}_{(1,s_2,\ldots,s_r)}(1-x)$ azonosságnak felel meg.

## 4 $\mathbf{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r,\underbrace{0,\ldots,0}_{n})}(x)$ és $\mathbf{Le}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r,\underbrace{0,\ldots,0}_{n})}(x)$

$$\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r,\underbrace{0,\ldots,0}_{n})}(x)=\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\cdot\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\left[\begin{array}{c}n+1\\k\end{array}\right]\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_{r-1},s_r+1-k)}(x)$$

$$\mathrm{Le}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r,\underbrace{0,\ldots,0}_{n})}(x)=\frac{1}{n!}\cdot\sum_{k=0}^{n}\left[\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right]\mathrm{Le}_{(s_1,s_2,\ldots,s_{r-1},s_r-k)}(x)$$

## 5 $\mathbf{Li}_{(\underbrace{1,\ldots,1}_{n})}(x)$ és $\mathbf{Le}_{(\underbrace{1,\ldots,1}_{n})}(x)$

$$\mathrm{Li}_{(\underbrace{1,\ldots,1}_{n})}(x) = \frac{\mathrm{Li}_1^n(x)}{n!} = \frac{(-1)^n}{n!}\ln^n(1-x)$$

$$\mathrm{Li}_{(\underbrace{1,\ldots,1}_{n})}(1-x) = \frac{\mathrm{Li}_1^n(x)}{n!} = \frac{(-1)^n}{n!}\ln^n(x)$$

$$\mathrm{Le}_{(\underbrace{1,\ldots,1}_{n})}(x) = -\mathrm{Le}_n\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\mathrm{Li}_n\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$\mathrm{Le}_{(\underbrace{1,\ldots,1}_{n})}(1-x) = -\mathrm{Le}_n\left(\frac{x-1}{x}\right) = -\mathrm{Li}_n\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

## 6 $\left(\int \frac{1}{x}\right)^k \left[\mathbf{Li}_{(\underbrace{1,\ldots,1}_{p})}(x)\cdot\mathbf{Li}_{(\underbrace{0,\ldots,0}_{n})}(x)\right]$

Az $\int \frac{\ln^p(x)\cdot\ln^q(1-x)}{(1-x)^n}\,\mathrm{d}x$ integrál kiszámításához elegendő az $\left(\int \frac{1}{x}\right)^k \left[\mathrm{Li}_{(\underbrace{1,\ldots,1}_{q})}(x)\cdot\mathrm{Li}_{(\underbrace{0,\ldots,0}_{n})}(x)\right]$ integráloperátor hatását tetszőleges $k$, $p$ és $n$ paraméterekkel megadni. Ezt így láthatjuk be:

Mivel $\int \frac{\ln^p(x)\cdot\ln^q(1-x)}{(1-x)^n}\,\mathrm{d}x = \int (-1)^p\,p!\,\mathrm{Li}_{1^p}(1-x)\cdot(-1)^q\,q!\,\mathrm{Li}_{1^q}(x)\,\frac{\mathrm{Le}_{0^n}(x)}{x}\,\mathrm{d}x =$

$= (-1)^{p+q}p!\,q!\int \frac{\mathrm{Li}_{1^p}(1-x)\cdot\mathrm{Li}_{1^q}(x)\cdot\mathrm{Le}_{0^n}(x)}{x}\,\mathrm{d}x = (-1)^{p+q}p!\,q!\int \frac{\mathrm{Li}_{1^p}(1-x)\cdot\mathrm{Li}_{1^q}(x)\cdot\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}\mathrm{Li}_{0^{m+1}}(x)}{x}\,\mathrm{d}x =$

$=(-1)^{p+q}p!\,q!\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}\int \frac{\mathrm{Li}_{1^p}(1-x)\cdot\mathrm{Li}_{1^q}(x)\cdot\mathrm{Li}_{0^{m+1}}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ , ezért elegendő $\int \frac{\mathrm{Li}_{1^p}(1-x)\cdot\mathrm{Li}_{1^q}(x)\cdot\mathrm{Li}_{0^{m+1}}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ integrálokat megadni.

| $\mathrm{Li}_{1^p}(1-x)$ | $-\mathrm{Li}_{1^{p-1}}(1-x)\frac{1}{x}$ | $-\mathrm{Li}_{1^{p-1}}(1-x)$ | $\mathrm{Li}_{1^{p-2}}(1-x)\frac{1}{x}$ | $\ldots$ | $\ldots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\mathrm{Li}_{1^q}(x)\cdot\mathrm{Li}_{0^{m+1}}(x)}{x}$ | $\left(\int\frac{1}{x}\right)[\mathrm{Li}_{1^q}(x)\cdot\mathrm{Li}_{0^{m+1}}(x)]$ | $\frac{1}{x}\left(\int\frac{1}{x}\right)[\mathrm{Li}_{1^q}(x)\cdot\mathrm{Li}_{0^{m+1}}(x)]$ | $\left(\int\frac{1}{x}\right)^2[\mathrm{Li}_{1^q}(x)\cdot\mathrm{Li}_{0^{m+1}}(x)]$ | $\ldots$ | $\ldots$ |

$$\int \frac{\mathrm{Li}_{1^p}(x)\cdot\mathrm{Li}_{1^q}(1-x)\cdot\mathrm{Li}_{0^{m+1}}(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{p}\mathrm{Li}_{1^{p-k}}(1-x)\cdot\left(\int\frac{1}{x}\right)^{k+1}[\mathrm{Li}_{1^q}(x)\cdot\mathrm{Li}_{0^{m+1}}(x)]$$

$$\int \frac{\ln^p(x) \cdot \ln^q(1-x)}{(1-x)^n}\,\mathrm{d}x =$$

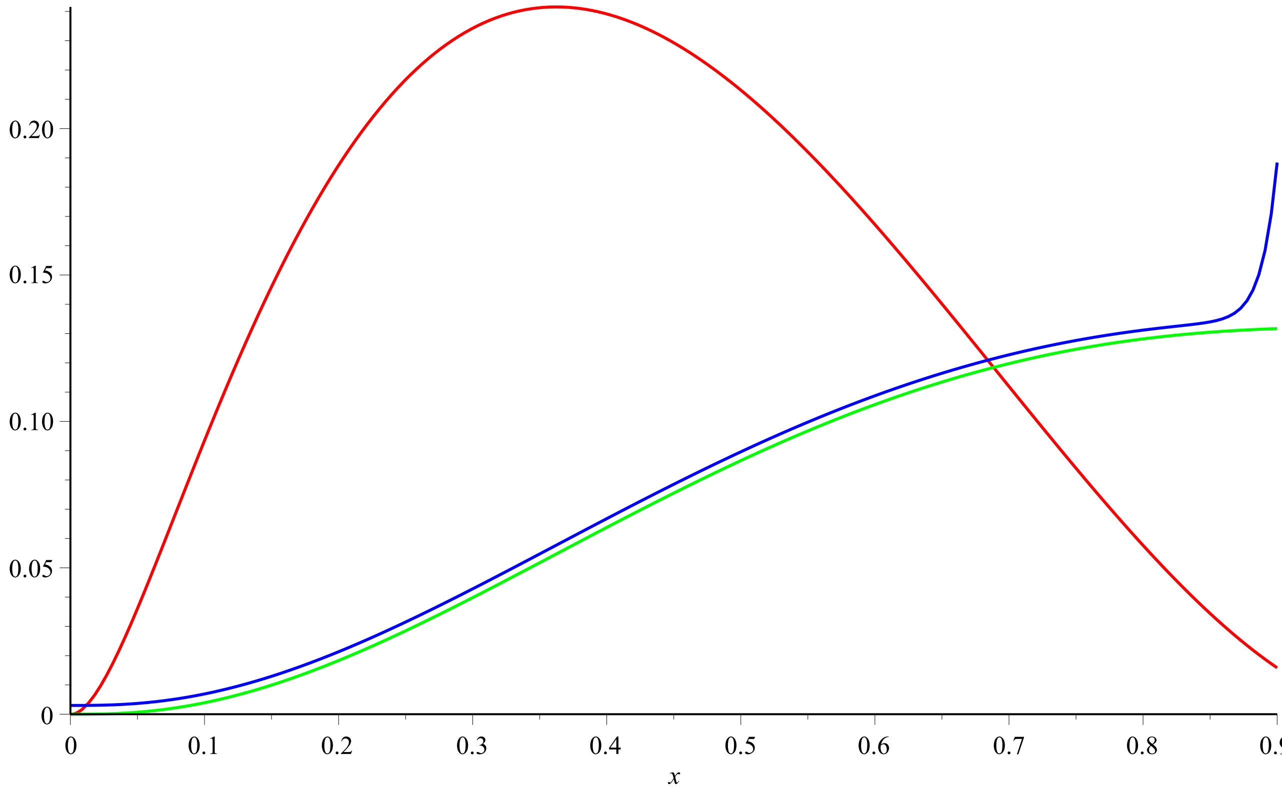
$$= (-1)^p\, p!\, q! \sum_{m=1}^{n} \frac{\binom{n-1}{m-1}}{(m-1)!} \sum_{k=0}^{m} s(m,k) \sum_{t=0}^{p} \sum_{s=0}^{q} (-1)^t \frac{\ln^t(x) \ln^s(1-x)}{t!\, s!} \sum_{\substack{C_1+\dots+C_{q+1-s}=p+q+1-s-t \\ 1 \le C_1,\dots,C_{q+1-s}}} \mathrm{Li}_{(C_1,\dots,C_{q+1-s}+1-k)}(x)$$

Az $\int \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrálja a képlet szerint az alábbi:

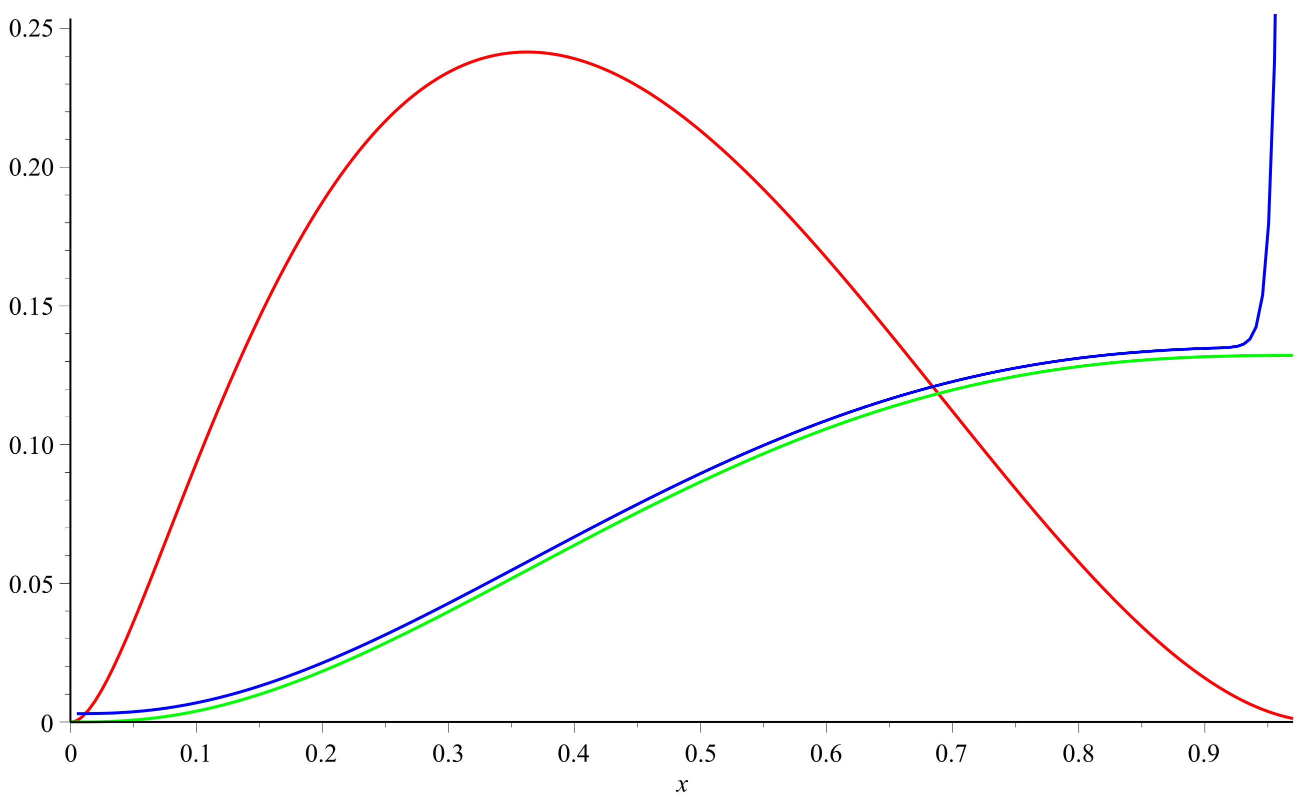
-30*ln(x)^4*ln(1-x)*(L[[1, 1, 1]](x)+L[[1, 2, 0]](x)+L[[2, 1, 0]](x))-15*ln(x)^4*ln(1-x)^2*(L[[1, 1]](x)+L[[2, 0]](x))-5*ln(x)^4*ln(1-x)^3*L[[1]](x)+6*ln(x)^5*ln(1-x)*L[[1, 1, 0]](x)+3*ln(x)^5*ln(1-x)^2*L[[1, 0]](x)+ln(x)^5*ln(1-x)^3*L[[0]](x)-720*ln(1-x)*(L[[1, 1, 5]](x)+L[[1, 2, 4]](x)+L[[1, 3, 3]](x)+L[[1, 4, 2]](x)+L[[1, 5, 1]](x)+L[[1, 6, 0]](x)+L[[2, 1, 4]](x)+L[[2, 2, 3]](x)+L[[2, 3, 2]](x)+L[[2, 4, 1]](x)+L[[2, 5, 0]](x)+L[[3, 1, 3]](x)+L[[3, 2, 2]](x)+L[[3, 3, 1]](x)+L[[3, 4, 0]](x)+L[[4, 1, 2]](x)+L[[4, 2, 1]](x)+L[[4, 3, 0]](x)+L[[5, 1, 1]](x)+L[[5, 2, 0]](x)+L[[6, 1, 0]](x))+720*ln(x)*ln(1-x)*(L[[1, 1, 4]](x)+L[[1, 2, 3]](x)+L[[1, 3, 2]](x)+L[[1, 4, 1]](x)+L[[1, 5, 0]](x)+L[[2, 1, 3]](x)+L[[2, 2, 2]](x)+L[[2, 3, 1]](x)+L[[2, 4, 0]](x)+L[[3, 1, 2]](x)+L[[3, 2, 1]](x)+L[[3, 3, 0]](x)+L[[4, 1, 1]](x)+L[[4, 2, 0]](x)+L[[5, 1, 0]](x))+360*ln(x)*ln(1-x)^2*(L[[1, 4]](x)+L[[2, 3]](x)+L[[3, 2]](x)+L[[4, 1]](x)+L[[5, 0]](x))+120*ln(x)*ln(1-x)^3*L[[4]](x)-360*ln(x)^2*ln(1-x)*(L[[1, 1, 3]](x)+L[[1, 2, 2]](x)+L[[1, 3, 1]](x)+L[[1, 4, 0]](x)+L[[2, 1, 2]](x)+L[[2, 2, 1]](x)+L[[2, 3, 0]](x)+L[[3, 1, 1]](x)+L[[3, 2, 0]](x)+L[[4, 1, 0]](x))-180*ln(x)^2*ln(1-x)^2*(L[[1, 3]](x)+L[[2, 2]](x)+L[[3, 1]](x)+L[[4, 0]](x))-60*ln(x)^2*ln(1-x)^3*L[[3]](x)+120*ln(x)^3*ln(1-x)*(L[[1, 1, 2]](x)+L[[1, 2, 1]](x)+L[[1, 3, 0]](x)+L[[2, 1, 1]](x)+L[[2, 2, 0]](x)+L[[3, 1, 0]](x))+60*ln(x)^3*ln(1-x)^2*(L[[1, 2]](x)+L[[2, 1]](x)+L[[3, 0]](x))+20*ln(x)^3*ln(1-x)^3*L[[2]](x)-720*L[[1, 1, 5, 1]](x)-720*L[[1, 2, 4, 1]](x)-720*L[[1, 3, 3, 1]](x)-720*L[[1, 4, 2, 1]](x)-720*L[[1, 5, 1, 1]](x)-720*L[[2, 1, 4, 1]](x)-720*L[[2, 2, 3, 1]](x)-720*L[[2, 3, 2, 1]](x)-720*L[[2, 4, 1, 1]](x)-720*L[[3, 1, 3, 1]](x)-720*L[[3, 2, 2, 1]](x)-720*L[[3, 3, 1, 1]](x)-720*L[[4, 1, 2, 1]](x)-720*L[[4, 2, 1, 1]](x)-720*L[[5, 1, 1, 1]](x)-720*L[[1, 1, 1, 5]](x)-720*L[[1, 1, 2, 4]](x)-720*L[[1, 1, 3, 3]](x)-720*L[[1, 1, 4, 2]](x)-720*L[[1, 2, 1, 4]](x)-720*L[[1, 2, 2, 3]](x)-720*L[[1, 2, 3, 2]](x)-720*L[[1, 3, 1, 3]](x)-720*L[[1, 3, 2, 2]](x)-720*L[[1, 4, 1, 2]](x)-720*L[[2, 1, 1, 4]](x)-720*L[[2, 1, 2, 3]](x)-720*L[[2, 1, 3, 2]](x)-720*L[[2, 2, 1, 3]](x)-720*L[[2, 2, 2, 2]](x)-720*L[[2, 3, 1, 2]](x)-720*L[[3, 1, 1, 3]](x)-720*L[[3, 1, 2, 2]](x)-720*L[[3, 2, 1, 2]](x)-720*L[[4, 1, 1, 2]](x)-720*L[[3, 1, 4, 0]](x)-720*L[[3, 2, 3, 0]](x)-720*L[[3, 3, 2, 0]](x)-720*L[[3, 4, 1, 0]](x)-720*L[[4, 1, 3, 0]](x)-720*L[[4, 2, 2, 0]](x)-720*L[[4, 3, 1, 0]](x)-720*L[[5, 1, 2, 0]](x)-720*L[[5, 2, 1, 0]](x)-720*L[[6, 1, 1, 0]](x)-720*L[[1, 1, 6, 0]](x)-720*L[[1, 2, 5, 0]](x)-720*L[[1, 3, 4, 0]](x)-720*L[[1, 4, 3, 0]](x)-720*L[[1, 5, 2, 0]](x)-720*L[[1, 6, 1, 0]](x)-720*L[[2, 1, 5, 0]](x)-720*L[[2, 2, 4, 0]](x)-720*L[[2, 3, 3, 0]](x)-720*L[[2, 4, 2, 0]](x)-720*L[[2, 5, 1, 0]](x)-360*ln(1-x)^2*(L[[1, 5]](x)+L[[2, 4]](x)+L[[3, 3]](x)+L[[4, 2]](x)+L[[5, 1]](x)+L[[6, 0]](x))-120*ln(1-x)^3*L[[5]](x)+720*ln(x)*(L[[1, 1, 4, 1]](x)+L[[1, 2, 3, 1]](x)+L[[1, 3, 2, 1]](x)+L[[1, 4, 1, 1]](x)+L[[2, 1, 3, 1]](x)+L[[2, 2, 2, 1]](x)+L[[2, 3, 1, 1]](x)+L[[3, 1, 2, 1]](x)+L[[3, 2, 1, 1]](x)+L[[4, 1, 1, 1]](x)+L[[1, 1, 1, 4]](x)+L[[1, 1, 2, 3]](x)+L[[1, 1, 3, 2]](x)+L[[1, 2, 1, 3]](x)+L[[1, 2, 2, 2]](x)+L[[1, 3, 1, 2]](x)+L[[2, 1, 1, 3]](x)+L[[2, 1, 2, 2]](x)+L[[2, 2, 1, 2]](x)+L[[3, 1, 1, 2]](x)+L[[1, 2, 4, 0]](x)+L[[1, 3, 3, 0]](x)+L[[1, 4, 2, 0]](x)+L[[1, 5, 1, 0]](x)+L[[2, 1, 4, 0]](x)+L[[2, 2, 3, 0]](x)+L[[2, 3, 2, 0]](x)+L[[2, 4, 1, 0]](x)+L[[3, 1, 3, 0]](x)+L[[3, 2, 2, 0]](x)+L[[3, 3, 1, 0]](x)+L[[4, 1, 2, 0]](x)+L[[4, 2, 1, 0]](x)+L[[5, 1, 1, 0]](x)+L[[1, 1, 5, 0]](x))-360*ln(x)^2*(L[[1, 1, 1, 3]](x)+L[[1, 1, 2, 2]](x)+L[[1, 1, 3, 1]](x)+L[[1, 1, 4, 0]](x)+L[[1, 2, 1, 2]](x)+L[[1, 2, 2, 1]](x)+L[[1, 2, 3, 0]](x)+L[[1, 3, 1, 1]](x)+L[[1, 3, 2, 0]](x)+L[[1, 4, 1, 0]](x)+L[[2, 1, 1, 2]](x)+L[[2, 1, 2, 1]](x)+L[[2, 1, 3, 0]](x)+L[[2, 2, 1, 1]](x)+L[[2, 2, 2, 0]](x)+L[[2, 3, 1, 0]](x)+L[[3, 1, 1, 1]](x)+L[[3, 1, 2, 0]](x)+L[[3, 2, 1, 0]](x)+L[[4, 1, 1, 0]](x))+120*ln(x)^3*(L[[1, 1, 1, 2]](x)+L[[1, 1, 2, 1]](x)+L[[1, 1, 3, 0]](x)+L[[1, 2, 1, 1]](x)+L[[1, 2, 2, 0]](x)+L[[1, 3, 1, 0]](x)+L[[2, 1, 1, 1]](x)+L[[2, 1, 2, 0]](x)+L[[2, 2, 1, 0]](x)+L[[3, 1, 1, 0]](x))-30*ln(x)^4*(L[[1, 1, 1, 1]](x)+L[[1, 1, 2, 0]](x)+L[[1, 2, 1, 0]](x)+L[[2, 1, 1, 0]](x))+6*ln(x)^5*L[[1, 1, 1, 0]](x)

Az alábbi ábrán a [0, 0.9] intervallumon ábrázoltuk

pirossal az $f(x) = \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^2}$; zölddel az $\int \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x$ valódi értékét; kékkel pedig az $\int \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x$ integrálnak a fenti képlettel számított értékét **0.003-mal kicsit feltolva**. Láthatóan 0.85-ig a valódi határozatlan integrál, illetve a képlettel számított integrál értéke teljesen megegyezik. Az 1-hez közeledve az eltérést az okozza, hogy az $\mathrm{Li}_{(s_1;\dots s_n)}(x)$ függvényeket a végtelen helyett csak 90-ig összegezve tudjuk reprezentálni.




Ha az $\mathrm{Li}_{(s_1;\ldots s_n)}(x)$ függvényeket 90 helyett 190-ig összegezve reprezentáljuk, akkor már 0.93-ig együtthalad a két függvény. Ehhez a számításhoz viszont már 1GB memória szükséges, maga a számítás pedig perceket vesz igénybe.




A képletben a $t$ és $s$ indexek teljesen függetlenek az $m$ és $k$ indexektől, ezért az összegzés sorrendje felcserélhető. Így az alábbiakat nyerjük:

$$\int \frac{\ln^p(x)\cdot\ln^q(1-x)}{(1-x)^n}\,\mathrm{d}x =$$

$$= (-1)^p\,p!\,q!\sum_{t=0}^{p}\sum_{s=0}^{q}\frac{\ln^t(x)\ln^s(1-x)}{t!\,s!}(-1)^t\sum_{m=1}^{n}\frac{\binom{n-1}{m-1}}{(m-1)!}\sum_{k=0}^{m}s(m,k)\sum_{\substack{C_1+\cdots+C_{q+1-s}=p+q+1-s-t\\1\le C_1,\ldots,C_{q+1-s}}}^{n}\mathrm{Li}_{(C_1,\ldots,C_{q+1-s}+1-k)}(x)$$

Az $\int \frac{\ln^p(x)\cdot\ln^q(1-x)}{(1-x)^n}\,\mathrm{d}x$ integrálban $\ln^t(x)\ln^s(1-x)$ együtthatója:

$$\Psi_{p,q,n}(t,s;x) := \frac{p!\,q!}{t!\,s!}(-1)^{p+t}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=0}^{m}\binom{n-1}{m-1}\frac{s(m,k)}{(m-1)!}\sum_{\substack{C_1+\cdots+C_{q+1-s}=p+q+1-s-t\\1\le C_1,\ldots,C_{q+1-s}}}^{n}\mathrm{Li}_{(C_1,\ldots,C_{q+1-s}+1-k)}(x)$$

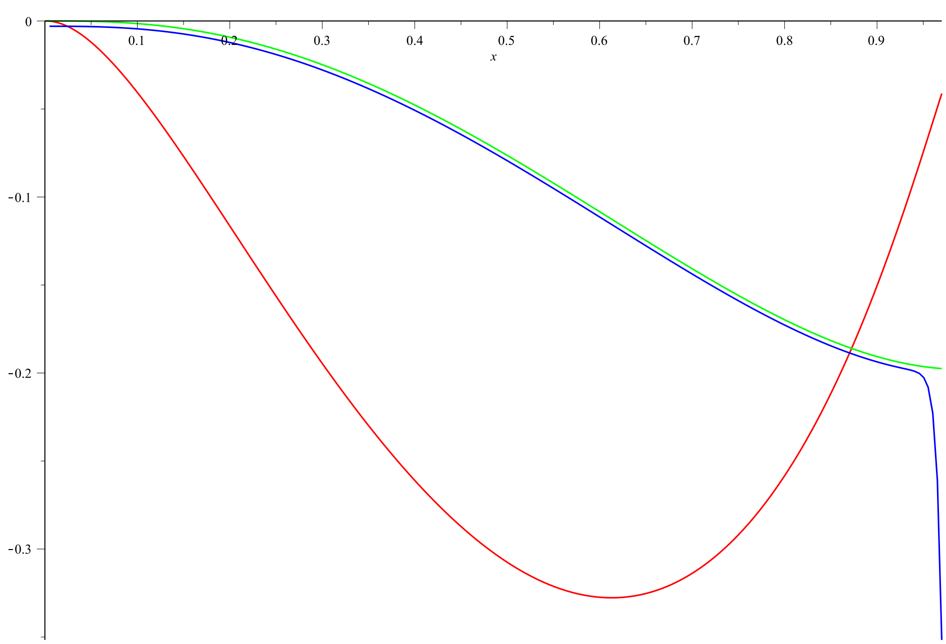
**Megjegyzés**: $\Psi_{p,q,n}(t,s;x)$ képletében a közismert $\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=0}^{m}\binom{n-1}{m-1}\frac{s(m,k)}{(m-1)!}=1$ összeget változik meg a

$$\sum_{\substack{C_1+\cdots+C_{q+1-s}=p+q+1-s-t\\1\le C_1,\ldots,C_{q+1-s}}}^{n}\mathrm{Li}_{(C_1,\ldots,C_{q+1-s}+1-k)}(x)$$

szorzótényező megjelenésével.

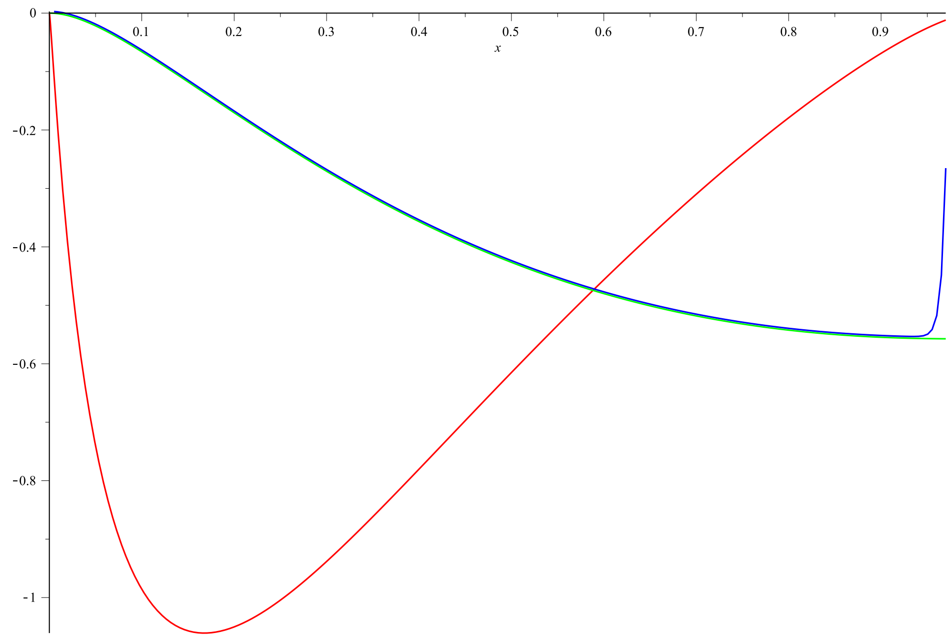
Az alábbi ábrán a $[0,\,0.97]$ intervallumon ábrázoltuk

pirossal az $f(x)=\frac{\ln^4(x)\cdot\ln^3(1-x)}{(1-x)^2}$; zölddel az $\int \frac{\ln^4(x)\cdot\ln^3(1-x)}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x$ valódi értékét; kékkel pedig az $\int \frac{\ln^4(x)\cdot\ln^3(1-x)}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x$ integrálnak a fenti képlettel számított értékét **0.003-mal kicsit letolva**.

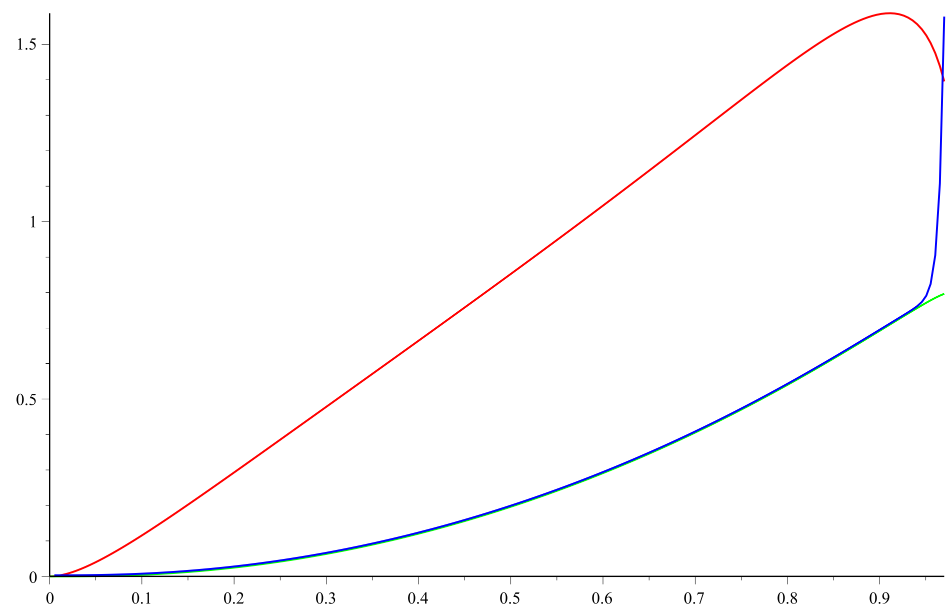



Az alábbi ábrán a $[0,\,0.97]$ intervallumon ábrázoltuk

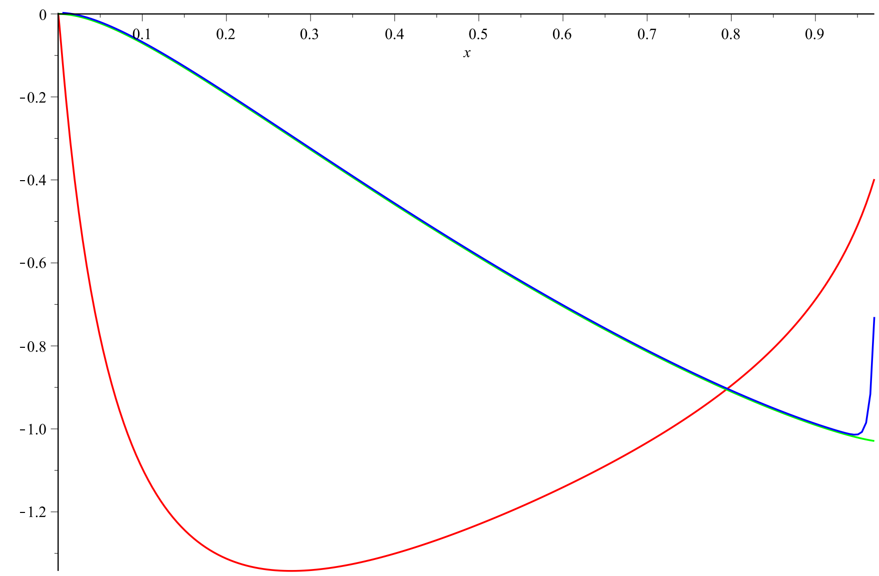
pirossal az $f(x)=\frac{\ln^5(x)\cdot\ln^2(1-x)}{(1-x)^3}$; zölddel az $\int \frac{\ln^5(x)\cdot\ln^2(1-x)}{(1-x)^3}\,\mathrm{d}x$ valódi értékét; kékkel pedig az $\int \frac{\ln^5(x)\cdot\ln^2(1-x)}{(1-x)^3}\,\mathrm{d}x$ integrálnak a fenti képlettel számított értékét **0.003-mal kicsit feltolva**.




Az alábbi ábrán a [0, 0.97] intervallumon ábrázoltuk
pirossal az $f(x) = \dfrac{\ln^5(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^4}$; zölddel az $\displaystyle\int \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^4}\,\mathrm{d}x$ valódi értékét; kékkel pedig az $\displaystyle\int \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^4}\,\mathrm{d}x$ integrálnak a fenti képlettel számított értékét **0.003-mal kicsit feltolva**.




Az alábbi ábrán a [0, 0.97] intervallumon ábrázoltuk
pirossal az $f(x) = \dfrac{\ln^5(x) \cdot \ln^2(1-x)}{(1-x)^4}$; zölddel az $\displaystyle\int \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^2(1-x)}{(1-x)^4}\,\mathrm{d}x$ valódi értékét; kékkel pedig az $\displaystyle\int \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^2(1-x)}{(1-x)^4}\,\mathrm{d}x$ integrálnak a fenti képlettel számított értékét **0.003-mal kicsit feltolva**.


0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.0
-1.2
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
x