

1 Parciális integrálás módszere

Legyen \mathcal{D} egy differenciáloperátor, vagyis egy olyan *lineáris* $\mathcal{D} : f \longrightarrow \mathcal{D}[f]$ függvényoperátor, amelyre tetszőleges f és g függvényekkel teljesül a

$$\mathcal{D}[f \cdot g] = \mathcal{D}[f] \cdot g + f \cdot \mathcal{D}[g] \quad (*)$$

egyenlőség.

Ha a \mathcal{D} differenciáloperátor inverze az \mathcal{I} integráloperátor, akkor \mathcal{I} is egy *lineáris* operátor lesz (hiszen lineáris operátor inverze is lineáris), és definíció szerint

$$\mathcal{I}[\mathcal{D}[f]] = f, \text{ és } \mathcal{D}[\mathcal{I}[f]] = f$$

A parciális integrálás szabálya legegyszerűbben az $f \cdot \mathcal{I}[g]$ szorzattal felírt $(*)$ egyenlet integrálásával nyerhető

$$\mathcal{D}[f \cdot \mathcal{I}[g]] = \mathcal{D}[f] \cdot \mathcal{I}[g] + f \cdot \mathcal{D}[\mathcal{I}[g]] = \mathcal{D}[f] \cdot \mathcal{I}[g] + f \cdot g \quad / \mathcal{I}$$

$$\mathcal{I}[\mathcal{D}[f \cdot \mathcal{I}[g]]] = \mathcal{I}[\mathcal{D}[f] \cdot \mathcal{I}[g] + f \cdot g] \stackrel{\mathcal{I} \text{ lineáritása}}{=} \mathcal{I}[\mathcal{D}[f] \cdot \mathcal{I}[g]] + \mathcal{I}[f \cdot g]$$

$$f \cdot \mathcal{I}[g] = \mathcal{I}[\mathcal{D}[f] \cdot \mathcal{I}[g]] + \mathcal{I}[f \cdot g]$$

$$f \cdot \mathcal{I}[g] - \mathcal{I}[\mathcal{D}[f] \cdot \mathcal{I}[g]] = \mathcal{I}[f \cdot g]$$

A szabály táblázatos formában jegyezhető meg a legjobban:

$$\begin{array}{c|c} f & \mathcal{D}[f] \\ \hline g & \mathcal{I}[g] \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow = \searrow \uparrow \\ + \quad - \end{array} \quad \begin{array}{ccc} f & & \mathcal{D}[f] \\ \uparrow & \searrow & - \uparrow \\ g & + & \mathcal{I}[g] \end{array}$$

$$\mathcal{I}[f \cdot g] = f \cdot \mathcal{I}[g] - \mathcal{I}[\mathcal{D}[f] \cdot \mathcal{I}[g]]$$

A szabály teljesindukcióval általánosítható. Egy kettő hosszú táblázat

$$\begin{array}{c|c|c} f & \mathcal{D}[f] & \mathcal{D}^2[f] \\ \hline g & \mathcal{I}[g] & \mathcal{I}^2[g] \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow = \searrow \searrow \uparrow \\ + \quad - \quad + \end{array} \quad \begin{array}{ccc} f & & \mathcal{D}[f] \\ \uparrow & \searrow & \\ g & + & \mathcal{I}[g] \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & \mathcal{D}^2[f] \\ & \searrow & + \uparrow \\ & - & \mathcal{I}^2[g] \end{array}$$

$$\mathcal{I}[f \cdot g] = f \cdot \mathcal{I}[g] - \mathcal{D}[f] \cdot \mathcal{I}^2[g] + \mathcal{I}[\mathcal{D}^2[f] \cdot \mathcal{I}^2[g]]$$

Egy három hosszú táblázat

$$\begin{array}{c|c|c|c} f & \mathcal{D}[f] & \mathcal{D}^2[f] & \mathcal{D}^3[f] \\ \hline g & \mathcal{I}[g] & \mathcal{I}^2[g] & \mathcal{I}^3[g] \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow = \searrow \searrow \searrow \uparrow \\ + \quad - \quad + \quad - \end{array} \quad \begin{array}{ccc} f & & \mathcal{D}[f] \\ \uparrow & \searrow & \\ g & + & \mathcal{I}[g] \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & \mathcal{D}^2[f] \\ & \searrow & \\ & - & \mathcal{I}^2[g] \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & \mathcal{D}^3[f] \\ & \searrow & - \uparrow \\ & + & \mathcal{I}^3[g] \end{array}$$

$$\mathcal{I}[f \cdot g] = f \cdot \mathcal{I}[g] - \mathcal{D}[f] \cdot \mathcal{I}^2[g] + \mathcal{D}^2[f] \cdot \mathcal{I}^3[g] - \mathcal{I}[\mathcal{D}^3[f] \cdot \mathcal{I}^3[g]]$$

Ha $\mathcal{D}^n[f] = 0$, valamely $n \in \mathbb{N}$ számra, akkor $\mathcal{I}[\mathcal{D}^n[f] \cdot \mathcal{I}^n[g]] = \mathcal{I}[0 \cdot \mathcal{I}^n[g]] = \mathcal{I}[0] = 0$.

f	$\mathcal{D}[f]$	$\mathcal{D}^2[f]$	$\mathcal{D}^3[f]$	\dots	$\mathcal{D}^{n-1}[f]$	$\mathcal{D}^n[f] = 0$	0	0	\dots
g	$\mathcal{J}[g]$	$\mathcal{J}^2[g]$	$\mathcal{J}^3[g]$	\dots	$\mathcal{J}^{n-1}[g]$	$\mathcal{J}^n[g]$			

$$\mathcal{J}[f \cdot g] = f \cdot \mathcal{J}[g] - \mathcal{D}[f] \cdot \mathcal{J}^2[g] + \mathcal{D}^2[f] \cdot \mathcal{J}^3[g] - \dots + (-1)^{n-1} \mathcal{D}^{n-1}[f] \cdot \mathcal{J}^n[g] + \overbrace{(-1)^n \mathcal{J}[\mathcal{D}^n[f] \cdot \mathcal{J}^n[g]]}^{=0}$$

(**A parciális integrálás szabálya**) Legyen \mathcal{D} egy differenciáloperátor, és inverze az \mathcal{J} integráloperátor. Ha $n \in \mathbb{N}$ a legkisebb természetes szám, amelyre $\mathcal{D}^n[f] = 0$ teljesül, akkor

$$\begin{aligned} \mathcal{J}[f \cdot g] &= f \cdot \mathcal{J}[g] - \mathcal{D}[f] \cdot \mathcal{J}^2[g] + \mathcal{D}^2[f] \cdot \mathcal{J}^3[g] - \dots + (-1)^{n-1} \mathcal{D}^{n-1}[f] \cdot \mathcal{J}^n[g] \\ \mathcal{J}[f \cdot g] &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot \mathcal{D}^k[f] \cdot \mathcal{J}^{k+1}[g] \end{aligned}$$

Jelölje \mathbf{D} a valós függvényeken értelmezett szokásos $\frac{d}{dx}$ differenciáloperátort, és \int annak inverzét. Azaz

$$\mathbf{D} : f \longrightarrow \mathbf{D}[f] = \frac{df}{dx}$$

$$\int : f \longrightarrow \int[f] = \int f \, dx$$

Ekkor $\mathcal{D} = x\mathbf{D}$ is egy differenciáloperátor, amelynek inverze az $\int \frac{1}{x}$ integráloperátor.

$$x\mathbf{D} : f \longrightarrow x\mathbf{D}[f] = x \cdot \frac{df}{dx}$$

$$\int \frac{1}{x} : f \longrightarrow \left(\int \frac{1}{x} \right) [f] = \int \frac{f}{x} \, dx$$

A továbbiakban ezt a differenciáloperátor, integráloperátor inverz páros fog előkerülni a leggyakrabban. A parciális integrálás szabályát erre az operátor párosra alkalmazva külön kimondjuk

Ha $n \in \mathbb{N}$ a legkisebb természetes szám, amelyre $(x\mathbf{D})^n[f] = 0$ teljesül, akkor

$$\left(\int \frac{1}{x} \right) [f \cdot g] = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot (x\mathbf{D})^k[f] \cdot \left(\int \frac{1}{x} \right)^{k+1}[g]$$

2 Az $I = \int \frac{\ln^p(x) \cdot \ln^q(1-x)}{(1-x)^n} dx$ integrál felírása (1. módszer)

Az $I = \int \frac{\ln^p(x) \cdot \ln^q(1-x)}{(1-x)^n} dx$ integrál kiszámítása során használni fogjuk az

$$\text{Li}_{(\underbrace{a, \dots, a}_n, \underbrace{b, \dots, b}_m)}(x) = \text{Li}_{(a^n, b^m, \dots)}(x) \text{ és } \text{Le}_{(\underbrace{a, \dots, a}_n, \underbrace{b, \dots, b}_m)}(x) = \text{Le}_{(a^n, b^m, \dots)}(x)$$

jelöléseket, illetve az alábbi eredményeket

$$\text{Li}_{(1^n)}(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \ln^n(1-x) \quad (1)$$

$$\text{Li}_{(1^n)}(1-x) = \frac{(-1)^n}{n!} \ln^n(x) \quad (2)$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \frac{\text{Le}_{(0^n)}(x)}{x} \quad (3)$$

$$\text{Le}_{(0^n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \text{Li}_{(0^{k+1})}(x) \quad (4)$$

$$\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_r, 0^n)}(x) = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{n+1} s(n+1, k) \text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_{r-1}, s_r+1-k)}(x) \quad (5)$$

$$\sum_{m=\max(1,k)}^n \frac{\binom{n-1}{m-1} s(m, k)}{(m-1)!} = \frac{\left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]}{(n-1)!} \quad (6)$$

Az $I = \int \frac{\ln^p(x) \cdot \ln^q(1-x)}{(1-x)^n} dx$ integrálban az (1), (2), illetve (3) formulák segítségével mindent felírunk általánosított polilogaritmus függvényekkel:

$$\int \frac{\ln^p(x) \cdot \ln^q(1-x)}{(1-x)^n} dx = \int (-1)^p p! \text{Li}_{1^p}(1-x) \cdot (-1)^q q! \text{Li}_{1^q}(x) \frac{\text{Le}_{0^n}(x)}{x} dx = (-1)^{p+q} p! q! \int \frac{\text{Li}_{1^p}(1-x) \cdot \text{Li}_{1^q}(x) \cdot \text{Le}_{0^n}(x)}{x} dx$$

A (4) formulát felhasználva az $\text{Le}_{0^n}(x)$ általánosított polilogaritmus függvényt kicseréljük $\text{Li}_{0^{m+1}}(x)$ függvények összegére, és az integrál linearitását kihasználva a szummázást kihozzuk az integráljel elé:

$$(-1)^{p+q} p! q! \int \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \text{Li}_{0^{m+1}}(x) \frac{\text{Li}_{1^p}(1-x) \cdot \text{Li}_{1^q}(x)}{x} dx = (-1)^{p+q} p! q! \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \int \frac{\text{Li}_{1^p}(1-x) \cdot \text{Li}_{1^q}(x) \cdot \text{Li}_{0^{m+1}}(x)}{x} dx$$

A nyert

$$I = (-1)^{p+q} p! q! \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \int \frac{\text{Li}_{1^p}(1-x) \cdot \text{Li}_{1^q}(x) \cdot \text{Li}_{0^{m+1}}(x)}{x} dx$$

eredmény szerint *elegendő az* $\int \frac{\text{Li}_{1^p}(1-x) \cdot \text{Li}_{1^q}(x) \cdot \text{Li}_{0^{m+1}}(x)}{x} dx$ *integrálokat megadni tetszőleges* p, q *és* $m \leq n-1$ *paraméterekkel.*

Az $\int \frac{\text{Li}_{1^p}(1-x) \cdot \text{Li}_{1^q}(x) \cdot \text{Li}_{0^{m+1}}(x)}{x} dx$ integrált pedig a parciális integrálás módszerével próbáljuk kiszámítani az

$$\left(\int \frac{1}{x} \right) [f \cdot g] = \sum_{t=0}^{N-1} (-1)^t (x\mathbf{D})^t [f] \left(\int \frac{1}{x} \right)^{t+1} [g], \text{ ahol } (x\mathbf{D})^N [f] = 0$$

egyenletet segítségével úgy, hogy $f = \text{Li}_{1^p}(1-x)$ és $g = \text{Li}_{1^q}(x) \cdot \text{Li}_{0^{m+1}}(x)$ választással élünk. Elsőként a $x\mathbf{D}$ differenciáloperátornak az $f = \text{Li}_{1^p}(1-x)$ függvényen vett többszöri hatását vizsgáljuk.

$$x\mathbf{D} [\text{Li}_{(1^p)}(1-x)] = x \cdot \left(\text{Li}_{(0, 1^{p-1})}(1-x) \frac{-1}{1-x} \right) = x \cdot \left(-\text{Li}_{(1^{p-1})}(1-x) \frac{1}{1-x} \frac{1-x}{x} \right) = -\text{Li}_{(1^{p-1})}(1-x)$$

Ebből már nagyon egyszerűen megadható az általános

$$(x\mathbf{D})^t [\text{Li}_{(1^p)}(1-x)] = (-1)^t \text{Li}_{(1^{p-t})} \quad (t < p)$$

eredmény is. Mivel $(x\mathbf{D})^{p-1} [\text{Li}_{(1^p)}(1-x)] = (-1)^{p-1} \text{Li}_{(1)}(1-x)$, ezért

$$(x\mathbf{D})^p [\text{Li}_{(1^p)}(1-x)] = x\mathbf{D} [(-1)^{p-1} \text{Li}_{(1)}(1-x)] = (-1)^p x \frac{\text{Li}_{(0)}(1-x)}{1-x} = (-1)^p x \frac{1-x}{x(1-x)} = (-1)^p,$$

és így, $(x\mathbf{D})^{p+1} [\text{Li}_{(1^p)}(1-x)] = x \cdot \mathbf{D} [(-1)^p] = 0$. Lévén $N = p+1$ a legkisebb szám amellyel $(x\mathbf{D})^N [f] = 0$ teljesül, ezért a fentiek szerint

$$\begin{aligned} \left(\int \frac{1}{x} \right) [\text{Li}_{1^p}(1-x) \cdot \text{Li}_{1^q}(x) \cdot \text{Li}_{0^{m+1}}(x)] &= \sum_{t=0}^{p+1-1} (-1)^t \cdot (-1)^t \text{Li}_{(1^{p-t})}(1-x) \cdot \left(\int \frac{1}{x} \right)^{t+1} [\text{Li}_{1^q}(x) \cdot \text{Li}_{0^{m+1}}(x)] = \\ &= \sum_{t=0}^p \text{Li}_{(1^{p-t})}(1-x) \cdot \left(\int \frac{1}{x} \right)^{t+1} [\text{Li}_{1^q}(x) \cdot \text{Li}_{0^{m+1}}(x)] \stackrel{(2)}{=} \sum_{t=0}^p (-1)^{p-t} \frac{\ln^{p-t}(x)}{(p-t)!} \cdot \left(\int \frac{1}{x} \right)^{t+1} [\text{Li}_{1^q}(x) \cdot \text{Li}_{0^{m+1}}(x)] \end{aligned}$$

Az $x\mathbf{D}$ differenciáloperátornak az $f = \text{Li}_{1^p}(1-x)$ függvényen vett többszöri hatását kiszámítva most már az alábbi írhatjuk:

$$\int \frac{\text{Li}_{1^p}(1-x) \cdot \text{Li}_{1^q}(x) \cdot \text{Li}_{0^{m+1}}(x)}{x} dx = (-1)^p \sum_{t=0}^p (-1)^t \frac{\ln^{p-t}(x)}{(p-t)!} \cdot \left(\int \frac{1}{x} \right)^{t+1} [\text{Li}_{1^q}(x) \cdot \text{Li}_{0^{m+1}}(x)]$$

Sokkal nehezebb az $\int \frac{1}{x}$ integráloperátornak a $g = \text{Li}_{1^q}(x) \cdot \text{Li}_{0^{m+1}}(x)$ függvényen vett többszöri hatását kiszámítani. Erre csak egy kipróbált eredményünk van, amit levezetés nélkül közlünk:

Tetszőleges K , illetve M nemnegatív számokkal

$$\left(\int \frac{1}{x} \right)^K [\text{Li}_{1^q}(x) \cdot \text{Li}_{0^M}(x)] = (-1)^q \sum_{s=0}^q \frac{\ln^{q-s}(1-x)}{(q-s)!} \cdot \sum_{\substack{C_1+\dots+C_{s+1}=K+s \\ 1 \leq C_1, \dots, C_{s+1}}}^n \text{Li}_{(C_1, \dots, C_{s+1}, 0^{M-1})}(x),$$

amiből a keresett $K = t+1$, illetve $M = m+1$ értékekkel

$$\left(\int \frac{1}{x} \right)^{t+1} [\text{Li}_{1^q}(x) \cdot \text{Li}_{0^{m+1}}(x)] = (-1)^q \sum_{s=0}^q \frac{\ln^{q-s}(1-x)}{(q-s)!} \cdot \sum_{\substack{C_1+\dots+C_{s+1}=t+s+1 \\ 1 \leq C_1, \dots, C_{s+1}}}^n \text{Li}_{(C_1, \dots, C_{s+1}, 0^m)}(x)$$

Mind a két operátor kiszámított értékét beírva megkapjuk a kitűzött integrál értékét:

$$\begin{aligned} \int \frac{\text{Li}_{1^p}(1-x) \cdot \text{Li}_{1^q}(x) \cdot \text{Li}_{0^{m+1}}(x)}{x} dx &= (-1)^{p+q} \sum_{t=0}^p (-1)^t \frac{\ln^{p-t}(x)}{(p-t)!} \cdot \sum_{s=0}^q \frac{\ln^{q-s}(1-x)}{(q-s)!} \cdot \sum_{\substack{C_1+\dots+C_{s+1}=t+s+1 \\ 1 \leq C_1, \dots, C_{s+1}}}^n \text{Li}_{(C_1, \dots, C_{s+1}, 0^m)}(x) = \\ &= (-1)^{p+q} \sum_{t=0}^p \sum_{s=0}^q (-1)^t \frac{\ln^{p-t}(x)}{(p-t)!} \frac{\ln^{q-s}(1-x)}{(q-s)!} \cdot \sum_{\substack{C_1+\dots+C_{s+1}=t+s+1 \\ 1 \leq C_1, \dots, C_{s+1}}}^n \text{Li}_{(C_1, \dots, C_{s+1}, 0^m)}(x) \end{aligned}$$

Ez $p-t \rightarrow t$, illetve $q-s \rightarrow s$ cserékkel így alakul:

$$\int \frac{\text{Li}_{1^p}(1-x) \cdot \text{Li}_{1^q}(x) \cdot \text{Li}_{0^{m+1}}(x)}{x} dx = (-1)^q \sum_{t=0}^p \sum_{s=0}^q (-1)^t \frac{\ln^t(x)}{t!} \frac{\ln^s(1-x)}{s!} \cdot \sum_{\substack{C_1+\dots+C_{q+1-s}=p+q+1-t-s \\ 1 \leq C_1, \dots, C_{q+1-s}}}^n \text{Li}_{(C_1, \dots, C_{q+1-s}, 0^m)}(x)$$

A fentiek szerint ezzel az I integrál értékét is magadtuk:

$$\begin{aligned}
I &= (-1)^{p+q} p! q! \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \int \frac{\text{Li}_{1^p}(1-x) \cdot \text{Li}_{1^q}(x) \cdot \text{Li}_{0^{m+1}}(x)}{x} dx = \\
&= (-1)^p p! q! \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \sum_{t=0}^p \sum_{s=0}^q (-1)^t \frac{\ln^t(x) \ln^s(1-x)}{t! s!} \cdot \sum_{\substack{C_1+\dots+C_{q+1-s}=p+q+1-t-s \\ 1 \leq C_1, \dots, C_{q+1-s}}}^n \text{Li}_{(C_1, \dots, C_{q+1-s}, 0^m)}(x)
\end{aligned}$$

Mivel a t és s összegzési indexek teljesen függetlenek az m összegzési indextől, így azok összegzése felcserélhető. A felcserélt összegzéssel nyert képlet pedig

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\ln^p(x) \cdot \ln^q(1-x)}{(1-x)^n} dx = \\
&= (-1)^p p! q! \sum_{t=0}^p \sum_{s=0}^q (-1)^t \frac{\ln^t(x) \ln^s(1-x)}{t! s!} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \sum_{\substack{C_1+\dots+C_{q+1-s}=p+q+1-t-s \\ 1 \leq C_1, \dots, C_{q+1-s}}}^n \text{Li}_{(C_1, \dots, C_{q+1-s}, 0^m)}(x)
\end{aligned}$$

A következőkben a

$$\Psi_{p,q,n}(t, s; x) := \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \sum_{\substack{C_1+\dots+C_{q+1-s}=p+q+1-t-s \\ 1 \leq C_1, \dots, C_{q+1-s}}}^n \text{Li}_{(C_1, \dots, C_{q+1-s}, 0^m)}(x)$$

összeget alakítjuk át. Az (5) formula szerint $\text{Li}_{(C_1, \dots, C_{q+1-s}, 0^m)}(x) = \frac{1}{m!} \cdot \sum_{k=0}^{m+1} s(m+1, k) \text{Li}_{(C_1, \dots, C_{q+1-s}+1-k)}(x)$, és így

$$\begin{aligned}
\Psi_{p,q,n}(t, s; x) &= \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \sum_{\substack{C_1+\dots+C_{q+1-s}=p+q+1-t-s \\ 1 \leq C_1, \dots, C_{q+1-s}}}^n \frac{1}{m!} \cdot \sum_{k=0}^{m+1} s(m+1, k) \text{Li}_{(C_1, \dots, C_{q+1-s}+1-k)}(x) = \\
&= \sum_{\substack{C_1+\dots+C_{q+1-s}=p+q+1-t-s \\ 1 \leq C_1, \dots, C_{q+1-s}}}^n \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \frac{1}{m!} \cdot \sum_{k=0}^{m+1} s(m+1, k) \text{Li}_{(C_1, \dots, C_{q+1-s}+1-k)}(x) = \\
&= \sum_{\substack{C_1+\dots+C_{q+1-s}=p+q+1-t-s \\ 1 \leq C_1, \dots, C_{q+1-s}}}^n \sum_{k=0}^n \sum_{m=\max(0, k-1)}^{n-1} \frac{\binom{n-1}{m} s(m+1, k)}{m!} \text{Li}_{(C_1, \dots, C_{q+1-s}+1-k)}(x)
\end{aligned}$$

A legutolsó összegben $m \rightarrow m-1$ cserével és a (6) formula alkalmazásával egy igen tömör eredményt kapunk a $\Psi_{p,q,n}(t, s; x)$ kifejezésre.

$$\begin{aligned}
\Psi_{p,q,n}(t, s; x) &= \sum_{\substack{C_1+\dots+C_{q+1-s}=p+q+1-t-s \\ 1 \leq C_1, \dots, C_{q+1-s}}}^n \sum_{k=0}^n \sum_{m=\max(1, k)}^n \frac{\binom{n-1}{m-1} s(m, k)}{(m-1)!} \text{Li}_{(C_1, \dots, C_{q+1-s}+1-k)}(x) = \\
&= \sum_{\substack{C_1+\dots+C_{q+1-s}=p+q+1-t-s \\ 1 \leq C_1, \dots, C_{q+1-s}}}^n \sum_{k=0}^n \frac{\left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]}{(n-1)!} \text{Li}_{(C_1, \dots, C_{q+1-s}+1-k)}(x) =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=1}^{n-1} \left[\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right] \sum_{\substack{C_1+\dots+C_{q+1-s}=p+q+1-t-s \\ 1 \leq C_1, \dots, C_{q+1-s}}}^n \text{Li}_{(C_1, \dots, C_{q+1-s}+1-k)}(x) =$$

$$\int \frac{\ln^p(x) \cdot \ln^q(1-x)}{(1-x)^n} dx =$$

$$= (-1)^p \frac{p! q!}{(n-1)!} \sum_{t=0}^p \sum_{s=0}^q \frac{\ln^t(x) \ln^s(1-x)}{t! s!} (-1)^t \sum_{k=1}^{n-1} \left[\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right] \sum_{\substack{C_1+\dots+C_{q+1-s}=p+q+1-t-s \\ 1 \leq C_1, \dots, C_{q+1-s}}}^n \text{Li}_{(C_1, \dots, C_{q+1-s}+1-k)}(x)$$

$$A_z \int \frac{\ln^p(x) \cdot \ln^q(1-x)}{(1-x)^n} dx \text{ integrálban } \ln^t(x) \ln^s(1-x) \text{ együtthatója:}$$

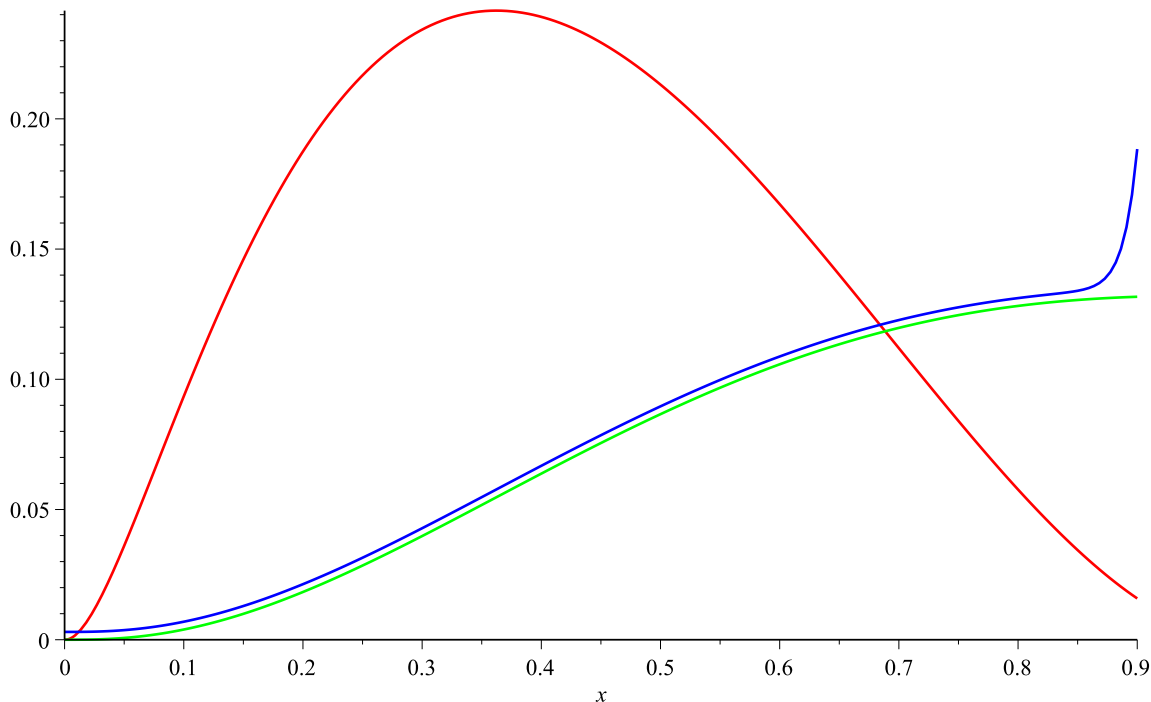
$$\Psi_{p,q,n}(t,s;x) := \frac{p! q!}{(n-1)! t! s!} (-1)^{p+t} \sum_{k=1}^{n-1} \left[\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right] \sum_{\substack{C_1+\dots+C_{q+1-s}=p+q+1-t-s \\ 1 \leq C_1, \dots, C_{q+1-s}}}^n \text{Li}_{(C_1, \dots, C_{q+1-s}+1-k)}(x)$$

$$A_z \int \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^2} dx \text{ határozatlan integrálja a képlet szerint az alábbi:}$$

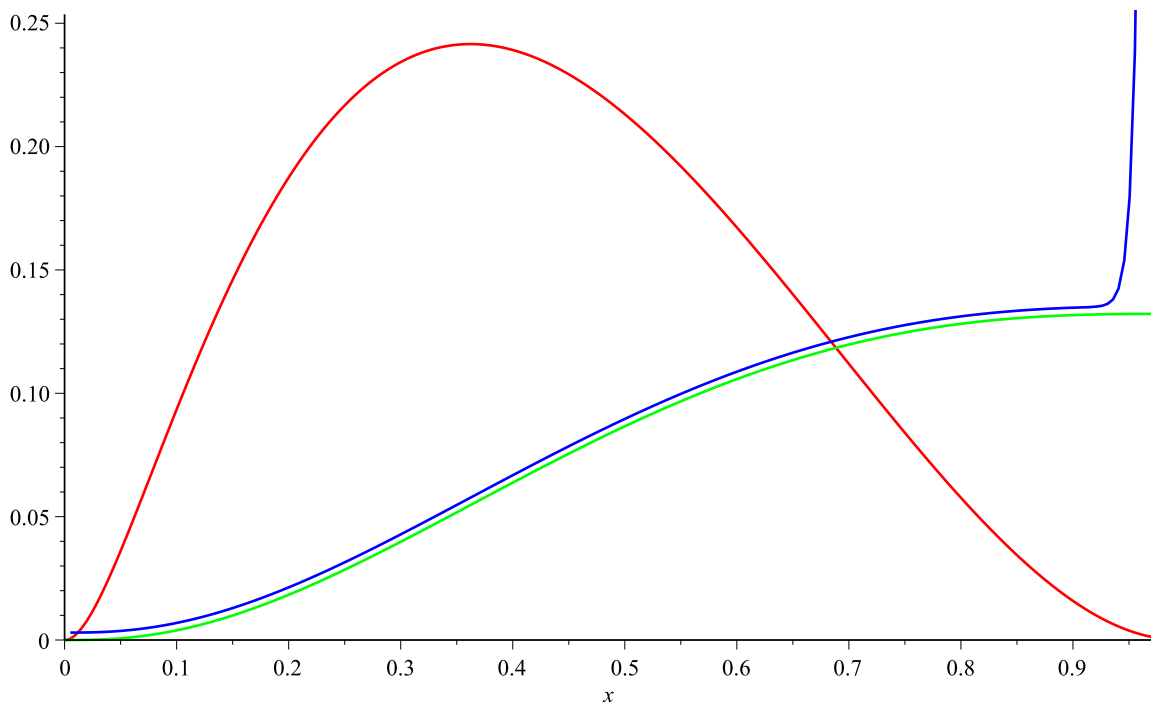
$$\begin{aligned} & -30 \ln(x)^4 \ln(1-x) (L[[1, 1, 1]](x) + L[[1, 2, 0]](x) + L[[2, 1, 0]](x)) - 15 \ln(x)^4 \ln(1-x)^2 (L[[1, 1]](x) + L[[2, 0]](x)) - 5 \ln(x)^4 \ln(1-x)^3 L[[1]](x) + 6 \ln(x)^5 \ln(1-x) L[[1, 1, 0]](x) + 3 \ln(x)^5 \ln(1-x)^2 L[[1, 0]](x) + \ln(x)^5 \ln(1-x)^3 L[[0]](x) - 720 \ln(1-x) (L[[1, 1, 5]](x) + L[[1, 2, 4]](x) + L[[1, 3, 3]](x) + L[[1, 4, 2]](x) + L[[1, 5, 1]](x) + L[[1, 6, 0]](x) + L[[2, 1, 4]](x) + L[[2, 2, 3]](x) + L[[2, 3, 2]](x) + L[[2, 4, 1]](x) + L[[2, 5, 0]](x) + L[[3, 1, 3]](x) + L[[3, 2, 2]](x) + L[[3, 3, 1]](x) + L[[3, 4, 0]](x) + L[[4, 1, 2]](x) + L[[4, 2, 1]](x) + L[[4, 3, 0]](x) + L[[5, 1, 1]](x) + L[[5, 2, 0]](x) + L[[6, 1, 0]](x)) + 720 \ln(x) \ln(1-x) (L[[1, 1, 4]](x) + L[[1, 2, 3]](x) + L[[1, 3, 2]](x) + L[[1, 4, 1]](x) + L[[1, 5, 0]](x) + L[[2, 1, 3]](x) + L[[2, 2, 2]](x) + L[[2, 3, 1]](x) + L[[2, 4, 0]](x) + L[[3, 1, 2]](x) + L[[3, 2, 1]](x) + L[[3, 3, 0]](x) + L[[4, 1, 1]](x) + L[[4, 2, 0]](x) + L[[5, 1, 0]](x)) + 360 \ln(x) \ln(1-x)^2 (L[[1, 4]](x) + L[[2, 3]](x) + L[[3, 2]](x) + L[[4, 1]](x) + L[[5, 0]](x)) + 120 \ln(x) \ln(1-x)^3 L[[4]](x) - 360 \ln(x)^2 \ln(1-x) (L[[1, 1, 3]](x) + L[[1, 2, 2]](x) + L[[1, 3, 1]](x) + L[[1, 4, 0]](x) + L[[2, 1, 2]](x) + L[[2, 2, 1]](x) + L[[2, 3, 0]](x) + L[[3, 1, 1]](x) + L[[3, 2, 0]](x) + L[[4, 1, 0]](x)) - 180 \ln(x)^2 \ln(1-x)^2 (L[[1, 3]](x) + L[[2, 2]](x) + L[[3, 1]](x) + L[[4, 0]](x)) - 60 \ln(x)^2 \ln(1-x)^3 L[[3]](x) + 120 \ln(x)^3 \ln(1-x) (L[[1, 1, 2]](x) + L[[1, 2, 1]](x) + L[[1, 3, 0]](x) + L[[2, 1, 1]](x) + L[[2, 2, 0]](x) + L[[3, 1, 0]](x)) + 60 \ln(x)^3 \ln(1-x)^2 (L[[1, 2]](x) + L[[2, 1]](x) + L[[3, 0]](x)) + 20 \ln(x)^3 \ln(1-x)^3 L[[2]](x) - 720 L[[1, 1, 5, 1]](x) - 720 L[[1, 2, 4, 1]](x) - 720 L[[1, 3, 3, 1]](x) - 720 L[[1, 4, 2, 1]](x) - 720 L[[1, 5, 1, 1]](x) - 720 L[[2, 1, 4, 1]](x) - 720 L[[2, 2, 3, 1]](x) - 720 L[[2, 3, 2, 1]](x) - 720 L[[2, 4, 1, 1]](x) - 720 L[[3, 1, 3, 1]](x) - 720 L[[3, 2, 2, 1]](x) - 720 L[[3, 3, 1, 1]](x) - 720 L[[4, 1, 2, 1]](x) - 720 L[[4, 2, 1, 1]](x) - 720 L[[5, 1, 1, 1]](x) - 720 L[[1, 1, 1, 5]](x) - 720 L[[1, 1, 2, 4]](x) - 720 L[[1, 1, 3, 3]](x) - 720 L[[1, 1, 4, 2]](x) - 720 L[[1, 2, 1, 4]](x) - 720 L[[1, 2, 2, 3]](x) - 720 L[[1, 2, 3, 2]](x) - 720 L[[1, 3, 1, 3]](x) - 720 L[[1, 3, 2, 2]](x) - 720 L[[1, 4, 1, 2]](x) - 720 L[[2, 1, 1, 4]](x) - 720 L[[2, 1, 2, 3]](x) - 720 L[[2, 1, 3, 2]](x) - 720 L[[2, 2, 1, 3]](x) - 720 L[[2, 2, 2, 2]](x) - 720 L[[2, 3, 1, 2]](x) - 720 L[[3, 1, 1, 3]](x) - 720 L[[3, 1, 2, 2]](x) - 720 L[[3, 2, 1, 2]](x) - 720 L[[4, 1, 1, 2]](x) - 720 L[[3, 1, 4, 0]](x) - 720 L[[3, 2, 3, 0]](x) - 720 L[[3, 3, 2, 0]](x) - 720 L[[3, 4, 1, 0]](x) - 720 L[[4, 1, 3, 0]](x) - 720 L[[4, 2, 2, 0]](x) - 720 L[[4, 3, 1, 0]](x) - 720 L[[5, 1, 2, 0]](x) - 720 L[[5, 2, 1, 0]](x) - 720 L[[6, 1, 1, 0]](x) - 720 L[[1, 1, 6, 0]](x) - 720 L[[1, 2, 5, 0]](x) - 720 L[[1, 3, 4, 0]](x) - 720 L[[1, 4, 3, 0]](x) - 720 L[[1, 5, 2, 0]](x) - 720 L[[1, 6, 1, 0]](x) - 720 L[[2, 1, 5, 0]](x) - 720 L[[2, 2, 4, 0]](x) - 720 L[[2, 3, 3, 0]](x) - 720 L[[2, 4, 2, 0]](x) - 720 L[[2, 5, 1, 0]](x) - 360 \ln(1-x)^2 (L[[1, 5]](x) + L[[2, 4]](x) + L[[3, 3]](x) + L[[4, 2]](x) + L[[5, 1]](x) + L[[6, 0]](x)) - 120 \ln(1-x)^3 L[[5]](x) + 720 \ln(x) (L[[1, 1, 4, 1]](x) + L[[1, 2, 3, 1]](x) + L[[1, 3, 2, 1]](x) + L[[1, 4, 1, 1]](x) + L[[2, 1, 3, 1]](x) + L[[2, 2, 2, 1]](x) + L[[2, 3, 1, 1]](x) + L[[3, 1, 2, 1]](x) + L[[3, 2, 1, 1]](x) + L[[4, 1, 1, 1]](x) + L[[1, 1, 1, 4]](x) + L[[1, 1, 2, 3]](x) + L[[1, 1, 3, 2]](x) + L[[1, 2, 1, 3]](x) + L[[1, 2, 2, 2]](x) + L[[1, 3, 1, 2]](x) + L[[2, 1, 1, 3]](x) + L[[2, 1, 2, 2]](x) + L[[2, 2, 1, 2]](x) + L[[3, 1, 1, 2]](x) + L[[1, 2, 4, 0]](x) + L[[1, 3, 3, 0]](x) + L[[1, 4, 2, 0]](x) + L[[1, 5, 1, 0]](x) + L[[2, 1, 4, 0]](x) + L[[2, 2, 3, 0]](x) + L[[2, 3, 2, 0]](x) + L[[2, 4, 1, 0]](x) + L[[3, 1, 3, 0]](x) + L[[3, 2, 2, 0]](x) + L[[3, 3, 1, 0]](x) + L[[4, 1, 2, 0]](x) + L[[4, 2, 1, 0]](x) + L[[5, 1, 1, 0]](x) + L[[1, 1, 5, 0]](x)) - 360 \ln(x)^2 (L[[1, 1, 1, 3]](x) + L[[1, 1, 2, 2]](x) + L[[1, 1, 3, 1]](x) + L[[1, 1, 4, 0]](x) + L[[1, 2, 1, 2]](x) + L[[1, 2, 2, 1]](x) + L[[1, 2, 3, 0]](x) + L[[1, 3, 1, 1]](x) + L[[1, 3, 2, 0]](x) + L[[1, 4, 1, 0]](x) + L[[2, 1, 1, 2]](x) + L[[2, 1, 2, 1]](x) + L[[2, 1, 3, 0]](x) + L[[2, 2, 1, 1]](x) + L[[2, 2, 2, 0]](x) + L[[2, 3, 1, 0]](x) + L[[3, 1, 1, 1]](x) + L[[3, 1, 2, 0]](x) + L[[3, 2, 1, 0]](x) + L[[4, 1, 1, 0]](x)) + 120 \ln(x)^3 (L[[1, 1, 1, 2]](x) + L[[1, 1, 2, 1]](x) + L[[1, 1, 3, 0]](x) + L[[1, 2, 1, 1]](x) + L[[2, 1, 1, 0]](x) + L[[2, 1, 2, 0]](x) + L[[3, 1, 1, 0]](x)) - 30 \ln(x)^4 (L[[1, 1, 1, 1]](x) + L[[1, 1, 2, 0]](x) + L[[1, 2, 1, 0]](x) + L[[2, 1, 1, 0]](x)) + 6 \ln(x)^5 L[[1, 1, 1, 0]](x) \end{aligned}$$

Az alábbi ábrán a $[0, 0.9]$ intervallumon ábrázoltuk

pirossal az $f(x) = \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^2}$; zölddel az $\int \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^2} dx$ valódi értékét; kékkel pedig az $\int \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^2} dx$ integrálnak a fenti képlettel számított értékét **0.003-mal kicsit feltolva**. Láthatóan 0.85-ig a valódi határozatlan integrál, illetve a képlettel számított integrál értéke teljesen megegyezik. Az 1-hez közeledve az eltérést az okozza, hogy az $\text{Li}_{(s_1; \dots; s_n)}(x)$ függvényeket a végtelen helyett csak 90-ig összegezve tudjuk reprezentálni.

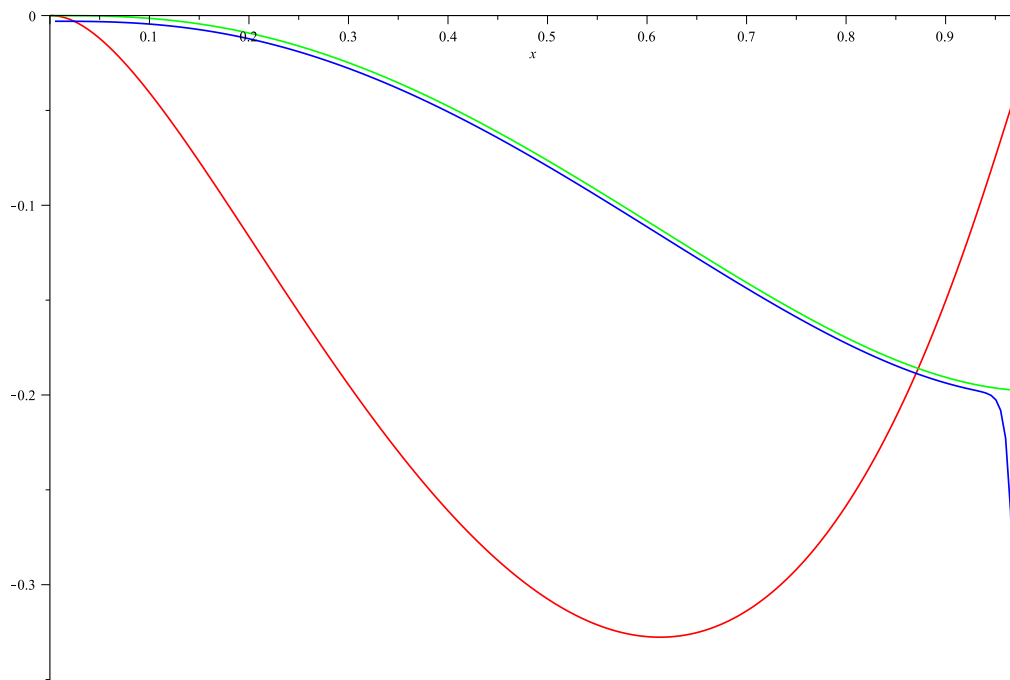


Ha az $\text{Li}_{(s_1; \dots; s_n)}(x)$ függvényeket 90 helyett 190-ig összegezve reprezentáljuk, akkor már 0.93-ig együtt halad a két függvény. Ehhez a számításhoz viszont már 1GB memória szükséges, maga a számítás pedig percekig vesz igénybe.



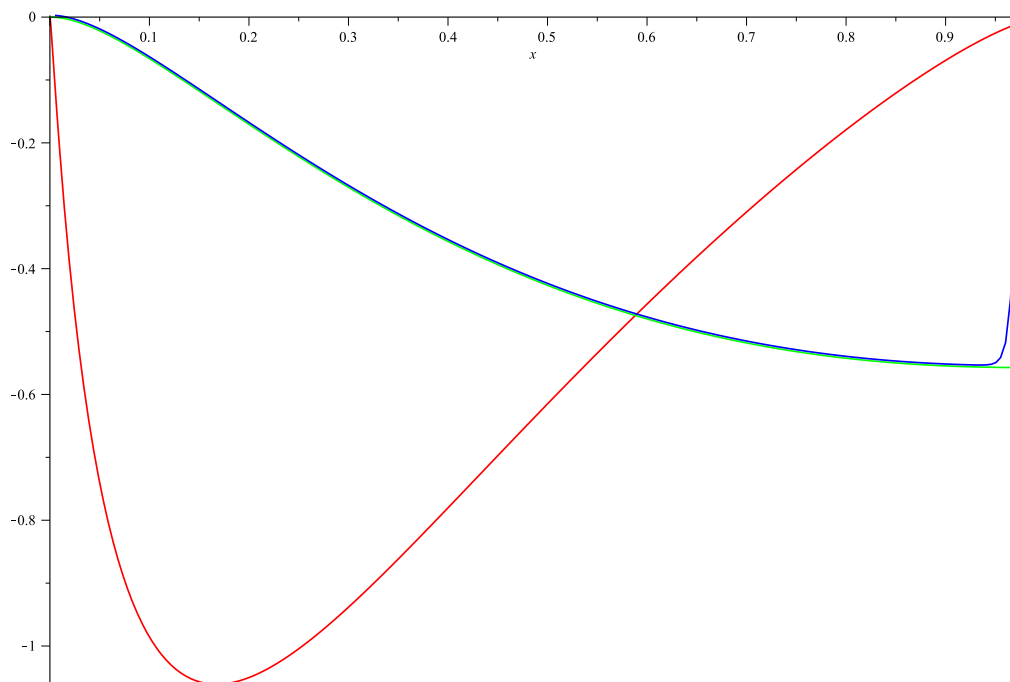
Az alábbi ábrán a $[0, 0.97]$ intervallumon ábrázoltuk

pirossal az $f(x) = \frac{\ln^4(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^2}$; zölddel az $\int \frac{\ln^4(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^2} dx$ valódi értékét; késsel pedig az $\int \frac{\ln^4(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^2} dx$ integrálnak a fenti képlettel számított értékét **0.003-mal kicsit letolva**.



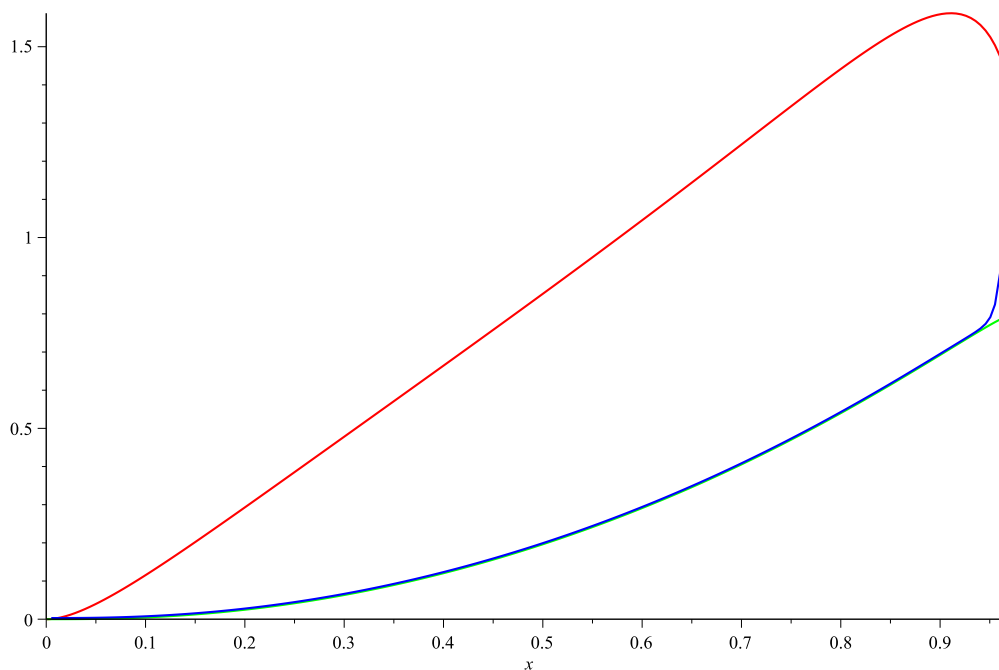
Az alábbi ábrán a $[0, 0.97]$ intervallumon ábrázoltuk

pirossal az $f(x) = \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^2(1-x)}{(1-x)^3}$; zölddel az $\int \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^2(1-x)}{(1-x)^3} dx$ valódi értékét; késsel pedig az $\int \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^2(1-x)}{(1-x)^3} dx$ integrálnak a fenti képlettel számított értékét **0.003-mal kicsit feltolva**.



Az alábbi ábrán a $[0, 0.97]$ intervallumon ábrázoltuk

pirossal az $f(x) = \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^4}$; zölddel az $\int \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^4} dx$ valódi értékét; késsel pedig az $\int \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^4} dx$ integrálnak a fenti képlettel számított értékét **0.003-mal kicsit feltolva**.



Az alábbi ábrán a $[0, 0.97]$ intervallumon ábrázoltuk

pirossal az $f(x) = \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^2(1-x)}{(1-x)^4}$; zölddel az $\int \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^2(1-x)}{(1-x)^4} dx$ valódi értékét; késsel pedig az $\int \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^2(1-x)}{(1-x)^4} dx$ integrálnak a fenti képlettel számított értékét **0.003-mal kicsit feltolva**.

