1 Parciális integrálás módszere

Legyen $\mathscr{D}$ egy differenciáloperátor, vagyis egy olyan *lineáris* $\mathscr{D} : f \longrightarrow \mathscr{D}[f]$ függvényoperátor, amelyre tetszőleges f és g függvényekkel teljesül a

$$\mathscr{D}[f \cdot g] = \mathscr{D}[f] \cdot g + f \cdot \mathscr{D}[g] \quad (*)$$

egyenlőség.

Ha a $\mathscr{D}$ differenciáloperátor inverze az $\mathscr{I}$ integráloperátor, akkor $\mathscr{I}$ is egy *lineáris* operátor lesz (hiszen lineáris operátor inverze is lineáris), és definíció szerint

$$\mathscr{I}[\mathscr{D}[f]] = f \ \text{, és} \ \mathscr{D}[\mathscr{I}[f]] = f$$

A parciális integrálás szabálya legegyszerűbben az $f \cdot \mathscr{I}[g]$ szorzattal felírt $(*)$ egyenlet integrálásával nyerhető

$$\mathscr{D}[f \cdot \mathscr{I}[g]] = \mathscr{D}[f] \cdot \mathscr{I}[g] + f \cdot \mathscr{D}[\mathscr{I}[g]] = \mathscr{D}[f] \cdot \mathscr{I}[g] + f \cdot g \quad /\mathscr{I}$$

$$\mathscr{I}[\mathscr{D}[f \cdot \mathscr{I}[g]]] = \mathscr{I}[\mathscr{D}[f] \cdot \mathscr{I}[g] + f \cdot g] \overset{\mathscr{I}\ \text{linearitása}}{=} \mathscr{I}[\mathscr{D}[f] \cdot \mathscr{I}[g]] + \mathscr{I}[f \cdot g]$$

$$f \cdot \mathscr{I}[g] = \mathscr{I}[\mathscr{D}[f] \cdot \mathscr{I}[g]] + \mathscr{I}[f \cdot g]$$

$$f \cdot \mathscr{I}[g] - \mathscr{I}[\mathscr{D}[f] \cdot \mathscr{I}[g]] = \mathscr{I}[f \cdot g]$$

A szabály táblázatos formában jegyezhető meg a legjobban:

$$\begin{array}{c|c} f & \mathscr{D}[f] \\ \hline g & \mathscr{I}[g] \end{array} \qquad \underset{\ \ \ +\,-}{\uparrow = \searrow\uparrow} \qquad \begin{array}{ccc} f & & \mathscr{D}[f] \\ \uparrow & \searrow & -\uparrow \\ g & + & \mathscr{I}[g] \end{array}$$

$$\mathscr{I}[f \cdot g] = f \cdot \mathscr{I}[g] - \mathscr{I}[\mathscr{D}[f] \cdot \mathscr{I}[g]]$$

A szabály teljesindukcióval általánosítható. Egy kettő hosszú táblázat

$$\begin{array}{c|c|c} f & \mathscr{D}[f] & \mathscr{D}^2[f] \\ \hline g & \mathscr{I}[g] & \mathscr{I}^2[g] \end{array} \qquad \underset{\ \ \ +\,-\,+}{\uparrow = \searrow\searrow\uparrow} \qquad \begin{array}{ccccc} f & & \mathscr{D}[f] & & \mathscr{D}^2[f] \\ \uparrow & \searrow & & \searrow & +\uparrow \\ g & + & \mathscr{I}[g] & - & \mathscr{I}^2[g] \end{array}$$

$$\mathscr{I}[f \cdot g] = f \cdot \mathscr{I}[g] - \mathscr{D}[f] \cdot \mathscr{I}^2[g] + \mathscr{I}\left[\mathscr{D}^2[f] \cdot \mathscr{I}^2[g]\right]$$

Egy három hosszú táblázat

$$\begin{array}{c|c|c|c} f & \mathscr{D}[f] & \mathscr{D}^2[f] & \mathscr{D}^3[f] \\ \hline g & \mathscr{I}[g] & \mathscr{I}^2[g] & \mathscr{I}^3[g] \end{array} \qquad \underset{\ \ \ +\,-\,+\,-}{\uparrow = \searrow\searrow\searrow\uparrow} \qquad \begin{array}{ccccccc} f & & \mathscr{D}[f] & & \mathscr{D}^2[f] & & \mathscr{D}^3[f] \\ \uparrow & \searrow & & \searrow & & \searrow & -\uparrow \\ g & + & \mathscr{I}[g] & - & \mathscr{I}^2[g] & + & \mathscr{I}^3[g] \end{array}$$

$$\mathscr{I}[f \cdot g] = f \cdot \mathscr{I}[g] - \mathscr{D}[f] \cdot \mathscr{I}^2[g] + \mathscr{D}^2[f] \cdot \mathscr{I}^3[g] - \mathscr{I}\left[\mathscr{D}^3[f] \cdot \mathscr{I}^3[g]\right]$$

Ha $\mathscr{D}^n[f] = 0$, valamely $n \in \mathbb{N}$ számra, akkor $\mathscr{I}[\mathscr{D}^n[f] \cdot \mathscr{I}^n[g]] = \mathscr{I}[0 \cdot \mathscr{I}^n[g]] = \mathscr{I}[0] = 0$.

f	$\mathscr{D}[f]$	$\mathscr{D}^2[f]$	$\mathscr{D}^3[f]$	$\dots$	$\mathscr{D}^{n-1}[f]$	$\mathscr{D}^n[f]=0$	0	0	$\dots$
g	$\mathscr{I}[g]$	$\mathscr{I}^2[g]$	$\mathscr{I}^3[g]$	$\dots$	$\mathscr{I}^{n-1}[g]$	$\mathscr{I}^n[g]$			

$$\mathscr{I}[f\cdot g] = f\cdot\mathscr{I}[g] - \mathscr{D}[f]\cdot\mathscr{I}^2[g] + \mathscr{D}^2[f]\cdot\mathscr{I}^3[g] - \ldots + (-1)^{n-1}\mathscr{D}^{n-1}[f]\cdot\mathscr{I}^n[g] + \overbrace{(-1)^n\mathscr{I}[\mathscr{D}^n[f]\cdot\mathscr{I}^n[g]]}^{=0}$$

(**A parciális integrálás szabálya**) Legyen $\mathscr{D}$ egy differenciáloperátor, és inverze az $\mathscr{I}$ integráloperátor. Ha $n\in\mathbb{N}$ a legkisebb természetes szám, amelyre $\mathscr{D}^n[f]=0$ teljesül, akkor

$$\mathscr{I}[f\cdot g] = f\cdot\mathscr{I}[g] - \mathscr{D}[f]\cdot\mathscr{I}^2[g] + \mathscr{D}^2[f]\cdot\mathscr{I}^3[g] - \ldots + (-1)^{n-1}\mathscr{D}^{n-1}[f]\cdot\mathscr{I}^n[g]$$
$$\mathscr{I}[f\cdot g] = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\cdot\mathscr{D}^k[f]\cdot\mathscr{I}^{k+1}[g]$$

Jelölje $\boldsymbol{D}$ a valós függvényeken értelmezett szokásos $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ differenciáloperátort, és $\int$ annak inverzét. Azaz

$$\boldsymbol{D}: f \longrightarrow \boldsymbol{D}[f] = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

$$\int : f \longrightarrow \int[f] = \int f\,\mathrm{d}x$$

Ekkor $\mathscr{D} = x\boldsymbol{D}$ is egy differenciáloperátor, amelynek inverze az $\int\frac{1}{x}$ integráloperátor.

$$x\boldsymbol{D}: f \longrightarrow x\boldsymbol{D}[f] = x\cdot\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

$$\int\frac{1}{x} : f \longrightarrow \left(\int\frac{1}{x}\right)[f] = \int\frac{f}{x}\,\mathrm{d}x$$

A továbbiakban ezt a differenciáloperátor, integráloperátor inverz páros fog előkerülni a leggyakrabban. A parciális integrálás szabályát erre az operátor párosra alkalmazva külön kimondjuk

Ha $n\in\mathbb{N}$ a legkisebb természetes szám, amelyre $(x\boldsymbol{D})^n[f]=0$ teljesül, akkor

$$\left(\int\frac{1}{x}\right)[f\cdot g] = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\cdot(x\boldsymbol{D})^k[f]\cdot\left(\int\frac{1}{x}\right)^{k+1}[g]$$

2 Az $I = \displaystyle\int\frac{\ln^p(x)\cdot\ln^q(1-x)}{(1-x)^n}\,\mathrm{d}x$ integrál felírása (1. módszer)

Az $I = \displaystyle\int\frac{\ln^p(x)\cdot\ln^q(1-x)}{(1-x)^n}\,\mathrm{d}x$ integrál kiszámítása során használni fogjuk az

$$\mathrm{Li}_{(\underbrace{a,\ldots,a}_{n},\underbrace{b,\ldots,b}_{m},\ldots)}(x) = \mathrm{Li}_{(a^n,b^m,\ldots)}(x) \text{ és } \quad \mathrm{Le}_{(\underbrace{a,\ldots,a}_{n},\underbrace{b,\ldots,b}_{m},\ldots)}(x) = \mathrm{Le}_{(a^n,b^m,\ldots)}(x)$$

jelöléseket, illetve az alábbi eredményeket

$$\mathrm{Li}_{(1^n)}(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \ln^n(1-x) \tag{1}$$

$$\mathrm{Li}_{(1^n)}(1-x) = \frac{(-1)^n}{n!} \ln^n(x) \tag{2}$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \frac{\mathrm{Le}_{(0^n)}(x)}{x} \tag{3}$$

$$\mathrm{Le}_{(0^n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \mathrm{Li}_{(0^{k+1})}(x) \tag{4}$$

$$\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r,0^n)}(x) = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{n+1} s(n+1,k)\, \mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_{r-1},s_r+1-k)}(x) \tag{5}$$

$$\sum_{m=\max(1,k)}^{n} \frac{\binom{n-1}{m-1} s(m,k)}{(m-1)!} = \frac{\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}}{(n-1)!} \tag{6}$$

Az $I = \displaystyle\int \frac{\ln^p(x) \cdot \ln^q(1-x)}{(1-x)^n} \mathrm{d}x$ integrálban az (1), (2), illetve (3) formulák segítségével mindent felírunk általánosított polilogaritmus függvényekkel:

$$\int \frac{\ln^p(x) \cdot \ln^q(1-x)}{(1-x)^n} \mathrm{d}x = \int (-1)^p\, p!\, \mathrm{Li}_{(1^p)}(1-x) \cdot (-1)^q\, q!\, \mathrm{Li}_{(1^q)}(x)\, \frac{\mathrm{Le}_{(0^n)}(x)}{x} \mathrm{d}x =$$

$$= (-1)^{p+q} p!\, q! \int \frac{\mathrm{Li}_{(1^p)}(1-x) \cdot \mathrm{Li}_{(1^q)}(x) \cdot \mathrm{Le}_{(0^n)}(x)}{x} \mathrm{d}x$$

A (4) formulát felhasználva az $\mathrm{Le}_{(0^n)}(x)$ általánosított polilogaritmus függvényt kicseréljük $\mathrm{Li}_{(0^{m+1})}(x)$ függvények összegére, és az integrál linearítását kihasználva a szummázást kihozzuk az integráljel elé:

$$(-1)^{p+q} p!\, q! \int \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \mathrm{Li}_{(0^{m+1})}(x)\, \frac{\mathrm{Li}_{(1^p)}(1-x) \cdot \mathrm{Li}_{(1^q)}(x)}{x} \mathrm{d}x =$$

$$= (-1)^{p+q} p!\, q! \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \int \frac{\mathrm{Li}_{(1^p)}(1-x) \cdot \mathrm{Li}_{(1^q)}(x) \cdot \mathrm{Li}_{(0^{m+1})}(x)}{x} \mathrm{d}x$$

A nyert

$$I = (-1)^{p+q} p!\, q! \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \int \frac{\mathrm{Li}_{(1^p)}(1-x) \cdot \mathrm{Li}_{(1^q)}(x) \cdot \mathrm{Li}_{(0^{m+1})}(x)}{x} \mathrm{d}x$$

eredmény szerint *elegendő az* $\displaystyle\int \frac{Li_{(1^p)}(1-x) \cdot Li_{(1^q)}(x) \cdot Li_{(0^{m+1})}(x)}{x} dx$ *integrálokat megadni tetszőleges* p, q *és* $m \le n-1$ *paraméterekkel.*

Az $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{(1^p)}(1-x) \cdot \mathrm{Li}_{(1^q)}(x) \cdot \mathrm{Li}_{(0^{m+1})}(x)}{x} \mathrm{d}x$ integrált pedig a parciális integrálás módszerével próbáljuk kiszámítani az

$$\left(\int \frac{1}{x}\right) [\, f \cdot g\,] = \sum_{t=0}^{N-1} (-1)^t\, (x\boldsymbol{D})^t\, [\, f\,] \left(\int \frac{1}{x}\right)^{t+1} [\, g\,] \quad \text{,ahol } (x\boldsymbol{D})^N\, [\, f\,] = 0$$

egyenletet segítségével úgy, hogy $f=\mathrm{Li}_{(1^p)}(1-x)$ és $g=\mathrm{Li}_{(1^q)}(x)\cdot\mathrm{Li}_{(0^{m+1})}(x)$ választással élünk. Elsőként a $x\boldsymbol{D}$ differenciáloperátornak az $f=\mathrm{Li}_{(1^p)}(1-x)$ függvényen vett többszöri hatását vizsgáljuk.

$$x\boldsymbol{D}\left[\,\mathrm{Li}_{(1^p)}(1-x)\,\right]=x\cdot\left(\mathrm{Li}_{(0,1^{p-1})}(1-x)\,\frac{-1}{1-x}\right)=x\cdot\left(-\mathrm{Li}_{(1^{p-1})}(1-x)\,\frac{1}{1-x}\,\frac{1-x}{x}\right)=-\mathrm{Li}_{(1^{p-1})}(1-x)$$

Ebből már nagyon egyszerűen megadható az általános

$$(x\boldsymbol{D})^t\left[\,\mathrm{Li}_{(1^p)}(1-x)\,\right]=(-1)^t\,\mathrm{Li}_{(1^{p-t})}\ \ (t<p)$$

eredmény is. Mivel $(x\boldsymbol{D})^{p-1}\left[\,\mathrm{Li}_{(1^p)}(1-x)\,\right]=(-1)^{p-1}\,\mathrm{Li}_{(1)}(1-x)$, ezért

$$(x\boldsymbol{D})^p\left[\,\mathrm{Li}_{(1^p)}(1-x)\,\right]=x\boldsymbol{D}\left[(-1)^{p-1}\,\mathrm{Li}_{(1)}(1-x)\right]=(-1)^p\,x\,\frac{\mathrm{Li}_{(0)}(1-x)}{1-x}=(-1)^p\,x\,\frac{1-x}{x\,(1-x)}=(-1)^p,$$

és így, $(x\boldsymbol{D})^{p+1}\left[\,\mathrm{Li}_{(1^p)}(1-x)\,\right]=x\cdot\boldsymbol{D}\left[(-1)^p\right]=0$. Lévén $N=p+1$ a legkisebb szám amellyel $(x\boldsymbol{D})^N\left[\,f\,\right]=0$ teljesül, ezért a fentiek szerint

$$\left(\int\frac{1}{x}\right)\left[\mathrm{Li}_{(1^p)}(1-x)\cdot\mathrm{Li}_{(1^q)}(x)\cdot\mathrm{Li}_{(0^{m+1})}(x)\right]=\sum_{t=0}^{p+1-1}(-1)^t\cdot(-1)^t\,\mathrm{Li}_{(1^{p-t})}(1-x)\cdot\left(\int\frac{1}{x}\right)^{t+1}\left[\,\mathrm{Li}_{(1^q)}(x)\cdot\mathrm{Li}_{(0^{m+1})}(x)\,\right]=$$
$$=\sum_{t=0}^{p}\mathrm{Li}_{(1^{p-t})}(1-x)\cdot\left(\int\frac{1}{x}\right)^{t+1}\left[\,\mathrm{Li}_{(1^q)}(x)\cdot\mathrm{Li}_{(0^{m+1})}(x)\,\right]\overset{(2)}{=}\sum_{t=0}^{p}(-1)^{p-t}\,\frac{\ln^{p-t}(x)}{(p-t)!}\cdot\left(\int\frac{1}{x}\right)^{t+1}\left[\,\mathrm{Li}_{(1^q)}(x)\cdot\mathrm{Li}_{(0^{m+1})}(x)\,\right]$$

Az $x\boldsymbol{D}$ differenciáloperátornak az $f=\mathrm{Li}_{1^p}(1-x)$ függvényen vett többszöri hatását kiszámítva most már az alábbit írhatjuk:

$$\int\frac{\mathrm{Li}_{(1^p)}(1-x)\cdot\mathrm{Li}_{(1^q)}(x)\cdot\mathrm{Li}_{(0^{m+1})}(x)}{x}\,\mathrm{d}x=(-1)^p\sum_{t=0}^{p}(-1)^t\,\frac{\ln^{p-t}(x)}{(p-t)!}\cdot\left(\int\frac{1}{x}\right)^{t+1}\left[\,\mathrm{Li}_{1^q}(x)\cdot\mathrm{Li}_{0^{m+1}}(x)\,\right]$$

Sokkal nehezebb az $\int\frac{1}{x}$ integráloperátornak a $g=\mathrm{Li}_{1^q}(x)\cdot\mathrm{Li}_{0^{m+1}}(x)$ függvényen vett többszöri hatását kiszámítani. Erre csak egy kipróbált eredményünk van, amit levezetés nélkül közlünk:

Tetszőleges K, illetve M nemnegatív számokkal

$$\left(\int\frac{1}{x}\right)^{K}\left[\,\mathrm{Li}_{(1^q)}(x)\cdot\mathrm{Li}_{(0^M)}(x)\,\right]=(-1)^q\sum_{s=0}^{q}\frac{\ln^{q-s}(1-x)}{(q-s)!}\cdot\sum_{\substack{C_1+\cdots+C_{s+1}=K+s\\1\le C_1,\ldots,C_{s+1}}}^{n}\mathrm{Li}_{(C_1,\ldots,C_{s+1},0^{M-1})}(x),$$

amiből a keresett $K=t+1$, illetve $M=m+1$ értékekkel

$$\left(\int\frac{1}{x}\right)^{t+1}\left[\,\mathrm{Li}_{(1^q)}(x)\cdot\mathrm{Li}_{(0^{m+1})}(x)\,\right]=(-1)^q\sum_{s=0}^{q}\frac{\ln^{q-s}(1-x)}{(q-s)!}\cdot\sum_{\substack{C_1+\cdots+C_{s+1}=t+s+1\\1\le C_1,\ldots,C_{s+1}}}^{n}\mathrm{Li}_{(C_1,\ldots,C_{s+1},0^{m})}(x)$$

Mind a két operátor kiszámított értékét beírva megkapjuk a kitűzött integrál értékét:

$$\int\frac{\mathrm{Li}_{(1^p)}(1-x)\cdot\mathrm{Li}_{(1^q)}(x)\cdot\mathrm{Li}_{(0^{m+1})}(x)}{x}\,\mathrm{d}x=(-1)^{p+q}\sum_{t=0}^{p}(-1)^t\,\frac{\ln^{p-t}(x)}{(p-t)!}\cdot\sum_{s=0}^{q}\frac{\ln^{q-s}(1-x)}{(q-s)!}\sum_{\substack{C_1+\cdots+C_{s+1}=t+s+1\\1\le C_1,\ldots,C_{s+1}}}^{n}\mathrm{Li}_{(C_1,\ldots,C_{s+1},0^{m})}(x)=$$

$$=(-1)^{p+q}\sum_{t=0}^{p}\sum_{s=0}^{q}(-1)^t\,\frac{\ln^{p-t}(x)\,\ln^{q-s}(1-x)}{(p-t)!\,(q-s)!}\sum_{\substack{C_1+\cdots+C_{s+1}=t+s+1\\1\le C_1,\ldots,C_{s+1}}}^{n}\mathrm{Li}_{(C_1,\ldots,C_{s+1},0^{m})}(x)$$

Ez $p-t \to t$, illetve $q-s \to s$ cserékkel így alakul:

$$\int \frac{\mathrm{Li}_{(1^p)}(1-x)\cdot \mathrm{Li}_{(1^q)}(x)\cdot \mathrm{Li}_{(0^{m+1})}(x)}{x}\,\mathrm{d}x = (-1)^q \sum_{t=0}^{p}\sum_{s=0}^{q}(-1)^t \frac{\ln^t(x)\,\ln^s(1-x)}{t!\,s!}\cdot \sum_{\substack{C_1+\cdots+C_{q+1-s}=p+q+1-t-s\\ 1\le C_1,\ldots,C_{q+1-s}}}^{n} \mathrm{Li}_{(C_1,\ldots,C_{q+1-s},0^m)}(x)$$

A fentiek szerint ezzel az I integrál értékét is magadtuk:

$$I=(-1)^{p+q}p!\,q!\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}\int \frac{\mathrm{Li}_{(1^p)}(1-x)\cdot \mathrm{Li}_{(1^q)}(x)\cdot \mathrm{Li}_{(0^{m+1})}(x)}{x}\,\mathrm{d}x =$$

$$=(-1)^p\,p!\,q!\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}\sum_{t=0}^{p}\sum_{s=0}^{q}(-1)^t \frac{\ln^t(x)\,\ln^s(1-x)}{t!\,s!}\cdot \sum_{\substack{C_1+\cdots+C_{q+1-s}=p+q+1-t-s\\ 1\le C_1,\ldots,C_{q+1-s}}}^{n} \mathrm{Li}_{(C_1,\ldots,C_{q+1-s},0^m)}(x)$$

Mivel a t és s összegzési indexek teljesen függetlenek az m összegzési indextől, így azok összegzése felcserélhető. A felcserélt összegzéssel nyert képlet pedig

$$\int \frac{\ln^p(x)\cdot \ln^q(1-x)}{(1-x)^n}\,\mathrm{d}x =$$

$$=(-1)^p\,p!\,q!\sum_{t=0}^{p}\sum_{s=0}^{q}(-1)^t \frac{\ln^t(x)\,\ln^s(1-x)}{t!\,s!}\cdot \sum_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}\sum_{\substack{C_1+\cdots+C_{q+1-s}=p+q+1-t-s\\ 1\le C_1,\ldots,C_{q+1-s}}}^{n} \mathrm{Li}_{(C_1,\ldots,C_{q+1-s},0^m)}(x)$$

A következőkben a

$$\Psi_{p,q,n}(t,s;x) := \sum_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}\sum_{\substack{C_1+\cdots+C_{q+1-s}=p+q+1-t-s\\ 1\le C_1,\ldots,C_{q+1-s}}}^{n} \mathrm{Li}_{(C_1,\ldots,C_{q+1-s},0^m)}(x)$$

összeget alakítjuk át. Az (5) formula szerint $\mathrm{Li}_{(C_1,\ldots,C_{q+1-s},0^m)}(x) = \frac{1}{m!}\cdot\sum_{k=0}^{m+1} s(m+1,k)\,\mathrm{Li}_{(C_1,\ldots,C_{q+1-s}+1-k)}(x)$, és így

$$\Psi_{p,q,n}(t,s;x) = \sum_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}\sum_{\substack{C_1+\cdots+C_{q+1-s}=p+q+1-t-s\\ 1\le C_1,\ldots,C_{q+1-s}}}^{n} \frac{1}{m!}\cdot\sum_{k=0}^{m+1} s(m+1,k)\,\mathrm{Li}_{(C_1,\ldots,C_{q+1-s}+1-k)}(x) =$$

$$= \sum_{\substack{C_1+\cdots+C_{q+1-s}=p+q+1-t-s\\ 1\le C_1,\ldots,C_{q+1-s}}}^{n}\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}\frac{1}{m!}\cdot\sum_{k=0}^{m+1} s(m+1,k)\,\mathrm{Li}_{(C_1,\ldots,C_{q+1-s}+1-k)}(x) =$$

$$= \sum_{\substack{C_1+\cdots+C_{q+1-s}=p+q+1-t-s\\ 1\le C_1,\ldots,C_{q+1-s}}}^{n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=max(0,k-1)}^{n-1}\frac{\binom{n-1}{m}\,s(m+1,k)}{m!}\,\mathrm{Li}_{(C_1,\ldots,C_{q+1-s}+1-k)}(x)$$

A legutolsó összegben $m \to m-1$ cserével és a (6) formula alkalmazásával egy igen tömör eredményt kapunk a $\Psi_{p,q,n}(t,s;x)$ kifejezésre.

$$\Psi_{p,q,n}(t,s;x) = \sum_{\substack{C_1+\cdots+C_{q+1-s}=p+q+1-t-s\\ 1\le C_1,\ldots,C_{q+1-s}}}^{n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=max(1,k)}^{n}\frac{\binom{n-1}{m-1}\,s(m,k)}{(m-1)!}\,\mathrm{Li}_{(C_1,\ldots,C_{q+1-s}+1-k)}(x) =$$

$$= \sum_{\substack{C_1+\cdots+C_{q+1-s}=p+q+1-t-s \\ 1\le C_1,\ldots,C_{q+1-s}}}^{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{\left[\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array}\right]}{(n-1)!} \operatorname{Li}_{(C_1,\ldots,C_{q+1-s}+1-k)}(x) =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=1}^{n-1} \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array}\right] \sum_{\substack{C_1+\cdots+C_{q+1-s}=p+q+1-t-s \\ 1\le C_1,\ldots,C_{q+1-s}}}^{n} \operatorname{Li}_{(C_1,\ldots,C_{q+1-s}+1-k)}(x) =$$

$$\int \frac{\ln^p(x)\cdot \ln^q(1-x)}{(1-x)^n}\,\mathrm{d}x =$$

$$= (-1)^p \frac{p!\,q!}{(n-1)!} \sum_{t=0}^{p}\sum_{s=0}^{q} \frac{\ln^t(x)\ln^s(1-x)}{t!\,s!}(-1)^t \sum_{k=1}^{n-1} \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array}\right] \sum_{\substack{C_1+\cdots+C_{q+1-s}=p+q+1-t-s \\ 1\le C_1,\ldots,C_{q+1-s}}}^{n} \operatorname{Li}_{(C_1,\ldots,C_{q+1-s}+1-k)}(x)$$

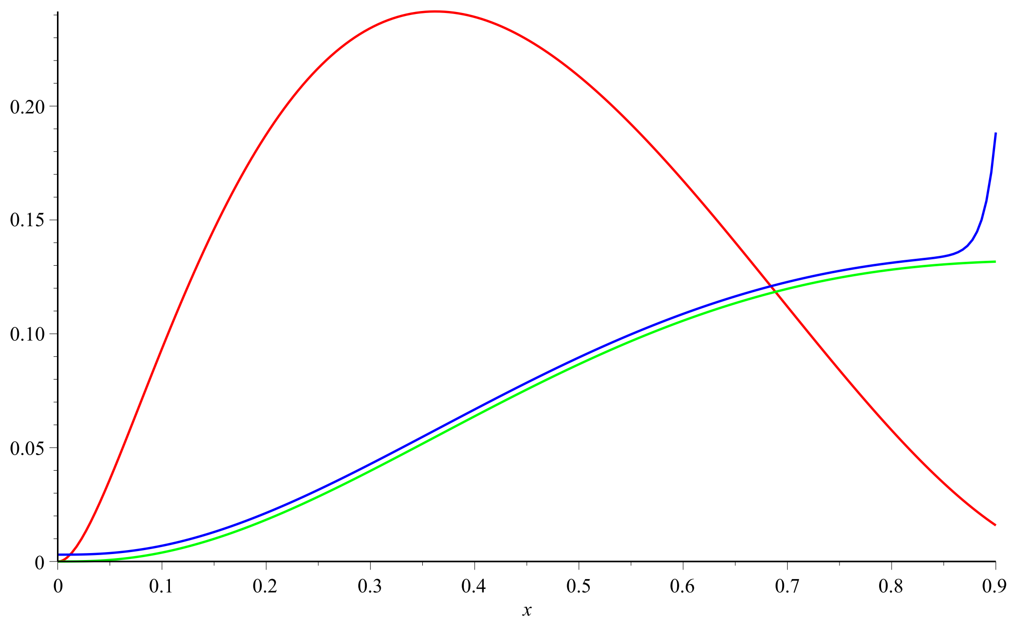
Az $\int \frac{\ln^p(x)\cdot \ln^q(1-x)}{(1-x)^n}\,\mathrm{d}x$ integrálban $\ln^t(x)\ln^s(1-x)$ együtthatója:

$$\Psi_{p,q,n}(t,s;x) := \frac{p!\,q!}{(n-1)!\,t!\,s!}(-1)^{p+t} \sum_{k=1}^{n-1} \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array}\right] \sum_{\substack{C_1+\cdots+C_{q+1-s}=p+q+1-t-s \\ 1\le C_1,\ldots,C_{q+1-s}}}^{n} \operatorname{Li}_{(C_1,\ldots,C_{q+1-s}+1-k)}(x)$$

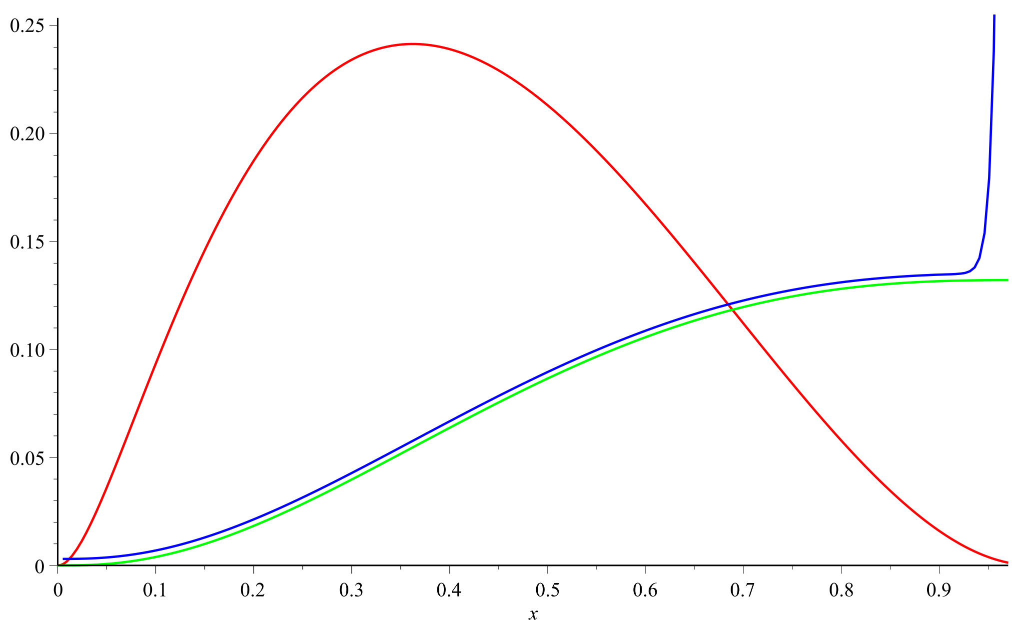
Az $\int \frac{\ln^5(x)\cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrálja a képlet szerint az alábbi:

-30*ln(x)^4*ln(1-x)*(L[[1, 1, 1]](x)+L[[1, 2, 0]](x)+L[[2, 1, 0]](x))-15*ln(x)^4*ln(1-x)^2*(L[[1, 1]](x)+L[[2, 0]](x))-5*ln(x)^4*ln(1-x)^3*L[[1]](x)+6*ln(x)^5*ln(1-x)*L[[1, 1, 0]](x)+3*ln(x)^5*ln(1-x)^2*L[[1, 0]](x)+ln(x)^5*ln(1-x)^3*L[[0]](x)-720*ln(1-x)*(L[[1, 1, 5]](x)+L[[1, 2, 4]](x)+L[[1, 3, 3]](x)+L[[1, 4, 2]](x)+L[[1, 5, 1]](x)+L[[1, 6, 0]](x)+L[[2, 1, 4]](x)+L[[2, 2, 3]](x)+L[[2, 3, 2]](x)+L[[2, 4, 1]](x)+L[[2, 5, 0]](x)+L[[3, 1, 3]](x)+L[[3, 2, 2]](x)+L[[3, 3, 1]](x)+L[[3, 4, 0]](x)+L[[4, 1, 2]](x)+L[[4, 2, 1]](x)+L[[4, 3, 0]](x)+L[[5, 1, 1]](x)+L[[5, 2, 0]](x)+L[[6, 1, 0]](x))+720*ln(x)*ln(1-x)*(L[[1, 1, 4]](x)+L[[1, 2, 3]](x)+L[[1, 3, 2]](x)+L[[1, 4, 1]](x)+L[[1, 5, 0]](x)+L[[2, 1, 3]](x)+L[[2, 2, 2]](x)+L[[2, 3, 1]](x)+L[[2, 4, 0]](x)+L[[3, 1, 2]](x)+L[[3, 2, 1]](x)+L[[3, 3, 0]](x)+L[[4, 1, 1]](x)+L[[4, 2, 0]](x)+L[[5, 1, 0]](x))+360*ln(x)*ln(1-x)^2*(L[[1, 4]](x)+L[[2, 3]](x)+L[[3, 2]](x)+L[[4, 1]](x)+L[[5, 0]](x))+120*ln(x)*ln(1-x)^3*L[[4]](x)-360*ln(x)^2*ln(1-x)*(L[[1, 1, 3]](x)+L[[1, 2, 2]](x)+L[[1, 3, 1]](x)+L[[1, 4, 0]](x)+L[[2, 1, 2]](x)+L[[2, 2, 1]](x)+L[[2, 3, 0]](x)+L[[3, 1, 1]](x)+L[[3, 2, 0]](x)+L[[4, 1, 0]](x))-180*ln(x)^2*ln(1-x)^2*(L[[1, 3]](x)+L[[2, 2]](x)+L[[3, 1]](x)+L[[4, 0]](x))-60*ln(x)^2*ln(1-x)^3*L[[3]](x)+120*ln(x)^3*ln(1-x)*(L[[1, 1, 2]](x)+L[[1, 2, 1]](x)+L[[1, 3, 0]](x)+L[[2, 1, 1]](x)+L[[2, 2, 0]](x)+L[[3, 1, 0]](x))+60*ln(x)^3*ln(1-x)^2*(L[[1, 2]](x)+L[[2, 1]](x)+L[[3, 0]](x))+20*ln(x)^3*ln(1-x)^3*L[[2]](x)-720*L[[1, 1, 5, 1]](x)-720*L[[1, 2, 4, 1]](x)-720*L[[1, 3, 3, 1]](x)-720*L[[1, 4, 2, 1]](x)-720*L[[1, 5, 1, 1]](x)-720*L[[2, 1, 4, 1]](x)-720*L[[2, 2, 3, 1]](x)-720*L[[2, 3, 2, 1]](x)-720*L[[2, 4, 1, 1]](x)-720*L[[3, 1, 3, 1]](x)-720*L[[3, 2, 2, 1]](x)-720*L[[3, 3, 1, 1]](x)-720*L[[4, 1, 2, 1]](x)-720*L[[4, 2, 1, 1]](x)-720*L[[5, 1, 1, 1]](x)-720*L[[1, 1, 1, 5]](x)-720*L[[1, 1, 2, 4]](x)-720*L[[1, 1, 3, 3]](x)-720*L[[1, 1, 4, 2]](x)-720*L[[1, 2, 1, 4]](x)-720*L[[1, 2, 2, 3]](x)-720*L[[1, 2, 3, 2]](x)-720*L[[1, 3, 1, 3]](x)-720*L[[1, 3, 2, 2]](x)-720*L[[1, 4, 1, 2]](x)-720*L[[2, 1, 1, 4]](x)-720*L[[2, 1, 2, 3]](x)-720*L[[2, 1, 3, 2]](x)-720*L[[2, 2, 1, 3]](x)-720*L[[2, 2, 2, 2]](x)-720*L[[2, 3, 1, 2]](x)-720*L[[3, 1, 1, 3]](x)-720*L[[3, 1, 2, 2]](x)-720*L[[3, 2, 1, 2]](x)-720*L[[4, 1, 1, 2]](x)-720*L[[3, 1, 4, 0]](x)-720*L[[3, 2, 3, 0]](x)-720*L[[3, 3, 2, 0]](x)-720*L[[3, 4, 1, 0]](x)-720*L[[4, 1, 3, 0]](x)-720*L[[4, 2, 2, 0]](x)-720*L[[4, 3, 1, 0]](x)-720*L[[5, 1, 2, 0]](x)-720*L[[5, 2, 1, 0]](x)-720*L[[6, 1, 1, 0]](x)-720*L[[1, 1, 6, 0]](x)-720*L[[1, 2, 5, 0]](x)-720*L[[1, 3, 4, 0]](x)-720*L[[1, 4, 3, 0]](x)-720*L[[1, 5, 2, 0]](x)-720*L[[1, 6, 1, 0]](x)-720*L[[2, 1, 5, 0]](x)-720*L[[2, 2, 4, 0]](x)-720*L[[2, 3, 3, 0]](x)-720*L[[2, 4, 2, 0]](x)-720*L[[2, 5, 1, 0]](x)-360*ln(1-x)^2*(L[[1, 5]](x)+L[[2, 4]](x)+L[[3, 3]](x)+L[[4, 2]](x)+L[[5, 1]](x)+L[[6, 0]](x))-120*ln(1-x)^3*L[[5]](x)+720*ln(x)*(L[[1, 1, 4, 1]](x)+L[[1, 2, 3, 1]](x)+L[[1, 3, 2, 1]](x)+L[[1, 4, 1, 1]](x)+L[[2, 1, 3, 1]](x)+L[[2, 2, 2, 1]](x)+L[[2, 3, 1, 1]](x)+L[[3, 1, 2, 1]](x)+L[[3, 2, 1, 1]](x)+L[[4, 1, 1, 1]](x)+L[[1, 1, 1, 4]](x)+L[[1, 1, 2, 3]](x)+L[[1, 1, 3, 2]](x)+L[[1, 2, 1, 3]](x)+L[[1, 2, 2, 2]](x)+L[[1, 3, 1, 2]](x)+L[[2, 1, 1, 3]](x)+L[[2, 1, 2, 2]](x)+L[[2, 2, 1, 2]](x)+L[[3, 1, 1, 2]](x)+L[[1, 2, 4, 0]](x)+L[[1, 3, 3, 0]](x)+L[[1, 4, 2, 0]](x)+L[[1, 5, 1, 0]](x)+L[[2, 1, 4, 0]](x)+L[[2, 2, 3, 0]](x)+L[[2, 3, 2, 0]](x)+L[[2, 4, 1, 0]](x)+L[[3, 1, 3, 0]](x)+L[[3, 2, 2, 0]](x)+L[[3, 3, 1, 0]](x)+L[[4, 1, 2, 0]](x)+L[[4, 2, 1, 0]](x)+L[[5, 1, 1, 0]](x)+L[[1, 1, 5, 0]](x))-360*ln(x)^2*(L[[1, 1, 1, 3]](x)+L[[1, 1, 2, 2]](x)+L[[1, 1, 3, 1]](x)+L[[1, 1, 4, 0]](x)+L[[1, 2, 1, 2]](x)+L[[1, 2, 2, 1]](x)+L[[1, 2, 3, 0]](x)+L[[1, 3, 1, 1]](x)+L[[1, 3, 2, 0]](x)+L[[1, 4, 1, 0]](x)+L[[2, 1, 1, 2]](x)+L[[2, 1, 2, 1]](x)+L[[2, 1, 3, 0]](x)+L[[2, 2, 1, 1]](x)+L[[2, 2, 2, 0]](x)+L[[2, 3, 1, 0]](x)+L[[3, 1, 1, 1]](x)+L[[3, 1, 2, 0]](x)+L[[3, 2, 1, 0]](x)+L[[4, 1, 1, 0]](x))+120*ln(x)^3*(L[[1, 1, 1, 2]](x)+L[[1, 1, 2, 1]](x)+L[[1, 1, 3, 0]](x)+L[[1, 2, 1, 1]](x)+L[[1, 2, 2, 0]](x)+L[[1, 3, 1, 0]](x)+L[[2, 1, 1, 1]](x)+L[[2, 1, 2, 0]](x)+L[[2, 2, 1, 0]](x)+L[[3, 1, 1, 0]](x))-30*ln(x)^4*(L[[1, 1, 1, 1]](x)+L[[1, 1, 2, 0]](x)+L[[1, 2, 1, 0]](x)+L[[2, 1, 1, 0]](x))+6*ln(x)^5*L[[1, 1, 1, 0]](x)

Az alábbi ábrán a [0, 0.9] intervallumon ábrázoltuk pirossal az $f(x) = \dfrac{\ln^5(x)\cdot\ln^3(1-x)}{(1-x)^2}$; zölddel az $\displaystyle\int \frac{\ln^5(x)\cdot\ln^3(1-x)}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x$ valódi értékét; kékkel pedig az $\displaystyle\int \frac{\ln^5(x)\cdot\ln^3(1-x)}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x$ integrálnak a fenti képlettel számított értékét **0.003-mal kicsit feltolva**. Láthatóan 0.85-ig a valódi határozatlan integrál, illetve a képlettel számított integrál értéke teljesen megegyezik. Az 1-hez közeledve az eltérést az okozza, hogy az $\mathrm{Li}_{(s_1;\dots s_n)}(x)$ függvényeket a végtelen helyett csak 90-ig összegezve tudjuk reprezentálni.

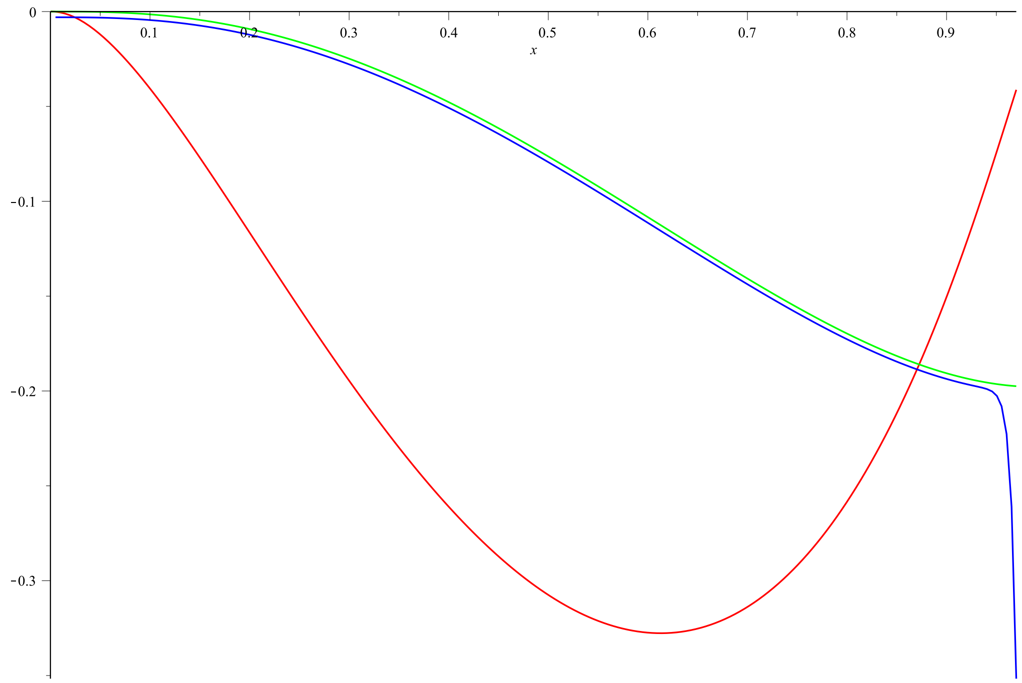


Ha az $\mathrm{Li}_{(s_1;\dots s_n)}(x)$ függvényeket 90 helyett 190-ig összegezve reprezentáljuk, akkor már 0.93-ig együtthalad a két függvény. Ehhez a számításhoz viszont már 1GB memória szükséges, maga a számítás pedig perceket vesz igénybe.



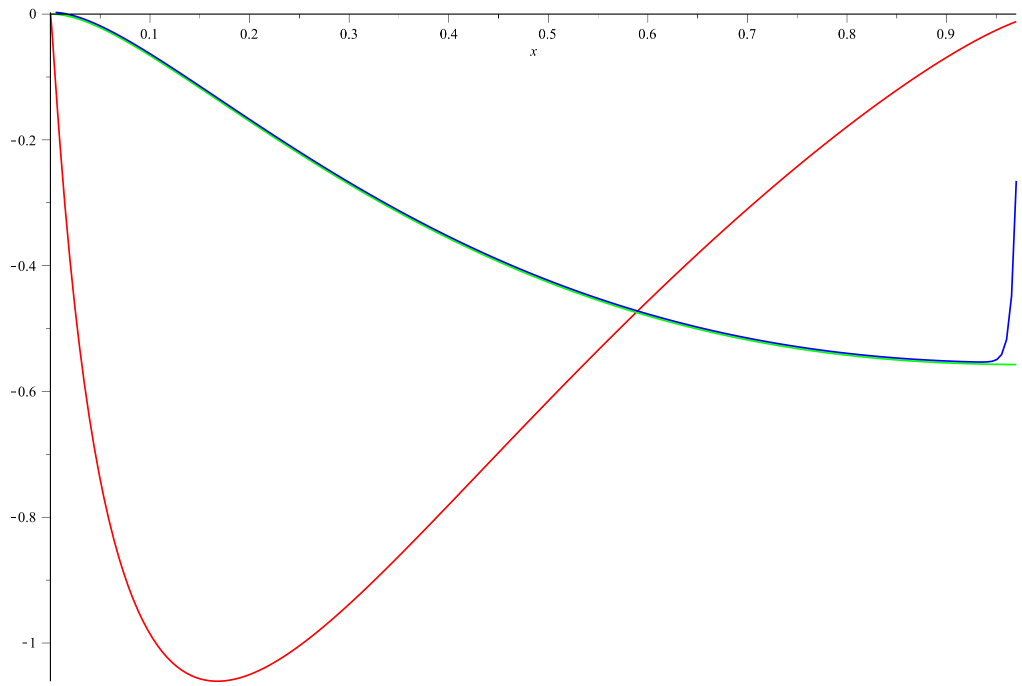
Az alábbi ábrán a [0, 0.97] intervallumon ábrázoltuk

pirossal az $f(x) = \dfrac{\ln^4(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^2}$; zölddel az $\displaystyle\int \frac{\ln^4(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^2}\, dx$ valódi értékét; kékkel pedig az $\displaystyle\int \frac{\ln^4(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^2}\, dx$ integrálnak a fenti képlettel számított értékét **0.003-mal kicsit letolva**.



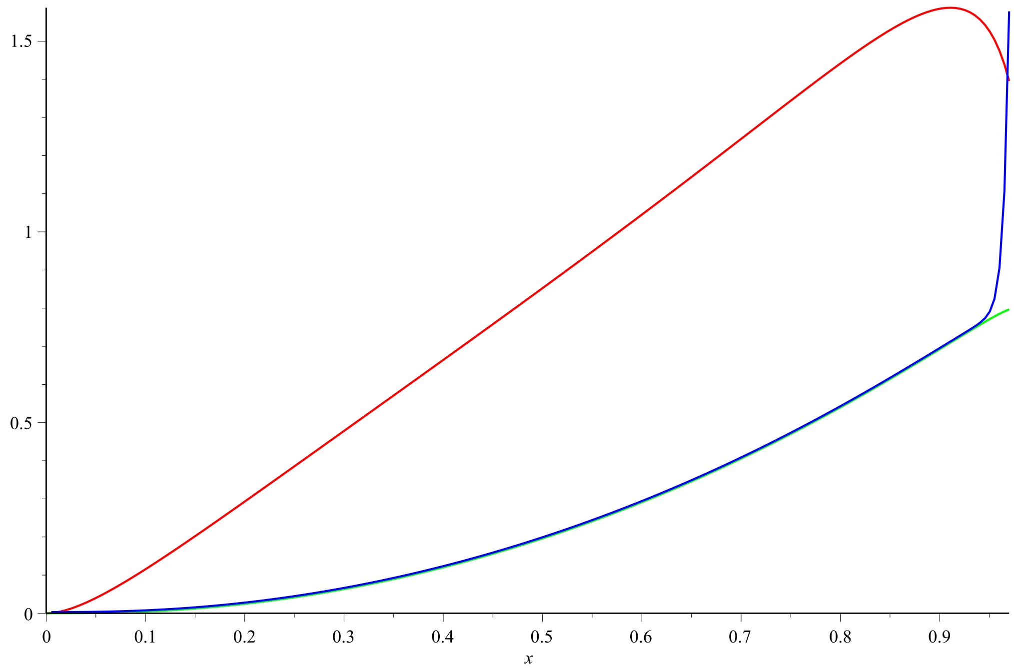
Az alábbi ábrán a [0, 0.97] intervallumon ábrázoltuk

pirossal az $f(x) = \dfrac{\ln^5(x) \cdot \ln^2(1-x)}{(1-x)^3}$; zölddel az $\displaystyle\int \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^2(1-x)}{(1-x)^3}\, dx$ valódi értékét; kékkel pedig az $\displaystyle\int \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^2(1-x)}{(1-x)^3}\, dx$ integrálnak a fenti képlettel számított értékét **0.003-mal kicsit feltolva**.



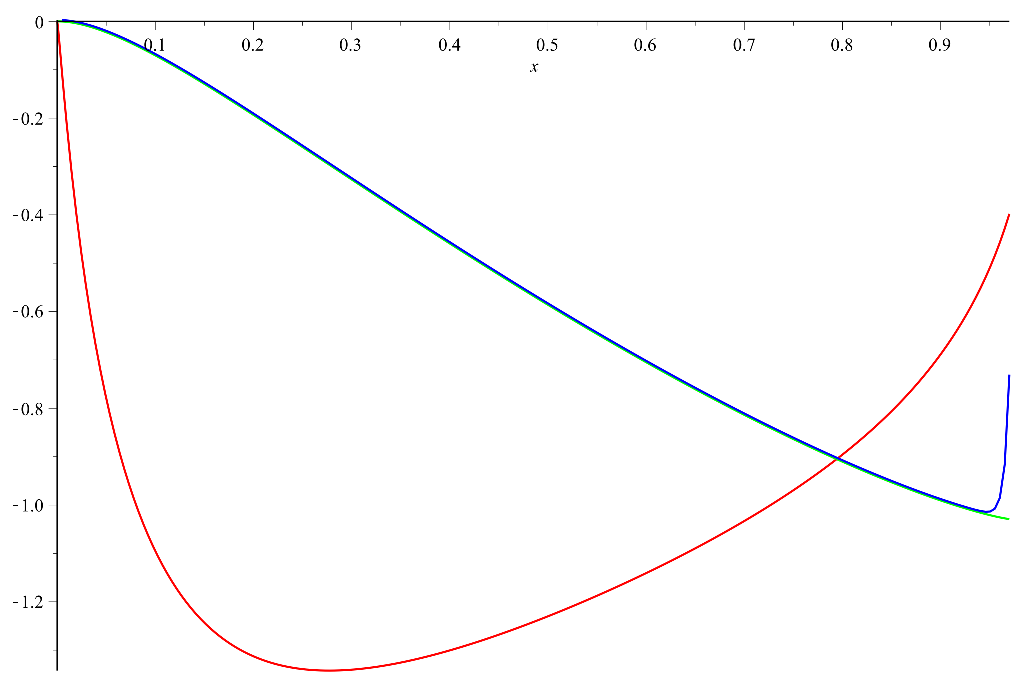
Az alábbi ábrán a [0, 0.97] intervallumon ábrázoltuk

pirossal az $f(x) = \dfrac{\ln^5(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^4}$; zölddel az $\displaystyle\int \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^4}\,\mathrm{d}x$ valódi értékét; kékkel pedig az $\displaystyle\int \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^4}\,\mathrm{d}x$ integrálnak a fenti képlettel számított értékét **0.003-mal kicsit feltolva**.



Az alábbi ábrán a [0, 0.97] intervallumon ábrázoltuk

pirossal az $f(x) = \dfrac{\ln^5(x) \cdot \ln^2(1-x)}{(1-x)^4}$; zölddel az $\displaystyle\int \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^2(1-x)}{(1-x)^4}\,\mathrm{d}x$ valódi értékét; kékkel pedig az $\displaystyle\int \frac{\ln^5(x) \cdot \ln^2(1-x)}{(1-x)^4}\,\mathrm{d}x$ integrálnak a fenti képlettel számított értékét **0.003-mal kicsit feltolva**.



3 Az $I = \displaystyle\int \frac{\ln^p(x) \cdot \ln^q(1-x)}{(1-x)^n}\,\mathrm{d}x$ integrál felírása (2. módszer)

Az $I = \displaystyle\int \frac{\ln^p(x) \cdot \ln^q(1-x)}{(1-x)^n}\,\mathrm{d}x$ integrál ezen kiszámítása az alábbi azonosságon alapszik

$$\mathrm{Li}_{(0^m)}(x) \cdot \mathrm{Li}_{(1^n)}(x) = \mathrm{Li}_{(0^m,1^n)}(x) \tag{7}$$

Az $I = \displaystyle\int \frac{\ln^p(x) \cdot \ln^q(1-x)}{(1-x)^n}\,\mathrm{d}x$ integrálban az (1), (2), illetve (3) formulák segítségével mindent felírunk általánosított polilogaritmus függvényekkel:

$$\int \frac{\ln^p(x) \cdot \ln^q(1-x)}{(1-x)^n}\,\mathrm{d}x = \int (-1)^p\, p!\,\mathrm{Li}_{(1^p)}(1-x) \cdot (-1)^q\, q!\,\mathrm{Li}_{(1^q)}(x)\, \frac{\mathrm{Le}_{(0^n)}(x)}{x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= (-1)^{p+q} p!\, q! \int \frac{\mathrm{Li}_{(1^p)}(1-x) \cdot \mathrm{Li}_{(1^q)}(x) \cdot \mathrm{Le}_{(0^n)}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

A (4) formulát felhasználva az $\mathrm{Le}_{(0^n)}(x)$ általánosított polilogaritmus függvényt kicseréljük $\mathrm{Li}_{(0^{m+1})}(x)$ függvények összegére, és az integrál linearítását kihasználva a szummázást kihozzuk az integráljel elé:

$$(-1)^{p+q} p!\, q! \int \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \mathrm{Li}_{(0^{m+1})}(x)\, \frac{\mathrm{Li}_{(1^p)}(1-x) \cdot \mathrm{Li}_{(1^q)}(x)}{x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= (-1)^{p+q} p!\, q! \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \int \frac{\mathrm{Li}_{(1^p)}(1-x) \cdot \mathrm{Li}_{(1^q)}(x) \cdot \mathrm{Li}_{(0^{m+1})}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

A (7) formula szerint $\mathrm{Li}_{(1^q)}(x) \cdot \mathrm{Li}_{(0^{m+1})}(x) = \mathrm{Li}_{(0^{m+1},1^q)}(x)$, és ezzel az I integrált az alábbi formára hoztuk:

$$I = (-1)^{p+q} p!\, q! \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \int \frac{\mathrm{Li}_{(1^p)}(1-x) \cdot \mathrm{Li}_{(0^{m+1},1^q)}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

A nyert formula szerint *elegendő az* $\displaystyle\int \frac{Li_{(1^p)}(1-x) \cdot Li_{(0^{m+1},1^q)}(x)}{x}\,dx$ *integrálokat megadni tetszőleges* p, q *és* $m \le n-1$ *paraméterekkel.*

Az $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{(1^p)}(1-x) \cdot \mathrm{Li}_{(0^{m+1},1^q)}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ integrált pedig a parciális integrálás módszerével próbáljuk kiszámítani az

$$\left(\int \frac{1}{x}\right)[\, f \cdot g\,] = \sum_{t=0}^{N-1} (-1)^t \, (x\boldsymbol{D})^t\, [\, f\,] \left(\int \frac{1}{x}\right)^{t+1} [\, g\,] \quad \text{, ahol } (x\boldsymbol{D})^N\, [\, f\,] = 0$$

egyenletet segítségével úgy, hogy $f = \mathrm{Li}_{(1^p)}(1-x)$ és $g = \mathrm{Li}_{(0^{m+1},1^q)}(x)$ választással élünk. Elsőként a $x\boldsymbol{D}$ differenciáloperátornak az $f = \mathrm{Li}_{(1^p)}(1-x)$ függvényen vett többszöri hatását vizsgáljuk.

$$x\boldsymbol{D}\left[\,\mathrm{Li}_{(1^p)}(1-x)\,\right] = x \cdot \left(\mathrm{Li}_{(0,1^{p-1})}(1-x)\, \frac{-1}{1-x}\right) = x \cdot \left(-\mathrm{Li}_{(1^{p-1})}(1-x)\, \frac{1}{1-x}\, \frac{1-x}{x}\right) = -\mathrm{Li}_{(1^{p-1})}(1-x)$$

Ebből már nagyon egyszerűen megadható az általános

$$(x\boldsymbol{D})^t \left[\,\mathrm{Li}_{(1^p)}(1-x)\,\right] = (-1)^t\, \mathrm{Li}_{(1^{p-t})} \;\; (t < p)$$

eredmény is. Mivel $(x\boldsymbol{D})^{p-1}\left[\,\mathrm{Li}_{(1^p)}(1-x)\,\right]=(-1)^{p-1}\,\mathrm{Li}_{(1)}(1-x)$, ezért

$$(x\boldsymbol{D})^{p}\left[\,\mathrm{Li}_{(1^p)}(1-x)\,\right]=x\boldsymbol{D}\left[(-1)^{p-1}\,\mathrm{Li}_{(1)}(1-x)\right]=(-1)^p\,x\,\frac{\mathrm{Li}_{(0)}(1-x)}{1-x}=(-1)^p\,x\,\frac{1-x}{x\,(1-x)}=(-1)^p,$$

és így, $(x\boldsymbol{D})^{p+1}\left[\,\mathrm{Li}_{(1^p)}(1-x)\,\right]=x\cdot\boldsymbol{D}\,[(-1)^p]=0$. Lévén $N=p+1$ a legkisebb szám amellyel $(x\boldsymbol{D})^N\,[\,f\,]=0$ teljesül, ezért a fentiek szerint

$$\left(\int\frac{1}{x}\right)\left[\mathrm{Li}_{(1^p)}(1-x)\cdot\mathrm{Li}_{(0^{m+1},1^q)}(x)\right]=\sum_{t=0}^{p+1-1}(-1)^t\cdot(-1)^t\,\mathrm{Li}_{(1^{p-t})}(1-x)\cdot\left(\int\frac{1}{x}\right)^{t+1}\left[\,\mathrm{Li}_{(0^{m+1},1^q)}(x)\,\right]=$$
$$=\sum_{t=0}^{p}\mathrm{Li}_{(1^{p-t})}(1-x)\cdot\left(\int\frac{1}{x}\right)^{t+1}\left[\,\mathrm{Li}_{(0^{m+1},1^q)}(x)\,\right]\overset{(2)}{=}\sum_{t=0}^{p}(-1)^{p-t}\,\frac{\ln^{p-t}(x)}{(p-t)!}\cdot\left(\int\frac{1}{x}\right)^{t+1}\left[\,\mathrm{Li}_{(0^{m+1},1^q)}(x)\,\right]$$

Az $x\boldsymbol{D}$ differenciáloperátornak az $f=\mathrm{Li}_{(1^p)}(1-x)$ függvényen vett többszöri hatását kiszámítva most már az alábbit írhatjuk:

$$\int\frac{\mathrm{Li}_{(1^p)}(1-x)\cdot\mathrm{Li}_{(0^{m+1},1^q)}(x)}{x}\,\mathrm{d}x=(-1)^p\sum_{t=0}^{p}(-1)^t\,\frac{\ln^{p-t}(x)}{(p-t)!}\cdot\left(\int\frac{1}{x}\right)^{t+1}\left[\,\mathrm{Li}_{(0^{m+1},1^q)}(x)\,\right]$$

Az $\int\frac{1}{x}$ integráloperátornak a $g=\mathrm{Li}_{(0^{m+1},1^q)}(x)$ függvényen vett többszöri hatásának kiszámításához csak az általánosított polilogaritmus függvények legalapvetőbb

$$\int\frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(x)}{x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{Li}_{(s_1+1,s_2,\ldots,s_r)}(x)$$

azonosságát kell többször egymás után alkalmazni.

$$\int\frac{\mathrm{Li}_{(0^{m+1},1^q)}(x)}{x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{Li}_{(0,0^m,1^q)}(x)}{x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{Li}_{(1,0^m,1^q)}(x)$$

$$\left(\int\frac{1}{x}\right)^2\left[\,\mathrm{Li}_{(0^{m+1},1^q)}(x)\,\right]=\int\frac{\mathrm{Li}_{(1,0^m,1^q)}(x)}{x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{Li}_{(2,0^m,1^q)}(x)$$

$$\left(\int\frac{1}{x}\right)^3\left[\,\mathrm{Li}_{(0^{m+1},1^q)}(x)\,\right]=\int\frac{\mathrm{Li}_{(2,0^m,1^q)}(x)}{x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{Li}_{(3,0^m,1^q)}(x)$$

Ebből már nagyon egyszerűen felírható az általános eredmény is:

Tetszőleges K nemnegatív számra

$$\left(\int\frac{1}{x}\right)^K\left[\,\mathrm{Li}_{(0^{m+1},1^q)}(x)\,\right]=\mathrm{Li}_{(K,0^m,1^q)}(x),$$

amiből a keresett $K=t+1$értékkel

$$\left(\int\frac{1}{x}\right)^{t+1}\left[\,\mathrm{Li}_{(0^{m+1},1^q)}(x)\,\right]=\mathrm{Li}_{(t+1,0^m,1^q)}(x)$$

Mind a két operátor kiszámított értékét beírva megkapjuk a kitűzött integrál értékét:

$$\int\frac{\mathrm{Li}_{(1^p)}(1-x)\cdot\mathrm{Li}_{(0^{m+1},1^q)}(x)}{x}\,\mathrm{d}x=(-1)^{p+q}\sum_{t=0}^{p}(-1)^t\,\frac{\ln^{p-t}(x)}{(p-t)!}\cdot\mathrm{Li}_{(t+1,0^m,1^q)}(x)$$

Ez $p-t\to t$ cserével így alakul:

$$\int\frac{\mathrm{Li}_{(1^p)}(1-x)\cdot\mathrm{Li}_{(0^{m+1},1^q)}(x)}{x}\,\mathrm{d}x=(-1)^q\sum_{t=0}^{p}(-1)^t\,\frac{\ln^{t}(x)}{t!}\cdot\mathrm{Li}_{(p+1-t,0^m,1^q)}(x)$$

Most már az I integrál értékét is felírhatjuk:

$$I = (-1)^{p+q} p!\, q! \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \int \frac{\mathrm{Li}_{(1^p)}(1-x) \cdot \mathrm{Li}_{(0^{m+1},1^q)}(x)}{x} \, \mathrm{d}x = (-1)^p\, p!\, q! \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \sum_{t=0}^{p} (-1)^t \frac{\ln^t(x)}{t!} \cdot \mathrm{Li}_{(p+1-t,0^m,1^q)}(x)$$

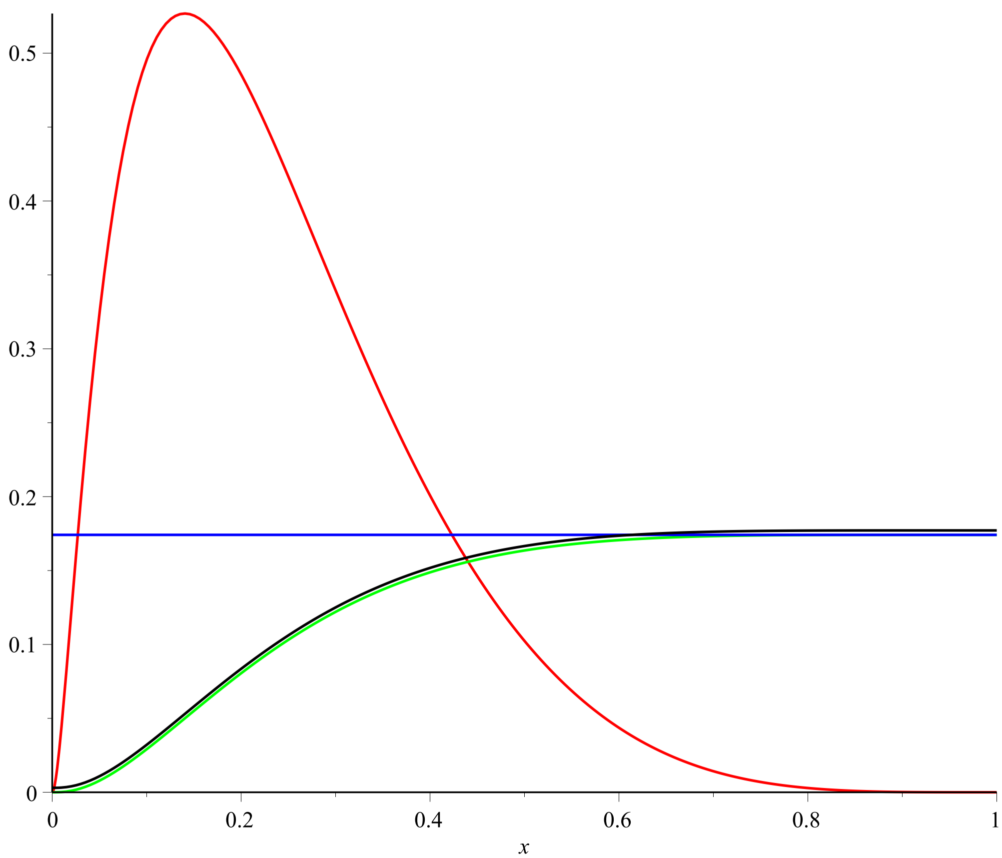
Mivel a t és m összegzési indexek teljesen függetlenek egymástól, így azok összegzése felcserélhető. A felcserélt összegzéssel nyert képlet pedig

$$\int \frac{\ln^p(x) \cdot \ln^q(1-x)}{(1-x)^n} \, \mathrm{d}x = (-1)^p\, p!\, q! \sum_{t=0}^{p} \frac{(-1)^t}{t!} \ln^t(x) \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \mathrm{Li}_{(p+1-t,0^m,1^q)}(x)$$

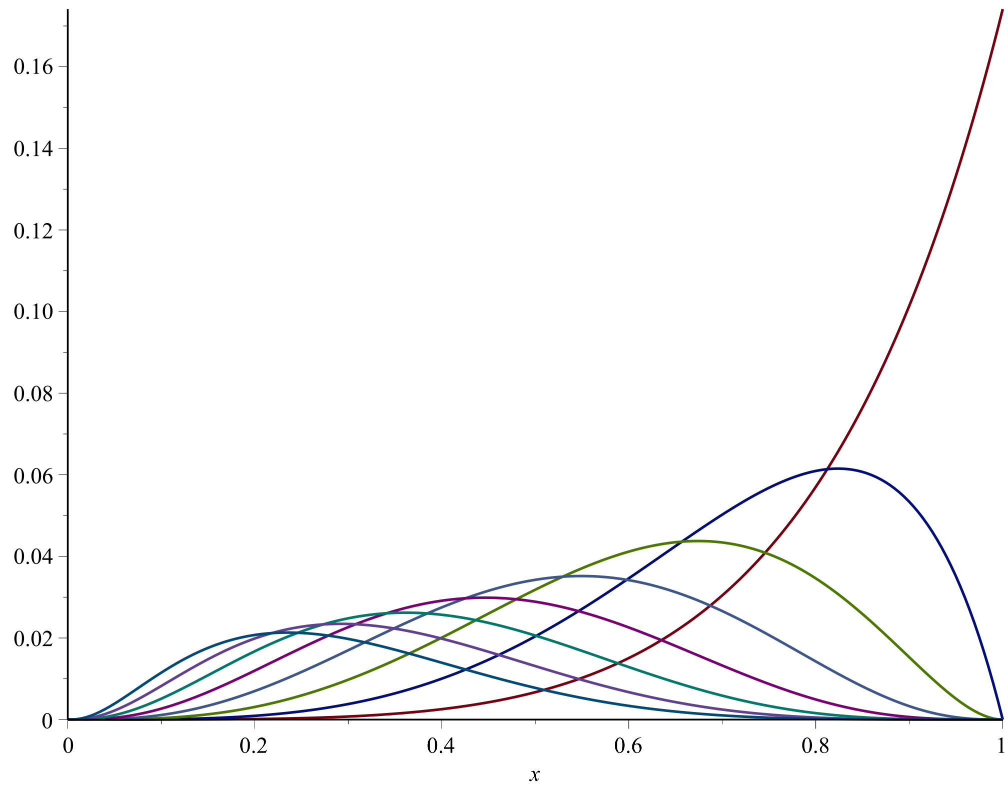
Az $\int \frac{\ln^p(x) \cdot \ln^q(1-x)}{(1-x)^n} \, \mathrm{d}x$ integrálban $\ln^t(x)$ együtthatója:

$$\Psi_{p,q,n}(t;x) := (-1)^{p+t} \frac{p!\, q!}{t!} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \mathrm{Li}_{(p+1-t,0^m,1^q)}(x)$$

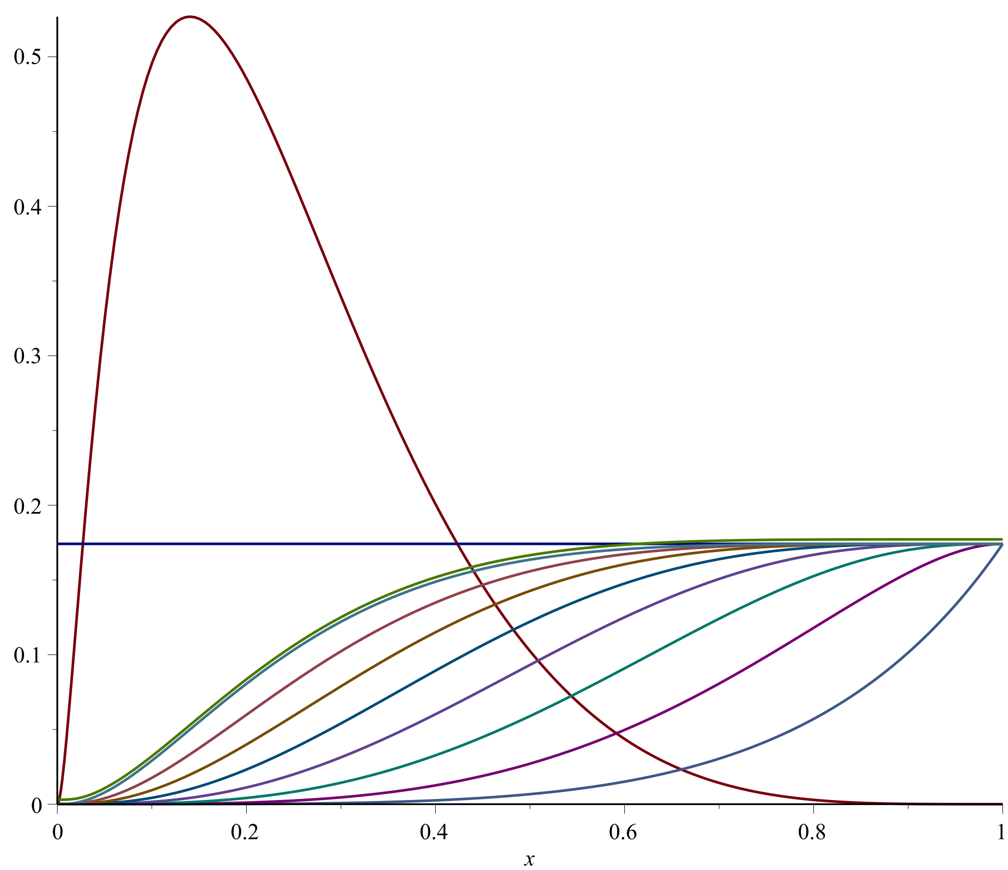
Az alábbi ábrán a [0, 1] intervallumon ábrázoltuk
pirossal az $f(x) = \frac{\ln^7(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^2}$; zölddel az $\int \frac{\ln^7(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^2} \, \mathrm{d}x$ valódi értékét; feketével pedig az $\int \frac{\ln^7(x) \cdot \ln^3(1-x)}{(1-x)^2} \, \mathrm{d}x$ integrálnak a fenti képlettel számított értékét **0.0003-mal kicsit feltolva**.



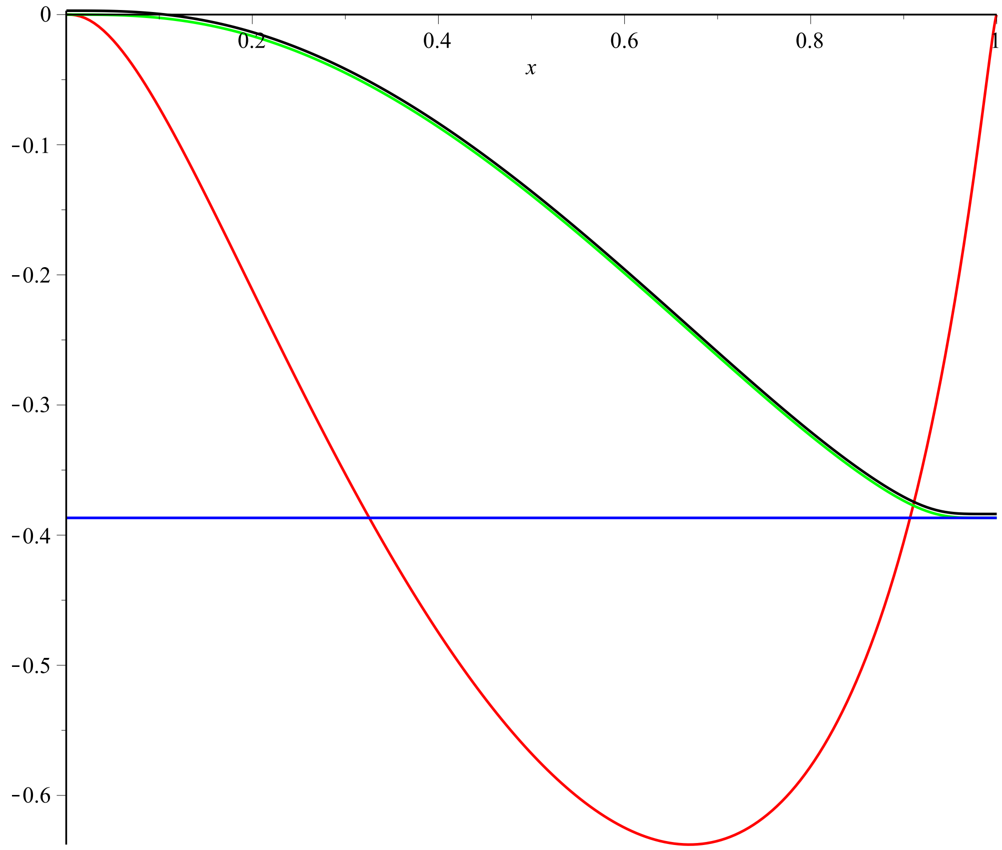
Az $\ln^t(x) \cdot \Psi_{7,3,2}(t;x)$ $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ függvények grafikonjait rajzoltuk meg a következő ábrán. A $t = 0$ értékhez tartozó $\Psi_{7,3,2}(0;x)$ az egyetlen, amely $x = 1$-ben nem nullát vesz fel, hanem egy **véges** értéket. Ez az érték éppen a [0,1] intervallumon vett határozott integrált adja, és a későbbiekben azt is látni fogjuk, hogyan írható fel többszörös zeta értékekkel.

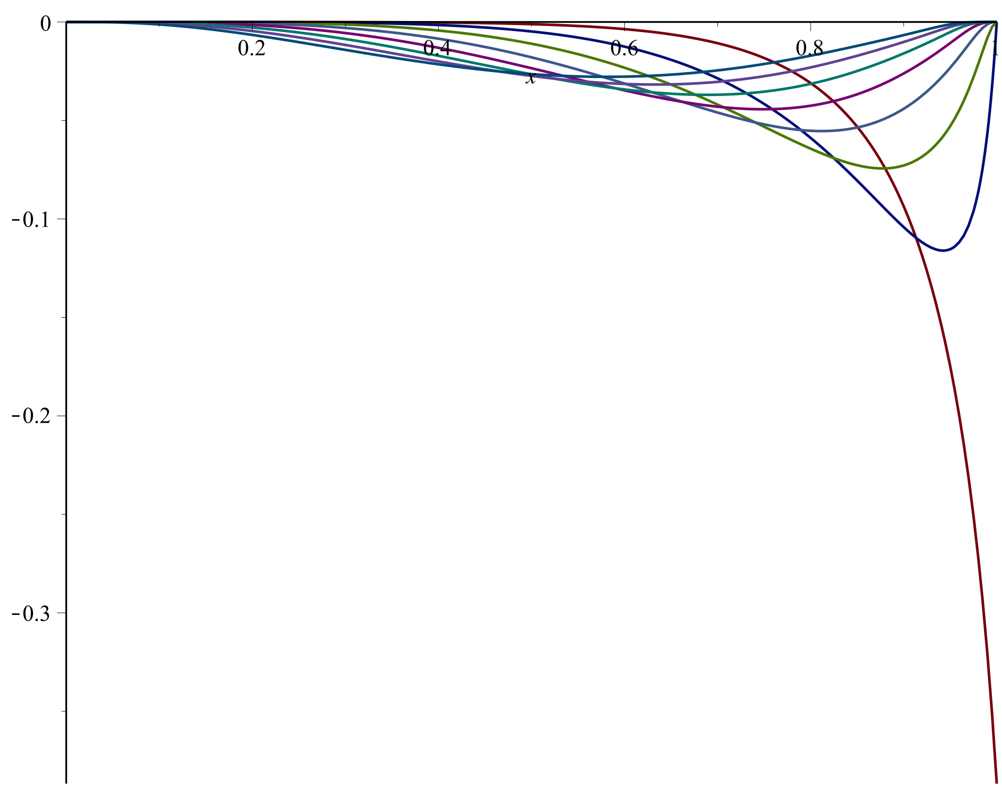


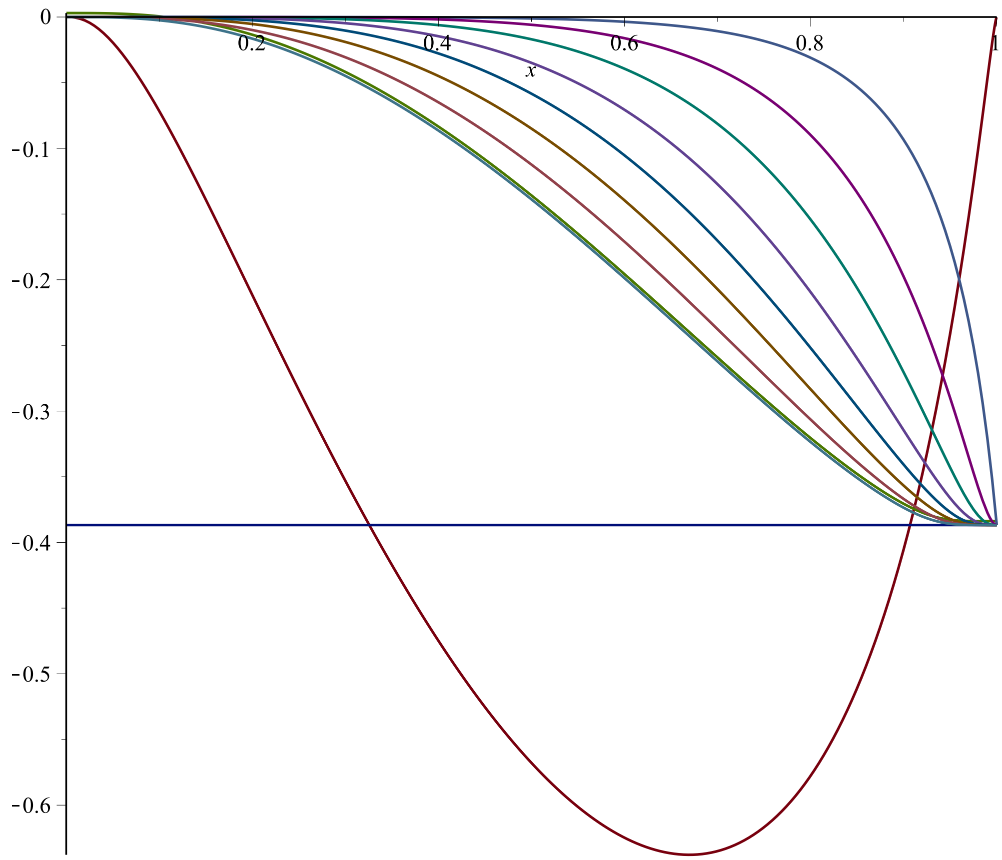
Végül az $F_k(x) := \sum_{t=0}^{k} \ln^t(x) \cdot \Psi_{7,3,2}(t;x)$ $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ kummulált függvényeket rajzoltuk fel az eredeti $f(x)$ függvénnyel együtt.



Ugyanezen grafikonokat láthatjuk az alábbiakban $p = 7$, $q = 4$ és $n = 5$ paraméterekkel.







A következőkben a $\int_0^1 \frac{\ln^p(x)\cdot\ln^q(1-x)}{(1-x)^n}\,\mathrm{d}x$ határozott integrál értékét adjuk meg a legutóbbi formula segítségével.

Legyen $F(x)=\int \frac{\ln^p(x)\cdot\ln^q(1-x)}{(1-x)^n}\,\mathrm{d}x$. Ekkor $\int_0^1 \frac{\ln^p(x)\cdot\ln^q(1-x)}{(1-x)^n}\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{x\to1-}F(x)-\lim\limits_{x\to0+}F(x)$

Egyszerű határérték vizsgálattal (később ezt részletesen le is írjuk) $\lim\limits_{x\to0+}F(x)=0$, $\lim\limits_{x\to1-}F(x)$-re pedig az alábbi írható:

$$(-1)^p\,p!\,q!\sum_{t=0}^{p}\frac{(-1)^t}{t!}\ln^t(1)\cdot\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}\mathrm{Li}_{(p+1-t,0^m,1^q)}(1)=(-1)^p\,p!\,q!\,\frac{(-1)^0}{0!}\ln^0(1)\cdot\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}\mathrm{Li}_{(p+1-0,0^m,1^q)}(1)=$$

$$=(-1)^p\,p!\,q!\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}\zeta\left(p+1,0^m,1^q\right)$$

$$\boldsymbol{\int_0^1\frac{\ln^p(x)\cdot\ln^q(1-x)}{(1-x)^n}\,\mathrm{d}x=(-1)^p\,p!\,q!\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}\zeta\left(p+1,0^m,1^q\right)}$$