1 Az $\mathbf{a} \succeq \mathbf{b}$ finomsági reláció

Két tetszőleges hosszúságú nem negatív számokból álló vektor között értelmezünk egy részbenrendezési relációt. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vektor *finomabb* mint a $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ vektor (jelölése $\mathbf{a} \succeq \mathbf{b}$), ha a $\mathbf{b}$ vektor megkapható az $\mathbf{a}$ vektorból valahány “,” karakter “+” karakterre cserélésével. Például, $(2,3,1,0,2) \succeq (5,1,2)$, mert $(2+3,1,0+2) = (5,1,2)$, és $(2,3,1,4) \succeq (2,8)$, mert $(2, 3+1+4) = (2,8)$. Könnyen megadható az $\mathbf{a}$ vektornál *durvább* összes $\mathbf{k}$ vektor $\{\mathbf{k} : \mathbf{k} \preceq \mathbf{a}\}$ halmaza. Egyszerűen minden lehetséges módon kicseréljük a “,” karaktereket “+” karakterrekre. Mivel egy n elemű vektorban $n-1$ vessző található, ezért $|\{\mathbf{k} : \mathbf{k} \preceq (a_1, a_2, \ldots, a_n)\}| = 2^{n-1}$.

$$\{\mathbf{k} : \mathbf{k} \preceq (2,3,1)\} := \{(2,3,1),\ (2+3,1),\ (2,3+1),\ (2+3+1)\} = \{(2,3,1),\ (5,1),\ (2,4),\ (6)\}$$

Sokkal nehezebb megadni egy $\mathbf{a}$ vektornál fimomabb összes $\mathbf{k}$ vektor $\{\mathbf{k} : \mathbf{a} \preceq \mathbf{k}\}$ halmazát. Az nyilvánvaló, hogy az n számot tartalmazó egyelemű (n) vektornál finomabb $\mathbf{k}$ vektorok $\{\mathbf{k} : \mathbf{a} \preceq \mathbf{k}\}$ halmazát az n szám felbontásai alkotják.

$$\{\mathbf{k} : (n) \preceq \mathbf{k}\} = \left\{\mathbf{k} : \sum \mathbf{k} = n\right\}$$

Például, $\{\mathbf{k} : (4) \preceq \mathbf{k}\} = \{\mathbf{k} : \sum \mathbf{k} = 4\} = \{(4),(1,3),(3,1),(2,2),(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1),(1,1,1,1)\}$. Közismert, hogy az n szám összes felbontásainak száma 2^{n-1}, és ezért $|\{\mathbf{k} : (n) \preceq \mathbf{k}\}| = 2^{n-1}$. Ezen egyszerű megállapítás segítségével tetszőleges $\mathbf{a}$ vektorhoz kiszámíthatjuk a $\{\mathbf{k} : \mathbf{a} \preceq \mathbf{k}\}$ halmazt az alábbi (bizonyítás nélkül közölt) tétel alkalmazásával.

Tétel. Ha $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m)$ az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ vektorok egybefűzésével kapott vektor, akkor

$$\{\mathbf{k} : \mathbf{a} \preceq \mathbf{k}\} = \{\mathbf{k} : \mathbf{a}_1 \preceq \mathbf{k}\} \times \{\mathbf{k} : \mathbf{a}_2 \preceq \mathbf{k}\} \times \cdots \times \{\mathbf{k} : \mathbf{a}_m \preceq \mathbf{k}\}$$

Ha ezt a tételt alkalmazzuk az egyelemű $\mathbf{a}_1 = (a_1), \mathbf{a}_2 = (a_2), \ldots, \mathbf{a}_m = (a_m)$ vektorokra, akkor $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m) = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ és

$$\{\mathbf{k} : (a_1, a_2, \ldots, a_m) \preceq \mathbf{k}\} = \{\mathbf{k} : (a_1) \preceq \mathbf{k}\} \times \{\mathbf{k} : (a_2) \preceq \mathbf{k}\} \times \cdots \times \{\mathbf{k} : (a_m) \preceq \mathbf{k}\} =$$

$$= \left\{\mathbf{k} : \sum \mathbf{k} = a_1\right\} \times \left\{\mathbf{k} : \sum \mathbf{k} = a_2\right\} \times \cdots \times \left\{\mathbf{k} : \sum \mathbf{k} = a_m\right\}$$

Ebből az is következik, hogy $|\{\mathbf{k} : (a_1, a_2, \ldots, a_m) \preceq \mathbf{k}\}| = 2^{a_1 - 1} \cdot 2^{a_2 - 1} \cdots 2^{a_m - 1} = 2^{\sum \mathbf{a} - |\mathbf{a}|}$.
Példa: $\{\mathbf{k} : (2,3,1) \preceq \mathbf{k}\} = \{\mathbf{k} : \sum \mathbf{k} = 2\} \times \{\mathbf{k} : \sum \mathbf{k} = 3\} \times \{\mathbf{k} : \sum \mathbf{k} = 1\} = \{(2),(1,1)\} \times \{(3),(1,2),(2,1),(1,1,1)\} \times \{(1)\} =$
$= \{(2,3,1),(2,1,2,1),(2,2,1,1),(2,1,1,1,1),(1,1,3,1),(1,1,1,2,1),(1,1,2,1,1),(1,1,1,1,1,1)\}$.
Egyszerűen balátható, hogy a most bevezetett $\mathbf{a} \succeq \mathbf{b}$ reláció valóban részbenrendezés, azaz

- reflexív: $\mathbf{a} \succeq \mathbf{a}$
- antiszimmetrikus: Ha $\mathbf{a} \succeq \mathbf{b}$ és $\mathbf{b} \succeq \mathbf{a}$, akkor $\mathbf{a} = \mathbf{b}$
- tranzitív: Ha $\mathbf{a} \succeq \mathbf{b}$ és $\mathbf{b} \succeq \mathbf{c}$, akkor $\mathbf{a} \succeq \mathbf{c}$

2 Landen kapcsolat (Landen’s connection)

Tétel (Landen’s connection). Tetszőleges nem negatív számokból álló $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_r)$ vektorral

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{s}}\left(\frac{x}{x-1}\right) = (-1)^{|\mathbf{s}|} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{s}} \mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(x)$$

Néhány ekvivalens változat:

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{s}}(x) = (-1)^{|\mathbf{s}|} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{s}} \mathrm{Li}_{\mathbf{k}}\left(\frac{x}{x-1}\right) \quad \left(0 < x < \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{s}}(1-x) = (-1)^{|\mathbf{s}|} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{s}} \mathrm{Li}_{\mathbf{k}}\left(\frac{x-1}{x}\right) \quad \left(\frac{1}{2} < x < 1\right)$$

3 Általános integráloperátor

Definíció:

$$\mathscr{I}(a_1,\bar{b}_1,a_2,\bar{b}_2,\ldots,a_n,\bar{b}_n) := \left(\int\frac{1}{x}\right)^{a_1}\left(\int\frac{1}{1-x}\right)^{b_1}\left(\int\frac{1}{x}\right)^{a_2}\left(\int\frac{1}{1-x}\right)^{b_2}\cdots\left(\int\frac{1}{x}\right)^{a_n}\left(\int\frac{1}{1-x}\right)^{b_n}$$

Példák:

$$\begin{aligned}
\mathscr{I}(2,\bar{3},4,\bar{1}) &= \left(\int\frac{1}{x}\right)^{2}\left(\int\frac{1}{1-x}\right)^{3}\left(\int\frac{1}{x}\right)^{4}\left(\int\frac{1}{1-x}\right)\\
\mathscr{I}(\bar{2},3,\bar{4}) &= \left(\int\frac{1}{1-x}\right)^{2}\left(\int\frac{1}{x}\right)^{3}\left(\int\frac{1}{1-x}\right)^{4}\\
\mathscr{I}(4,\bar{1},3) &= \left(\int\frac{1}{x}\right)^{4}\left(\int\frac{1}{1-x}\right)\left(\int\frac{1}{x}\right)^{3}
\end{aligned}$$

Könnyen átgondolható, hogy $\mathscr{I}(2,4,\bar{3},\bar{1},2) = \mathscr{I}(2+4,\overline{3+1},2) = \mathscr{I}(6,\bar{4},2)$, ezért mindig feltételezhető, hogy egy integráloperátorban a felülhúzott és sima számok felváltva követik egymást.

4 Az általános integráloperátor hatása az $\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(X)$ függvényeken. Polilogaritmikus integrálok redukciója.

Az $\mathscr{I}(a_1,\bar{b}_1,a_2,\bar{b}_2,\ldots,a_n,\bar{b}_n)$ integráloperátort leggyakrabban $\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(X)$ általánosított polilogaritmus függvényekre alkalmazzuk, ahol az X argumentum legtöbbször az x, $1-x$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{x}{x-1}$, $\frac{x-1}{x}$,... kifejezések valamelyike. Sorra megvizsgáljuk az $\mathscr{I}(1)$, illetve $\mathscr{I}(\bar{1})$ integráloperátorok hatását a különböző argumentummal vett $\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(X)$ függvényeken.

1. $$\mathscr{I}(1)\left[\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(x)\right] := \int\frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Li}_{(s_1+1,s_2,\ldots,s_r)}(x)$$

2. $$\mathscr{I}(\bar{1})\left[\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(x)\right] := \int\frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Li}_{(1,s_1,s_2,\ldots,s_r)}(x)$$

3. $$\mathscr{I}(1)\left[\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(1-x)\right] := \int\frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{Li}_{(1,s_1,s_2,\ldots,s_r)}(1-x)$$

4. $$\mathscr{I}(\bar{1})\left[\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(1-x)\right] := \int\frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{Li}_{(s_1+1,s_2,\ldots,s_r)}(1-x)$$

5. $$\mathscr{I}(1)\left[\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\tfrac{1}{x}\right)\right] := \int\frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{Li}_{(s_1+1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

Mert, $\int\frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x = /\; u=\frac{1}{x},\; x=\frac{1}{u}, \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\;/ = -\int\frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u)}{\frac{1}{u}}\frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\int\frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u)}{u}\,\mathrm{d}u =$

$= -\mathrm{Li}_{(s_1+1,s_2,\ldots,s_r)}(u) = \mathrm{Li}_{(s_1+1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\frac{1}{x}\right)$

6. $\mathscr{I}(\bar{1})\left[\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\frac{1}{x}\right)\right] := \displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\frac{1}{x}\right)}{1-x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Li}_{(1,s_1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\frac{1}{x}\right) + \mathrm{Li}_{(s_1+1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\frac{1}{x}\right)$

Mert, $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\frac{1}{x}\right)}{1-x}\,\mathrm{d}x = /\, u = \tfrac{1}{x},\ x = \tfrac{1}{u}, \mathrm{d}x = -\tfrac{\mathrm{d}u}{u^2}\,/ = -\int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u)}{1-\frac{1}{u}}\,\frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u)}{\frac{u-1}{u}}\,\frac{\mathrm{d}u}{u^2} =$

$\displaystyle = -\int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u)}{(u-1)\,u}\,\mathrm{d}u = -\left(\int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u)}{u-1}\,\mathrm{d}u - \int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u)}{u}\,\mathrm{d}u\right) = -\int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u)}{u-1}\,\mathrm{d}u +$

$\displaystyle + \int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u)}{1-u}\,\mathrm{d}u + \int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{Li}_{(1,s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u) + \mathrm{Li}_{(s_1+1,s_2,\ldots,s_r)}(u)$

7. $\mathscr{I}(1)\left[\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\frac{1}{1-x}\right)\right] := \displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\frac{1}{1-x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{Li}_{(1,s_1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\frac{1}{1-x}\right) - \mathrm{Li}_{(s_1+1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\frac{1}{1-x}\right)$

Mert, $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\frac{1}{1-x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x = /\, u = \tfrac{1}{1-x},\ x = \tfrac{u-1}{u}, \mathrm{d}x = \tfrac{\mathrm{d}u}{u^2}\,/ = \int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u)}{\frac{u-1}{u}}\,\frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u)}{u\,(u-1)}\,\mathrm{d}u =$

$\displaystyle = \int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u)}{u-1}\,\mathrm{d}u - \int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u)}{u}\,\mathrm{d}u = -\int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u)}{1-u}\,\mathrm{d}u - \int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u)}{u}\,\mathrm{d}u =$

$\displaystyle = -\mathrm{Li}_{(1,s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u) - \mathrm{Li}_{(s_1+1,s_2,\ldots,s_r)}(u) = -\mathrm{Li}_{(1,s_1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\frac{1}{1-x}\right) - \mathrm{Li}_{(s_1+1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\frac{1}{1-x}\right)$

8. $\mathscr{I}(\bar{1})\left[\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\frac{1}{1-x}\right)\right] := \displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\frac{1}{1-x}\right)}{1-x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Li}_{(s_1+1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\frac{1}{1-x}\right)$

Mert, $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\frac{1}{1-x}\right)}{1-x}\,\mathrm{d}x = /\, u = \tfrac{1}{1-x},\ x = \tfrac{u-1}{u}, \mathrm{d}x = \tfrac{\mathrm{d}u}{u^2}\,/ = \int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u)}{1-\frac{u-1}{u}}\,\frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u)}{\frac{1}{u}}\,\frac{\mathrm{d}u}{u^2} =$

$\displaystyle = \int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{Li}_{(s_1+1,s_2,\ldots,s_r)}(u) = \mathrm{Li}_{(s_1+1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\frac{1}{1-x}\right)$

9. $\mathscr{I}(1)\left[\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\frac{x}{x-1}\right)\right] := \displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\frac{x}{x-1}\right)}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Li}_{(1,s_1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\frac{x}{x-1}\right) + \mathrm{Li}_{(s_1+1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\frac{x}{x-1}\right)$

Mert, $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\frac{x}{x-1}\right)}{x}\,\mathrm{d}x = /\, u = \tfrac{x}{x-1},\ x = \tfrac{u}{u-1}, \mathrm{d}x = -\tfrac{\mathrm{d}u}{(u-1)^2}\,/ = -\int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u)}{\frac{u}{u-1}}\,\frac{\mathrm{d}u}{(u-1)^2} =$

$\displaystyle = -\int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u)}{u\,(u-1)}\,\mathrm{d}u = -\left(\int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u)}{u-1}\,\mathrm{d}u - \int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u)}{u}\,\mathrm{d}u\right) = \int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u)}{1-u}\,\mathrm{d}u +$

$\displaystyle + \int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{Li}_{(1,s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u) + \mathrm{Li}_{(s_1+1,s_2,\ldots,s_r)}(u) = \mathrm{Li}_{(1,s_1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\frac{x}{x-1}\right) + \mathrm{Li}_{(s_1+1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\frac{x}{x-1}\right)$

10. $\mathscr{I}(\bar{1})\left[\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\frac{x}{x-1}\right)\right] := \displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\frac{x}{x-1}\right)}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{Li}_{(1,s_1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\frac{x}{x-1}\right)$

Mert, $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\frac{x}{x-1}\right)}{1-x}\,\mathrm{d}x = /\, u = \tfrac{x}{x-1},\ x = \tfrac{u}{u-1}, \mathrm{d}x = -\tfrac{\mathrm{d}u}{(u-1)^2}\,/ = -\int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u)}{1-\frac{u}{u-1}}\,\frac{\mathrm{d}u}{(u-1)^2} =$

$\displaystyle = \int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u)}{u-1}\,\mathrm{d}u = -\int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u)}{1-u}\,\mathrm{d}u = -\mathrm{Li}_{(1,s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u) = -\mathrm{Li}_{(1,s_1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\frac{x}{x-1}\right)$

11. $$\mathscr{I}(1)\left[\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\tfrac{x-1}{x}\right)\right] := \int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\frac{x-1}{x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Li}_{(1,s_1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\tfrac{x-1}{x}\right)$$

Mert, $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\frac{x-1}{x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x = /\, u=\tfrac{x-1}{x},\ x=\tfrac{1}{1-u}, \mathrm{d}x = \tfrac{\mathrm{d}u}{(1-u)^2}\,/ = \int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u)}{\frac{1}{1-u}}\,\frac{\mathrm{d}u}{(1-u)^2} =$

$\displaystyle= \int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u)}{1-u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{Li}_{(1,s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u) = \mathrm{Li}_{(1,s_1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\tfrac{x-1}{x}\right)$

12. $$\mathscr{I}(\bar{1})\left[\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\tfrac{x-1}{x}\right)\right] := \int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\frac{x-1}{x}\right)}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{Li}_{(1,s_1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\tfrac{x-1}{x}\right) - \mathrm{Li}_{(s_1+1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\tfrac{x-1}{x}\right)$$

Mert, $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\frac{x-1}{x}\right)}{1-x}\,\mathrm{d}x = /\, u=\tfrac{x-1}{x},\ x=\tfrac{1}{1-u}, \mathrm{d}x = \tfrac{\mathrm{d}u}{(1-u)^2}\,/ = \int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u)}{1-\frac{1}{1-u}}\,\frac{\mathrm{d}u}{(1-u)^2} =$

$\displaystyle= -\int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u)}{u\,(1-u)}\,\mathrm{d}u = -\left(\int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u)}{1-u}\,\mathrm{d}u + \int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u)}{u}\,\mathrm{d}u\right) = -\int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u)}{1-u}\,\mathrm{d}u -$

$\displaystyle- \int \frac{\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u)}{u}\,\mathrm{d}u = -\mathrm{Li}_{(1,s_1,s_2,\ldots,s_r)}(u) - \mathrm{Li}_{(s_1+1,s_2,\ldots,s_r)}(u) = -\mathrm{Li}_{(1,s_1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\tfrac{x-1}{x}\right) - \mathrm{Li}_{(s_1+1,s_2,\ldots,s_r)}\left(\tfrac{x-1}{x}\right)$

A fenti eredményekben az a közös, hogy polilogaritmus függvény indexvektorában az $s_2,\ldots,s_r$ elemek nem változnak meg. Ez azt jelenti, hogy egy általános integráloperátornak tetszőleges általánosított polilogaritmus függvényen vett hatása mindig megkapható az integráloperátornak egy (szimpla) polilogaritmus függvényen vett hatásából. Formálisan:

Ha $\mathscr{I}(a_1,\bar{a}_2,a_3,\ldots)\left[\mathrm{Li}_{(s_1)}(X)\right] = \mathrm{Li}_{(t_1,t_2,\ldots,t_k)}(X)$, akkor $\mathscr{I}(a_1,\bar{a}_2,a_3,\ldots)\left[\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)}(X)\right] = \mathrm{Li}_{(t_1,t_2,\ldots,t_k,s_2,\ldots,s_r)}(X)$

Például, ha $\mathscr{I}(a_1,\bar{a}_2,a_3,\ldots)\left[\mathrm{Li}_{(2)}(X)\right] = \mathrm{Li}_{(1,2,4,1)}(X)$, akkor $\mathscr{I}(a_1,\bar{a}_2,a_3,\ldots)\left[\mathrm{Li}_{(2,3,2)}(X)\right] = \mathrm{Li}_{(1,2,4,1,3,2)}(X)$.

Ezzen rendkívül jelentős tétel hatásával találkozhatunk az $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{(2,3)}(x)\,\mathrm{Li}_{(2,1,4)}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ integrál kiszámításakor is.

$\mathrm{Li}_a(x)$	$(2,3)$	$\overset{\text{init}}{\to}$	$+(2,3)$	$\overset{\text{std}}{\to}$	$-(1,3)$	$\overset{\text{atv}}{\to}$	$+(3)$	$\overset{\text{std}}{\to}$	$-(2)$	$\overset{\text{std}}{\to}$	$+(1)$	$\overset{\text{veg}}{\to}$	$-()$
$\mathrm{Li}_b(x)$	$(2,1,4)$		$+(3,1,4)$		$+(4,1,4)$		$+(1,4,1,4)$		$+(2,4,1,4)$		$+(3,4,1,4)$		$+(1,3,4,1,4)$

A tétel szerint elegendő csak az $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{(2,3)}(x)\,\mathrm{Li}_{(2,1,4)}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ integrált kiszámítani majd minden vektor végéhez az $1,4$ elemeket fűzni.

$\mathrm{Li}_a(x)$	$(2,3)$	$\overset{\text{init}}{\to}$	$+(2,3)$	$\overset{\text{std}}{\to}$	$-(1,3)$	$\overset{\text{atv}}{\to}$	$+(3)$	$\overset{\text{std}}{\to}$	$-(2)$	$\overset{\text{std}}{\to}$	$+(1)$	$\overset{\text{veg}}{\to}$	$-()$
$\mathrm{Li}_b(x)$	(2)		$+(3)$		$+(4)$		$+(1,4)$		$+(2,4)$		$+(3,4)$		$+(1,3,4)$

Tetszőleges intágrálnál ugyanezt tapasztalhatjuk. Ha az $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Le}_{(2,3)}(x)\cdot\mathrm{Li}_{(5,2,1)}(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$ integrált számítjuk ki, akkor

$\mathrm{Le}_a(x)$	$(2,3)$	$\overset{\text{init}}{\to}$	$+(2,3)$	$\overset{\text{std}}{\to}$	$-(1,3)$	$\overset{\text{atv}}{\to}$	$+(3)$	$\overset{\text{std}}{\to}$	$-(2)$	$\overset{\text{std}}{\to}$	$+(1)$	$\overset{\text{veg}}{\to}$	$-()$
$\mathrm{Li}_b(1-x)$	$(5,2,1)$		$-(6,2,1)$		$+(1,6,2,1)$		$-(1,1,6,2,1)$ $-(2,6,2,1)$		$+(1,1,1,6,2,1)$ $+(1,2,6,2,1)$		$-(1,1,1,1,6,2,1)$ $-(1,1,2,6,2,1)$		$+(2,1,1,1,6,2,1)$ $+(2,1,2,6,2,1)$

Most is elegendő lenne csak az $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Le}_{(2,3)}(x)\cdot\mathrm{Li}_{(5)}(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$ integrált kiszámítani:

$\mathrm{Le}_a(x)$	$(2,3)$	$\overset{\text{init}}{\to}$	$+(2,3)$	$\overset{\text{std}}{\to}$	$-(1,3)$	$\overset{\text{atv}}{\to}$	$+(3)$	$\overset{\text{std}}{\to}$	$-(2)$	$\overset{\text{std}}{\to}$	$+(1)$	$\overset{\text{veg}}{\to}$	$-()$
$\mathrm{Li}_b(1-x)$	(5)		$-(6)$		$+(1,6)$		$-(1,1,6)$ $-(2,6)$		$+(1,1,1,6)$ $+(1,2,6)$		$-(1,1,1,1,6)$ $-(1,1,2,6)$		$+(2,1,1,1,6)$ $+(2,1,2,6)$

Sőt, még ennél is többet állíthatunk: az $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Le}_{(2,3)}(x)\cdot \mathrm{Li}_{(5)}(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$ integrál helyett elegendő az $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Le}_{(2,3)}(x)\cdot \mathrm{Li}_{(0)}(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$ integrált kiszámítani. Ebből ugyanis az $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Le}_{(2,3)}(x)\cdot \mathrm{Li}_{(5)}(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$ integrál megkapató úgy, hogy az integráló sorban minden vektor utólsó elemét (ibolya) 5-tel megnöveljük.

$$\begin{array}{c|c} \mathrm{Le}_a(x) & (2,3) \\ \hline \mathrm{Li}_b(1-x) & (\mathbf{0}) \end{array} \overset{\text{init}}{\to} \begin{array}{l} +(2,3) \\ \hline -(\mathbf{1}) \end{array} \overset{\text{std}}{\to} \begin{array}{l} -(1,3) \\ \hline +(1,\mathbf{1}) \end{array} \overset{\text{atv}}{\to} \begin{array}{l} +(3) \\ \hline -(1,1,\mathbf{1}) \\ -(2,\mathbf{1}) \end{array} \overset{\text{std}}{\to} \begin{array}{l} -(2) \\ \hline +(1,1,1,\mathbf{1}) \\ +(1,2,\mathbf{1}) \end{array} \overset{\text{std}}{\to} \begin{array}{l} +(1) \\ \hline -(1,1,1,1,\mathbf{1}) \\ -(1,1,2,\mathbf{1}) \end{array} \overset{\text{veg}}{\to} \begin{array}{l} -() \\ \hline +(2,1,1,1,\mathbf{1}) \\ +(2,1,2,\mathbf{1}) \end{array}$$

Az $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Le}_{(4,2,3)}(x)\cdot \mathrm{Li}_{(4,3,5,3)}(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x =$

$$\begin{array}{c|c} \mathrm{Le}_a(x) & (4,2,3) \\ \hline \mathrm{Li}_b(1-x) & (4,3,5,3) \end{array} \overset{\text{init}}{\to} \begin{array}{l} +(4,2,3) \\ \hline -(5,3,5,3) \end{array} \overset{\text{std}}{\to} \begin{array}{l} -(3,2,3) \\ \hline +(1,5,3,5,3) \end{array} \overset{\text{std}}{\to} \begin{array}{l} +(2,2,3) \\ \hline -(1,1,5,3,5,3) \end{array} \overset{\text{std}}{\to} \begin{array}{l} -(1,2,3) \\ \hline +(1,1,1,5,3,5,3) \end{array} \overset{\text{atv}}{\to}$$

$$\overset{\text{atv}}{\to} \begin{array}{l} +(2,3) \\ \hline -(1,1,1,1,5,3,5,3) \\ -(2,1,1,5,3,5,3) \end{array} \overset{\text{std}}{\to} \begin{array}{l} -(1,3) \\ \hline +(1,1,1,1,1,5,3,5,3) \\ +(1,2,1,1,5,3,5,3) \end{array} \overset{\text{atv}}{\to} \begin{array}{l} +(3) \\ \hline -(1,1,1,1,1,1,5,3,5,3) \\ -(1,1,2,1,1,5,3,5,3) \\ -(2,1,1,1,1,5,3,5,3) \\ -(2,2,1,1,5,3,5,3) \end{array} \overset{\text{std}}{\to}$$

$$\overset{\text{std}}{\to} \begin{array}{l} -(2) \\ \hline +(1,1,1,1,1,1,1,5,3,5,3) \\ +(1,1,1,2,1,1,5,3,5,3) \\ +(1,2,1,1,1,1,5,3,5,3) \\ +(1,2,2,1,1,5,3,5,3) \end{array} \overset{\text{std}}{\to} \begin{array}{l} +(1) \\ \hline -(1,1,1,1,1,1,1,1,5,3,5,3) \\ -(1,1,1,1,2,1,1,5,3,5,3) \\ -(1,1,2,1,1,1,1,5,3,5,3) \\ -(1,1,2,2,1,1,5,3,5,3) \end{array} \overset{\text{veg}}{\to} \begin{array}{l} -() \\ \hline +(2,1,1,1,1,1,1,1,5,3,5,3) \\ +(2,1,1,1,2,1,1,5,3,5,3) \\ +(2,1,2,1,1,1,1,5,3,5,3) \\ +(2,1,2,2,1,1,5,3,5,3) \end{array}$$

integrál megkapható az $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Le}_{(4,2,3)}(x)\cdot \mathrm{Li}_{(0)}(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x =$

$$\begin{array}{c|c} \mathrm{Le}_a(x) & (4,2,3) \\ \hline \mathrm{Li}_b(1-x) & (0) \end{array} \overset{\text{init}}{\to} \begin{array}{l} +(4,2,3) \\ \hline -(1) \end{array} \overset{\text{std}}{\to} \begin{array}{l} -(3,2,3) \\ \hline +(1,1) \end{array} \overset{\text{std}}{\to} \begin{array}{l} +(2,2,3) \\ \hline -(1,1,1) \end{array} \overset{\text{std}}{\to} \begin{array}{l} -(1,2,3) \\ \hline +(1,1,1,1) \end{array} \overset{\text{atv}}{\to} \begin{array}{l} +(2,3) \\ \hline -(1,1,1,1,1) \\ -(2,1,1,1) \end{array} \overset{\text{std}}{\to}$$

$$\begin{array}{l} -(1,3) \\ \hline +(1,1,1,1,1,1) \\ +(1,2,1,1,1) \end{array} \overset{\text{atv}}{\to} \begin{array}{l} +(3) \\ \hline -(1,1,1,1,1,1,1) \\ -(1,1,2,1,1,1) \\ -(2,1,1,1,1,1) \\ -(2,2,1,1,1) \end{array} \overset{\text{std}}{\to} \begin{array}{l} -(2) \\ \hline +(1,1,1,1,1,1,1,1) \\ +(1,1,1,2,1,1,1) \\ +(1,2,1,1,1,1,1) \\ +(1,2,2,1,1,1) \end{array} \overset{\text{std}}{\to} \begin{array}{l} +(1) \\ \hline -(1,1,1,1,1,1,1,1,1) \\ -(1,1,1,1,2,1,1,1) \\ -(1,1,2,1,1,1,1,1) \\ -(1,1,2,2,1,1,1) \end{array} \overset{\text{veg}}{\to} \begin{array}{l} -() \\ \hline +(2,1,1,1,1,1,1,1,1) \\ +(2,1,1,1,2,1,1,1) \\ +(2,1,2,1,1,1,1,1) \\ +(2,1,2,2,1,1,1) \end{array}$$

integrálból úgy, hogy az integráló sorban minden vektor utólsó eleméhez hozzáadunk 4-et és a kapott vektor végéhez az $3,5,3$ elemeket fűzzük:

$$\begin{array}{c|c} \mathrm{Le}_a(x) & (4,2,3) \\ \hline \mathrm{Li}_b(1-x) & (0{+}\mathbf{4},3,5,3) \end{array} \overset{\text{init}}{\to} \begin{array}{l} +(4,2,3) \\ \hline -(1{+}\mathbf{4},3,5,3) \end{array} \overset{\text{std}}{\to} \begin{array}{l} -(3,2,3) \\ \hline +(1,1{+}\mathbf{4},3,5,3) \end{array} \overset{\text{std}}{\to} \begin{array}{l} +(2,2,3) \\ \hline -(1,1,1{+}\mathbf{4},3,5,3) \end{array} \overset{\text{std}}{\to} \begin{array}{l} -(1,2,3) \\ \hline +(1,1,1,1{+}\mathbf{4},3,5,3) \end{array} \overset{\text{atv}}{\to}$$

$$\begin{array}{l} +(2,3) \\ \hline -(1,1,1,1,1{+}\mathbf{4},3,5,3) \\ -(2,1,1,1{+}\mathbf{4},3,5,3) \end{array} \overset{\text{std}}{\to} \begin{array}{l} -(1,3) \\ \hline +(1,1,1,1,1,1{+}\mathbf{4},3,5,3) \\ +(1,2,1,1,1{+}\mathbf{4},3,5,3) \end{array} \overset{\text{atv}}{\to} \begin{array}{l} +(3) \\ \hline -(1,1,1,1,1,1,1{+}\mathbf{4},3,5,3) \\ -(1,1,2,1,1,1{+}\mathbf{4},3,5,3) \\ -(2,1,1,1,1,1{+}\mathbf{4},3,5,3) \\ -(2,2,1,1,1{+}\mathbf{4},3,5,3) \end{array} \overset{\text{std}}{\to}$$

$$\begin{array}{l} -(2) \\ \hline +(1,1,1,1,1,1,1,1{+}\mathbf{4},3,5,3) \\ +(1,1,1,2,1,1,1{+}\mathbf{4},3,5,3) \\ +(1,2,1,1,1,1,1{+}\mathbf{4},3,5,3) \\ +(1,2,2,1,1,1{+}\mathbf{4},3,5,3) \end{array} \overset{\text{std}}{\to} \begin{array}{l} +(1) \\ \hline -(1,1,1,1,1,1,1,1,1{+}\mathbf{4},3,5,3) \\ -(1,1,1,1,2,1,1,1{+}\mathbf{4},3,5,3) \\ -(1,1,2,1,1,1,1,1{+}\mathbf{4},3,5,3) \\ -(1,1,2,2,1,1,1{+}\mathbf{4},3,5,3) \end{array} \overset{\text{veg}}{\to} \begin{array}{l} -() \\ \hline +(2,1,1,1,1,1,1,1,1{+}\mathbf{4},3,5,3) \\ +(2,1,1,1,2,1,1,1{+}\mathbf{4},3,5,3) \\ +(2,1,2,1,1,1,1,1{+}\mathbf{4},3,5,3) \\ +(2,1,2,2,1,1,1{+}\mathbf{4},3,5,3) \end{array}$$

A fentieket az alábbi tételben foglalhatjuk össze:

Tétel. Az $\mathrm{L}_{\boldsymbol{a}} = \mathrm{Li}/\mathrm{Le}$, $\mathrm{L}_{\boldsymbol{b}} = \mathrm{Li}/\mathrm{Le}$ függvényekkel, illetve $X_a, X_b = x/1-x/\frac{1}{x}/\frac{1}{1-x}/\frac{x}{x-1}/\frac{x-1}{x},\dots$ változókkal felírt általános

$$\int \frac{\mathrm{L}_{\boldsymbol{a}}(X_a)\cdot \mathrm{L}_{\boldsymbol{b}}(X_b)}{X}\,\mathrm{d}x$$

integrál, ahol $\mathrm{L}_{\boldsymbol{a}}$ mindig az integrálósorba, $\mathrm{L}_{\boldsymbol{b}}$ pedig a deriválósorba kerülő függvényt jelöli, egyszerűen megkapható az

$$\int \frac{\mathrm{L}_{\boldsymbol{a}}(X_a)\cdot \mathrm{L}_{(0)}(X_b)}{X}\,\mathrm{d}x$$

integrálból. Ezt nevezzük *az általános polilogaritmikus integrálok redukciójának.*

Példa: Az **(A)**

$$\int \frac{\mathrm{Le}_{(5,3,2)}(1-x)\cdot \mathrm{Li}_{(2,4)}(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x \qquad\qquad \begin{bmatrix} {}^{+}\boldsymbol{b} & -\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right) \\ -\left({}^{+}\boldsymbol{b} + {}_{+}\boldsymbol{b}\right) & -\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right) \end{bmatrix}$$

általános integrálási feladat helyett elegendő az **(A0)**

$$\int \frac{\mathrm{Le}_{(5,3,2)}(1-x)\cdot \mathrm{Li}_{(0)}(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x \qquad\qquad \begin{bmatrix} {}^{+}\boldsymbol{b} & -\left({}^{+}\boldsymbol{b}\right) \\ -\left({}^{+}\boldsymbol{b} + {}_{+}\boldsymbol{b}\right) & -\left({}_{+}\boldsymbol{b}\right) \end{bmatrix}$$

feladatot megoldani, majd az integrálósorban minden vektor utolsó elemét 5-tel megnövelni, majd a $(3,2)$ vektorral a végén megtoldani. Az **(A0) megoldása:**

$$\begin{array}{c|c} \mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{1-x}) & \boldsymbol{(2,4)} \\ \hline \mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{(0)} \end{array} \overset{\text{init}}{\to} \begin{array}{c} +(2,4) \\ \hline +(1,0) \end{array} \overset{\text{std}}{\to} \begin{array}{c} -(1,4) \\ \hline -(1,1,0) \end{array} \overset{\text{atv}}{\to} \begin{array}{l} +(4) \\ \hline +(1,1,1,0) \\ +(2,1,0) \end{array} \overset{\text{std}}{\to} \begin{array}{l} -(3) \\ \hline -(1,1,1,1,0) \\ -(1,2,1,0) \end{array} \overset{\text{std}}{\to} \begin{array}{l} +(2) \\ \hline +(1,1,1,1,1,0) \\ +(1,1,2,1,0) \end{array} \overset{\text{std}}{\to}$$

$$\begin{array}{l} -(1) \\ \hline -(1,1,1,1,1,1,0) \\ -(1,1,1,2,1,0) \end{array} \overset{\text{veg}}{\to} \begin{array}{l} +() \\ \hline +(2,1,1,1,1,1,0) \\ +(2,1,1,2,1,0) \end{array}$$

A szükséges növeléssel és toldással megkapjuk **(A)** az megoldását:

$$\begin{array}{c|c} \mathrm{Le}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{1-x}) & \boldsymbol{(2,4)} \\ \hline \mathrm{Li}_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{(0{\color{blue}+5},{\color{magenta}3,2})} \end{array} \overset{\text{init}}{\to} \begin{array}{c} +(2,4) \\ \hline +(1,0+5,{\color{magenta}3,2}) \end{array} \overset{\text{std}}{\to} \begin{array}{c} -(1,4) \\ \hline -(1,1,0+5,{\color{magenta}3,2}) \end{array} \overset{\text{atv}}{\to} \begin{array}{l} +(4) \\ \hline +(1,1,1,0+5,{\color{magenta}3,2}) \\ +(2,1,0+5,{\color{magenta}3,2}) \end{array} \overset{\text{std}}{\to}$$

$$\begin{array}{l} -(3) \\ \hline -(1,1,1,1,0+5,{\color{magenta}3,2}) \\ -(1,2,1,0+5,{\color{magenta}3,2}) \end{array} \overset{\text{std}}{\to} \begin{array}{l} +(2) \\ \hline +(1,1,1,1,1,0+5,{\color{magenta}3,2}) \\ +(1,1,2,1,0+5,{\color{magenta}3,2}) \end{array} \overset{\text{std}}{\to} \begin{array}{l} -(1) \\ \hline -(1,1,1,1,1,1,0+5,{\color{magenta}3,2}) \\ -(1,1,1,2,1,0+5,{\color{magenta}3,2}) \end{array} \overset{\text{veg}}{\to} \begin{array}{l} +() \\ \hline +(2,1,1,1,1,1,0+5,{\color{magenta}3,2}) \\ +(2,1,1,2,1,0+5,{\color{magenta}3,2}) \end{array}$$

5 Az $\int x^n \,\mathbf{Li}_{(s_1,s_2,\dots,s_r)}(x)\,\mathbf{d}x$ $(s_1,\dots,s_r \geq 1)$ határozatlan integrál kiszámítása a $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ intervallumon

Az $\int x^n \,\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\dots,s_r)}(x)\,\mathrm{d}x$ integrál kiszámítása során használni fogjuk az $\mathrm{Li}_{(\underbrace{a,\dots,a}_{n},\underbrace{b,\dots,b}_{m},\dots)}(x) = \mathrm{Li}_{(a^n,b^m,\dots)}(x)$ jelölést, illetve az alábbi azonosságokat

$$\mathrm{Li}_{(0^m)}\left(\frac{x}{x-1}\right) = (-x)^m \quad \left(0 < x < \frac{1}{2}\right) \tag{1}$$

$$\mathrm{Li}_{(0^m)}\left(\frac{x}{x-1}\right)\cdot \mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\dots,s_r)}\left(\frac{x}{x-1}\right) = \mathrm{Li}_{(0^m,s_1,s_2,\dots,s_r)}\left(\frac{x}{x-1}\right) \quad \left(0 < x < \frac{1}{2}\right) \tag{2}$$

A fenti eredményekre támaszkodva a keresett határozattlan integrál egy lehetséges kiszámítása az alábbi:

$$\int x^n \operatorname{Li}_{(s_1,s_2,\dots,s_r)}(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^{n+1}}{x}\operatorname{Li}_{(s_1,s_2,\dots,s_r)}(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{(-1)^{n+1}\operatorname{Li}_{(0^{n+1})}\left(\frac{x}{x-1}\right)(-1)^{|\mathbf{s}|}\sum_{\mathbf{k}\succeq\mathbf{s}}\operatorname{Li}_{\mathbf{k}}\left(\frac{x}{x-1}\right)}{x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= (-1)^{|\mathbf{s}|+n+1}\sum_{\mathbf{k}\succeq\mathbf{s}}\int \frac{\operatorname{Li}_{(0^{n+1})}\left(\frac{x}{x-1}\right)\operatorname{Li}_{\mathbf{k}}\left(\frac{x}{x-1}\right)}{x}\,\mathrm{d}x = (-1)^{|\mathbf{s}|+n+1}\sum_{\mathbf{k}\succeq\mathbf{s}}\int \frac{\operatorname{Li}_{(0^{n+1},\mathbf{k})}\left(\frac{x}{x-1}\right)}{x}\,\mathrm{d}x = /\ u = \frac{x}{x-1},$$

$$,\ x = \frac{u}{u-1},\ \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}u}{(u-1)^2}\ / = (-1)^{|\mathbf{s}|+n}\sum_{\mathbf{k}\succeq\mathbf{s}}\int \frac{\operatorname{Li}_{(0^{n+1},\mathbf{k})}(u)}{\frac{u}{\cancel{u-1}}}\,\frac{\mathrm{d}u}{(u-1)^{\cancel{2}}} = (-1)^{|\mathbf{s}|+n}\sum_{\mathbf{k}\succeq\mathbf{s}}\int \frac{\operatorname{Li}_{(0^{n+1},\mathbf{k})}(u)}{u(u-1)}\,\mathrm{d}u =$$

$$= (-1)^{|\mathbf{s}|+n}\sum_{\mathbf{k}\succeq\mathbf{s}}\int \left(\frac{\operatorname{Li}_{(0^{n+1},\mathbf{k})}(u)}{u-1} - \frac{\operatorname{Li}_{(0^{n+1},\mathbf{k})}(u)}{u}\right)\mathrm{d}u = (-1)^{|\mathbf{s}|+n}\sum_{\mathbf{k}\succeq\mathbf{s}}\int \left(-\frac{\operatorname{Li}_{(0^{n+1},\mathbf{k})}(u)}{1-u} - \frac{\operatorname{Li}_{(0^{n+1},\mathbf{k})}(u)}{u}\right)\mathrm{d}u =$$

$$= (-1)^{|\mathbf{s}|+n+1}\sum_{\mathbf{k}\succeq\mathbf{s}}\int \left(\frac{\operatorname{Li}_{(0^{n+1},\mathbf{k})}(u)}{1-u} + \frac{\operatorname{Li}_{(0^{n+1},\mathbf{k})}(u)}{u}\right)\mathrm{d}u = (-1)^{|\mathbf{s}|+n+1}\sum_{\mathbf{k}\succeq\mathbf{s}}\left[\operatorname{Li}_{(1,0^{n+1},\mathbf{k})}(u) + \operatorname{Li}_{(1,0^{n},\mathbf{k})}(u)\right] =$$

$$= (-1)^{|\mathbf{s}|+n+1}\sum_{\mathbf{k}\succeq\mathbf{s}}\left[\operatorname{Li}_{(1,0^{n+1},\mathbf{k})}\left(\frac{x}{x-1}\right) + \operatorname{Li}_{(1,0^{n},\mathbf{k})}\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]$$

6 Az $\int x^n\, \mathbf{Li}_{(b_1,b_2,\dots,b_t)}(x)\, \mathbf{Li}_{(a_1,a_2,\dots,a_r)}(1-x)\, \mathbf{d}x\ \ (a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m \geq 1)$ határozatlan integrál kiszámítása a $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ intervallumon

Az alábbi azonosságokat használjuk

$$\operatorname{Li}_{\mathbf{s}}(x) = (-1)^{|\mathbf{s}|}\sum_{\mathbf{k}\succeq\mathbf{s}}\operatorname{Li}_{\mathbf{k}}\left(\frac{x}{x-1}\right)\quad\left(0<x<\frac{1}{2}\right)\quad\text{(Landen's connection)}\tag{3}$$

$$\operatorname{Li}_{(0^m)}\left(\frac{x}{x-1}\right) = (-x)^m\quad\left(0<x<\frac{1}{2}\right)\tag{4}$$

$$\operatorname{Li}_{(0^m)}\left(\frac{x}{x-1}\right)\cdot\operatorname{Li}_{(s_1,s_2,,\dots,s_r)}\left(\frac{x}{x-1}\right) = \operatorname{Li}_{(0^m,s_1,s_2,,\dots,s_r)}\left(\frac{x}{x-1}\right)\quad\left(0<x<\frac{1}{2}\right)\tag{5}$$

Az $x^n \operatorname{Li}_{\mathbf{b}}(x) \operatorname{Li}_{\mathbf{a}}(1-x)$ integranduszt a fenti azonosságok segítségével átalakítjuk.

$$x^n \operatorname{Li}_{\mathbf{b}}(x) \operatorname{Li}_{\mathbf{a}}(1-x) = \frac{x^{n+1}}{x} \operatorname{Li}_{\mathbf{b}}(x) \operatorname{Li}_{\mathbf{a}}(1-x) = \frac{(-1)^{t+1} \operatorname{Li}_{(0^{t+1})}\left(\frac{x}{x-1}\right) (-1)^{|\mathbf{b}|} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{b}} \operatorname{Li}_{\mathbf{k}}\left(\frac{x}{x-1}\right) \operatorname{Li}_{\mathbf{a}}(1-x)}{x} =$$

$$= (-1)^{|\mathbf{b}|+n+1} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{b}} \frac{\operatorname{Li}_{(0^{t+1})}\left(\frac{x}{x-1}\right) \operatorname{Li}_{\mathbf{k}}\left(\frac{x}{x-1}\right) \operatorname{Li}_{\mathbf{a}}(1-x)}{x} = (-1)^{|\mathbf{b}|+n+1} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{b}} \frac{\operatorname{Li}_{(0^{t+1},\mathbf{k})}\left(\frac{x}{x-1}\right) \operatorname{Li}_{\mathbf{a}}(1-x)}{x} =$$

$$= (-1)^{|\mathbf{b}|+n+1} \sum_{\mathbf{k} \succeq \mathbf{b}} \frac{\operatorname{Li}_{(0^{t+1},\mathbf{k})}\left(\frac{x}{x-1}\right) \operatorname{Li}_{\mathbf{a}}(1-x)}{x}$$

Ezzel az $\int x^n \operatorname{Li}_{\mathbf{b}}(x) \operatorname{Li}_{\mathbf{a}}(1-x)\, \mathrm{d}x$ integrált visszavezettük $\int \frac{\operatorname{Li}_{(0^{t+1},\mathbf{k})}\left(\frac{x}{x-1}\right)\operatorname{Li}_{\mathbf{a}}(1-x)}{x}\, \mathrm{d}x$ integrálokra, így elegendő az

$$\boxed{\int \frac{\operatorname{Li}_{\mathbf{a}}(1-x) \operatorname{Li}_{\mathbf{b}}\left(\frac{x}{x-1}\right)}{x}\, \mathrm{d}x}$$

általános integrálokat megadni. Feladatunk az inicializálás, standard lépés, 1-átvitel és 1-ürítés kiszámítása lenne.
Az alábbi indulást választjuk

$\mathscr{D}$	$\operatorname{Li}_{(a_1,a_2,\ldots,a_n)}(1-x)$	$\cdots$	$\cdots$
$\mathscr{I}$	$\frac{\operatorname{Li}_{(b_1,b_2,\ldots,b_m)}\left(\frac{x}{x-1}\right)}{x}$	$\cdots$	$\cdots$

Inicializálás

$\mathscr{D}$	$\operatorname{Li}_{(a_1,a_2,\ldots,a_r)}(1-x)$	$\cdots$	$\cdots$
$\mathscr{I}$	$\frac{\operatorname{Li}_{(b_1,b_2,\ldots,b_t)}\left(\frac{x}{x-1}\right)}{x}$	$\operatorname{Li}_{(1,b_1,b_2,\ldots,b_t)}\left(\frac{x}{x-1}\right) + \operatorname{Li}_{(1+b_1,b_2,\ldots,b_t)}\left(\frac{x}{x-1}\right)$	$\cdots$

$$\boldsymbol{b} \to {}^{+}\boldsymbol{b} + {}_{+}\boldsymbol{b}, \text{ azaz } (\lfloor b_1, \ldots) \overset{\text{init}}{\to} \begin{matrix} (\lfloor 1, b_1, \ldots) \\ (\lfloor 1 + b_1, \ldots) \end{matrix}$$

Ez azt jelenti, hogy rögtön az inicializáláskor hasadás lép fel.

Standard lépés

$\operatorname{Li}_{(a_1,a_2,\ldots,a_n)}(1-x)$	...	$\operatorname{Li}_{(3,\ldots)}(1-x)$	$-\frac{\operatorname{Li}_{(2,\ldots)}(1-x)}{1-x}$	$-\operatorname{Li}_{(2,,\ldots)}(x)$	...	...
$\frac{\operatorname{Li}_{(b_1,b_2,\ldots,b_t)}\left(\frac{x}{x-1}\right)}{x}$	...	...	$\operatorname{Li}_{(5,\ldots.)}\left(\frac{x}{x-1}\right)$	$\frac{\operatorname{Li}_{(5,\ldots)}\left(\frac{x}{x-1}\right)}{1-x}$	$-\operatorname{Li}_{(1,5,\ldots)}\left(\frac{x}{x-1}\right)$	...

$$\boldsymbol{b} \to {}^{+}\boldsymbol{b}, \text{ azaz } (a, \ldots \lfloor b, \ldots) \overset{\text{std}}{\to} (a-1, \ldots \lfloor 1, b, \ldots)$$

1-átvitel

$$
\begin{array}{c|c||c|c||c|c||c}
\mathrm{Li}_{(a_1,a_2,\ldots,a_n)}(1-x) & \ldots & \mathrm{Li}_{(1,3,\ldots)}(1-x) & -\dfrac{\mathrm{Li}_{(3,\ldots)}(1-x)}{x} & -\mathrm{Li}_{(3,\ldots)}(x) & \ldots & \ldots \\
\hline
-\dfrac{\mathrm{Li}_{(0)}\left(\frac{x}{x-1}\right)}{1-x} & \ldots & \ldots & \mathrm{Li}_{(5,\ldots.)}\left(\frac{x}{x-1}\right) & \dfrac{\mathrm{Li}_{(5,\ldots)}\left(\frac{x}{x-1}\right)}{x} & \mathrm{Li}_{(1,5,\ldots)}\left(\frac{x}{x-1}\right)+\mathrm{Li}_{(1+5,\ldots)}\left(\frac{x}{x-1}\right) & \ldots
\end{array}
$$

$$
\boldsymbol{b} \to -\left({}^{+}\boldsymbol{b} + {}_{+}\boldsymbol{b}\right), \text{ azaz } (1, a, \ldots \lfloor b, \ldots) \overset{\text{atv}}{\to} \begin{array}{l} -(a, \ldots \lfloor 1, b, \ldots) \\ -(a, \ldots \lfloor b+1, \ldots) \end{array}
$$

1-ürítés

$$
\begin{array}{c|c||c|c||c|c}
\mathrm{Li}_{(a_1,a_2,\ldots,a_n)}(1-x) & \ldots & \mathrm{Li}_{(1)}(1-x) & -\dfrac{\mathrm{Li}_{(0)}(1-x)}{1-x} = -\dfrac{1}{x} & -\mathrm{Li}_{()}(x) = -1 & 0 \\
\hline
-\dfrac{\mathrm{Li}_{(0)}\left(\frac{x}{x-1}\right)}{1-x} & \ldots & \ldots & \mathrm{Li}_{(5,\ldots.)}\left(\frac{x}{x-1}\right) & \dfrac{\mathrm{Li}_{(5,\ldots)}\left(\frac{x}{x-1}\right)}{x} & \mathrm{Li}_{(1,5,\ldots)}\left(\frac{x}{x-1}\right)+\mathrm{Li}_{(1+5,\ldots)}\left(\frac{x}{x-1}\right)
\end{array}
$$

$$
\boldsymbol{b} \to -\left({}^{+}\boldsymbol{b} + {}_{+}\boldsymbol{b}\right), \text{ azaz } (1 \lfloor b, \ldots) \overset{\text{atv}}{\to} \begin{array}{l} -(\lfloor 1, b, \ldots) \\ -(\lfloor b+1, \ldots) \end{array}
$$

Az $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(1-x)\,\mathrm{Li}_{\mathbf{b}}\left(\frac{x}{x-1}\right)}{x}\,\mathrm{d}x$ feladat fázisátmenet mátrixa

$$
\begin{bmatrix} \overset{\text{init}}{\to} & \overset{\text{std}}{\to} \\ \\ \overset{\text{atv}}{\to} & \overset{\text{veg}}{\to} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{+}\boldsymbol{b} + {}_{+}\boldsymbol{b} & {}^{+}\boldsymbol{b} \\ \\ -\left({}^{+}\boldsymbol{b} + {}_{+}\boldsymbol{b}\right) & -\left({}^{+}\boldsymbol{b} + {}_{+}\boldsymbol{b}\right) \end{bmatrix}
$$

1. Példa: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{(2)}(1-x)\,\mathrm{Li}_{(3)}\left(\frac{x}{x-1}\right)}{x}\,\mathrm{d}x$

$$
\begin{array}{c|c}
\mathrm{Li}_a(1-x) & (2) \\
\hline
\mathrm{Le}_b\left(\frac{x}{x-1}\right) & (3)
\end{array}
\overset{\text{init}}{\to}
\begin{array}{l}
(2) \\
\hline
+(1,3) \\
+(4)
\end{array}
\overset{\text{std}}{\to}
\begin{array}{l}
-(1) \\
\hline
+(1,1,3) \\
+(1,4)
\end{array}
\overset{\text{veg}}{\to}
\begin{array}{l}
() \\
\hline
-(1,1,1,3) \\
-(1,1,4) \\
-(2,1,3) \\
-(2,4)
\end{array}
$$

Ha redukciót alkalmazunk, akkor

$$
\begin{array}{c|c}
\mathrm{Li}_a(1-x) & (2) \\
\hline
\mathrm{Le}_b\left(\frac{x}{x-1}\right) & (0)
\end{array}
\overset{\text{init}}{\to}
\begin{array}{l}
(2) \\
\hline
+(1,0) \\
+(1)
\end{array}
\overset{\text{std}}{\to}
\begin{array}{l}
-(1) \\
\hline
+(1,1,0) \\
+(1,1)
\end{array}
\overset{\text{veg}}{\to}
\begin{array}{l}
() \\
\hline
-(1,1,1,0) \\
-(1,1,1) \\
-(2,1,0) \\
-(2,1)
\end{array}
$$

Most már rátérhetünk $\displaystyle\int x^n\,\mathrm{Li}_{(3)}(x)\,\mathrm{Li}_{(2,2)}(1-x)\,\mathrm{d}x$ kiszámítására

I. $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{Li}_{(3)}(x)\,\mathrm{Li}_{(2,2)}(1-x)\,\mathrm{d}x = (-1)^{1+2+1} \sum_{\mathbf{k}\succeq(3)} \int \frac{\mathrm{Li}_{(0^2,\mathbf{k})}\left(\frac{x}{x-1}\right)\mathrm{Li}_{(2,2)}(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x$

$\{\mathbf{k} : (3) \preceq \mathbf{k}\} = \{(3), (1,2), (2,1), (1,1,1)\}$

II. Redukciót alkalmazva a $(0,\mathbf{k})$ vektorral az integrálósorban elegendő az $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{(0)}\left(\frac{x}{x-1}\right)\mathrm{Li}_{(2,2)}\left(1-x\right)}{x}\,\mathrm{d}x$ integrált kiszámítani

$$
\begin{array}{c|c} \mathrm{Li}_a(1-x) & (2,2) \\ \hline \mathrm{Le}_b\left(\frac{x}{x-1}\right) & (0) \end{array}
\overset{\text{init}}{\to}
\begin{array}{l} (2,2)\\ \hline +(1,0)\\ +(1)\end{array}
\overset{\text{std}}{\to}
\begin{array}{l} -(1,2)\\ \hline +(1,1,0)\\ +(1,1)\end{array}
\overset{\text{atv}}{\to}
\begin{array}{l} (2)\\ \hline -(1,1,1,0)\\ -(1,1,1)\\ \hline -(2,1,0)\\ -(2,1)\end{array}
\overset{\text{std}}{\to}
\begin{array}{l} -(1)\\ \hline -(1,1,1,1,0)\\ -(1,1,1,1)\\ -(1,2,1,0)\\ -(1,2,1)\end{array}
\overset{\text{veg}}{\to}
\begin{array}{l} ()\\ \hline +(1,1,1,1,1,0)\\ +(1,1,1,1,1)\\ +(1,1,2,1,0)\\ +(1,1,2,1)\\ \hline +(2,1,1,1,0)\\ +(2,1,1,1)\\ +(2,2,1,0)\\ +(2,2,1)\end{array}
$$

7 Az $\displaystyle\int x^n\,\mathbf{Li}_{(b_1,b_2,\ldots,b_t)}\left(x\right)\,\mathbf{Li}_{(a_1,a_2,\ldots,a_r)}\left(1-x\right)\,\mathbf{d}x\ \ (a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_m\geq 1)$ határozatlan integrál kiszámítása a $\left[\frac{1}{2},1\right]$ intervallumon

Az alábbi azonosságokat használjuk

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{s}}\left(1-x\right)=(-1)^{|\mathbf{s}|}\sum_{\mathbf{k}\succeq\mathbf{s}}\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}\left(\frac{x-1}{x}\right)\quad\left(\frac{1}{2}<x<1\right)\quad\text{(Landen's connection)}\tag{6}$$

$$\frac{1}{x^n}=\frac{\mathrm{Le}_{\underbrace{(0,\ldots,0)}_{n}}(1-x)}{1-x}\quad(0<x<1)\Longrightarrow\frac{\mathrm{Le}_{\underbrace{(0,\ldots,0)}_{n+1}}\left(\frac{x-1}{x}\right)}{x-1}=x^n\quad\left(\frac{1}{2}<x<1\right)\tag{7}$$

$$\mathrm{Le}_{(0^{n+1})}\left(\frac{x-1}{x}\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{Li}_{(0^{k+1})}\left(\frac{x-1}{x}\right)\quad\left(\frac{1}{2}<x<1\right)\tag{8}$$

$$\mathrm{Li}_{(0^m)}\left(\frac{x-1}{x}\right)\cdot\mathrm{Li}_{(s_1,s_2,,\ldots,s_r)}\left(\frac{x-1}{x}\right)=\mathrm{Li}_{(0^m,s_1,s_2,,\ldots,s_r)}\left(\frac{x-1}{x}\right)\quad\left(\frac{1}{2}<x<1\right)\tag{9}$$

Most is átalakítjuk a $x^n\,\mathrm{Li}_{\mathbf{b}}\left(x\right)\,\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}\left(1-x\right)$ integranduszt a fenti azonosságokat felhasználva.

$$x^n\,\mathrm{Li}_{\mathbf{b}}\left(x\right)\,\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}\left(1-x\right)=\frac{\mathrm{Le}_{(0^{n+1})}\left(\frac{x-1}{x}\right)}{x-1}\mathrm{Li}_{\mathbf{b}}\left(x\right)\,(-1)^{|\mathbf{a}|}\sum_{\mathbf{k}\succeq\mathbf{a}}\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}\left(\frac{x-1}{x}\right)=(-1)^{|\mathbf{a}|}\sum_{\mathbf{k}\succeq\mathbf{a}}\frac{\mathrm{Le}_{(0^{n+1})}\left(\frac{x-1}{x}\right)\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}\left(\frac{x-1}{x}\right)\mathrm{Li}_{\mathbf{b}}\left(x\right)}{x-1}=$$

$$=(-1)^{|\mathbf{a}|}\sum_{\mathbf{k}\succeq\mathbf{a}}\frac{\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\mathrm{Li}_{(0^{l+1})}\left(\frac{x-1}{x}\right)\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}\left(\frac{x-1}{x}\right)\mathrm{Li}_{\mathbf{b}}\left(x\right)}{x-1}=(-1)^{|\mathbf{a}|+1}\sum_{\mathbf{k}\succeq\mathbf{a}}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\frac{\mathrm{Li}_{(0^{l+1},\mathbf{k})}\left(\frac{x-1}{x}\right)\mathrm{Li}_{\mathbf{b}}\left(x\right)}{1-x}=$$

$$=\sum_{\mathbf{k}\succeq\mathbf{a}}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\frac{\mathrm{Li}_{(0^{l+1},\mathbf{k})}\left(\frac{x-1}{x}\right)\mathrm{Li}_{\mathbf{b}}\left(x\right)}{1-x}=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\sum_{\mathbf{k}\succeq\mathbf{a}}\frac{\mathrm{Li}_{(0^{l+1},\mathbf{k})}\left(\frac{x-1}{x}\right)\mathrm{Li}_{\mathbf{b}}\left(x\right)}{1-x}$$

Ezzel az $\displaystyle\int x^n\,\mathrm{Li}_{\mathbf{b}}\left(x\right)\,\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}\left(1-x\right)\,\mathrm{d}x$ integrált visszavezettük $\displaystyle\int\frac{\mathrm{Li}_{(0^{l+1},\mathbf{k})}\left(\frac{x}{x-1}\right)\mathrm{Li}_{\mathbf{b}}(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$ integrálokra, így elegendő az

$$\int \frac{\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}\left(\frac{x}{x-1}\right)\mathrm{Li}_{\mathbf{b}}\left(x\right)}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

általános integrálokat megadni. Feladatunk az inicializálás, standard lépés, 1-átvitel és 1-ürítés kiszámítása lenne. Az alábbi indulást választjuk

$\mathscr{D}$	$\mathrm{Li}_{(b_1,b_2,\dots,b_t)}\left(x\right)$	$\dots$	$\dots$
$\mathscr{I}$	$\dfrac{\mathrm{Li}_{(a_1,a_2,\dots,a_r)}\left(\frac{x}{x-1}\right)}{1-x}$	$\dots$	$\dots$

Inicializálás

$\mathscr{D}$	$\mathrm{Li}_{(b_1,b_2,\dots,b_t)}\left(x\right)$	$\dots$	$\dots$
$\mathscr{I}$	$\dfrac{\mathrm{Li}_{(a_1,a_2,\dots,a_r)}\left(\frac{x-1}{x}\right)}{1-x}$	$-\mathrm{Li}_{(1,a_1,a_2,\dots,a_r)}\left(\frac{x-1}{x}\right)-\mathrm{Li}_{(1+a_1,a_2,\dots,a_r)}\left(\frac{x-1}{x}\right)$	$\dots$

$$\boldsymbol{a}\to-\left({}^{+}\boldsymbol{a}+{}_{+}\boldsymbol{a}\right),\text{ azaz }\left(\lfloor a_1,\dots\right)\overset{\text{init}}{\to}\begin{matrix}\left(\lfloor 1,a_1,\dots\right)\\\left(\lfloor 1+a_1,\dots\right)\end{matrix}$$

Ez azt jelenti, hogy rögtön az inicializáláskor hasadás lép fel.

Standard lépés

$\mathrm{Li}_{(b_1,b_2,\dots,b_t)}(x)$	...	$\mathrm{Li}_{(3,\dots)}(x)$	$\dfrac{\mathrm{Li}_{(2,\dots)}(x)}{x}$	$\mathrm{Li}_{(2,\dots)}(x)$	...	...
$\dfrac{\mathrm{Li}_{(a_1,a_2,\dots,a_n)}\left(\frac{x-1}{x}\right)}{1-x}$	...	...	$\mathrm{Li}_{(5,\dots)}\left(\frac{x-1}{x}\right)$	$\dfrac{\mathrm{Li}_{(5,\dots)}\left(\frac{x-1}{x}\right)}{x}$	$\mathrm{Li}_{(1,5,\dots)}\left(\frac{x-1}{x}\right)$	...

$$\boldsymbol{a}\to{}^{+}\boldsymbol{a},\text{ azaz }\left(a,\dots\lfloor b,\dots\right)\overset{\text{std}}{\to}\left(a-1,\dots\lfloor 1,b,\dots\right)$$

1-átvitel

$\mathrm{Li}_{(b_1,b_2,\dots,b_t)}(x)$	...	$\mathrm{Li}_{(1,3,\dots)}(x)$	$\dfrac{\mathrm{Li}_{(3,\dots)}(x)}{1-x}$	$\mathrm{Li}_{(3,\dots)}(x)$	...	...
$\dfrac{\mathrm{Li}_{(a_1,a_2,\dots,a_n)}\left(\frac{x-1}{x}\right)}{1-x}$	...	...	$\mathrm{Li}_{(5,\dots)}\left(\frac{x-1}{x}\right)$	$\dfrac{\mathrm{Li}_{(5,\dots)}\left(\frac{x-1}{x}\right)}{1-x}$	$-\mathrm{Li}_{(1,5,\dots)}\left(\frac{x-1}{x}\right)-\mathrm{Li}_{(1+5,\dots)}\left(\frac{x-1}{x}\right)$	...

$$\boldsymbol{a}\to-\left({}^{+}\boldsymbol{a}+{}_{+}\boldsymbol{a}\right),\text{ azaz }\left(1,a,\dots\lfloor b,\dots\right)\overset{\text{atv}}{\to}\begin{matrix}-\left(a,\dots\lfloor 1,b,\dots\right)\\-\left(a,\dots\lfloor b+1,\dots\right)\end{matrix}$$

1-ürítés

$\mathrm{Li}_{(b_1,b_2,\dots,b_t)}(x)$	...	$\mathrm{Li}_{(1)}(x)$	$-\dfrac{\mathrm{Li}_{(0)}(x)}{x}=\dfrac{1}{1-x}$	$\mathrm{Li}_{()}(x)=1$	0
$\dfrac{\mathrm{Li}_{(a_1,a_2,\dots,a_n)}\left(\frac{x-1}{x}\right)}{1-x}$	...	...	$\mathrm{Li}_{(5,\dots)}\left(\frac{x-1}{x}\right)$	$\dfrac{\mathrm{Li}_{(5,\dots)}\left(\frac{x-1}{x}\right)}{1-x}$	$-\mathrm{Li}_{(1,5,\dots)}\left(\frac{x-1}{x}\right)-\mathrm{Li}_{(1+5,\dots)}\left(\frac{x-1}{x}\right)$

$$\boldsymbol{a}\to-\left({}^{+}\boldsymbol{a}+{}_{+}\boldsymbol{a}\right),\text{ azaz }\left(1\lfloor a,\dots\right)\overset{\text{atv}}{\to}\begin{matrix}-\left(\lfloor 1,a,\dots\right)\\-\left(\lfloor a+1,\dots\right)\end{matrix}$$

Az $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}\left(\frac{x-1}{x}\right)\mathrm{Li}_{\mathbf{b}}\left(x\right)}{1-x}\,\mathrm{d}x$ feladat fázisátmenet mátrixa

$$\begin{bmatrix} \xrightarrow{\text{init}} & \xrightarrow{\text{std}} \\ \\ \xrightarrow{\text{atv}} & \xrightarrow{\text{veg}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left({}^{+}\boldsymbol{a} + {}_{+}\boldsymbol{a}\right) & {}^{+}\boldsymbol{a} \\ \\ -\left({}^{+}\boldsymbol{a} + {}_{+}\boldsymbol{a}\right) & -\left({}^{+}\boldsymbol{a} + {}_{+}\boldsymbol{a}\right) \end{bmatrix}$$

Megjegyzés: Az $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}\left(\frac{x-1}{x}\right)\mathrm{Li}_{\mathbf{b}}\left(x\right)}{1-x}\,\mathrm{d}x$ integrálási feladat megkapható az $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Li}_{\mathbf{b}}\left(\frac{x}{x-1}\right)\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}\left(1-x\right)}{x}\,\mathrm{d}x$ integrálási feladatból az $\boldsymbol{a} \leftrightarrow \boldsymbol{b}$ pozíciócserével, és $x \leftrightarrow 1-x$ tükrözés együttesével.