

1 Tetszőleges $w \in \mathfrak{h}$ szó $\sum_i w_i \sqcup x^j$, $(w_j \in \mathfrak{h}y)$ felbontásatása, $\text{reg}_{\sqcup}^0(w)$

Shu OI and Kimio UENO; Fundamental Solutions of the Knizhnik-Zamolodchikov Equation of One Variable and the Riemann-Hilbert Problem, PROPOSITION 4 ([R]), TOKYO J. MATH. VOL. 41, NO. 1, 2018

The algebra (\mathfrak{h}, \sqcup) is a polynomialalgebra of x whose coefficients are in $\mathfrak{h}y$, and is a polynomial algebra of x, y whose coefficients are in $x\mathfrak{h}y$; $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}y[x]$, $\mathfrak{h} = xy\mathfrak{h}[x, y]$. That is, any word w in \mathfrak{h} can be written as $\sum_i w_i \sqcup x^j = \sum_{i,j} y^j \sqcup w_{i,j} \sqcup x^j$ uniquely,

where $w_j \in \mathfrak{h}y$ and $w_{i,j} \in x\mathfrak{h}y$.

A (\mathfrak{h}, \sqcup) algebra egy egyváltozós polinomalgebra az x változóval, melynek együtthatói a $\mathfrak{h}y$ szavaiból kerülnek ki, és ugyanakkor egy kétváltozós polinomalgebra is x, y változókkal, melynek együtthatói az $x\mathfrak{h}y$ szavaiból kerülnek ki; $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}y[x]$, $\mathfrak{h} = xy\mathfrak{h}[x, y]$. Vagyis, minden \mathfrak{h} -beli w szó felírható

$$\sum_i w_i \sqcup x^j = \sum_{i,j} y^j \sqcup w_{i,j} \sqcup x^j$$

alakban, ahol $w_j \in \mathfrak{h}y$ és $w_{i,j} \in x\mathfrak{h}y$, és ez a felírás egyértelmű.

$\mathbb{Z}[x]$: Az egész együtthatós x változós polinomok algebrája. Elemei a $p(x) = z_0x^0 + z_1x^1 + z_2x^2 + \dots + z_nx^n$ ($z_0, z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{Z}$) alakú polinomok. Azért algebra, mert az egész együtthatós x változós polinomok vektorteret alkotnak, és értelmezve van egy szorzat a polinomokon.

$\mathbb{R}[x]$: A valós együtthatós x változós polinomok algebrája. Elemei a $p(x) = r_0x^0 + r_1x^1 + r_2x^2 + \dots + r_nx^n$ ($r_0, r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{R}$) alakú polinomok. Azért algebra, mert a valós együtthatós x változós polinomok vektorteret alkotnak, és értelmezve van egy szorzat a polinomokon.

A $\mathfrak{h} = (\mathfrak{h}, \sqcup) = \mathfrak{h}y[x]$ azt fejezi ki, hogy a

$$p(x) = w_0 \sqcup x^0 + w_1 \sqcup x^1 + w_2 \sqcup x^2 + \dots + w_n \sqcup x^n \in \mathfrak{h}y[x]$$

$(w_0, w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathfrak{h}y)$ alakú polinomok éppen a (\mathfrak{h}, \sqcup) algebrát adják. Vagyis, \mathfrak{h} minden w eleme egyértelműen felírható

$$w = w_0 \sqcup x^0 + w_1 \sqcup x^1 + \dots + w_n \sqcup x^n \quad (w_0, w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathfrak{h}y) \quad (1.1)$$

alakban.

Ezen egyértelmű felbontás segítségével definiálhatjuk tetszőleges $w \in \mathfrak{h}$ szó $\text{reg}_{\sqcup}^0(w)$ regularizáltját, ami nem más, mint az (1.1) felbontásban a w_0 konstans együttható. Azaz,

$$\text{reg}_{\sqcup}^0(w) = w_0 \iff w = w_0 \sqcup x^0 + w_1 \sqcup x^1 + \dots + w_n \sqcup x^n \in \mathfrak{h}y[x]$$

A definícióból rögtön következik, hogy tetszőleges $w \in \mathfrak{h}$ szóra $\text{reg}_{\sqcup}^0(w) \in \mathfrak{h}y$ és, hogy $\text{reg}_{\sqcup}^0(u) = u$ minden $u \in \mathfrak{h}y$ szóra. Egy nem $\mathfrak{h}y$ -beli w szó egyértelműen felírható ux^n , $u \in \mathfrak{h}y$, $n \geq 0$ alakban, melynek a regularizáltját az alábbi explicit képlet adja meg.

Tetszőleges $u \in \mathfrak{h}y$ y-ra végződő szóra, és tetszőleges $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ számra

$$\text{reg}_{\sqcup}^0(ux^n) = \sum_{j=0}^n (-1)^j ux^{n-j} \sqcup x^j \in \mathfrak{h}y \quad (A)$$

$$\text{reg}_{\sqcup}^0(ux^n) = ux^n - ux^{n-1} \sqcup x + ux^{n-2} \sqcup x^2 - \dots + (-1)^{n-1} ux \sqcup x^{n-1} + (-1)^n u \sqcup x^n$$

Ezzel ekvivalens az

$$ux^n = \sum_{j=0}^n \text{reg}_{\sqcup}^0(ux^{n-j}) \sqcup x^j \quad (A')$$

$$ux^n = \text{reg}_{\sqcup}^0(ux^n + \text{reg}_{\sqcup}^0(ux^{n-1}) \sqcup x + \text{reg}_{\sqcup}^0(ux^{n-2}) \sqcup x^2 - \dots + \text{reg}_{\sqcup}^0(ux) \sqcup x^{n-1} + \text{reg}_{\sqcup}^0(u) \sqcup x^n$$

felbontás.

Az (A') képlet szerint egy $w = ux^n$, ($u \in \mathfrak{hy}$) szó

$$w = ux^n = w_0 \sqcup x^0 + w_1 \sqcup x^1 + \dots + w_n \sqcup x^n \quad (w_0, w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathfrak{hy})$$

felbontásában tetszőleges w_k ($0 \leq k \leq n$) együttható megkapható a

$$w_k = \text{reg}_{\sqcup}^0(ux^{n-k}) \sqcup x^k = \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j ux^{n-k-j} \sqcup x^j$$

formulával. Az (A) és a vele ekvivalens (A') felbontásból levezetünk egy harmadik, (A'') felbontást.

$$\begin{aligned} ux^n &\stackrel{(A')}{=} \sum_{j=0}^n \text{reg}_{\sqcup}^0(ux^{n-j}) \sqcup x^j \stackrel{(A)}{=} \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^{n-j} (-1)^j ux^{n-j-i} \sqcup x^i \right) \sqcup x^j = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n-j} (-1)^j ux^{n-j-i} \sqcup (x^i \sqcup x^j) = \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n-j} (-1)^j ux^{n-j-i} \sqcup \binom{i+j}{j} x^{i+j} \stackrel{k=i+j}{=} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} ux^{n-k} \sqcup x^k \end{aligned}$$

Itt kihasználtuk, hogy $x^i \sqcup x^j = \binom{i+j}{j} x^{i+j}$ és, hogy a \sqcup -szorzat asszociatív.

Tetszőleges $u \in \mathfrak{hy}$ y-ra végződő szóra, és tetszőleges $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ számra

$$\text{reg}_{\sqcup}^0(ux^n) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} ux^{n-k} \sqcup x^k \quad (\text{A''})$$

A következőkben az (A), (A'), illetve (A'') felbontásokra adunk egy-egy példát, és ismertetjük, hogy aprogram hogyan segít bennünket a szükséges számítások elvégzésében.

Példa (A): Legyen $w = xxyxyxxx \notin \mathfrak{hy}$. Ekkor $u = xxyxy$, és $n = 3$. Az (A) felbontás szerint

$$\text{reg}_{\sqcup}^0(xxyxyxxx) = xxyxyxxx \sqcup - xxyxyxx \sqcup x + xxyxyx \sqcup xx - xxyxy \sqcup xxx$$

($x^0 := () := \mathbf{1}$, és $w \sqcup \mathbf{1} = w$)

I. A kártya segítségével ezt kiszámíthatjuk tagonként:

1. w_1 -input: $xxyxyxxx$; w_2 -input: (üres) \Rightarrow

$w_1 = (\quad xxyxyxxx \quad) \text{reg}_{\sqcup}^0 \square$
 $w_2 = (\quad \quad \quad) \text{reg}_{\sqcup}^0 \square$
 ☒ \sqcup ☐ $*$

$xxyxyxxx$

2. w_1 -input: $xxyxyxx$; w_2 -input: $x \Rightarrow$

$w_1 = (\quad xxyxyxx \quad) \text{reg}_{\sqcup}^0 \square$
 $w_2 = (\quad x \quad) \text{reg}_{\sqcup}^0 \square$
 ☒ \sqcup ☐ $*$

$3 \cdot xxyxyxxx + 2 \cdot xxyxyxx + 3 \cdot xxyxyxx$

3. w_1 -input: $xxyxyx$; w_2 -input: $xx \Rightarrow$

$w_1 = (\quad xxyxyx \quad) \text{reg}_{\sqcup}^0 \square$
 $w_2 = (\quad xx \quad) \text{reg}_{\sqcup}^0 \square$
 ☒ \sqcup ☐ $*$

$3 \cdot xxyxyxxx + 4 \cdot xxyxyxx + 3 \cdot xxyxxx + 6 \cdot xxyxyxx + 6 \cdot xxyxyxx + 6 \cdot xxyxyxx$

4. w_1 -input: $xyxy$; w_2 -input: $xx \Rightarrow$ Calculate

$w_1 = \left(\begin{array}{c} xyxy \\ xxx \end{array} \right) \text{reg}_{\sqcup}^0 \square$
 $w_2 = \left(\begin{array}{c} xyxy \\ xxx \end{array} \right) \text{reg}_{\sqcup}^0 \square$

Calculate
Clear
⊔
☐
*
⚙️

$xyxyxxx + 2 \cdot xyxyxxx + 3 \cdot xyxyxxx + 4 \cdot xyxyxxx + 3 \cdot xyxyxxx + 6 \cdot xyxyxxx + 9 \cdot xyxyxxx + 6 \cdot xyxyxxx + 12 \cdot xyxyxxx + 10 \cdot xyxyxxx$



A kapott eredményeket pedig (a megfelelő előjellel ellátva) összevonhatjuk:

$$\begin{aligned}
 1. & \quad \cancel{xyxyxxx} - (3 \cdot \cancel{xyxyxxx} + 2 \cdot xyxyxxx + 3 \cdot xyxyxxx) + (3 \cdot \cancel{xyxyxxx} + 4 \cdot xyxyxxx + 3 \cdot xyxyxxx + 6 \cdot xyxyxxx + 6 \cdot xyxyxxx + 6 \cdot xyxyxxx) - (\cancel{xyxyxxx} + 2 \cdot xyxyxxx + 3 \cdot xyxyxxx + 4 \cdot xyxyxxx + 3 \cdot xyxyxxx + 6 \cdot xyxyxxx + 9 \cdot xyxyxxx + 6 \cdot xyxyxxx + 12 \cdot xyxyxxx + 10 \cdot xyxyxxx) = \\
 2. & \quad = -(2 \cdot \cancel{xyxyxxx} + 3 \cdot xyxyxxx) + (4 \cdot \cancel{xyxyxxx} + 3 \cdot xyxyxxx + 6 \cdot xyxyxxx + 6 \cdot xyxyxxx + 6 \cdot xyxyxxx + 6 \cdot xyxyxxx) - (2 \cdot \cancel{xyxyxxx} + 3 \cdot xyxyxxx + 4 \cdot xyxyxxx + 3 \cdot xyxyxxx + 6 \cdot xyxyxxx + 9 \cdot xyxyxxx + 6 \cdot xyxyxxx + 12 \cdot xyxyxxx + 10 \cdot xyxyxxx) = \\
 3. & \quad = -(3 \cdot \cancel{xyxyxxx}) + (3 \cdot xyxyxxx + 6 \cdot \cancel{xyxyxxx} + 6 \cdot xyxyxxx + 6 \cdot xyxyxxx + 6 \cdot xyxyxxx) - (3 \cdot xyxyxxx + 4 \cdot xyxyxxx + 3 \cdot \cancel{xyxyxxx} + 6 \cdot xyxyxxx + 9 \cdot xyxyxxx + 6 \cdot xyxyxxx + 12 \cdot xyxyxxx + 10 \cdot xyxyxxx) = \\
 4. & \quad = (3 \cdot \cancel{xyxyxxx} + 6 \cdot xyxyxxx + 6 \cdot xyxyxxx) - (3 \cdot \cancel{xyxyxxx} + 4 \cdot xyxyxxx + 6 \cdot xyxyxxx + 9 \cdot xyxyxxx + 6 \cdot xyxyxxx + 12 \cdot xyxyxxx + 10 \cdot xyxyxxx) = \\
 5. & \quad = (6 \cdot \cancel{xyxyxxx} + 6 \cdot xyxyxxx) - (4 \cdot xyxyxxx + 6 \cdot \cancel{xyxyxxx} + 9 \cdot xyxyxxx + 6 \cdot xyxyxxx + 12 \cdot xyxyxxx + 10 \cdot xyxyxxx) = \\
 6. & \quad = (6 \cdot \cancel{xyxyxxx}) - (4 \cdot xyxyxxx + 9 \cdot xyxyxxx + 6 \cdot \cancel{xyxyxxx} + 12 \cdot xyxyxxx + 10 \cdot xyxyxxx) = \\
 7. & \quad = -(4 \cdot xyxyxxx + 9 \cdot xyxyxxx + 12 \cdot xyxyxxx + 10 \cdot xyxyxxx)
 \end{aligned}$$

Így a végeredmény: $\text{reg}_{\sqcup}^0(xyxyxxx) = -4 \cdot xyxyxxx - 9 \cdot xyxyxxx - 12 \cdot xyxyxxx - 10 \cdot xyxyxxx$.

Egy fontos észrevétel: A megmaradó hy -beli szavak mind az utolsó $xyxy \sqcup xx$ szorzatból kerülnek ki.

II. Ugyanezt az eredményt egyszerűbben, közvetlenül is megkaphatjuk. A w_1 vagy w_2 beviteli mezők valamelyikébe bevisszük a teljes $w = xyxyxxx$ szót (a másik mezőbe bármi lehet), és a mögötte található reg_{\sqcup}^0 címkével felíratozott jelölőnégyzetet kipipáljuk. Az alábbi ábrán a w_2 beviteli mezőbe írtuk be az $xyxyxxx$ szót. **Arra ügyelni kell, hogy közben az (A) képlet legyen kijelölve (kattintással, piros háttér).** A kimenet szürke háttérű sorában csak a kiválasztott képlet és bevitt adatok tükröződnek, közvetlenül alatta pedig az (A) felbontási képlet tömör, illetve kibontott formában, kitöltve a megfelelő paraméterekkel. A második sávban az egyes kiszámított előjeles shuffle szorzatok piros zárójellel csoportosítva jelennek meg. A harmadik sávban az összevont végeredmény, míg a negyedikben a végeredmény vektor tartójú multihalmaz megfelelője jelenik meg.


1.  

$w_1 \sqcup w_2$ és $w_1 * w_2$

$$\text{reg}_{\sqcup}^0(ux^n) = \sum_{0 \leq j \leq n} (-1)^j ux^n \cdot j \sqcup x^j \in \mathfrak{h}_Y \quad (u \in \mathfrak{h}_Y) \quad (A)$$

$$ux^n = \sum_{0 \leq j \leq n} \text{reg}_{\sqcup}^0(ux^n \cdot j) \sqcup x^j \quad (u \in \mathfrak{h}_Y) \quad (A')$$

$w_1 = \left(\begin{array}{c} \text{xxxxy} \\ \text{xyxyxxx} \end{array} \right) \text{reg}_{\sqcup}^0 \square$
 $w_2 = \left(\begin{array}{c} \text{xyxyxxx} \\ \text{xyxyxxx} \end{array} \right) \text{reg}_{\sqcup}^0 \checkmark$

Calculate Clear \sqcup * 

(A)-ban: $u = \text{xyxy} \in \mathfrak{h}_Y$; $n = 3$

$$\text{reg}_{\sqcup}^0(\text{xyxyxxx}) = \sum_{0 \leq j \leq 3} (-1)^j \text{xyxyx}^3 \cdot j \sqcup x^j = \text{xyxyx}^3 \sqcup () - \text{xyxyx}^2 \sqcup x + \text{xyxyx} \sqcup x^2 - \text{xyxy} \sqcup x^3 =$$

$$\text{xyxyxxx} - (3 \cdot \text{xyxyxxx} + 2 \cdot \text{xyxyxx} + 3 \cdot \text{xyxyxyxx}) + (3 \cdot \text{xyxyxxx} + 4 \cdot \text{xyxyxyxx} + 3 \cdot \text{xyxyxxx} + 6 \cdot \text{xyxyxyxx} + 6 \cdot \text{xyxyxyxx} + 6 \cdot \text{xyxyxyxx}) - (\text{xyxyxxx} + 2 \cdot \text{xyxyxyxx} + 3 \cdot \text{xyxyxyxx} + 4 \cdot \text{xyxyxyxx} + 3 \cdot \text{xyxyxyxx} + 6 \cdot \text{xyxyxyxx} + 9 \cdot \text{xyxyxyxx} + 6 \cdot \text{xyxyxyxx} + 12 \cdot \text{xyxyxyxx} + 10 \cdot \text{xyxyxyxx}) =$$

$$-4 \cdot \text{xyxyxyxx} - 9 \cdot \text{xyxyxyxx} - 12 \cdot \text{xyxyxyxx} - 10 \cdot \text{xyxyxyxx} =$$

$$-4(3,5) - 9(4,4) - 12(5,3) - 10(6,2)$$

Toggle help

Ha a felbontás valamelyik tagjára kattintunk, akkor a hozzátartozó, kiszámított előjeles shuffle szorzatot kékkel emeli ki a program. A kapcsolat fordítva is működik: a második sávban egy tetszőleges tagra kattintva kijelöli a képlet azon szorzatát, amelyből a tag származik.

(A)-ban: $u = \text{xyxy} \in \mathfrak{h}_Y$; $n = 3$

$$\text{reg}_{\sqcup}^0(\text{xyxyxxx}) = \sum_{0 \leq j \leq 3} (-1)^j \text{xyxyx}^3 \cdot j \sqcup x^j = \text{xyxyx}^3 \sqcup () - \text{xyxyx}^2 \sqcup x + \text{xyxyx} \sqcup x^2 - \text{xyxy} \sqcup x^3 =$$

$$\text{xyxyxxx} - (3 \cdot \text{xyxyxxx} + 2 \cdot \text{xyxyxx} + 3 \cdot \text{xyxyxyxx}) + (3 \cdot \text{xyxyxxx} + 4 \cdot \text{xyxyxyxx} + 3 \cdot \text{xyxyxxx} + 6 \cdot \text{xyxyxyxx} + 6 \cdot \text{xyxyxyxx} + 6 \cdot \text{xyxyxyxx}) - (\text{xyxyxxx} + 2 \cdot \text{xyxyxyxx} + 3 \cdot \text{xyxyxyxx} + 4 \cdot \text{xyxyxyxx} + 3 \cdot \text{xyxyxyxx} + 6 \cdot \text{xyxyxyxx} + 9 \cdot \text{xyxyxyxx} + 6 \cdot \text{xyxyxyxx} + 12 \cdot \text{xyxyxyxx} + 10 \cdot \text{xyxyxyxx}) =$$

$$-4 \cdot \text{xyxyxyxx} - 9 \cdot \text{xyxyxyxx} - 12 \cdot \text{xyxyxyxx} - 10 \cdot \text{xyxyxyxx} =$$

$$-4(3,5) - 9(4,4) - 12(5,3) - 10(6,2)$$

Ha a kiszámított shuffle szorzatban egy tetszőleges tagra kattintunk, akkor az előbbi kék kijelöléssel együtt, az egymást kiejtő tagok sárga alapú kijelölése, illetve a képernyő tetején megjelenő kék alapú mezőben, ezen egymást kiejtő tagok előjeles összege segíti a fenti összevonás elvégzését. Az utóbbi akkor tűnik el, ha tetszőleges olyan helyre kattintunk a képernyőn, amely nem a szóban forgó shuffle szorzat egy tagja. (Vagyis, nem a második sávba.)

$\text{xyxyxxx} - 3 \cdot \text{xyxyxxx} + 3 \cdot \text{xyxyxx} - \text{xyxyxxx}$

(A)-ban: $u = \text{xyxy} \in \mathfrak{h}_Y$; $n = 3$

$$\text{reg}_{\sqcup}^0(\text{xyxyxxx}) = \sum_{0 \leq j \leq 3} (-1)^j \text{xyxyx}^3 \cdot j \sqcup x^j =$$

$$\text{xyxyx}^3 \sqcup () - \text{xyxyx}^2 \sqcup x + \text{xyxyx} \sqcup x^2 - \text{xyxy} \sqcup x^3 =$$

$$\text{xyxyxxx} - (3 \cdot \text{xyxyxxx} + 2 \cdot \text{xyxyxx} + 3 \cdot \text{xyxyxyxx}) + (3 \cdot \text{xyxyxxx} + 4 \cdot \text{xyxyxyxx} + 3 \cdot \text{xyxyxxx} + 6 \cdot \text{xyxyxyxx} + 6 \cdot \text{xyxyxyxx} + 6 \cdot \text{xyxyxyxx}) - (\text{xyxyxxx} + 2 \cdot \text{xyxyxyxx} + 3 \cdot \text{xyxyxyxx} + 4 \cdot \text{xyxyxyxx} + 3 \cdot \text{xyxyxyxx} + 6 \cdot \text{xyxyxyxx} + 9 \cdot \text{xyxyxyxx} + 6 \cdot \text{xyxyxyxx} + 12 \cdot \text{xyxyxyxx} + 10 \cdot \text{xyxyxyxx}) =$$

$$-4 \cdot \text{xyxyxyxx} - 9 \cdot \text{xyxyxyxx} - 12 \cdot \text{xyxyxyxx} - 10 \cdot \text{xyxyxyxx} =$$

$\text{xyxyxxx} - 4 \cdot \text{xyxyxxx} + 6 \cdot \text{xyxyxxx} - 4 \cdot \text{xyxyxxx} + \text{xyxyxxx}$

$3 \cdot \text{xyxyxyxxx} + \text{xyxyxyxyxx} +$
 $3 \cdot \text{xyxyxyxyxx} + \text{xyxyxyxyxx} +$
 $\text{xyxyxyxyxx} + 15 \cdot \text{xyxyxyxyxx} +$
 $10 \cdot \text{xyxyxyxyxx} + 6 \cdot \text{xyxyxyxyxx} +$
 $3 \cdot \text{xyxyxyxyxx} + \text{xyxyxyxyxx} +$
 $10 \cdot \text{xyxyxyxyxx} + 6 \cdot \text{xyxyxyxyxx} +$
 $3 \cdot \text{xyxyxyxyxx} + \text{xyxyxyxyxx} +$
 $6 \cdot \text{xyxyxyxyxx} + 3 \cdot \text{xyxyxyxyxx} +$
 $\text{xyxyxyxyxx} + 3 \cdot \text{xyxyxyxyxx} +$
 $\text{xyxyxyxyxx} + \text{xyxyxyxyxx} +$
 $10 \cdot \text{xyxyxyxyxx} + 6 \cdot \text{xyxyxyxyxx} +$
 $3 \cdot \text{xyxyxyxyxx} + \text{xyxyxyxyxx} +$
 $6 \cdot \text{xyxyxyxyxx} + 3 \cdot \text{xyxyxyxyxx} +$
 $\text{xyxyxyxyxx} + 3 \cdot \text{xyxyxyxyxx} +$
 $\text{xyxyxyxyxx} + \text{xyxyxyxyxx} +$
 $6 \cdot \text{xyxyxyxyxx} + 2 \cdot \text{xyxyxyxyxx} +$

A képernyő tetején kéken felugró kék mező különösen akkor hasznos, ha az előjeles kiszámított shuffle szorzat olyan nagy, hogy az egymást kiejtő tagok közül csak néhány, vagy talán csak egy látható.

III. Ha az (A') felbontást szeretnénk megkapni, akkor a legutóbbi beállítás mellett csak az (A') képletre kell kattintanunk, amely ekkor pirosabb háttérszínt kap. Az első (szürke háttérű) sorban most is csak a kiválasztott képlet és a bevitt adatok

tükröződnek: $w = xxyxyxxx = ux^n$ ($u \in \mathfrak{hy}$), ahol $u = xxyxy$ és $n = 3$. Ezt követően minden $0 \leq j \leq n$ számra (feketével keretezett, elkülönülő mezőkben) az első sorban megjelenik az összegben szereplő $\text{reg}_{\sqcup}^0(ux^{n-j}) \sqcup x^j$ formula (a megfelelő j értékkel kitöltve), a második (világosabb) sorban pedig a szorzat kiszámított értéke.

1. ● →

$w_1 \sqcup w_2 \text{ és } w_1 * w_2$

$$\text{reg}_{\sqcup}^0(ux^n) = \sum_{0 \leq j \leq n} (-1)^j ux^{n-j} \sqcup x^j \quad (u \in \mathfrak{hy}) \quad (A)$$

$$ux^n = \sum_{0 \leq j \leq n} \text{reg}_{\sqcup}^0(ux^{n-j}) \sqcup x^j \quad (u \in \mathfrak{hy}) \quad (A')$$

(A)

$w_1 = (\quad xxyy \quad) \text{reg}_{\sqcup}^0 \quad \square$
 $w_2 = (\quad xxyxyxxx \quad) \text{reg}_{\sqcup}^0 \quad \checkmark$

☐

(A')-ben: $u = xxyxy \in \mathfrak{hy}; n = 3$

j = 0 $\text{reg}_{\sqcup}^0(xxyxy\text{xxx}) \sqcup () =$
 $-4 \cdot xxy|xxxxxy| - 9 \cdot xxxy|xxxxy| - 12 \cdot xxxxy|xxy| - 10 \cdot xxxxxx|xy|$

j = 1 $\text{reg}_{\sqcup}^0(xxyxy\text{xx}) \sqcup x =$
 $3 \cdot xxy|xxxxy|x + 12 \cdot xxy|xxxxxy| + 27 \cdot xxxy|xxxxy| + 6 \cdot xxxy|xxy|x + 36 \cdot xxxxy|xxy| + 6 \cdot xxxxy|xy|x + 30 \cdot xxxxxx|xy|$

j = 2 $\text{reg}_{\sqcup}^0(xxyxy\text{x}) \sqcup xx =$
 $-2 \cdot xxy|xxy|xx - 6 \cdot xxy|xxxxy|x - 12 \cdot xxxy|xxxxy| - 12 \cdot xxxy|xxy|x - 27 \cdot xxxy|xxxxy| - 36 \cdot xxxxy|xxy| - 3 \cdot xxxy|xy|xx - 12 \cdot xxxxy|xy|x - 30 \cdot xxxxxx|xy|$

j = 3 $\text{reg}_{\sqcup}^0(xxyxy) \sqcup xxx =$
 $xxy|xy|xxx + 2 \cdot xxy|xxy|xx + 3 \cdot xxy|xxxxy|x + 4 \cdot xxy|xxxxxy| + 3 \cdot xxxy|xy|xx + 6 \cdot xxxy|xxy|x + 9 \cdot xxxy|xxxxy| + 6 \cdot xxxxy|xy|x + 12 \cdot xxxxy|xxy| + 10 \cdot xxxxxx|xy|$

A teljes összeg tagjainak az összevonását a program most is úgy segíti, hogy a fehér sorok tetszőleges tagjára kattintva a különböző j értékekhez tartozó azonos szavakat narancssárgával kiemeli, illetve a képernyő tetején felugró kék mezőben előjeles összeg formájában megjeleníti.

$-4 \cdot xxy|xxxxy| + 12 \cdot xxy|xxxxy| - 12 \cdot xxxy|xxxxy| + 4 \cdot xxxy|xxxxy|$

$w_1 = (\quad xxyy \quad) \text{reg}_{\sqcup}^0 \quad \square$
 $w_2 = (\quad xxyxyxxx \quad) \text{reg}_{\sqcup}^0 \quad \checkmark$

☐

(A')-ben: $u = xxyxy \in \mathfrak{hy}; n = 3$

j = 0 $\text{reg}_{\sqcup}^0(xxyxy\text{xxx}) \sqcup () =$
 $-4 \cdot xxy|xxxxxy| - 9 \cdot xxxy|xxxxy| - 12 \cdot xxxxy|xxy| - 10 \cdot xxxxxx|xy|$

j = 1 $\text{reg}_{\sqcup}^0(xxyxy\text{xx}) \sqcup x =$
 $3 \cdot xxy|xxxxy|x + 12 \cdot xxy|xxxxxy| + 27 \cdot xxxy|xxxxy| + 6 \cdot xxxy|xxy|x + 36 \cdot xxxxy|xxy| + 6 \cdot xxxxy|xy|x + 30 \cdot xxxxxx|xy|$

j = 2 $\text{reg}_{\sqcup}^0(xxyxy\text{x}) \sqcup xx =$
 $-2 \cdot xxy|xxy|xx - 6 \cdot xxy|xxxxy|x - 12 \cdot xxxy|xxxxy| - 12 \cdot xxxy|xxy|x - 27 \cdot xxxy|xxxxy| - 36 \cdot xxxxy|xxy| - 3 \cdot xxxy|xy|xx - 12 \cdot xxxxy|xy|x - 30 \cdot xxxxxx|xy|$

j = 3 $\text{reg}_{\sqcup}^0(xxyxy) \sqcup xxx =$
 $xxy|xy|xxx + 2 \cdot xxy|xxy|xx + 3 \cdot xxy|xxxxy|x + 4 \cdot xxy|xxxxxy| + 3 \cdot xxxy|xy|xx + 6 \cdot xxxy|xxy|x + 9 \cdot xxxy|xxxxy| + 6 \cdot xxxxy|xy|x + 12 \cdot xxxxy|xxy| + 10 \cdot xxxxxx|xy|$

Az (A'') képlet nincs is implementálva, hiszen az csak azt állítja, hogy a $j = n$ értékhez tartozó sor első tagjától eltekintve tetszőleges sorban, az összeg tetszőleges tagjára kattintva, az összevonás eredménye mindig 0 lesz. A $j = n$ értékhez tartozó összeg első tagjára kattintva ($xxyxyxxx$) pedig az összevonás után magát az $w = xxyxyxxx$ szót fogjuk megkapni.

Minden egyes j érték mezőjében részeredményeket is megjeleníthetünk. Ha például a $\text{reg}_{\sqcup}^0(ux^{n-j})$ formulára kattintunk, akkor az piros háttérszínt kap, és alatta ugyanilyen piros háttérű mezőben láthatjuk annak részletes kiszámítását ugyanúgy, mintha a $\text{reg}_{\sqcup}^0(ux^{n-j})$ értékét az (A) képletállás mellett számítanánk ki. A részeredmény kiírására szolgáló piros keret úgy zárható be, hogy vagy ugyanezen, vagy egy másik j értékhez tartozó sor ugyanilyen $\text{reg}_{\sqcup}^0(ux^{n-j})$ formulájára kattintunk. A piros keret kimenete teljesen egyenértékű az (A) képletállás melletti kimenettel, abban az összevonást segítő kijelölések ugyanúgy működnek.

Calculate Clear \sqcup * \otimes

(A')-ben: $u = xxyxy \in \mathfrak{h}_y$; $n = 3$

$j = 0$ $\text{reg}_{\sqcup}^0(xxyxyxxx) \sqcup () =$

(A)-ban: $u = xxyxy \in \mathfrak{h}_y$; $n = 3$

$$\text{reg}_{\sqcup}^0(xxyxyxxx) = \sum_{0 \leq j \leq 3} (-1)^j xxyxyx^{3-j} \sqcup x^j = xxyxyxxx \sqcup () - xxyxyxx \sqcup x + xxyxyx \sqcup xx - xxyxy \sqcup xxx =$$

$$xxyxyxxx - (3 \cdot xxyxyxxx + 2 \cdot xxyxyxx + 3 \cdot xxyxyx) + (3 \cdot xxyxyxxx + 4 \cdot xxyxyxx + 3 \cdot xxyxyx + 6 \cdot xxyxyx + 6 \cdot xxyxyx + 6 \cdot xxyxyx) - (xxyxyxxx + 2 \cdot xxyxyxx + 3 \cdot xxyxyx + 4 \cdot xxyxyx + 3 \cdot xxyxyx + 6 \cdot xxyxyx + 9 \cdot xxyxyx + 6 \cdot xxyxyx + 12 \cdot xxyxyx + 10 \cdot xxyxyx) =$$

$$- 4 \cdot xxy|xxxxy| - 9 \cdot xxxy|xxx| - 12 \cdot xxxxy|xy| - 10 \cdot xxxxy|xy| =$$

$$- 4 \cdot (3,5) - 9 \cdot (4,4) - 12 \cdot (5,3) - 10 \cdot (6,2)$$

$$- 4 \cdot xxy|xxxxy| - 9 \cdot xxxy|xxx| - 12 \cdot xxxxy|xy| - 10 \cdot xxxxy|xy|$$

$j = 1$ $\text{reg}_{\sqcup}^0(xxyxyxx) \sqcup x =$

$$3 \cdot xxy|xxx| + 12 \cdot xxy|xxx| + 27 \cdot xxxy|xxx| + 6 \cdot xxxy|xy|x + 36 \cdot xxxxy|xy| + 6 \cdot xxxxy|xy|x + 30 \cdot xxxxy|xy|$$

$j = 2$ $\text{reg}_{\sqcup}^0(xxyxyx) \sqcup xx =$

$$- 2 \cdot xxy|xy|xx - 6 \cdot xxy|xxx| - 12 \cdot xxy|xxx| - 12 \cdot xxxy|xy|x - 27 \cdot xxxy|xxx| - 36 \cdot xxxxy|xy| - 3 \cdot xxxy|xy|xx - 12 \cdot xxxxy|xy|x - 30 \cdot xxxxy|xy|$$

(A piros kereten belüli részbe kattintva ugyanúgy működnek az összevonást segítő kiemelések.)

Calculate Clear \sqcup * \otimes

(A')-ben: $u = xxyxy \in \mathfrak{h}_y$; $n = 3$

$j = 0$ $\text{reg}_{\sqcup}^0(xxyxyxxx) \sqcup () =$

(A)-ban: $u = xxyxy \in \mathfrak{h}_y$; $n = 3$

$$\text{reg}_{\sqcup}^0(xxyxyxxx) = \sum_{0 \leq j \leq 3} (-1)^j xxyxyx^{3-j} \sqcup x^j = xxyxyxxx \sqcup () - xxyxyxx \sqcup x + xxyxyx \sqcup xx - xxyxy \sqcup xxx =$$

$$xxyxyxxx - (3 \cdot xxyxyxxx + 2 \cdot xxyxyxx + 3 \cdot xxyxyx) + (3 \cdot xxyxyxxx + 4 \cdot xxyxyxx + 3 \cdot xxyxyx + 6 \cdot xxyxyx + 6 \cdot xxyxyx + 6 \cdot xxyxyx) - (xxyxyxxx + 2 \cdot xxyxyxx + 3 \cdot xxyxyx + 4 \cdot xxyxyx + 3 \cdot xxyxyx + 6 \cdot xxyxyx + 9 \cdot xxyxyx + 6 \cdot xxyxyx + 12 \cdot xxyxyx + 10 \cdot xxyxyx) =$$

$$- 4 \cdot xxy|xxxxy| - 9 \cdot xxxy|xxx| - 12 \cdot xxxxy|xy| - 10 \cdot xxxxy|xy| =$$

$$- 4 \cdot (3,5) - 9 \cdot (4,4) - 12 \cdot (5,3) - 10 \cdot (6,2)$$

$$- 4 \cdot xxy|xxxxy| - 9 \cdot xxxy|xxx| - 12 \cdot xxxxy|xy| - 10 \cdot xxxxy|xy|$$

$j = 1$ $\text{reg}_{\sqcup}^0(xxyxyxx) \sqcup x =$

$$3 \cdot xxy|xxx| + 12 \cdot xxy|xxx| + 27 \cdot xxxy|xxx| + 6 \cdot xxxy|xy|x + 36 \cdot xxxxy|xy| + 6 \cdot xxxxy|xy|x + 30 \cdot xxxxy|xy|$$

$j = 2$ $\text{reg}_{\sqcup}^0(xxyxyx) \sqcup xx =$

$$- 2 \cdot xxy|xy|xx - 6 \cdot xxy|xxx| - 12 \cdot xxy|xxx| - 12 \cdot xxxy|xy|x - 27 \cdot xxxy|xxx| - 36 \cdot xxxxy|xy| - 3 \cdot xxxy|xy|xx - 12 \cdot xxxxy|xy|x - 30 \cdot xxxxy|xy|$$

Az egyes j értékekhez tartozó mezők alsó fehér soraiban a $\text{reg}_{\sqcup}^0(ux^{n-j}) \sqcup x^j$ szorzat kiszámított és összevont eredményét látjuk. Ha a kiszámítás előtti formulát szeretnénk megjeleníteni, akkor az első sor végén található, sárgás háttérű egyenlőségjelre kell kattintanunk.

$j = 2$ $\text{reg}_{\sqcup}^0(xxyxyx) \sqcup xx = - (2 \cdot xxyxy + 3 \cdot xxxxy) \sqcup xx =$

$$- 2 \cdot xxy|xy|xx - 6 \cdot xxy|xxx| - 12 \cdot xxy|xxx| - 12 \cdot xxxy|xy|x - 27 \cdot xxxy|xxx| - 36 \cdot xxxxy|xy| - 3 \cdot xxxy|xy|xx - 12 \cdot xxxxy|xy|x - 30 \cdot xxxxy|xy|$$