

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
INFORMATIKAI KAR

EKG jelek feldolgozása Hermite-függvények segítségével

TDK dolgozat

Készítette: Dózsa Tamás
ELTE IK
Programtervező informatikus
BSc

Témavezető: Kovács Péter
Tanársegéd
ELTE IK
Numerikus Analízis Tanszék



Budapest, 2014.11.23.

Tartalomjegyzék

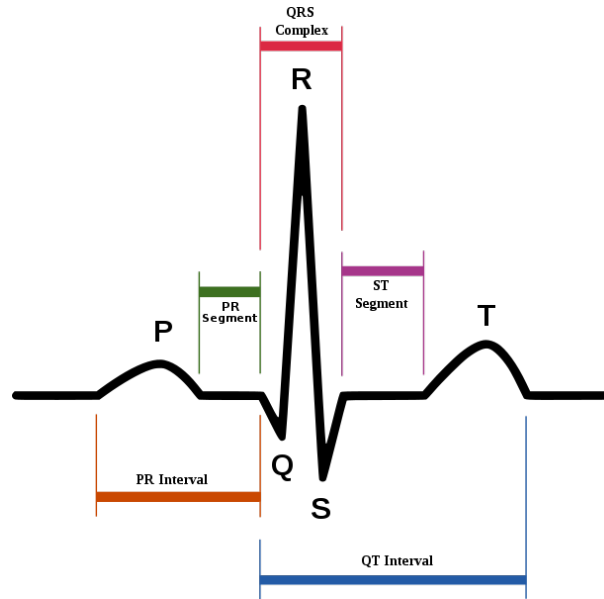
1. Bevezetés	2
2. Approximáció Hilbert terekben	4
2.1. Jelek közelítése	4
2.2. Hermite-függvények	5
2.3. Rendszerek affin transzformáltja	6
3. Optimalizáló algoritmusok	8
3.1. Leggyorsabb ereszkedés módszere	8
3.2. Particle Swarm Optimization	10
3.3. Nelder–Mead szimplex algoritmus	12
3.4. Kvadrátúra formulák	13
4. EKG jelek tömörítése	14
4.1. Matching pursuit algoritmus	15
4.2. Kvantálás	17
4.3. Tesztek, és eredmények	18
5. Összefoglalás, kitekintés	22
Függelék	25
A. Definíciók, összefüggések	25
A.1. Hermite polinomok, Hermite függvények	25
A.2. Approximáció affin transzformáltakkal	26
B. Algoritmusok	31

1. fejezet

Bevezetés

A modern orvostudományban nagy jelentőséggel bír a biológiai jelek elemzése, mivel ezek gyakran segítenek a diagnózis felállításában. Biológiai jeleken egy, valamely élő szervezet által kibocsátott, mérhető, leggyakrabban elektromos impulzust értünk. Ezek közé tartozik az EKG, azaz **Elektro Kardio Gram**, amely a szív működésének hatására keletkezik, és az orvosok számára hasznos információkat tartalmaz annak állapotáról. Bár ennek a dolgozatnak nem célja az EKG jelek pontos elemzése, fontos néhány sorban ismertetni egy átlagos EKG jel meghatározó hullámain. Egyetlen szív-ütés EKG reprezentációja három fő részre bontható: a szívütés elején megjelenő P hullámra, az ezt követő QRS komplexumra, és az ütés végén található T hullámra. Ezek rendre a pitvari összehúzódást, a kamrák depolarizációját és elektromos újratöltődését reprezentálják. Diagnosztikai szempontból a QRS komplexus a legfontosabb, ezért ezt nagy pontossággal kell tárolni. Általánosságban elmondható, hogy ezeknek a hullámoknak kezdő és végpontjai, valamint maximum és minimum értékei vesznek részt az orvosi diagnosztikában. Az említett paraméterek az 1.1 ábrán láthatóak. Az EKG jelek méréséhez több elektródát is használhatunk. Így megkülönböztetünk végtagi és mellkasi elvezetéseket. A gyakorlatban a 12 csatornás EKG jelek a legelterjedtebbek. A mintavételezési frekvencia változó, a dolgozatban 360 Hz-es jeleket dolgoztunk fel. Ez azt jelenti, hogy egy elvezetésen másodpercenként 360 adat keletkezik. Így az eljárás során keletkező EKG jelek hatékony tárolása fontos kutatási területnek számít. Az adatok tömörítésére különösen nagy szükség van a 24-órás Holter-felvételeknél, illetve a szűk keresztmetszetű adatátviteli vonalaknál (pl. mobil EKG).

Az irodalomban ismert tömörítő algoritmusokat [1] alapján három kategóriába sorolhatjuk: 1) egyszerű paraméteres becslések (pl.: interpoláció, különbségi kódolás, stb.), 2) direkt módszerek (pl.: csúcsok, meredekségek, stb. tárolása), 3) transzfor-



1.1. ábra. Az EKG jel egy szívütése, illetve annak főbb diagnosztikai jellemzői.

mációs eljárások. Az utóbbi osztály tartalmazza azokat az algoritmusokat, melyek a jelet egy előre adott függvényrendszer szerinti sorfejtéssel approximálják. Így az eredeti adatsorozat helyett csak az együtthatókat és a rendszer paramétereit kell tárolnunk. Ide tartozik a dolgozatban bemutatott algoritmus is. Nevezetesen, az eredeti adatsorozatot Hermite-polinomok segítségével fogjuk közelíteni. A módszer alapját képező eljárás [2], jól ismert az irodalomban, mely nem csak a jelek tömörítéséhez, de azok modellezéséhez [3], illetve osztályozásához [4, 5] is alkalmazható. A dolgozatban az EKG jelekkel való hasonlóságuk miatt Hermite-függvényeket használunk az adatok reprezentálásához. Ezeket egy argumentum transzformáción keresztül szabad paraméterekkel egészítjük ki. Ennek köszönhetően az eredeti jelet egy adaptív bázisban írhatjuk fel. Az említett paraméterek optimális megválasztásához különböző algoritmusokat használtunk, melyek hatékonyságát a tömörítés, pontosság és futásidő szempontjából is megvizsgáltuk. Mivel az EKG jelek diszkrét adatsorozatok, ezért a módszert [6] alapján implementáltuk diszkrét ortogonális Hermite-polinomokra is. A dolgozatban különböző tesztekkel demonstráljuk az algoritmus hatékonyságát. Ehhez, több órányi, zajjal terhelt, valódi EKG felvételt használtunk. Ezen keresztül a bemutatott módszert összehasonlítottuk egy másik, az irodalomban jól ismert tömörítő algoritmussal is [7].

2. fejezet

Approximáció Hilbert terekben

2.1. Jelek közelítése

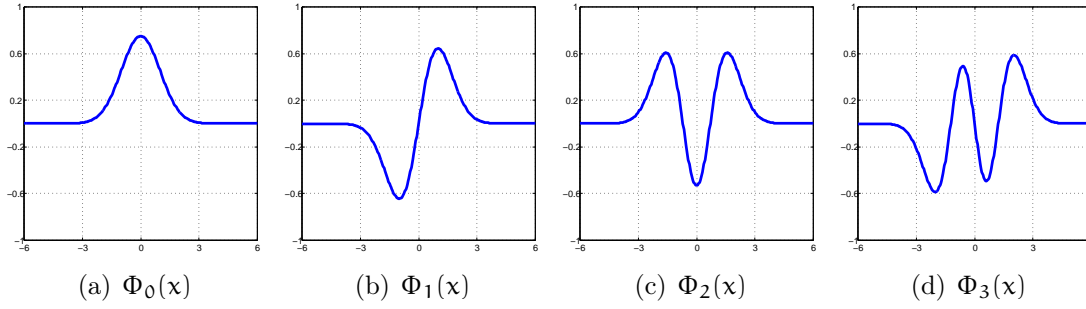
Az EKG jelek feldolgozával kapcsolatban számos gyakorlati probléma merülhet fel. Például hosszan tartó mérések esetén a beérkező jel tárolásához indokolatlanul nagy erőforrás szükséges, illetve, az EKG esetenként zajjal terhelt, ami megnehezíti a későbbiekben annak elemzését. Mindkét problémára egyszerre ad kielégítő megoldást, ha a jeleket valamely \mathcal{H} Hilbert-tér sima függvényeiből álló $(\Phi_n, n \in \mathbb{N})$ ortogonális bázisában reprezentáljuk és véges sok $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_n$ bázisbeli elem lineáris kombinációjával közelítjük. Az $f \in \mathcal{H}$ jel legjobb közelítését a tér $\|\cdot\|$ normájában az

$$S_n f := \sum_{k=0}^n \langle f, \Phi_k \rangle \Phi_k$$

projekció szolgáltatja, ahol $\langle \cdot, \cdot \rangle$ az \mathcal{H} tér skaláris szorzatát jelöli. A jel és a közelítés eltérésének négyzete a következő alakban írható fel:

$$\|f - S_n f\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n |\langle f, \Phi_k \rangle|^2.$$

Adott hibán belüli közelítést véve a jel helyett elég az $S_n f$ approximációt reprezentáló $\langle f, \Phi_k \rangle$ ($k = 0, 1, \dots, n$) Fourier-együtthatókat tárolni. Az így kapott approximációval a zaj is kiszűrhető az eredeti jelből. A közelítés megvalósításához a klasszikus ortogonális rendszerek közül EKG görbék közelítésére az Hermite-féle függvények bizonyultak használhatónak. Ezt támsztja alá a [2] dolgozat is. A Hermite-függvények alkalmazása többek között azzal indokolható, hogy grafikonjuk hasonlít az EKG gör-



2.1. ábra. A Hermite-függvényrendszer első négy tagja.

békre. Ezt a tulajdonságot a 2.1 ábra szemlélteti.

A dolgozatban az \mathbb{R} számegyenesen (Lebesgue-mérték szerint) négyzetesen integrálható függvények \mathcal{H} Hilbert-tere helyett elegendő a szakaszonként folytonos, az \mathbb{R} -en négyzetesen integrálható függvények \mathcal{F} euklideszi terét használni. Ebben a térben a skaláris szorzat és a norma a következő alakban írható fel:

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t) dt, \quad \|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle} \quad (f, g \in \mathcal{F}). \quad (2.1)$$

Továbbá, a

$$\Phi_n(x) := H_n(x) e^{-x^2/2} / \sqrt{\pi^{1/2} 2^n n!} \quad (n \in \mathbb{N})$$

normált Hermite-függvények (teljes) ortonormált rendszert alkotnak a \mathcal{F} téren:

$$\langle \Phi_n, \Phi_m \rangle = \delta_{nm} \quad (m, n \in \mathbb{N}), \quad \|f - S_n f\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Itt H_n ($n \in \mathbb{N}$) jelöli az Hermite-féle polinomokat.

2.2. Hermite-függvények

Az Hermite-függvények alkalmazásának számos előnye van:

- i) A Φ_n ($n \in \mathbb{N}$) rendszer zárt (teljes) az \mathcal{F} téren.
- ii) A $\Phi_n(x)$ függvények gyorsan tartanak 0-hoz, ha $|x| \rightarrow \infty$:

$$|\Phi_n(x)| \leq M_n e^{-x^2/4} \leq M_n \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}).$$

iii) A Φ_n függvények (stabil) másodrendű rekurzióval számíthatók:

$$\begin{aligned}\Phi_0(x) &:= e^{-x^2/2}/\pi^{1/4}, \quad \Phi_1(x) := \sqrt{2}xe^{-x^2/2}/\pi^{1/4} \\ \Phi_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{n}}x\Phi_{n-1}(x) - \sqrt{\frac{n-1}{n}}\Phi_{n-2}(x) \quad (x \in \mathbb{R}, n \geq 2)\end{aligned}\tag{2.2}$$

iv) A Φ'_n deriváltak kifejezhetők a Φ_n, Φ_{n-1} függvényekkel:

$$\Phi'_n(x) = \sqrt{2n}\Phi_{n-1}(x) - x\Phi_n(x) \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, \Phi_{-1} = 0)\tag{2.3}$$

2.3. Rendszerek affin transzformáltja

A jelek reprezentációja függ az időskála 0 pontjának és az egység megválasztásától. Ezeket a paramétereket a gyakorlatban önkényesen szokták beállítani. Példaként említjük a [5, 6] cikkeket, melyekben az EKG felvétel minden egyes szívütéséhez ugyanazokat a paramétereket használták. Így általában a közelítés hibája nem optimális, sőt adott esetben az approximáció teljesen rossz eredményt is adhat. Gondoljunk például az átlagtól eltérő, abnormális szívütésekre. Ezzel összefüggében felvethető a kérdés, hogyan lehet optimálisan megválaszthatani a rendszer paramétereit. Az approximáció pontosságát javíthatjuk azonos együttható szám mellett, amennyiben az Hermite-függvények helyett azok

$$\Phi_n^{a,\lambda}(x) := \Phi_n(\lambda x + a) \quad (x, a \in \mathbb{R}, \lambda > 0)\tag{2.4}$$

affin transzformáltjait használjuk. A $\sqrt{\lambda}\Phi_n^{a,\lambda}$ ($n \in \mathbb{N}$) rendszer is ortonormált és teljes az \mathcal{F} téren. Ebben az esetben az f legjobb approximációja az

$$S_n^{a,\lambda}f := \sum_{k=0}^n \langle f, \Phi_k^{a,\lambda} \rangle \Phi_k^{a,\lambda} \quad (n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}, \lambda > 0)\tag{2.5}$$

projekció és a közelítés hibája az a translációs és a λ dilatációs paraméter függvénye:

$$D_n^2(a, \lambda) := \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n |\langle f, \Phi_k^{a,\lambda} \rangle|^2.$$

E két szabad paraméter optimalizálásával azonos együtthatószám mellett, az eredeti Hermite-polinomokkal történő approximációhoz képest pontosabb közelítést érhetünk

el. A D_n függvény minimalizálása ekvivalens az

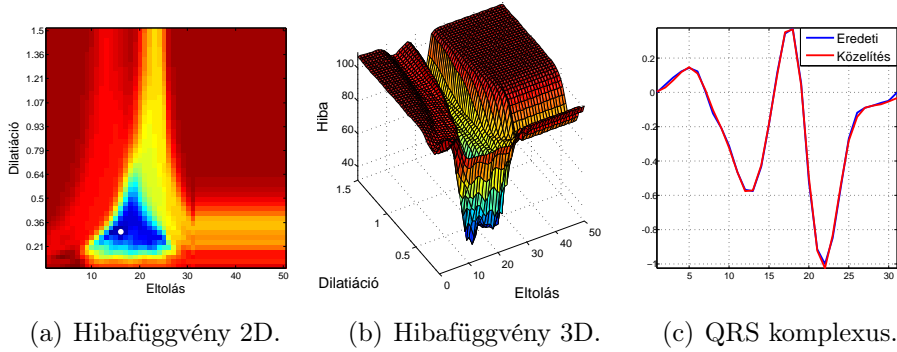
$$F_n(\alpha, \lambda) := \sum_{k=0}^n |\langle f, \Phi_k^{\alpha, \lambda} \rangle|^2 \quad (2.6)$$

függvény maximumának meghatározásával. Továbbá, a paraméteres integrálok tulajdonságaiból következik, hogy az

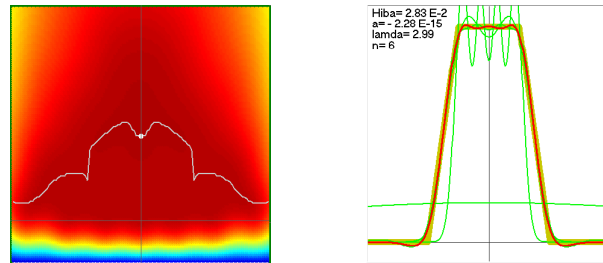
$$A_n(\alpha, \lambda) := \langle f, \Phi_k^{\alpha, \lambda} \rangle \quad ((\alpha, \lambda) \in T := \mathbb{R} \times (0, \infty))$$

Fourier-együtthatók a T tartományon a paraméterek sima függvényei. Bebizonyítható, hogy $\lambda \rightarrow 0$ és $|\alpha| + \lambda \rightarrow \infty$ esetén $F_k(\alpha, \lambda) \rightarrow 0$, következésképpen az F_n függvénynek létezik a maximuma és a D_n függvénynek létezik a minimuma. A bizonyítás részleteit az A.2 Függelék tartalmazza.

A 2.2 ábra az $F_n(\alpha, \lambda)$ függvényt szemlélteti fényintenzitás és perspektivikus ábrázolást használva. A fehér vonal a lokális szélsőértékek helyét, a pont pedig a globális maximumot jelöli. Előbbi jól láthatóan az $F_n(\alpha, \lambda)$ függvényen egy ún. hegygerincet képez. Ezt szemlélteti 2.3 ábra is, melyen a jel közelítését is kirajzoltuk a globális maximum helynek megfelelően.



2.2. ábra. A D_n által meghatározott felület, és approximáció.



2.3. ábra. Az F_n által meghatározott felület, és approximáció.

3. fejezet

Optimalizáló algoritmusok

A dolgozatban három algoritmust alkalmaztunk az $F_n(\alpha, \lambda)$ függvény maximumának meghatározásához. A módszerek kiválasztásánál figyelembe vettük az alkalmazási területek gyakoriságát, az eljárások típusát, és gyorsaságát. Ezért implementáltunk egy determinisztikus simplex algoritmust [8], egy raj alapú nem determinisztikus optimalizációt [9] és a gradiens módszert [10]. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az első két esetben csak a hibafüggvény értékeire támaszkodunk. Ezzel ellentétben, a gradiens módszer konstrukciójához szükség van az $F_n(\alpha, \lambda)$ függvény parciális deriváltjaira is. Megjegyezzük, hogy ennek levezetése nem triviális, ezért a dolgozat eredményinek szerves részét képezi.

3.1. Leggyorsabb ereszkedés módszere

A leggyorsabb ereszkedés módszere (más szóval a gradiens módszer) alkalmas arra, hogy egy $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ többváltozós függvény minimumát (maximumát) meghatározzuk. A módszer lényege, hogy egy $x_0 \in \mathbb{R}^n$ kezdőpontól kiindulva a

$$f'(x_0) = \text{grad } f(x_0) = (\partial_1 f(x_0), \dots, \partial_n f(x_0)) \in \mathbb{R}^n$$

deriváltat (gradienst) felhasználva a függvényt leszűkítjük az x_0 ponton áthaladó, gradiens irányú $x_0 + tf'(x_0)$ ($t \in \mathbb{R}$) egyenesre. Az így kapott $F_0(t) := f(x_0 + tf'(x_0))$ ($t \in \mathbb{R}$) egyváltozós függvénynek meghatározzuk a t_0 minimum helyét: $F_0(t_0) = \min_{t \in \mathbb{R}} F_0(t)$, majd az eljárást az $x_1 := x_0 + t_0 f'(x_0)$ pontban folytatjuk. Tehát az $x_k \in \mathbb{R}^n$ ismeretében értelmezzük az $F_k(t) := f(x_k + tf'(x_k))$ ($t \in \mathbb{R}$) függvényt, legyen t_k ennek a

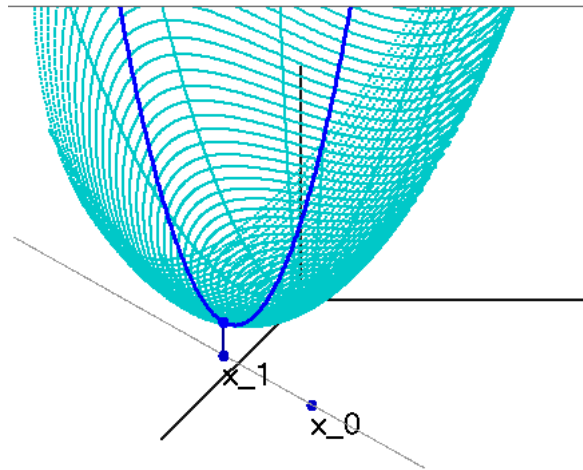
minimum helye és

$$\mathbf{x}_{k+1} := \mathbf{x}_k + t_k f'(\mathbf{x}_k), \quad \text{ahol} \quad F_k(t_k) = \min_{t \in \mathbb{R}} F_k(t).$$

Számos olyan függvényosztály ismert, amelyek minimum helyének meghatározásához alkalmazható a leggyorsabb ereszkedés elve. Ilyen például \mathbb{R}^n -ben a pozitív definit kvadratikus alakok osztálya. Jelölje $\langle \cdot, \cdot \rangle$ az \mathbb{R}^n skaláris szorzatát, legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egy pozitív definit mátrix és $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor az

$$f(\mathbf{x}) := \langle A\mathbf{x} - \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$$

függvénynek van minimuma és ebben az esetben az \mathbf{x}_k ($k \in \mathbb{N}$) sorozat az f függvény \mathbf{x}^* minimum helyéhez konvergál. Mivel a minimum helyre $A\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$ teljesül, ezért a módszer lineáris egyenletrendszer megoldására is használható.

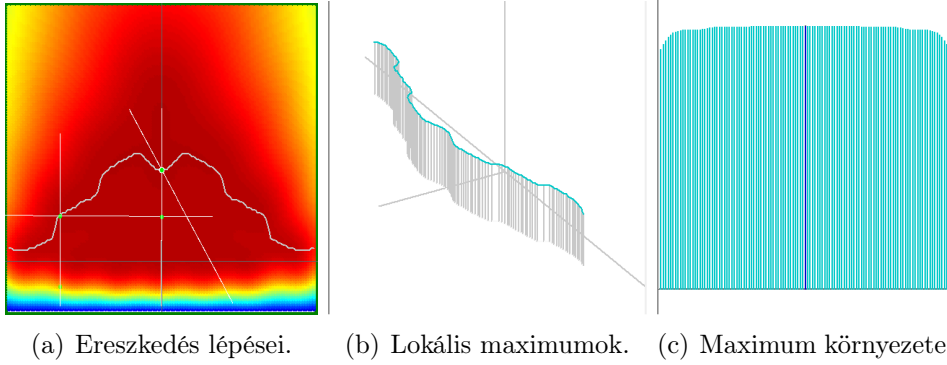


3.1. ábra. A leggyorsabb ereszkedés módszere

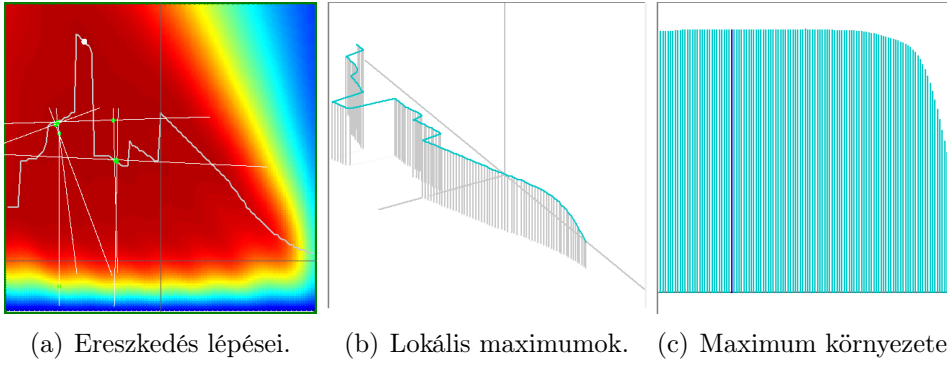
Az $F_n(\mathbf{a}, \lambda)$ ($(\mathbf{a}, \lambda) \in T = \mathbb{R} \times (0, \infty)$) függvény maximumának meghatározásánál célszerű figyelembe venni, hogy a függvényt ábrázoló felület olyan hegyre hasonlít, amelynek a gerinc magassága csak kissé változik. A 3.2-3.3 ábrákon azt szemléltetjük, hogy a gradiens módszer ebben az esetben hogyan alkalmazható. A gradiens vektor zárt alakjának levezetését az A.2 Függelék tartalmazza.

Megjegyezzük, hogy a gradiens módszer egy determinisztikus algoritmus. Ez azt jelenti, hogy azonos inicializálási feltételek mellett, az eljárás ugyanabban a pontban terminál. A konvergencia adott esetben nagyon gyors is lehet, de ez a kezdőponttól függ. Rossz inicializálási feltételek mellett a módszer könnyen elakadhat a

hibafüggvény lokális minimumaiban (ld. Rosenbrock függvény). Ennek elkerülésére a következő fejeztben egy nem determinisztikus raj alapú optimalizáló algoritmust is kipróbáltunk.



3.2. ábra. F_n , leggyorsabb ereszkedés szimmetrikus jel esetén.



3.3. ábra. F_n , leggyorsabb ereszkedés asszimmetrikus jel esetén.

3.2. Particle Swarm Optimization

Egy másik lehetséges módja a dilatációs, illetve translációs paraméterek optimalizálásának a Particle Swarm Optimization (PSO) algoritmus alkalmazása. A módszer egy-egy Hermite-függvényekből álló rendszert úgynevezett részecskéként kezel, a keresési teret pedig a hibafüggvény értelmezési tartománya alkotja ($0 \leq \lambda, t \in \mathbb{R}$). Az algoritmus működésének szempontjából kritikus szerephez jut a részecskék dilatációs és translációs paramétereinek megfelelő inicializálása. Mivel a gyakorlati tapasztalatok az EKG jelek esetében azt mutatták, hogy λ egy nem túl nagy pozitív valós szám, ezért a dilatációs paramétert minden részecskéhez 0 és 10 között határozzuk meg. A translációs paramétert pedig a jel maximum helyének egy lokális környeze-

tében választjuk véletlenszerűen. Így például a P, QRS, T hullámok maximum helyei jó kezdőpozíciónak bizonyultak.

Minden lépésben kiszámítjuk az összes részecskére vonatkozóan, hogy az általuk előállított approximáció mennyire tér el az eredeti jeltől. Az eljárás során minden részecskéhez nyilvántartjuk az eddigi legjobb pozíciót, illetve a teljes raj globális optimumát. Ezeket rendre a **pbest** és a **gbest** változóknak tároljuk. Az aktuális pozícióban kapott eltérést összehasonlítjuk az eddig megtalált lokális és globális hibákkal. Végül a **pbest**, **gbest** változókat ennek megfelelően frissítjük.

Az részecskéhez egy aktuális sebességet is tárolunk. Ez a szám határozza meg, hogy az egyes lépésekben milyen mértékben változtatjuk meg a részecskéhez tartozó dilatációs illetve translációs paramétereket. A pozíciókhoz hasonlóan a részecske aktuális sebességét is frissíteni kell minden lépésben. Ez a következő összefüggés alapján történik:

$$v = v + c_1 \cdot \text{rand}() \cdot (\text{pbest} - \text{presentpos}) + c_2 \cdot \text{rand}() \cdot (\text{gbest} - \text{presentpos}),$$

ahol v a részecske aktuális gyorsulása. Az egyenletben a c_1 és c_2 tanulási paraméterek segítségével súlyozható, hogy a részecskék sebességét az eddig megtalált lokális vagy globális optimum befolyásolja. Megjegyezzük, hogy tesztek során, minden iterációban az EKG jelek egy konkrét hullámát közelítettük. A részecskék kezdeti translációját is ennek megfelelően a P, QRS, T hullámok maximumával inicializáltuk. Annak érdekében, hogy a raj ne "vándorolhasson" el egy másik hullám felé, a **gbest** pozíció befolyását a kétszeresére növeltük ($c_1 = 1$, $c_2 = 2$).

Mivel a részecskék pozíciója minden lépésben változik, ezért biztosítani kell, hogy a paraméterek konzisztensek maradjanak. Így például gondoskodni kell arról, hogy a λ dilatáció pozitív maradjon, az α transláció pedig ne legyen nagyobb mint a jel mintaelemszáma. Az eljárás addig folytatódik amég kielégítő eredményhez nem jutunk (vagy el nem érjük a maximális lépésszámot). A PSO algoritmus pseudokódja megtalálható a B Függelékben.

Megjegyezzük, hogy a PSO több szempontból is különbözik a gradiens módszertől. Egyrészt a részecskék pozíciója függ a véletlentől, így azonos inicializálási feltételek mellett sem garantált, hogy ugyanabban a pontban terminál a program. Ezzel és a raj egyedszámának növelésével csökkenthető a lokális optimumban való elakadás lehetősége. Azonban a több részecske, több függvénykiértékelést is jelent, így a futásidő jelentősen megnőhet. A **Nelder – Mead** módszer egy köztes megoldást jelenthet a futásidő és a lokális optimumban való elakadás kiküszöböléséhez.

3.3. Nelder–Mead szimplex algoritmus

A Nelder – Mead szimplex algoritmust [8] eredetileg 1965-ben fejlesztették ki azzal céllal, hogy létrehozzanak egy eljárást, amely képes meghatározni egy $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nemlineáris függvény minimum (maximum) helyét a gradiens felhasználása nélkül, pusztán a függvényértékekre támszkodva. Mivel az algoritmust kétváltozós függvényekre alkalmazzuk, ezért ebben a speciális esetben szemléltetjük, megjegyezve, hogy hasonló elvek szerint működik az általános n dimenziós eset is. A minimum meghatározásához az $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ függvényértékekből indulunk ki, melyek közül egyet lecserélünk az adott lépésben. Nevezetesen,

$$f(x_3) \leq f(x_2) \leq f(x_1)$$

esetén olyan x' helyet keresünk, amelyre $f(x') \leq f(x_3) \leq f(x_2)$ teljesül és az x_3, x_2, x_1 ponthármasról az x_1 -et elhagyva áttérünk az x', x_3, x_2 hármasra. Az x' pontot az előzőekből geometriai transzformációkkal származtatjuk, felhasználva az x_2x_3 szakasz $x = (x_2 + x_3)/2$ felezéspontját:

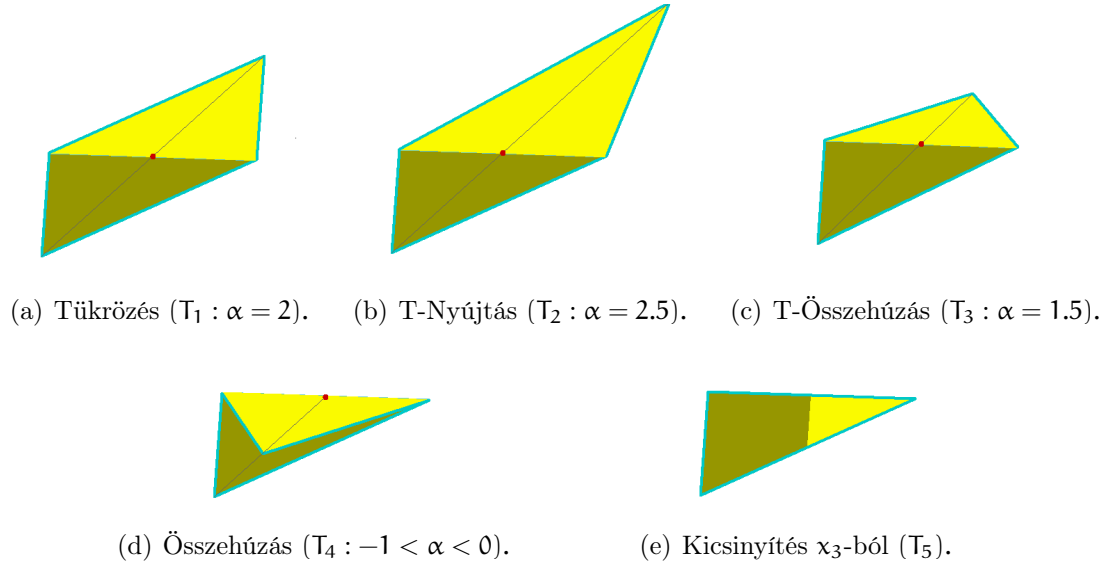
$$x' = x_1 + \alpha(x - x_1) \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Az alábbi ábrákon szemléltetjük az algoritmusban használt transzformációkat. Vegyük észre, hogy $\alpha = 2$ esetén x' éppen az x_1 pont x -re vonatkozó középpontos tükrözése (T_1). Továbbá $\alpha > 2$ az eredeti háromszög tükrözése + nyújtása (T_2), az $1 < \alpha < 2$ pedig tükrözéses + zsugorításnak felel meg (T_3). A $-1 < \alpha < 0$ paraméterrel egyszerű zsugorítást kapunk. Végül az 5. transzformáció (T_5) az x_3 pontból történő kicsinyítésnek feleltethető meg. Az x_1 képét ezekben a transzformációkban és a hozzá tartozó függvényértékeket a következő alakban adjuk meg:

$$x' := x_{3+i} = T_i(x_1) \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad y_j = f(x_j) \quad (j = 1, 2, \dots, 7).$$

Azt, hogy mikor melyik transzformációt használjuk a B Függelékben található folyamatábrából látható. Az említett műveleteket a 3.4 ábrán szemléltettük.

Megjegyezzük, hogy a Nelder – Mead szimplex módszer is egy determinisztikus algoritmus. Az algoritmus gyors, hiszen minden lépésben csak néhány függvénykiértékelést kell végezni. Továbbá, a gradiens módszerrel ellentétben az olyan patológus függvények optimumát is képes gyorsan megtalálni, mint amilyen a Rosenbrock függvény.



3.4. ábra. A Nelder – Mead szimplex transzformációi.

3.4. Kvadratúra formulák

A közelítés hibájának kiszámításához kétféle kvadratúra formulát alkalmazunk attól függően, hogy a dilatációs illetve translációs paraméterek optimalizálását melyik módszerrel végezzük. Mivel a **Nelder – Mead**, illetve a **PSO** algoritmusok csak a függvényértékekre támaszkodnak, a hibafüggvény értékeinek kiszámításához elegendő a Hermite-függvényeket valamilyen felosztás pontjaiban egyszer meghatározni. Ez implementációs szempontból is fontos, hiszen nem kell minden (λ, \mathbf{a}) paraméterhez kiszámolni az ettől függő, rekurzióval adott Hermite-féle függvényrendszer tagjait. Ehelyett elég az eredeti diszkrét adatsorozatot dilatálni, illetve eltolni, ami lényegesen kevesebb számítást igényel. Továbbá, az említett felosztás pontjainak valamely Hermite-függvény zérushelyeit választva, a hibafüggvényben szereplő integrálok kiszámításához a [11] dolgozatban használt eljáráshoz hasonlóan kvadratúra formulát is alkalmazhatunk. Ennek előnye, hogy az alappontokban a módszer interpolál, így itt lehetséges a jel mintáinak pontos rekonstrukciója. Ugyanakkor, a kapott approximáció is pontosabb, amit a [11]-ben közölt numerikus tesztek is alátámasztanak.

Mivel a leggyorsabb ereszkedés módszerének az alkalmazásához szükségünk van a függvény parciális deriváltjaira, így ezek előállításával külön kell foglalkozni. Az Hermite-függvények deriváltjaira vonatkozó formulák alapján a parciális deriváltakra a hibafüggvényhez hasonló előállítás adható. Ebben az esetben az (2.1) egyenletben szereplő integrálok kiszámításához ekvidisztans felosztást alkalmaztunk.

4. fejezet

EKG jelek tömörítése

Mindhárom optimalizáció esetén, a tömörítő eljárás előkészítése megegyezik. A program indításakor az első feladat, hogy a teljes EKG jelet szívütésekre bontsunk, majd minden szívütést paraméterként adjunk tovább a tömörítő eljárásnak. Inicializálni kell továbbá a tömörítő függvények által visszaadott, az aktuális szívütésre vonatkozó Fourier-együtthatókat, az approximáció hibáját, illetve az optimalizációs eljárások által meghatározott dilatációs és transzlációs paramétereket tároló tömböket.

A tömörítés előkészítése nem ér véget a jel szívütésekre történő felbontásakor. A szívütéseket normalizáljuk is. Ez azt jelenti, hogy az első és utolsó helyen felvett értékeket összekötő egyenest kivonjuk a jelből. Ezt az eljárást az irodalomban az alapvonal eliminálásnak nevezik. Ennek eredményeként a jel tartója a kezdő és a végpont által meghatározott intervallum. Végül, a szívütést normáljuk, vagyis az egyes értékeket elosztjuk az abszolút maximummal.

A tömörítés megkezdése előtt inicializáljuk a függvényrendszert, melynek során az egyes bázisfüggvények által felvett értékek egy mátrix soraiba kerülnek:

$$\Phi := [\Phi_n(\alpha_m)]_{0 \leq n < N, 0 \leq m < M}.$$

A $\Phi \in \mathbb{R}^{N \times M}$ mátrix segítségével az $f \in \mathbb{R}^M$ diszkrét jel Fourier-együtthatói könnyen meghatározhatók:

$$c_n := \langle f, \Phi_n \rangle = \frac{1}{M} \Lambda^{-1} \Phi f \quad (0 \leq n < N),$$

ahol $\mathbb{R}^{N \times N} \ni \Lambda = \Phi \Phi^T$ Cristoffel-Darboux számokat tartalmazza. Az előállításban szereplő $\alpha_n \in \mathbb{R}$ ($0 \leq n < N$) számokat a 3.4 fejezetnek megfelelően kétféleképpen határoztuk meg. Egyrészt a PSO és Nelder–Mead algoritmusokban a Φ_N függvény

gyökeket véve kvadratúra formulákat definiáltunk. Másrészt a gradiens módszerhez f tartóján egyenletes alapponterndszerzt használtunk. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az előbbi esetben a gyökök pontos meghatározása kritikus a feladat szempontjából. A probléma megoldásához a [12] könyv által javasolt numerikus eljárást követjük. Nevezetesen, a H_n Hermite-polinom (A.3) rekurziójában szereplő együtthatókat egy tridiagonális mátrixba rendezzük. Könnyen belátható, hogy az α_n gyökök megegyeznek ezen tridiagonális mátrix sajátértékeivel.

Hátra van még a megfelelő $(\mathbf{a}, \boldsymbol{\lambda})$ paraméterek beállítása. Annak érdekében, hogy a reprezentáció minél adaptívabb legyen, több optimális transzlációt, illetve dilatációt fogunk meghatározni. Az eredeti $f \in \mathcal{F}$ jelet tehát a következő alakban közelítjük:

$$S_n^{\mathbf{a}, \boldsymbol{\lambda}} f := \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^{n_i} \langle f^{\mathbf{a}_i, \lambda_i}, \Phi_k \rangle \Phi_k \quad (\mathbf{a}_k \in \mathbb{R}, \lambda_k > 0),$$

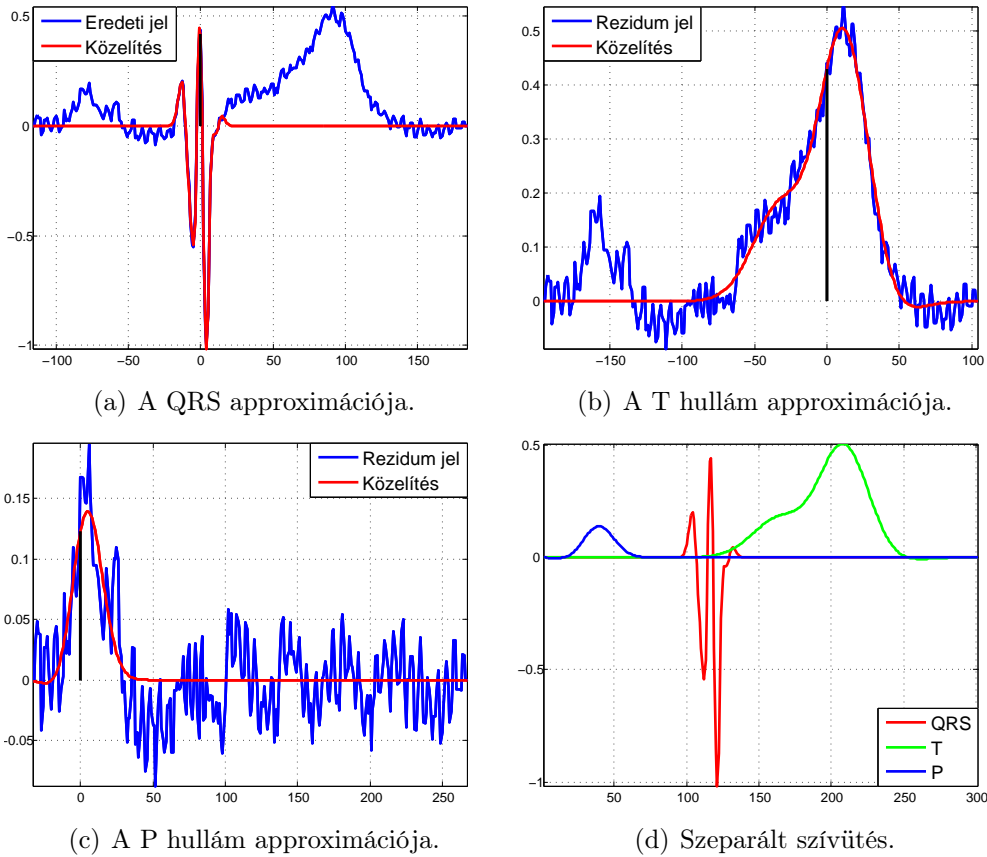
ahol $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N$ az alkalmazott transzlációk, $\boldsymbol{\lambda} = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ pedig a dilatációk sorozata. Az egyes sorfejtésekhez tartozó együtthatók számát az $\mathbf{n} = n_1, n_2, \dots, n_N$ vektor jelöli. Mivel az EKG jel alapvetően három fő hullámból áll ezért esetünkben $N = 3$. Továbbá a [2] dolgozat eredményei alapján a QRS komplexumot egy heted, a T hullámot hatod, a P hullámot pedig egy másodfokú ortogonális rendszer segítségével approximáljuk azaz $\mathbf{n} = 7, 6, 2$. Felhívjuk a figyelmet, hogy a legjobb approximáció előállításához a (2.5) egyenlettel ellentétben már az eredeti függvény $f^{\mathbf{a}_i, \lambda_i}$ transzformáltját használjuk. Ez nem jelent megszorítást az eredeti problémára nézve, implementációs szempontból viszont $f^{\mathbf{a}_i, \lambda_i}$ kiszámítása gyorsabb, mint a $\Phi_n^{\mathbf{a}_i, \lambda_i}$ rendszer előállítása.

4.1. Matching pursuit algoritmus

A $(\mathbf{a}_i, \lambda_i)$ paraméter párok optimalizációját egymástól függetlenül végezzük. Így azonban nem garantált, hogy az algoritmus a P, QRS, T hullámokat külön-külön approximálja. A probléma megoldására az irodalomban jól ismert ún. **Matching Pursuit** (MP) konstrukciót [13] alkalmazzuk. Ez egy mohó algoritmus, mely minden lépésben a (2.6) egyenletben definiált $F_n(\mathbf{a}_i, \lambda_i)$ függvény maximalizálására törekszik. Az iteráció i . lépése a következő alakban írható fel:

$$\mathbf{s}^{(i)} = \mathbf{s}^{(i-1)} + S_{n_i}^{\mathbf{a}_i, \lambda_i} \mathbf{R}^{(i-1)} \quad (1 \leq i \leq N), \quad (4.1)$$

ahol $R^{(i)} = f - s^{(i)}$ a rezidum függvényt jelöli. Röviden tehát az $s^{(0)} = 0$, $R^{(0)} = f$ inicializálás után, az eljárás i . lépésében megkeressük az $R^{(i-1)}$ függvény ℓ^2 norma szerinti legjobb közelítését, amit ki is vonunk az említett rezidum vektorból. Ezt N iteráción keresztül ismételjük az aktuális $R^{(i)}$ függvényre. Az MP módszer egy gyors algoritmus, mellyel megkonstruálható az $f \in \mathcal{F}$ jel ritka reprezentációja. Emellett lehetséges az EKG szívéseinek automatikus szeparációja is, hiszen a jel különböző részeit eltérő ortogonális rendszerek segítségével közelítjük. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az eredeti [2] módszerben ezt a lépést egy külön szegmentáló algoritmus végezte. Így a közelítés jósága erősen függött a szegmentálás eredményétől (ld. 4.3 fejezet). A kifejlesztett eljárásnál azonban ez a probléma nem áll fenn még zajos jelek esetén sem. A dolgozatban bemutatott módszer iterációs lépéseit, az $R^{(i)}$ rezidum függvények alakulását, illetve a szeparált EKG jelet az 4.1 ábra szemlélteti. Jól látható az is, hogy a fekete vonallal jelölt optimális transláció általában nem az abszolút maximum helyén található. Ez indokolja, hogy a λ_i dilatáció mellett az α_i paraméter optimalizációjára is szükség van. Mivel ez utóbbi a kindulásként használt [2] dolgozattól hiányzik, ezért a pontosság és tömörítési arány jelentős javulását várjuk.



4.1. ábra. Az MP algoritmus lépései.

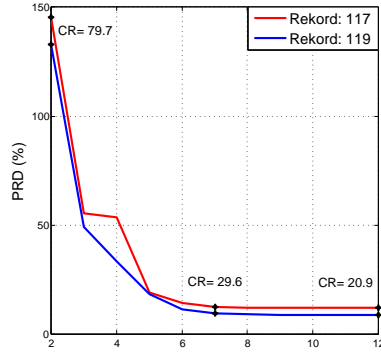
4.2. Kvantálás

Az MP algoritmus által megtalált optimális paramétereket tárolnunk is kell. Mivel a reprezentáció erősen függ az \mathbf{a} transzlációs paraméterek vektorától, ezért ezt annyi biten ábrázoljuk, ami a pontos rekonstrukcióhoz szükséges, így $\mathbf{b} = \log_2(\max_i |\mathbf{a}_i|) + 1$. Az egyes hullámokhoz tartozó dilatációk λ és $\mathbf{c} = [\mathbf{c}_n^{(i)}]$ ($1 \leq n \leq n_i, 1 \leq i \leq N$) együtthetők vektorát azonban kerekítve tároljuk. Ehhez a dolgozatban lineáris kvantálást használunk. Jelölje \mathbf{c}_{\max} és \mathbf{c}_{\min} a \mathbf{c} vektor abszolútértékben maximális és minimális elemét. Ekkor a lineáris kvantálás művelete a következőképpen definiálható:

$$Q(\mathbf{c}) := \mathbf{c}_{\min} + \text{sign}(\mathbf{c}) \cdot \Delta \cdot \left\lfloor \frac{|\mathbf{c} - \mathbf{c}_{\min}|}{\Delta} + \frac{1}{2} \right\rfloor, \quad (4.2)$$

ahol $\Delta = |\mathbf{c}_{\max} - \mathbf{c}_{\min}| / 2^{b-1}$. A $Q(\mathbf{c})$ kerekített értékeket az előjel figyelembevételével b biten tároljuk. A dilatációs paraméterek kvantálását ugyanezen függvény segítségével végezzük el. A b bitek számát tapasztalati úton, tesztek segítségével határoztuk meg.

A vizsgálatokhoz a PhysioNet [14] MIT-BIH EKG adatbázis rekordjait használtuk. Ez 48 egyenként fél órás valódi EKG jelet tartalmaz, amit 47 egészséges illetve beteg páciensről gyűjtöttek össze. A rekordok két elvezetése másodpercenként 360 mintát rögzít 11 bites felbontásban. A tömörítés teszteléséhez az irodalomban gyakran csak a 117 és 119 sorszámú rekordokat használják (pl. [7, 11]). Ennek az az oka, hogy e két felvétel több abnormális szívütést tartalmaz, így bonyolultságukat tekintve jó teszt-rekordok. A vizsgálatok során először kiszámoltuk az említett rekordok szívütéseihez tartozó optimális paramétereket. Majd a pontosan ábrázolt \mathbf{c} együtthető és λ dilatációs vektorokat egyre csökkenő b bitszámmal újra kvantáltuk. Eközben vizsgáltuk a közelítés pontosságát (PRD) és a tömörítési arányt (CR). Ezek pontos definícióját a 4.3 fejezetben adjuk meg. A tesztek során a két rekord összesen $1528 + 1979$ szívütését dolgoztuk fel. Az eredményeket a 4.2 grafikonon ábrázoltuk. Jól látható, hogy a közelítés hibája 7 bit után lényegében nem változik. Ezért a további tesztek során a dilatációs paramétereket és az együtthetőket is $b = 7$ biten tároljuk a (4.2) egyenletnek megfelelően.



4.2. ábra. A rekonstruált 117, 119 rekordok paramétereinek kvantálása.

4.3. Tesztek, és eredmények

A dolgozatban ismertetett algoritmust a 117, 119-es rekordok mellett az MIT-BIH adatbázisban egyéb felvételein is lefuttattuk. Így összesen 3 órányi adaton, 12830 darab szívütésen próbáltuk ki a módszert. Az összehasonlíthatóság érdekében a tesztet megismételtük az eredeti [2] algoritmussal is. Mindkét esetben a kvantálást $\mathbf{b} = 7$ biten hajtottuk végre, az egyes szegmenseket pedig $\mathbf{n} = 7, 6, 2$ együtthatóval reprezentáltuk. A futásidő csökkentéséhez a PSO algoritmus rajméretét 10-re, az iterációk számát pedig 15-re állítottuk be. Így egy 30 perces rekordon a Nelder-Mead (NM) szimplex módszer átlagosan 1400 másodpercig, míg a PSO esetén 1600 másodpercig futott. Megfelelő hardver konfiguráció esetén ez már valós idejű adatfeldolgozást feltételez. Az eredményeket a pontosság és a tömörítési arány szempontjából is értékeltük:

$$\text{PRD} = \frac{\|\mathbf{S}_n^{\mathbf{a}, \lambda} \mathbf{f} - \mathbf{f}\|_2}{\|\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}\|_2} \times 100, \quad \text{CR} = \frac{\text{eredeti EKG mérete}}{\text{tömörített EKG mérete}} \times 100,$$

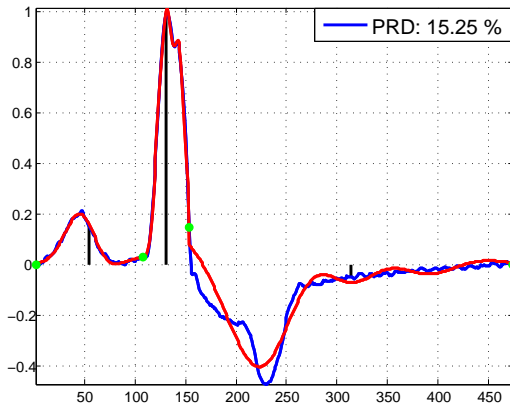
ahol $\bar{\mathbf{f}}$ a jel átlaga. A pontosság mérésére az irodalomban az ún. **percentage root mean square difference** (PRD) terjedt el. Vegyük észre, hogy ez az ℓ^2 normában mért relatív hibával egyenlő, ami független a jel átlagától. Az algoritmusok összehasonlításánál a CR-t és a PRD-t is figyelembe kell venni. Ez azonban megnehezíti a módszerek értékelését. Ezt kiküszöbölendő, a [15] cikkben bevezették az ún. **Quality Score** (QS) fogalmát, ami a CR és a PRD hányadosa. Így az az algoritmus tekinthető jobbnak, amelyik magasabb QS-el rendelkezik. Ennek megfelelően az eredményeket a 4.1 táblázatban foglaltuk össze.

Hiba (PRD %)					A tömörítés aránya (CR 1 : X)				Quality Score (CR : PRD)			
Rec.	Eredeti	NM	PSO	JPEG2	Eredeti	NM	PSO	JPEG2	Eredeti	NM	PSO	JPEG2
101	11.20	11.10	11.13	11.07	29.71	27.22	27.22	18.94	2.65	2.45	2.47	1.71
117	13.20	11.81	17.66	11.66	36.07	33.06	33.06	23.66	2.73	2.79	1.87	2.02
118	19.83	17.79	16.65	17.72	24.34	22.30	22.30	32.91	1.22	1.25	1.33	1.85
119	14.27	8.76	10.20	8.80	27.89	25.55	25.55	23.85	1.95	2.91	2.51	2.71
201	13.51	12.17	12.17	12.14	28.21	25.35	25.35	13.15	2.08	2.08	2.08	1.08
213	19.92	18.28	17.60	18.29	17.08	15.64	15.64	35.23	0.85	0.85	0.88	1.92
Átlag	14.22	12.55	13.83	12.51	26.83	24.45	24.51	23.86	1.91	2.06	1.85	1.88

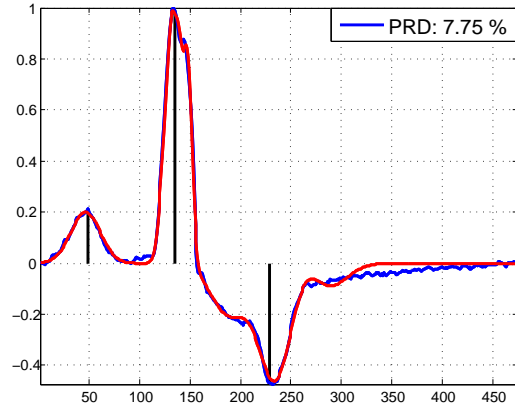
4.1. táblázat. A tömörítés összehasonlítása különböző módszerek esetén.

Általánosságban elmondható, hogy az összehasonlított módszerek közül, a dolgozatban bemutatott algoritmus volt a leghatékonyabb. Utóbbi PRD-je átlagosan 2%-al jobb, mint az eredeti módszeré. A tömörítési arány egy kicsit rosszabb, ami várható hiszen a transzlációs paramétereket is tárolnunk kell ellentétben [4]-el. Végeredményben viszont az átlagos QS alapján a dolgozatban bemutatott és a Nelder-Mead optimalizációval kombinált módszerünk győzött. Továbbá vegyük észre, hogy a 119-es rekord esetén jelentős különbség van a két módszer között. A jelenség megértéséhez tekintsük a 4.3 ábrát, ahol a kérdéses jel első szívtűtését rajzoltuk ki. Látható, hogy az eredeti algoritmussal adott approximáció a T hullám közelében nagyon rossz. Ez egyrészt a szegmentáló algoritmus hibájának, másrészt a transzlációs paraméter hiányának köszönhető. Az eredeti algoritmus az EKG jelet a zöld pontokkal megjelölt szakaszokon közelíti, ahol az alkalmazott Hermite-függvények az intervallum közepre vannak igazítva (lsd. fekete vonalak). Mivel a T hullám asszimmetrikusan helyezkedik el az adott szegmensben, így még elég nagy dilatáció esetén sem lehet kompenzálni a hibát. A kidolgozott módszer azonban a (α_i, λ_i) szabad paramétereknek és az optimalizációnak köszönhetően képes megbirkózni a feladattal és közel kétszer alacsonyabb PRD-vel állítja elő a jelet. Megjegyezzük, hogy ehhez mindkét reprezentációban ugyanannyi együtthatót használtunk fel. A saját módszerünk tárolás szempontjából csupán abban különbözik, hogy szegmensenként szükség van plussz egy transzlációs paraméterre. A példából érthető az is, hogy a 4.1 táblázat bizonyos rekordjain az eredeti algoritmus miért teljesít majdnem olyan jól, mint a dolgozatban bemutatott módszer. Ha ugyanis normális szívtűtések vannak és a szegmentálás is pontos, akkor az intervallumok felezőpontja közel van az optimumhoz. Mivel ez valós jelek esetén egyáltalán nem garantált, így a dolgozat problémafelvetése jogos és az erre adott megoldás gyakorlati szempontból is értékelhető.

Eredményeinket szeretnénk volna összevetni más, az irodalomban gyakran hivatkozott módszerekkel is. Ehhez a [7] cikkben bemutatott 2D-s algoritmust használtuk. Választásunkat a módszer egyszerűsége, illetve az alkalmazott JPEG 2000 szabvány



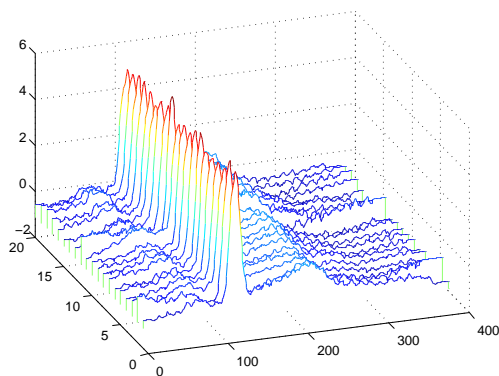
(a) Eredeti módszer.



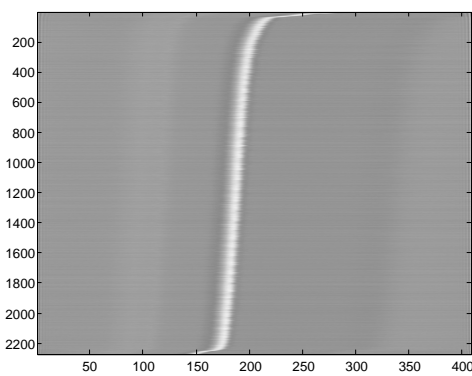
(b) Saját módszer.

4.3. ábra. Asszimmetrikus EKG jel közelítése.

elterjedése indokolja. Az algoritmus az EKG jelek szegmentálása után az R hullám mentén rendezi a szívütéseket a 4.4 ábrának megfelelően. Mivel a szívütések hossza eltérő, ezért előbb ezeket ki kell egyenlíteni, például a végpontok ismétlésével. Az így kapott egyenlő hosszú szívütések vektorait mátrixba rendezve egy képet kapunk, melyet a JPEG 2000 veszteséges képtömörítővel tárolunk. Az PhysioNet rekordjain kapott eredményeket a 4.1 táblázat utolsó oszlopa tartalmazza. Ez esetben a paramétereket úgy állítottuk be, hogy a pontosság közel legyen a saját módszer PRD-jéhez. Így az eredmények értékelése egyszerűbb. Az átlagos CR alapján az általunk kidolgozott módszer jobban bizonyult. Mivel a JPEG 2000 szabvány egy wavelet alapú algoritmust használ, a tömörítési arány várhatóan ott lesz magas ahol a szívütésekből készített kép sima, homogén tartományokat tartalmaz. Így fordulhatott elő, hogy a 118 és 213 rekordok esetében kiugróan magas CR értékeket kaptunk. Végül megje-



(a) A QRS-hez igazított szívütések.



(b) Szívütések felülnézete, tömörítendő kép.

4.4. ábra. EKG jelek tömörítése a JPEG 2000 képtömörítő algoritmussal.

gyezzük, hogy a teszteléshez felhasznált módszerek mindegyikében szükséges az EKG jelek legalább szívütésenkénti szegmentálása. A PhysioNet MIT-BIH adatbázisa kardiológusok által annotált EKG jeleket tartalmaz. Ez azt jelenti, hogy a szívütések QRS komplexusait orvosok korábban kézzel bejelölték. Ugyan az annotációkat a tesztek során felhasználtuk, de ez nem csökkenti a módszer robosztusságát. A szegmentáláshoz használhatjuk például az irodalomban gyakran hivatkozott Pan–Tompkins-féle QRS detektort is [16].

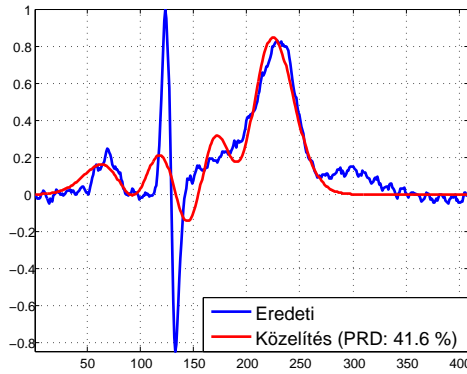
5. fejezet

Összefoglalás, kitekintés

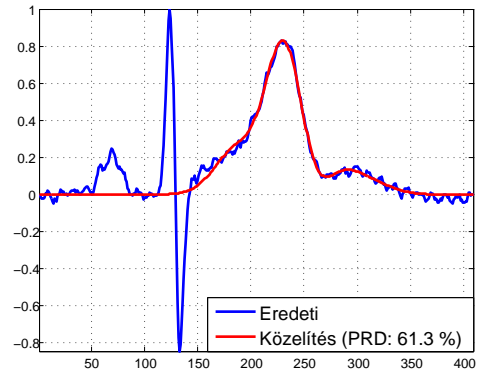
A dolgozatban a [2, 6] cikkekben bemutatott algoritmusokból kiindulva egy új EKG tömörítő eljárást konstruáltunk. Az módszer adaptív, amit a Hermite-függvények argumentum transzformációjával értünk el. A reprezentáció szabad (α_i, λ_i) translációs és dilatációs paramétereit három optimalizációs algoritmussal állítottuk elő. A módszerek előnyeit, hátrányait egyaránt figyelembe vettük az alkalmazás során. Az említett optimum létezését beláttuk, illetve a gradiens módszerhez szükséges parciális deriváltakat levezettük. A tömörítő algoritmus hatékonyságát a PhysioNet adatbázis valós EKG felvételein teszteltük. A numerikus vizsgálatokban összesen 3.5 órányi rekordot dolgoztunk fel, ami biztosította statisztikai kísérletekhez szükséges magas mintaelemszámot. Ezek alapján megállapítható, hogy a kiindulásként felhasznált [2, 6] algoritmusok eredményeit megjavítottuk. A [7] cikkben ismertetett, JPEG 2000 alapú 2D-s EKG tömörítő eljárást is összehasonlítottuk a dolgozatban implementált módszerrel. Ez esetben is a saját algoritmusunk győzött.

Megjegyezzük azonban, hogy a kidolgozott módszernek is vannak hátrányai. Mivel az iteratív approximáció során az MP megközelítés alkalmaztuk, így örököltük annak hibáit is. Előfordulhat, hogy az első lépésben nem a QRS komplexust közelítjük, hanem a T hullámot. Így az eredetileg ide szánt 7 együtthatót a T hullámra "pazaroljuk". Ez azonban a helyes inicializálással, illetve a QRS hibájának súlyozásával kiküszöbölhető. Másik probléma, hogy az MP algoritmus egy mohó stratégiát követ a (α_i, λ_i) paraméterek meghatározásához. Így előfordulhat, hogy egy iterációban a szívütés egynél több hullámát is közelítjük, ha ez az ℓ^2 hiba szempontjából indokolt. Ezt szemlélteti a 5.1 ábra. Jól látható, hogy az első esetben a PRD kisebb, mint a második példában. Előbbinél azonban a rezidum függvény is jóval bonyolultabb. Tehát a végeredmény szempontjából előnyösebb, ha minden lépésben csak egy hullámot

közelítünk. A jelenség az MP módszer és a mohó stratégia jól ismert hátránya, melyet a [17] dolgozat is részletesen tárgyal. Eszerint a probléma mérsékelhető, ha az mohó stratégiát más módszerekre cseréljük. Megjegyezzük, hogy ez úgy is megoldható, hogy az iterációs megközelítés helyett, a 3 hullámhoz tartozó összesen 6 paramétert egyszerre optimalizáljuk. Más szóval a keresést az eredeti kettő helyett egy hat dimenziós problémában végezzük. Ezek a vizsgálatok jelenleg nem képezik a dolgozat tárgyát, de a későbbiekben fontosnak tartjuk azok elvégzését.



(a) Rossz eset.



(b) Jó eset.

5.1. ábra. A mohó stratégia hátránya.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőmnek, Kovács Péternek a kitartó, és folyamatos hozzájárulását, útmutatását. Szintén köszönöm a Schipp Ferenc professzor emeritusztól kapott sok értékes segítséget. Nélkülük ez a dolgozat nem jöhetett volna létre.

Függelék

A. Függelék

Definíciók, összefüggések

Ez a fejezet a felhasznált matematikai eszközök összefoglalását tartalmazza az [18, 19] könyveket alapul véve.

A.1. Hermite polinomok, Hermite függvények

Stirling formula

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad \binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \quad (n \rightarrow \infty)$$

Rodrigues formula

$$H_n(x) := e^{x^2} (-1)^n \left(\frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2} \quad (n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}) \quad (\text{A.1})$$

Ortogonalitás, normált rendszer

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx &= \pi^{1/2} 2^n n! \delta_{mn} \quad (m, n \in \mathbb{N}) \\ \Phi_n(x) &:= H_n(x) e^{-x^2/2} / \sqrt{\pi^{1/2} 2^n n!} = h_n(x) e^{-x^2/2} \quad (n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(x) \Phi_m(x) dx &= \delta_{mn} \quad (m, n \in \mathbb{N}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx &= \pi^{1/2} < 2 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Rekurziók

$$\begin{aligned}
H_n(x) &= 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x) \quad (n \geq 2) \\
H_{-1}(x) &= 0, H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x \\
\Phi_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{n}}x\Phi_{n-1} - \sqrt{\frac{n-1}{n}}\Phi_{n-2}(x) \quad (n \geq 2) \\
\Phi_0(x) &= e^{-x^2/2}/\pi^{1/4}, \Phi_1(x) = \sqrt{2}xe^{-x^2/2}/\pi^{1/4} \quad (x \in \mathbb{R}) \\
H'_n(x) &= 2nH_{n-1}(x) \quad (n \in \mathbb{N}) \\
\Phi'_n(x) &= \sqrt{2n}\Phi_{n-1}(x) - x\Phi_n(x) \quad (n \geq 0, x \in \mathbb{R}) \\
\frac{d}{dx}(x\Phi_n(x)) &= (1-x^2)\Phi_n(x) + \sqrt{2n}x\Phi_{n-1}(x) \quad (n \geq 1, x \in \mathbb{R})
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Függvényértékek a 0 helyen

$$\begin{aligned}
H_{2m+1}(0) &= 0, \quad H_{2m}(0) = (-1)^m \frac{(2m)!}{m!} \\
H'_{2m}(0) &= 0, \quad H'_{2m+1}(0) = (-1)^m \frac{(2m+2)!}{(m+1)!} \\
\Phi_{2m}(0) &= (-1)^m 2^{-m} \sqrt{\binom{2m}{m}} \sim (2m)^{-1/4} \pi^{-1/2} \\
\Phi'_{2m+1}(0) &= (-1)^m 2^{-m} \sqrt{\binom{2m}{m}} \sim (8m)^{1/4} \pi^{-1/2}
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Kvadratúra formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx \simeq \sum_{i=1}^n \lambda_{in} f(x_{in})$$

$$H_n(x_{in}) = 0, \quad \lambda_{in} = \frac{\pi^{1/2} 2^{n+1} n!}{[H'_n(x_{in})]^2} \quad (n = 1, 2, \dots, 1 \leq i \leq n)$$

A.2. Approximáció afffin transzformáltakkal

Jelöljük az \mathbb{R} számegegyenesen szakaszonként folytonos, négyzetesen integrálható függvények terét \mathcal{F} -fel és vezessük be az \mathcal{F} téren az

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) dx$$

skaláris szorzatot.

Altértől vett távolság

A $\phi_n \in \mathcal{F}$ ($n \in \mathbb{N}$) függvényrendszer ortonormált, ha

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle := \delta_{mn} \quad (m, n \in \mathbb{N}).$$

Ebből a rendszerből az

$$\ell(x) = \ell(x, \lambda, a) = \lambda x + a \quad (x, a \in \mathbb{R}, \lambda > 0)$$

affin transzformációval származtatott

$$\phi_n^{a,\lambda}(x) := \sqrt{\lambda} \phi_n(\lambda x + a) = \sqrt{\lambda} \phi_n(\ell(x)) \quad (x, a \in \mathbb{R}, \lambda > 0, n \in \mathbb{N})$$

rendszer szintén ortonormált. Valóban az $u = \ell(x) = \lambda x + a$, $dx = du/\lambda$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned} \langle \phi_n^{a,\lambda}, \phi_m^{a,\lambda} \rangle &:= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \phi_n(\lambda x + a) \phi_m(\lambda x + a) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(u) \phi_m(u) du = \delta_{mn} \quad (m, n \in \mathbb{N}). \end{aligned} \tag{A.5}$$

Jelölje $X_n^{a,\lambda}$ a $\phi_0^{a,\lambda}, \dots, \phi_n^{a,\lambda}$ függvények által kifeszített alteret. Adott $f \in \mathcal{F}$ függvényhez a legközelebb eső $X_n^{a,\lambda}$ -beli függvényt az

$$S_n^{a,\lambda} f := \sum_{k=0}^n \langle f, \phi_k^{a,\lambda} \rangle \phi_k^{a,\lambda}$$

Fourier-projekcióval, az eltérés normájának a négyzete a

$$D_n^2(a, \lambda) := \|f - S_n^{a,\lambda} f\|^2 = \langle f, f \rangle - \sum_{k=0}^n |\langle f, \phi_k^{a,\lambda} \rangle|^2$$

függvénnyel adható meg. A $D_n(a, \lambda)$ minimumának meghatározása ekvivalens az

$$F_n(a, \lambda) := \sum_{k=0}^n |\langle f, \phi_k^{a,\lambda} \rangle|^2 \quad ((a, \lambda) \in T := \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 : p \in \mathbb{R}, q > 0\})$$

függvény maximumának meghatározásával.

Becslések az F_n függvényre

A továbbiakban a

$$\phi_n(x) = \Phi_n(x) = h_n(x)e^{-x^2/2} \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$$

normált Hermite-függvényeket választjuk ortonormált rendszernek. Ekkor

$$\begin{aligned} |\Phi_n(x)| &\leq M_n e^{-x^2/4} \leq M_n, \quad |\Phi'_n(x)| \leq N_n e^{-x^2/4} \leq N_n \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}) \\ M_n &:= \max_{x \in \mathbb{R}} |h_n(x)| e^{-x^2/4}, \quad N_n := \max_{x \in \mathbb{R}} |h'_n(x) - x h_n(x)| e^{-x^2/4} \\ \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_n(x)| dx &\leq M_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/4} dx < 4M_n \end{aligned} \tag{A.6}$$

Ezeket felhasználva becsléseket adunk az

$$A_k(a, \lambda) := \langle f, \phi_k^{a, \lambda} \rangle = \sqrt{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi_k(\lambda x + a) dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} f((u - a)/\lambda) \phi_k(u) du$$

Fourier-együtthatókra. A továbbiakban kompakt tartójú, korlátos függvényekből indulunk ki. Nem jelenti az általánosság megszorítását ha feltesszük, hogy

$$f(x) = 0, \text{ ha } |x| \geq 1, \quad |f(x)| \leq 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

A paraméteres integrálokra vonatkozó tételből következik, hogy az

$$F_n(a, \lambda) := \sum_{k=0}^n |A_k(a, \lambda)|^2 \quad ((a, \lambda) \in T > 0)$$

függvény folytonosan differenciálható. Megmutatjuk, hogy az $F_n : T \rightarrow [0, \infty)$ folytonos függvénynek van maximuma a T (nem kompakt) halmazon.

A fenti egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$\begin{aligned} |A_k(\lambda, a)| &\leq \sqrt{\lambda} M_k \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \leq 2M_k \sqrt{\lambda} \quad (\lambda \leq 1) \\ |A_k(\lambda, a)| &\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_k(u)| du \leq \frac{4M_k}{\sqrt{\lambda}} \quad (\lambda \geq 1), \end{aligned} \tag{A.7}$$

továbbá $\lambda \geq 1$, $\alpha \geq 2\lambda$ esetén

$$\begin{aligned} |A_k(\lambda, \alpha)| &\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{\alpha-\lambda}^{\alpha+\lambda} |\Phi_k(u)| du \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{\alpha-\lambda}^{\infty} |\Phi_k(u)| du \leq \\ &\leq \frac{M_k}{\sqrt{\lambda}} \int_{\lambda}^{\infty} e^{-u^2/4} du < \frac{M_k}{\sqrt{\lambda}} \int_{\lambda}^{\infty} u e^{-u^2/4} du = 2M_k \sqrt{\lambda} e^{-\lambda^2/4} < \frac{8M_k}{\sqrt{\lambda}} \end{aligned} \quad (A.8)$$

Hasonlóan egyenlőtlenséget kapunk az $\alpha < -2\lambda$ esetben. Innen következik, hogy az

$$T_s := \{(p, q) : -2s \leq p \leq 2s, 1/s \leq p \leq s\}$$

téglalapon kívül érvényes

$$\sup_{(\alpha, \lambda) \notin T_s} |A_k(\alpha, \lambda)| \leq \frac{8M_k}{\sqrt{s}} \quad (s > 1)$$

becslés. Ennek alapján nyilvánvaló, hogy a F_n függvénynek létezik a maximuma a T téglalapon.

Célunk az maximum meghatározása a leggyorsabb ereszkedés elve alapján. Bevezetve az $s(u) = \ell^{-1}(u) = (u - \alpha)/\lambda$ jelölést, a paraméteres integrál differenciálási szabálya alapján azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} A_k(\alpha, \lambda) &= \lambda^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi'_k(\ell(x)) dx \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} A_k(\alpha, \lambda) &= \lambda^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) x \phi'_k(\ell(x)) dx + \frac{1}{2} \lambda^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi_k(\ell(x)) dx \end{aligned} \quad (A.9)$$

A parciális deriváltak a következő három sorozattal fejezhetők ki:

$$\begin{aligned} A_k(\alpha, \lambda) &:= \sqrt{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi_k(\ell(x)) dx \\ A_k^{[1]}(\alpha, \lambda) &:= \sqrt{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi'_k(\ell(x)) dx \\ A_k^{[2]}(\alpha, \lambda) &:= \sqrt{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \phi'_k(\ell(x)) dx. \end{aligned} \quad (A.10)$$

Nevezetesen

$$\begin{aligned}
F(a, \lambda) &= \sum_{k=0}^n A_k^2(a, \lambda) \\
\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} F(a, \lambda) &= \sum_{k=0}^n A_k(a, \lambda) A_k^{[1]}(a, \lambda) \\
\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \lambda} F(a, \lambda) &= \frac{1}{2\lambda} \sum_{k=0}^n A_k^2(a, \lambda) + \sum_{k=0}^n A_k(\lambda, a) A_k^{[2]}(a, \lambda) = \\
&= \frac{1}{2\lambda} F(a, \lambda) + \sum_{k=0}^n A_k(\lambda, a) A_k^{[2]}(\lambda, a)
\end{aligned} \tag{A.11}$$

B. Függelék

Algoritmusok

Algorithm 1 Particle Swarm Optimization

```
1: function PSO(Hiba, S, IN, c1,2)
2:   for all k ← 1, S do
3:     Randomize λk, ak, vk
4:     Initialize Hk.λ := λk                                ▷ A részecskéhez tartozó dilatáció
5:     Initialize Hk.a := ak                                ▷ A részecskéhez tartozó transláció
6:     Initialize Hk.pBest := [λk, ak]                    ▷ A részecske legjobb pozíciója
7:     Initialize Hk.pDBest := ∞                            ▷ A részecske legkisebb hibája
8:     Initialize Hk.v := vk                                ▷ A részecske kezdő gyorsulása
9:   end for
10:  for ℓ ← 1, IN do
11:    for k ← 1, S do
12:      if Hiba(Hk) < Hk.pDBest then                        ▷ pBest frissítése
13:        Hk.pBest = [λk, ak]
14:        Hk.pDBest = Hiba(Hk)
15:      end if
16:    end for
17:    if Hiba(Hk) <  $\min_{1 \leq k \leq S} \text{Hiba}(H_k)$  then          ▷ gBest frissítése
18:      gBest = [Hk.λ, Hk.a]
19:    end if
20:    for k ← 1, S do                                        ▷ gyorsulás és pozíció frissítése
21:      Hk.v = Hk.v + c1r1 · (Hk.pBest − [λk, ak]) + c2r2 · (gBest − [λk, ak])
22:      Hk.λ = Hk.λ + Hk.v
23:      Hk.a = Hk.a + Hk.v
24:    end for
25:  end for
26:  return gBest
27: end function
```

Az indexeket úgy rendezzük, hogy $y_3 \leq y_2 \leq y_1$ teljesüljön. Az `IterLepes(5)` rutinnal az (x_1, x_2, x_3) hármast kicseréljük a T_5 transzformációval kapott hármassal.

Algorithm 2 Nelder-Mead

```

1: function NELDER-MEAD
2:   if  $y_3 \leq y_4 \wedge y_4 < y_2$  then
3:      $x_1 = x_4$ 
4:   else if  $y_4 < y_3$  then
5:     if  $y_5 < y_4$  then
6:        $x_1 = x_5$ 
7:     else
8:        $x_1 = x_4$ 
9:     end if
10:  else if  $y_4 \geq y_2$  then
11:    if  $y_4 < y_1$  then
12:      if  $y_6 \leq y_4$  then
13:         $x_1 = x_6$ 
14:      else
15:        IterLepes(5)
16:      end if
17:    else if  $y_4 \geq y_1$  then
18:      if  $y_7 < y_3$  then
19:         $x_1 = x_7$ 
20:      else
21:        IterLepes(5)
22:      end if
23:    end if
24:  end if
25: end function

```

Irodalomjegyzék

- [1] S. M. S. Jalaleddine, C. G. Hutchens, R. D. Strattan, and W. A. Coberly, „ECG data compression techniques – a unified approach,” *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 37, no. 4, pp. 329–343, 1990.
- [2] R. Jane, S. Olmos, P. Laguna, and P. Caminal, „Adaptive Hermite models for ECG data compression: Performance and evaluation with automatic wave detection,” in *Proceedings of the International Conference on Computers in Cardiology*, 1993, pp. 389–392.
- [3] L. Sörnmo, P. L. Börjesson, M. E. Nygards, and O. Pahlm, „A method for evaluation of QRS shape features using a mathematical model for the ECG,” *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 28, pp. 713–717, 1981.
- [4] H. Haraldsson, L. Edenbrandt, and M. Ohlsson, „Detecting acute myocardial infarction in the 12-lead ECG using Hermite expansions and neural networks,” *Artificial Intelligence in Medicine*, vol. 32, pp. 127–136, 2004.
- [5] M. Lagerholm, C. Peterson, G. Braccini, L. Edenbrandth, and L. Sörnmo, „Clustering ECG complexes using Hermite functions and self-organizing maps,” *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 47, pp. 838–717, 2000.
- [6] A. Sandryhaila, S. Saba, M. Püschel, and J. Kovacevic, „Efficient compression of QRS complexes using Hermite expansion,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 60, no. 2, pp. 947–955, 2012.
- [7] H. H. Chou, Y. J. Chen, Y. C. Shiau, and T. S. Kuo, „An effective and efficient compression algorithm for ECG signals with irregular periods,” *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 53, no. 6, pp. 1198–1205, 2006.
- [8] J. A. Nelder and R. Mead, „A simplex method for function minimization,” *Computer Journal*, vol. 7, no. 4, pp. 308–313, 1965.

- [9] J. Kennedy and R. C. Eberhart, „Particle swarm optimization,” in *Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks*, 1995, vol. 4, pp. 1942–1948.
- [10] J. Nocedal and S. J. Wright, *Numerical Optimization*, Springer-Verlag, New York, USA, 2nd edition, 2006.
- [11] M. Abo-Zahhad, A. F. Al-Ajlouni, S. M. Ahmed, and R.J. Schilling, „A new algorithm for the compression of ECG signals based on mother wavelet parameterization and best-threshold level selection,” *Digital Signal Processing*, vol. 23, pp. 1002–1011, 2013.
- [12] W. Gautschi, *Orthogonal Polynomials, Computation and Approximation*, Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford University Press, Oxford, UK, 2004.
- [13] S. G. Mallat and Z. Zhang, „Matching pursuit in time-frequency dictionary,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, no. 12, pp. 3397–3415, 1993.
- [14] A. L. Goldberger, L. A. N. Amaral, L. Glass, J. M. Hausdorff, P. Ch. Ivanov, R. G. Mark, J. E. Mietus, G. B. Moody, C. K. Peng, and H. E. Stanley, „PhysioBank, PhysioToolkit, and PhysioNet: Components of a new research resource for complex physiologic signals,” *Circulation*, vol. 101, no. 23, pp. 215–220, 2000.
- [15] C. M. Fira and L. Goras, „An ECG signals compression method and its validation using NNs,” *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 55, no. 4, pp. 1319–1326, 2008.
- [16] J. Pan and W. J. Tompkins, „A real-time QRS detection algorithm,” *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 32, pp. 230–236, 1985.
- [17] S. S. Chen, D. L. Donoho, and M. A. Saunders, „Atomic decomposition by basis pursuit,” *SIAM Review*, vol. 43, no. 1, pp. 129–159, 2001.
- [18] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, AMS Colloquium Publications, New York, USA, 3rd edition, 1967.
- [19] B. Szőkefalvi-Nagy, *Valós függvények és függvénysorok*, Polygon Könyvtár, Szeged, HU, 2002.