Záróvizsga tételsor
2. Differenciál- és integrálszámítás

Dobreff András

Differenciál- és integrálszámítás
Jacobi-mátrix, gradiens, parciális derivált. Szélsőérték, függvényvizsgálat. Riemann-integrál, parciális integrálás, integrálás helyettesítéssel. Newton-Leibniz-formula. A kezdeti érték probléma. Lineáris, ill. magasabb rendű lineáris differenciálegyenletek.

1 Jacobi-mátrix, gradiens, parciális derivált

1.1 Jacobi-mátrix, gradiens

Differenciálhatóság

$1 \le n, m \in \mathbb{N}, \quad 1 \le p, q \le +\infty,$

$(\mathbb{R}^n, \|.\|_p)$ és $(\mathbb{R}^m, \|.\|_q)$ normált terek

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ a \in intD_f$

Az f függvény differenciálható az a pontban $(f \in D\{a\})$, ha
létezik olyan $L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ korlátos lineáris leképezés és olyan $\eta \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény, hogy :

$$f(a+h) - f(a) = L(h) + \eta(h) \cdot \|h\|_p \quad (h \in \mathbb{R}^n, a+h \in D_f)$$

ahol

$$\eta(h) \longrightarrow 0 \quad (\|h\|_p \to 0)$$

Más szóval:

$$\frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|_p} \longrightarrow 0 \quad (\|h\|_p \to 0)$$

Amennyiben $\forall a \in intD_f : f \in D\{a\}$, akkor az f differenciálható $(f \in D)$

Megjegyzés:
A $\mathbb{K}$ test feletti $(X, \|.\|_\bigstar)$, $(X, \|.\|_\heartsuit)$ normált terek közötti folytonos leképezés, korlátos lineáris leképezés, ha

- *lineáris, azaz*

$$f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y) \quad (x, y \in X, \lambda \in \mathbb{K})$$

- *korlátos, azaz*

$$\exists M \ge 0 : \|f(x)\|_\heartsuit \le M\|x\|_\bigstar \quad (x \in X)$$

Derivált

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény differenciálható egy $a \in intD_f$ pontban
$\Rightarrow \exists! L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ korlátos lineáris leképezés

Ezt az egyértelműen létező $L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ korlátos lineáris leképezést az f függvény a pontbeli deriváltjának nevezzük, és $f'(a)$ szimbólummal jelöljük.

Jacobi-mátrix

Az előzőekben szereplő $L := f'(a)$ korlátos lineáris leképezéshez $\exists! A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix, melyre:

$$L(x) = Ax \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

Ezért: $f'(a) := A$
az f függvény a-beli deriváltja vagy derivált mátrixa, más néven Jacobi-mátrixa.

Gradiens

$m = 1$ esetén : $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\text{grad} f(a) := f'(a) \in \mathbb{R}^{1\times n} \approx \mathbb{R}^n$$

Tehát ebben az esetben az $f'(a)$ Jacobi-mátrix tekinthető egy $\mathbb{R}^n$-beli vektornak, amit az f függvény a-beli gradiensének nevezünk.

Ha $D := \{a \in D_f : f \in D\{a\}\}$, akkor az

$$x \mapsto \text{grad} f(x) \in \mathbb{R}^n \quad (x \in D)$$

függvényt az f függvény gradiensének nevezzük, és $\text{grad} f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jelöljük.

Gradiens mint Jacobi-mátrix sora

Legyen $1 \le n, m \in \mathbb{N}$. Az $f = (f_1, ..., f_m) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény akkor és csak akkor differenciálható az $a \in intD_f$ helyen, ha minden $i = 1, ..., m$ esetén az $f_i \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ koordináta-függvény differenciálható az a-ban.

Ha $f \in D\{a\}$, akkor az $f'(a)$ Jacobi-mátrix a következő alakú:

$$f'(a) = \begin{bmatrix} \text{grad} f_1(a) \\ \text{grad} f_2(a) \\ \vdots \\ \text{grad} f_m(a) \end{bmatrix}$$

1.2 Parciális derivált

Definíció

Tekintsük a $h \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt és az $a = (a_1, ..., a_n) \in D_h$ vektort. Legyen

$$D_{h,i}^{(a)} := \{t \in \mathbb{R} : (a_1, ..., a_{i-1}, t, a_{i+1}, ..., a_n) \in D_h\} \quad (i = 1, ..., n)$$

És legyen:

$$h_{a,i} : D_{h,i}^{(a)} \to \mathbb{R}, \qquad \text{melyre:} \qquad h_{a,i}(t) := h(a_1, ..., a_{i-1}, t, a_{i+1}, ..., a_n) \quad (t \in D_{h,i}^{(a)})$$

A $h_{a,i}$ parciális függvények mind egyváltozós valós függvények ($h_{a,i} \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

A h függvény az a-ban i-edig változó szerint parciálisan deriválható, ha $h_{a,i} \in D\{a_i\}$. Ekkor:

$$\partial_i h(a) := h'_{a,i}(a_i)$$

valós számot a h függvény a-beli, i-edik változó szerinti parcális deriváltjának nevezzük.

Parciális derivált függvény

Tegyük fel, hogy az előző h függvényre:

$$D_{h,i} := \{a \in D_h : \text{létezik a } \partial_i h(a) \text{parciáis derivált}\} \neq \emptyset \qquad (i = 1, ..., n)$$

Ekkor a

$$x \mapsto \partial_i h(x) \quad (x \in D_{h,i})$$

függvényt a h függvény i-edik változó szerinti parciális deriváltfüggvényének nevezzük, és a $\partial_i h$ szimbólummal jelöljük.

Differenciálhatóság és parciális differenciálhatóság

- Differenciálhatóság $\Rightarrow$ parciális differenciálhatóság
  $1 \leq n \in \mathbb{N},\ h \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, és $h \in D\{a\}$ $(a \in D_h)$
  $\Rightarrow \forall i = 1, ..., n :$ a h függvény i-edik változó szerint parciálisan differenciálható az a pontban, és
  $$\text{grad}h(a) = (\partial_1 h(a), ..., \partial_n h(a))$$
- Differenciálhatóság $\Leftarrow$ parciális differenciálhatóság
  $1 \leq n \in \mathbb{N},\ h \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, és $a \in intD_h$
  Valamilyen $i = 1, ..., n$ esetén:
  - Tetszőleges $x \in K_r(a)$ ($r > 0$ alkalmas) helyen léteznek a $\partial_j h(x)$ parciális deriváltak ($i \neq j = 1, ..., n$) és ezek folytonosak
  - $\exists\ \partial_i h(a)$ parciális derivált

  $\Rightarrow h \in D(a)$

2 Szélsőérték, függvényvizsgálat

2.1 Szélsőérték

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D_f$

Lokális maximum
f-nek a-ban lokális maximuma van, ha alkalmas $r > 0$ mellett:
$f(x) \leq f(a) \qquad (x \in D_f, |x - a| < r)$

Lokális minimum
f-nek a-ban lokális minimuma van, ha alkalmas $r > 0$ mellett:
$f(x) \geq f(a) \qquad (x \in D_f, |x - a| < r)$

Abszolút maximum
f-nek a-ban abszolút maximuma van, ha:
$f(x) \leq f(a) \qquad (x \in D_f)$

Abszolút mimimum
f-nek a-ban abszolút minumuma van, ha:
$f(x) \geq f(a) \qquad (x \in D_f)$

Lokális szélsőérték
f-nek a-ban lokális szélsőértéke van, ha a-ban lokális minimuma vagy maximuma van.

Abszolút szélsőérték
f-nek a-ban abszolút szélsőértéke van, ha a-ban abszolút minimuma vagy maximuma van.

Elsőrendű szükséges feltétel (lokális szélsőértékre)
$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek $a \in intD_f$ helyen lokális szélsőértéke van, és $f \in D\{a\}$
$\Rightarrow f'\{a\} = 0$

Az előbbi tétel segítségével már nem nehéz belátni a differenciálható függvények vizsgálata szempontjából alapvető fontosságú ún. középérték-tételeket

Rolle-tétel
$a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$, $f : [a, b] \to \mathbb{R},\ f \in C$, és
$\forall x \in (a, b) : f \in D\{x\}$ és $f(a) = f(b)$
$\Rightarrow \exists\ \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$

Lagrange-féle középértéktétel
$a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$, $f : [a, b] \to \mathbb{R},\ f \in C$, és
$\forall x \in (a, b) : f \in D\{x\}$
$\Rightarrow \exists\ \xi \in (a, b) : f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Cauchy-féle középértéktétel

$a, b \in \mathbb{R}\ (a < b),\ f, g : [a, b] \to \mathbb{R},\ f, g \in C$, és
$\forall x \in (a, b) : f, g \in D\{x\}$
$\Rightarrow \exists\ \xi \in (a, b) :$
$(f(b) - f(a)) \cdot g'(\xi) = (g(b) - g(a) \cdot f'(\xi)$

Jelváltás

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a \in intD_f$ és $f(a) = 0,\ (K_r(a) \subset D_f, r > 0)$

1. f függvénynek $(-, +)$ jelváltása van, ha
   $f(x) \leq 0 \leq f(t), \quad (x, t \in K_r(a),\ x < a < t)$
2. f függvénynek $(+, -)$ jelváltása van, ha
   $f(x) \geq 0 \geq f(t), \quad (x, t \in K_r(a),\ x < a < t)$

Elsőrendű elégséges feltétel

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a \in intD_f$ és $f \in D\{x\},\ (x \in K_r(a) \subset D_f, r > 0)$

1. f'-nak az a-ban $(+, -)$ jelváltása van $\Rightarrow$ f-nek a-ban lokális maximuma van.
2. f'-nak az a-ban $(-, +)$ jelváltása van $\Rightarrow$ f-nek a-ban lokális minimuma van.

2.2 Monotonitás

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Monoton növekedés

f monoton növő ($\nearrow$), ha $\forall x, t \in D_f,\ x < t : f(x) \leq f(t)$.
Amennyiben $f(x) < f(t)$, akkor f szigorúan monoton növő ($\uparrow$).

Monoton fogyás (csökkenés)

f monoton fogyó ($\searrow$), ha $\forall x, t \in D_f,\ x < t : f(x) \geq f(t)$.
Amennyiben $f(x) > f(t)$, akkor f szigorúan monoton fogyó ($\downarrow$).

Derivált és monotonitás kapcsolata

$I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R},\ f \in D$
$\Rightarrow$

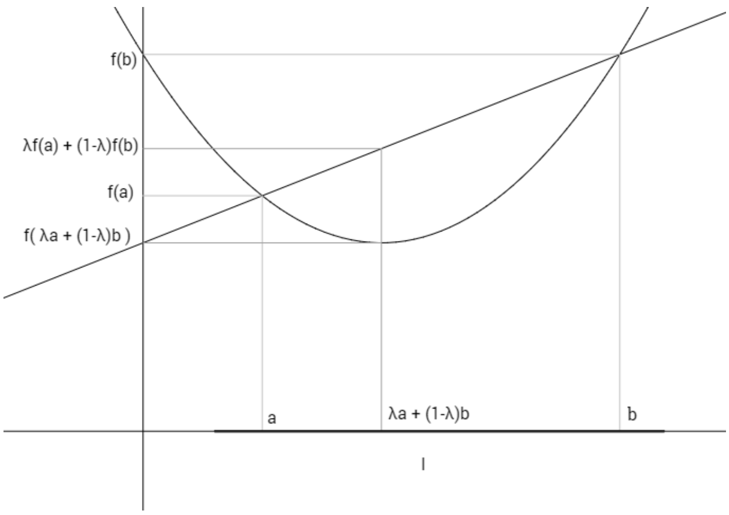
1. $f \nearrow \Leftrightarrow\ f' \geq 0$
2. $f \searrow \Leftrightarrow\ f' \leq 0$
3. $f\ konstans\ \Leftrightarrow\ \forall x \in I : f'(x) = 0$
4. $\forall x \in I : f'(x) > 0\ \Rightarrow\ f \uparrow$
5. $\forall x \in I : f'(x) < 0\ \Rightarrow\ f \downarrow$

2.3 Alaki viszonyok

Konvexitás, konkávitás

$I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$

- f konvex, ha
  $\forall a, b \in I \quad \forall 0 \leq \lambda \leq 1 : f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$
- f konkáv, ha
  $\forall a, b \in I \quad \forall 0 \leq \lambda \leq 1 : f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \geq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$



ábra 1: Konvex függvény

Konvexitás és derivált

$I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R},\ f \in D$

- f konvex $\Leftrightarrow f' \nearrow$
- f konkáv $\Leftrightarrow f' \searrow$

Inflexió

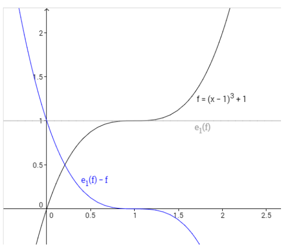
$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a \in intD_f,\ f \in D\{a\}$:

Pontbeli érintő

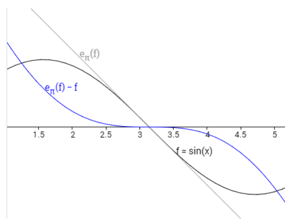
$e_a(x) := f(a) + f'(a)(x - a) \quad (x \in \mathbb{R})$

Inflexió

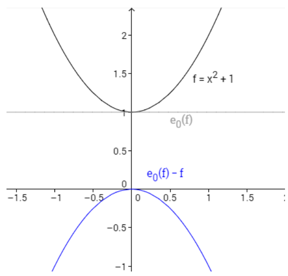
f-nek az a-ban inflexiója van, ha az $f - e_a(f)$ az a-ban jelet vált.



(a) x^3 függvény inflexiója



(b) szinusz függvény inflexiója



(c) x^2-nek nincs inflexiója

2.4 Többször differenciálható függvények

Második derivált

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a \in intD_f$, és
$f \in D\{x\} \quad (x \in K_r(a), r > 0)$, illetve $f' \in D\{a\}$
Ekkor f az a-ban kétszer deriválható és $f''(a) := (f')'(a)$ az f második deriváltja.

Differenciálás magasabb rendben

Hasonlóképpen az előzőhöz:
$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a \in intD_f$, és
$f \in D^n\{x\} \quad (x \in K_r(a), r > 0)$, illetve $f^{(n)} \in D\{a\},\ (1 \leq n \in \mathbb{N})$
Ekkor f az a-ban $(n+1)$-szer deriválható és $f^{(n+1)}(a) := (f^{(n)})'(a)$ az f $(n+1)$-edik deriváltja.

Másodrendű elégséges feltétel (lokális szélsőérték létezésére)

$f \in D^2\{a\}$ függvényre $f'(a) = 0$ és $f''(a) \neq 0$

$\Rightarrow f$-nek az a-ban szigorú lokális szélsőértéke van.
Ha $f''(a) < 0 \Rightarrow$ szigorú lokális maximum.
Ha $f''(a) > 0 \Rightarrow$ szigorú lokális minimum.

3 Riemann-integrál, parciális integrálás, integrálás helyettesítéssel.

Primitív függvény

$I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f \in I \to \mathbb{R}$
Ha $\exists F : I \to \mathbb{R}$, hogy $F \in D$, $F' = f$
akkor F az f primitív függvénye.

Határozatlan integrál

Legyen $\int f := \int f(x)dx := \{F : I \to \mathbb{R}, F \in D \text{ és } F' = f\}$ az f határozatlan integrálja.

Határozott integrál (Riemann-integrál)

$-\infty < a < b < \infty$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}, f$ korlátos

- A $\tau \subset [a, b]$ felosztása, ha τ véges és $a, b \in \tau$
  Ekkor $\tau = \{x_0, x_1, ..., x_n\}(n \in \mathbb{N})$, ahol $a := x_0 < x_1 < ... < x_n := b$
- $m_i := m_i(f) := inf\{f(x) : x_i \le x \le x_{i+1}\}(i = 0..n - 1)$, illetve
  $M_i := M_i(f) := sup\{f(x) : x_i \le x \le x_{i+1}\}(i = 0..n - 1)$
  és:
  $s(f, \tau) := \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$ - alsó összeg
  $S(f, \tau) := \sum\limits_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$ - felső összeg
- $\mathfrak{F} := \{\tau \subset [a, b]$ felosztás $\}$
- Az $\{s(f, \tau) : \tau \in \mathfrak{F}\}$ felülről korlátos és $\forall \mu \in \mathfrak{F} : S(f, \mu)$ felső korlát, illetve
  Az $\{S(f, \tau) : \tau \in \mathfrak{F}\}$ alulról korlátos és $\forall \mu \in \mathfrak{F} : s(f, \mu)$ alsó korlát
- Tehát legyen:
  $I_*(f) := sup\{s(f, \tau) : \tau \in \mathfrak{F}\}$ - Darboux alsó index, és
  $I^*(f) := inf\{S(f, \tau) : \tau \in \mathfrak{F}\}$ - Darboux felső index

$\Rightarrow \forall \tau, \mu \in \mathfrak{F} : s(f, \tau) \le I_*(f) \le I^*(f) \le S(f, \mu)$

Az f függvény Riemann-integrálható ($f \in R[a, b]$), ha $I_*(f) = I^*(f)$, ekkor legyen $\int_a^b f := \int_{[a,b]} f := \int_a^b f(x)dx := I_*(f) = I^*(f)$ az f függvény Riemann-integrálja (határozott integrálja).

Parciális integrálás

- Határozatlan esetben
  $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g : I \to \mathbb{R}$, $f, g \in D$ és
  fg'-nek van primitív függvénye (azaz $\int fg' \ne \emptyset$)
  $\Rightarrow \int f'g \ne \emptyset$ és $\int f'g = fg - \int fg'$
- Határozott esetben
  $f, g \in D[a, b]$
  $f'g, fg' \in R[a, b]$
  $\Rightarrow \int_a^b f'g = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b fg'$

Integrálás helyettesítéssel

- Határozatlan esetben
  $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok, $g : I \to J, g \in D, f : J \to \mathbb{R}, \int f \ne \emptyset$
  $\Rightarrow \int f \circ g \cdot g' \ne \emptyset$ és $(\int f) \circ g = \int (f \circ g \cdot g')$
- Határozott esetben
  $f \in C[a, b], g : [\alpha, \beta] \to [a, b], g \in C^1[\alpha, \beta]$,
  $g(\alpha) = a, g(\beta) = b$
  $\Rightarrow \int_a^b f = \int_\alpha^\beta (f \circ g \cdot g')$

4 Newton-Leibniz-formula

$f \in R[a,b], \exists F : [a,b] \to \mathbb{R}, F$ folytonos és $F \in D\{x\}, F'(x) = f(x), (a < x < b)$
$\Rightarrow \int_a^b f = F(b) - F(a)$

5 A kezdeti érték probléma

Differenciál egyenlet

$0 < n \in \mathbb{N},\ I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum,
$\Omega := I_1 \times ... \times I_n \subset \mathbb{R}^n$, ahol $I_1, ..., I_n \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum
$f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n,\ f \in C$

Határozzuk meg a $\varphi \in I \to \Omega$ függvényt úgy, hogy:

- D_φ nyílt intervallum
- $\varphi \in D$
- $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in D_\varphi)$

Ezt a feladatot nevezzük differenciál egyenletnek.

Kezdeti érték probléma

Ha az előzőekhez még adottak: $\tau \in I$, és $\xi \in \Omega$
Illetve a φ függvényre még teljesül:

- $\tau \in D_\varphi$ és $\varphi(\tau) = \xi$

Akkor kezdeti érték problémának (Cauchy feladatnak) nevezzük.

6 Lineáris, ill. magasabb rendű lineáris differenciálegyenletek

6.1 Lineáris differenciálegyenletek

Definíció

A lineáris differenciálegyenlet olyan differenciálegyenlet, melyre:
$n = 1, \quad I, I_1 \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok, $f : I \times I_1 \to \mathbb{R}$, ahol
$g, h : I \to \mathbb{R},\ g, h \in C,\ I_1 := \mathbb{R}$ és
$f(x, y) := g(x) \cdot y + h(x) \quad (x \in I, y \in I_1 = \mathbb{R})$
$\Rightarrow \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) = g(x) \cdot \varphi(x) + h(x) \quad (x \in D_\varphi)$

Homogenitás

A lineáris differenciálegyenlet homogén ha $h \equiv 0$ (különben inhomogén)

Kezdeti érték probléma

- Minden lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdeti érték probléma megoldható és $\forall \varphi, \psi$ megoldásokra: $\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in D_\varphi \cap D_\psi)$
- Minden homogén lineáris differenciálegyenlet ($\varphi : I \to \mathbb{R}$) megoldása a következő alakú: $c\varphi_0$, ahol
  $c \in \mathbb{R}$ és $\varphi_0(t) = e^{G(t)} \quad (G : I \to \mathbb{R},\ G \in D$, és $G' = g)$
- Állandók variálásának módszere:
  $\exists m : I \to \mathbb{R},\ m \in D : m \cdot \varphi_0$ megoldása az (inhomogén) lineáris differenciálegyenletnek
- Partikuláris megoldás:
  $M := \{\varphi : I \to \mathbb{R} : \varphi'(t) = g(t) \cdot \varphi(t) + h(t)\ (t \in I)\}$
  $M_h := \{\varphi : I \to \mathbb{R} : \varphi'(t) = g(t) \cdot \varphi(t)\ (t \in I)\}$
  $\Rightarrow \forall \psi \in M : M = \psi + M_h = \{\varphi + \psi : \varphi \in M_h\}$
  (És itt ψ az előzőek alapján $m \cdot \varphi_0$ alakban írható)

- Példa: Radioaktív bomlás:
  $m_0 > 0$ - kezdeti anyagmennyiség
  $m \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - tömeg-idő függvénye, ahol
  $m(t)$ - a meglévő anyag mennyisége
  $m \in D \Rightarrow \dfrac{m(t) - m(t+\Delta t)}{\Delta t} \quad (\Delta t \neq 0)$ - átlagos bomlási sebesség
  $\dfrac{m(t) - m(t+\Delta t)}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} -m'(t)$, ami megfigyelés alapján $\approx m(t)$

  azaz:
  $m'(t) = -\alpha \cdot m(t) \quad (t \in \mathbb{R}, 0 < \alpha \in \mathbb{R})$
  $m(0) = m_0$

  Homogén lineáris differenciálegyenlet (kezdeti érték probléma):
  $g \equiv -\alpha,\ \tau := 0,\ \xi := m_0$
  $\Rightarrow G(t) = -\alpha t \quad (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow \varphi_0(t) = e^{-\alpha t} \quad (t \in \mathbb{R})$
  $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : m(t) = c \cdot e^{-\alpha t} \quad (t \in \mathbb{R})$, ahol
  $m(0) = c = m_0 \Longrightarrow m(t) = m_0 e^{-\alpha t} \quad (t \in \mathbb{R})$
  Ha $T \in \mathbb{R} : m(T) = \dfrac{m_0}{2}$ (felezési idő)
  $\Rightarrow \dfrac{m_0}{2} = m_0 e^{-\alpha T} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = e^{-\alpha T} \Rightarrow e^{\alpha T} = 2$
  $\Rightarrow T = \dfrac{ln(2)}{\alpha}$

6.2 Magasabb rendű lineáris differenciálegyenletek

Definíció

$0 < n \in \mathbb{N}, I \subset \mathbb{R}$ nyílt, $a_0, ..., a_{n-1} : I \to \mathbb{R}$ folytonos és $c : I \to \mathbb{R}$ folytonos.
Keressünk olyan $\varphi \in I \to \mathbb{K}$ függvényt, melyre:

- $\varphi \in D^n$
- D_φ nyílt intervallum
- $\varphi^{(n)}(x) + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k(x) \cdot \varphi^{(k)}(x) = c(x) \quad (x \in D_\varphi)$

Ezt n-edrendű lineáris differenciálegyenletnek nevezzük. ($n = 1$ esetben Lineáris diff. egyenlet).
Ha még:
$\tau \in I,\ \xi_0, ..., \xi_{n-1} \in \mathbb{K}$ és

- $\tau \in D_\varphi$ és $\varphi^{(k)}(\tau) = \xi_k \quad (k = 0...n-1)$

Akkor Kezdeti érték problémáról beszélünk.

Homogenitás

Amennyiben $c(x) = 0$ homogén n-edrendű lineáris differenciálegyenletről beszélünk. Tehát homogén és inhomogén egyenletek megoldásainak halmazai:
$M_h := \{\varphi : I \to \mathbb{K} : \varphi \in D^n,\ \varphi^{(n)} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \varphi^{(k)} = 0\}$
$M := \{\varphi : I \to \mathbb{K} : \varphi \in D^n,\ \varphi^{(n)} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \varphi^{(k)} = c\}$
(Itt M_h n-dimenziós lineáris tér, így valamilyen $\varphi_1, ..., \varphi_n \in M_h$ bázist, más néven alaprendszert alkot.)

Állandó együtthatós eset

Ebben az esetben $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}$

- Karakterisztikus polinom szerepe
  Legyen $P(t) := t^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k t^k \quad (t \in \mathbb{K})$ karakterisztikus polinom és
  $\varphi_\lambda(x) := e^{\lambda x} \quad (x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{K})$

Ekkor: $\varphi_\lambda \in M_h \iff P(\lambda) = 0$
Sőt ha λ r-szeres gyöke P-nek, és
$\varphi_{\lambda,j}(x) := x^j e^{\lambda x}$ $(j = 0..r-1, x \in \mathbb{R})$, akkor: $\varphi_{\lambda,j} \in M_h \iff \varphi_{\lambda,j}^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi_{\lambda,j}^{(k)}$
azaz $P(\lambda)^{(j)} = 0 \quad (j = 0..r-1)$

- Valós megoldások
Legyen $\lambda = u + iv \quad (u, v \in \mathbb{R}, v \neq 0, i^2 = -1)$
$\Rightarrow$ az $x \mapsto x^j e^{ux} cos(vx)$, és $x \mapsto x^j e^{ux} sin(vx)$ függvények valós alaprendszert (bázist) alkotnak (M_h-ban)

Példa: Rezgések

Írjuk le egy egyenes mentén, rögzített pont körül rezgőmozgást végző m tömegű tömegpont mozgását, ha ismerjük a megfigyelés kezdetekor elfoglalt helyét és az akkori sebességét!
$\varphi \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi \in D^2$: kitérés-idő függvény
$m > 0$: tömeg
$F \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: kitérítő erő
$\alpha > 0$: visszatérítő erő, mely arányos φ-vel
$\beta \geq 0$: fékezőerő, mely arányos a sebességgel.
$\Longrightarrow$ (Newton-féle mozgástörvény alapján):
$m \cdot \varphi'' = F - \alpha\varphi - \beta\varphi'$
$\varphi(0) = s_0, \varphi'(0) = s'_0$

Másodrendű lineáris differenciál egyenlet (kezdeti érték probléma)
Standard alakba írva: $\varphi'' + \frac{\beta}{m}\varphi' + \frac{\alpha}{m}\varphi = \frac{F}{m}$
Tekintsük kényszerrezgésnek a periodikus külső kényszert, amikor:
$\frac{F(x)}{m} = Asin(\omega x) \quad [A > 0$ (amplitúdó), $\omega > 0$ (kényszerfrekvencia)]
Ekkor $\omega_0 := \sqrt{\frac{\beta}{m}}$ - saját frekvencia
és $\varphi''(x) + \omega_0^2\varphi(x) = Asin(\omega x)$
Melynek karakterisztikus polinomja : $P(t) = t^2 + \omega_0^2 \quad (t \in \mathbb{R})$
Megoldásai: $\lambda = \pm\, \omega_0 i$

Korábban láttuk, hogy ha $\lambda = u + iv$ akkor $x \mapsto x^j e^{ux} cos(vx)$, és $x \mapsto x^j e^{ux} sin(vx)$ függvények valós alaprendszert (bázist) alkotnak (M_h-ban). Így $\varphi(x) = c_1 cos(\omega_0 x) + c_2 sin(\omega_0 x)$ alakban írható mely fázisszög segítségével: $d \cdot sin(\omega_0 x + \delta) \quad (d = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \delta \in \mathbb{R})$ alakra átírható. Így:
$M_h = \{d \cdot sin(\omega_0 x + \delta)\}$

Ekkor már könnyen megadhatunk egy partikuláris megoldást:

- $\omega \neq \omega_0$ esetén partikuláris megoldás:
$x \to q \cdot sin(\omega x)$
És $q = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}$ kielégíti a $-q\omega^2 sin(\omega x) + \omega_0^2 q \cdot sin(\omega x) = Asin(\omega x)$ egyenletet. Tehát:
$\varphi(x) = d \cdot sin(\omega_0 x + \delta) + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} sin(\omega x)$ megoldás két harmonikus rezgés összege.

- $\omega = \omega_0$ (rezonancia) esetén partikuláris megoldás:
$x \to qx \cdot cos(\omega x)$
És $q = \frac{-A}{2\omega}$ kielégíti a $-2q\omega \cdot sin(\omega x) - q\omega^2 x \cdot cos(\omega x) + \omega^2 qx \cdot cos(\omega x) = Asin(\omega x)$ egyenletet.
Tehát:
$\varphi(x) = d \cdot sin(\omega x + \delta) - \frac{A}{2\omega} x \cdot cos(\omega x)$ megoldás egy harmonikus és egy aperiodikus rezgés összege.
(Ebben az esetben az idő (x) elteltével a φ értéke nő. Bizonyos modellekben ez a "rendszer szétesését" idézi elő)