

Záróvizsga tételsor

2. Differenciál- és integrálszámítás

Dobreff András

Differenciál- és integrálszámítás

Jacobi-mátrix, gradiens, parciális derivált. Szélsőérték, függvényvizsgálat. Riemann-integrál, parciális integrálás, integrálás helyettesítéssel. Newton-Leibniz-formula. A kezdeti érték probléma. Lineáris, ill. magasabb rendű lineáris differenciálegyenletek.

1 Jacobi-mátrix, gradiens, parciális derivált

1.1 Jacobi-mátrix, gradiens

Differenciálhatóság

$$1 \leq n, m \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq p, q \leq +\infty,$$

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ és $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_q)$ normált terek

$$f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad a \in \text{int} D_f$$

Az f függvény differenciálható az a pontban ($f \in D\{a\}$), ha

létezik olyan $L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ korlátos lineáris leképezés és olyan $\eta \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvény, hogy :

$$f(a+h) - f(a) = L(h) + \eta(h) \cdot \|h\|_p \quad (h \in \mathbb{R}^n, a+h \in D_f)$$

ahol

$$\eta(h) \longrightarrow 0 \quad (\|h\|_p \rightarrow 0)$$

Más szóval:

$$\frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|_p} \longrightarrow 0 \quad (\|h\|_p \rightarrow 0)$$

Amennyiben $\forall a \in \text{int} D_f : f \in D\{a\}$, akkor az f differenciálható ($f \in D$)

Megjegyzés:

A \mathbb{K} test feletti $(X, \|\cdot\|_\star)$, $(X, \|\cdot\|_\heartsuit)$ normált terek közötti folytonos leképezés, korlátos lineáris leképezés, ha

- lineáris, azaz

$$f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y) \quad (x, y \in X, \lambda \in \mathbb{K})$$

- korlátos, azaz

$$\exists M \geq 0 : \|f(x)\|_\heartsuit \leq M \|x\|_\star \quad (x \in X)$$

Derivált

$f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvény differenciálható egy $a \in \text{int} D_f$ pontban

$\Rightarrow \exists! L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ korlátos lineáris leképezés

Ezt az egyértelműen létező $L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ korlátos lineáris leképezést az f függvény a pontbeli deriváltjának nevezzük, és $f'(a)$ szimbólummal jelöljük.

Jacobi-mátrix

Az előzőekben szereplő $L := f'(a)$ korlátos lineáris leképezéshez $\exists! A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix, melyre:

$$L(x) = Ax \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

Ezért: $f'(a) := A$

az f függvény a -beli deriváltja vagy derivált mátrixa, más néven Jacobi-mátrixa.

Gradiens

$m = 1$ esetén : $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{grad} f(a) := f'(a) \in \mathbb{R}^{1 \times n} \approx \mathbb{R}^n$$

Tehát ebben az esetben az $f'(a)$ Jacobi-mátrix tekinthető egy \mathbb{R}^n -beli vektornak, amit az f függvény a -beli gradiensének nevezünk.

Ha $D := \{a \in D_f : f \in D\{a\}\}$, akkor az

$$x \mapsto \text{grad} f(x) \in \mathbb{R}^n \quad (x \in D)$$

függvényt az f függvény gradiensének nevezzük, és $\text{grad} f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jelöljük.

Gradiens mint Jacobi-mátrix sora

Legyen $1 \leq n, m \in \mathbb{N}$. Az $f = (f_1, \dots, f_m) \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvény akkor és csak akkor differenciálható az $a \in \text{int} D_f$ helyen, ha minden $i = 1, \dots, m$ esetén az $f_i \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ koordináta-függvény differenciálható az a -ban.

Ha $f \in D\{a\}$, akkor az $f'(a)$ Jacobi-mátrix a következő alakú:

$$f'(a) = \begin{bmatrix} \text{grad} f_1(a) \\ \text{grad} f_2(a) \\ \vdots \\ \text{grad} f_m(a) \end{bmatrix}$$

1.2 Parciális derivált

Definíció

Tekintsük a $h \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt és az $a = (a_1, \dots, a_n) \in D_h$ vektort. Legyen

$$D_{h,i}^{(a)} := \{t \in \mathbb{R} : (a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n) \in D_h\} \quad (i = 1, \dots, n)$$

És legyen:

$$h_{a,i} : D_{h,i}^{(a)} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{melyre:} \quad h_{a,i}(t) := h(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n) \quad (t \in D_{h,i}^{(a)})$$

A $h_{a,i}$ parciális függvények mind egyváltozós valós függvények ($h_{a,i} \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

A h függvény az a -ban i -edik változó szerint parciálisan deriválható, ha $h_{a,i} \in D\{a_i\}$. Ekkor:

$$\partial_i h(a) := h'_{a,i}(a_i)$$

valós számot a h függvény a -beli, i -edik változó szerinti parciális deriváltjának nevezzük.

Parciális derivált függvény

Tegyük fel, hogy az előző h függvényre:

$$D_{h,i} := \{a \in D_h : \text{létezik a } \partial_i h(a) \text{ parciális derivált}\} \neq \emptyset \quad (i = 1, \dots, n)$$

Ekkor a

$$x \mapsto \partial_i h(x) \quad (x \in D_{h,i})$$

függvényt a h függvény i -edik változó szerinti parciális deriváltfüggvényének nevezzük, és a $\partial_i h$ szimbólummal jelöljük.

Differenciálhatóság és parciális differenciálhatóság

- Differenciálhatóság \Rightarrow parciális differenciálhatóság
 $1 \leq n \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, és $h \in D\{a\}$ ($a \in D_h$)
 $\Rightarrow \forall i = 1, \dots, n$: a h függvény i -edik változó szerint parciálisan differenciálható az a pontban, és

$$\text{grad}h(a) = (\partial_1 h(a), \dots, \partial_n h(a))$$

- Differenciálhatóság \Leftarrow parciális differenciálhatóság
 $1 \leq n \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, és $a \in \text{int}D_h$
Valamilyen $i = 1, \dots, n$ esetén:
 - Tetszőleges $x \in K_r(a)$ ($r > 0$ alkalmas) helyen léteznek a $\partial_j h(x)$ parciális deriváltak ($i \neq j = 1, \dots, n$) és ezek folytonosak
 - $\exists \partial_i h(a)$ parciális derivált $\Rightarrow h \in D(a)$

2 Szélsőérték, függvényvizsgálat

2.1 Szélsőérték

$$f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D_f$$

Lokális maximum

f -nek a -ban lokális maximuma van, ha alkalmas $r > 0$ mellett:

$$f(x) \leq f(a) \quad (x \in D_f, |x - a| < r)$$

Lokális minimum

f -nek a -ban lokális minimuma van, ha alkalmas $r > 0$ mellett:

$$f(x) \geq f(a) \quad (x \in D_f, |x - a| < r)$$

Abszolút maximum

f -nek a -ban abszolút maximuma van, ha:

$$f(x) \leq f(a) \quad (x \in D_f)$$

Abszolút minimum

f -nek a -ban abszolút minimuma van, ha:

$$f(x) \geq f(a) \quad (x \in D_f)$$

Lokális szélsőérték

f -nek a -ban lokális szélsőértéke van, ha a -ban lokális minimuma vagy maximuma van.

Abszolút szélsőérték

f -nek a -ban abszolút szélsőértéke van, ha a -ban abszolút minimuma vagy maximuma van.

Elsőrendű szükséges feltétel (lokális szélsőértékre)

$f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek $a \in \text{int}D_f$ helyen lokális szélsőértéke van, és $f \in D\{a\}$

$$\Rightarrow f'\{a\} = 0$$

Az előbbi tétel segítségével már nem nehéz belátni a differenciálható függvények vizsgálata szempontjából alapvető fontosságú ún. középérték-tételeket

Rolle-tétel

$a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$), $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C$, és

$\forall x \in (a, b) : f \in D\{x\}$ és $f(a) = f(b)$

$$\Rightarrow \exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$$

Lagrange-féle középértéktétel

$a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$), $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C$, és

$\forall x \in (a, b) : f \in D\{x\}$

$$\Rightarrow \exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Cauchy-féle középértéktétel

$a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$), $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f, g \in C$, és
 $\forall x \in (a, b) : f, g \in D\{x\}$
 $\Rightarrow \exists \xi \in (a, b) :$
 $(f(b) - f(a)) \cdot g'(\xi) = (g(b) - g(a)) \cdot f'(\xi)$

Jelváltás

$f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{int}D_f$ és $f(a) = 0$, $(K_r(a) \subset D_f, r > 0)$

1. f függvénynek $(-, +)$ jelváltása van, ha
 $f(x) \leq 0 \leq f(t)$, $(x, t \in K_r(a), x < a < t)$
2. f függvénynek $(+, -)$ jelváltása van, ha
 $f(x) \geq 0 \geq f(t)$, $(x, t \in K_r(a), x < a < t)$

Elsőrendű elégséges feltétel

$f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{int}D_f$ és $f \in D\{x\}$, $(x \in K_r(a) \subset D_f, r > 0)$

1. f' -nek az a -ban $(+, -)$ jelváltása van $\Rightarrow f$ -nek a -ban lokális maximuma van.
2. f' -nek az a -ban $(-, +)$ jelváltása van $\Rightarrow f$ -nek a -ban lokális minimuma van.

2.2 Monotonitás

$f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Monoton növekedés

f monoton növeő (\nearrow), ha $\forall x, t \in D_f$, $x < t : f(x) \leq f(t)$.
Amennyiben $f(x) < f(t)$, akkor f szigorúan monoton növeő (\uparrow).

Monoton fogyás (csökkenés)

f monoton fogyó (\searrow), ha $\forall x, t \in D_f$, $x < t : f(x) \geq f(t)$.
Amennyiben $f(x) > f(t)$, akkor f szigorúan monoton fogyó (\downarrow).

Derivált és monotonitás kapcsolata

$I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in D$
 \Rightarrow

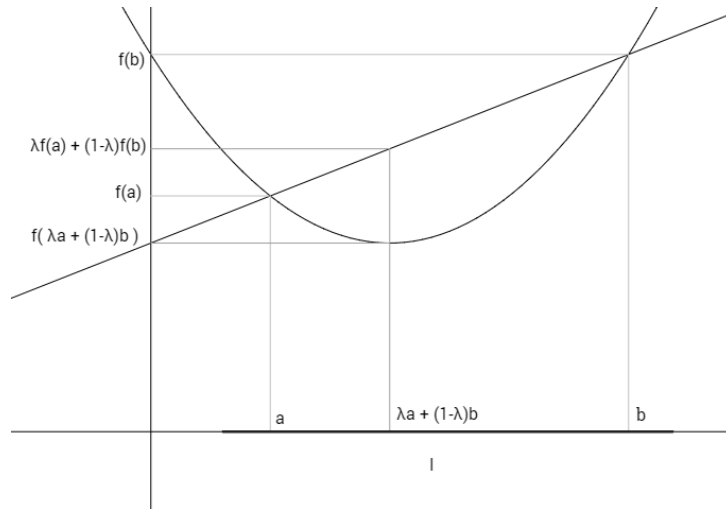
1. $f \nearrow \Leftrightarrow f' \geq 0$
2. $f \searrow \Leftrightarrow f' \leq 0$
3. f konstans $\Leftrightarrow \forall x \in I : f'(x) = 0$
4. $\forall x \in I : f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow$
5. $\forall x \in I : f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow$

2.3 Alaki viszonyok

Konvexitás, konkávitás

$I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

- f konvex, ha
 $\forall a, b \in I \quad \forall 0 \leq \lambda \leq 1 : f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$
- f konkáv, ha
 $\forall a, b \in I \quad \forall 0 \leq \lambda \leq 1 : f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \geq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$



ábra 1: Konvex függvény

Konvexitás és derivált

$I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in D$

- f konvex $\Leftrightarrow f' \nearrow$
- f konkáv $\Leftrightarrow f' \searrow$

Inflexió

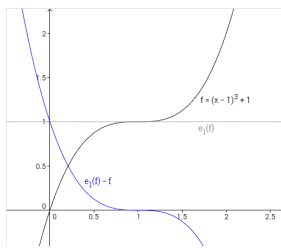
$f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{int}D_f$, $f \in D\{a\}$:

Pontbeli érintő

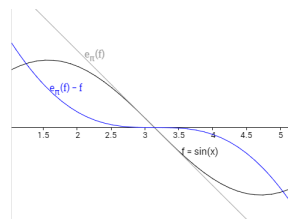
$$e_a(x) := f(a) + f'(a)(x - a) \quad (x \in \mathbb{R})$$

Inflexió

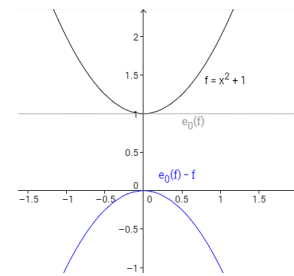
f -nek az a -ban inflexiója van, ha az $f - e_a(f)$ az a -ban jelet vált.



(a) x^3 függvény inflexiója



(b) szinusz függvény inflexiója



(c) x^2 -nek nincs inflexiója

2.4 Többször differenciálható függvények

Második derivált

$f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{int}D_f$, és

$f \in D\{x\}$ ($x \in K_r(a)$, $r > 0$), illetve $f' \in D\{a\}$

Ekkor f az a -ban kétszer deriválható és $f''(a) := (f')'(a)$ az f második deriváltja.

Differenciálás magasabb rendben

Hasonlóképpen az előzőhöz:

$f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{int}D_f$, és

$f \in D^n\{x\}$ ($x \in K_r(a)$, $r > 0$), illetve $f^{(n)} \in D\{a\}$, ($1 \leq n \in \mathbb{N}$)

Ekkor f az a -ban $(n+1)$ -szer deriválható és $f^{(n+1)}(a) := (f^{(n)})'(a)$ az f $(n+1)$ -edik deriváltja.

Másodrendű elégséges feltétel (lokális szélsőérték létezésére)

$f \in D^2\{a\}$ függvényre $f'(a) = 0$ és $f''(a) \neq 0$

$\Rightarrow f$ -nek az a -ban szigorú lokális szélsőértéke van.

Ha $f''(a) < 0 \Rightarrow$ szigorú lokális maximum.

Ha $f''(a) > 0 \Rightarrow$ szigorú lokális minimum.

3 Riemann-integrál, parciális integrálás, integrálás helyettesítéssel.

Primitív függvény

$I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f \in I \rightarrow \mathbb{R}$

Ha $\exists F : I \rightarrow \mathbb{R}$, hogy $F \in D$, $F' = f$

akkor F az f primitív függvénye.

Határozatlan integrál

Legyen $\int f := \int f(x)dx := \{F : I \rightarrow \mathbb{R}, F \in D \text{ és } F' = f\}$ az f határozatlan integrálja.

Határozott integrál (Riemann-integrál)

$-\infty < a < b < \infty$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f korlátos

- A $\tau \subset [a, b]$ felosztása, ha τ véges és $a, b \in \tau$
Ekkor $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} (n \in \mathbb{N})$, ahol $a := x_0 < x_1 < \dots < x_n := b$
- $m_i := m_i(f) := \inf\{f(x) : x_i \leq x \leq x_{i+1}\} (i = 0..n-1)$, illetve
 $M_i := M_i(f) := \sup\{f(x) : x_i \leq x \leq x_{i+1}\} (i = 0..n-1)$
és:
 $s(f, \tau) := \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$ - alsó összeg
 $S(f, \tau) := \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$ - felső összeg
- $\mathfrak{F} := \{\tau \subset [a, b] \text{ felosztás}\}$
- Az $\{s(f, \tau) : \tau \in \mathfrak{F}\}$ felülről korlátos és $\forall \mu \in \mathfrak{F} : S(f, \mu)$ felső korlát, illetve
Az $\{S(f, \tau) : \tau \in \mathfrak{F}\}$ alulról korlátos és $\forall \mu \in \mathfrak{F} : s(f, \mu)$ alsó korlát
- Tehát legyen:
 $I_*(f) := \sup\{s(f, \tau) : \tau \in \mathfrak{F}\}$ - Darboux alsó index, és
 $I^*(f) := \inf\{S(f, \tau) : \tau \in \mathfrak{F}\}$ - Darboux felső index

$\Rightarrow \forall \tau, \mu \in \mathfrak{F} : s(f, \tau) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq S(f, \mu)$

Az f függvény Riemann-integrálható ($f \in R[a, b]$), ha $I_*(f) = I^*(f)$, ekkor legyen

$\int_a^b f := \int_{[a,b]} f := \int_a^b f(x)dx := I_*(f) = I^*(f)$ az f függvény Riemann-integrálja (határozott integrálja).

Parciális integrálás

- Határozatlan esetben
 $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $f, g \in D$ és
 fg' -nek van primitív függvénye (azaz $\int fg' \neq \emptyset$)
 $\Rightarrow \int f'g \neq \emptyset$ és $\int f'g = fg - \int fg'$
- Határozott esetben
 $f, g \in D[a, b]$
 $f'g, fg' \in R[a, b]$
 $\Rightarrow \int_a^b f'g = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b fg'$

Integrálás helyettesítéssel

- Határozatlan esetben
 $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok, $g : I \rightarrow J$, $g \in D$, $f : J \rightarrow \mathbb{R}$, $\int f \neq \emptyset$
 $\Rightarrow \int f \circ g \cdot g' \neq \emptyset$ és $(\int f) \circ g = \int (f \circ g \cdot g')$
- Határozott esetben
 $f \in C[a, b]$, $g : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$, $g \in C^1[\alpha, \beta]$,
 $g(\alpha) = a, g(\beta) = b$
 $\Rightarrow \int_a^b f = \int_\alpha^\beta (f \circ g \cdot g')$

4 Newton-Leibniz-formula

$f \in R[a, b], \exists F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, F$ folytonos és $F \in D\{x\}, F'(x) = f(x), (a < x < b)$
 $\Rightarrow \int_a^b f = F(b) - F(a)$

5 A kezdeti érték probléma

Differenciál egyenlet

$0 < n \in \mathbb{N}, I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum,

$\Omega := I_1 \times \dots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$, ahol $I_1, \dots, I_n \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum

$f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, f \in C$

Határozzuk meg a $\varphi \in I \rightarrow \Omega$ függvényt úgy, hogy:

- D_φ nyílt intervallum
- $\varphi \in D$
- $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in D_\varphi)$

Ezt a feladatot nevezzük differenciál egyenletnek.

Kezdeti érték probléma

Ha az előzőekhez még adottak: $\tau \in I$, és $\xi \in \Omega$

Illetve a φ függvényre még teljesül:

- $\tau \in D_\varphi$ és $\varphi(\tau) = \xi$

Akkor kezdeti érték problémának (Cauchy feladatnak) nevezzük.

6 Lineáris, ill. magasabb rendű lineáris differenciálegyenletek

6.1 Lineáris differenciálegyenletek

Definíció

A lineáris differenciálegyenlet olyan differenciálegyenlet, melyre:

$n = 1, \quad I, I_1 \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok, $f : I \times I_1 \rightarrow \mathbb{R}$, ahol

$g, h : I \rightarrow \mathbb{R}, g, h \in C, I_1 := \mathbb{R}$ és

$f(x, y) := g(x) \cdot y + h(x) \quad (x \in I, y \in I_1 = \mathbb{R})$

$\Rightarrow \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) = g(x) \cdot \varphi(x) + h(x) \quad (x \in D_\varphi)$

Homogenitás

A lineáris differenciálegyenlet homogén ha $h \equiv 0$ (különben inhomogén)

Kezdeti érték probléma

- Minden lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdeti érték probléma megoldható és $\forall \varphi, \psi$ megoldásokra: $\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in D_\varphi \cap D_\psi)$
- Minden homogén lineáris differenciálegyenlet ($\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$) megoldása a következő alakú: $c\varphi_0$, ahol $c \in \mathbb{R}$ és $\varphi_0(t) = e^{G(t)} \quad (G : I \rightarrow \mathbb{R}, G \in D, \text{ és } G' = g)$
- Állandók variálásának módszere:
 $\exists m : I \rightarrow \mathbb{R}, m \in D : m \cdot \varphi_0$ megoldása az (inhomogén) lineáris differenciálegyenletnek
- Partikuláris megoldás:
 $M := \{\varphi : I \rightarrow \mathbb{R} : \varphi'(t) = g(t) \cdot \varphi(t) + h(t) \quad (t \in I)\}$
 $M_h := \{\varphi : I \rightarrow \mathbb{R} : \varphi'(t) = g(t) \cdot \varphi(t) \quad (t \in I)\}$
 $\Rightarrow \forall \psi \in M : M = \psi + M_h = \{\varphi + \psi : \varphi \in M_h\}$
(És itt ψ az előzőek alapján $m \cdot \varphi_0$ alakban írható)

- Példa: Radioaktív bomlás:

$m_0 > 0$ - kezdeti anyagmennyiség

$m \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - tömeg-idő függvénye, ahol

$m(t)$ - a meglévő anyag mennyisége

$m \in D \Rightarrow \frac{m(t) - m(t + \Delta t)}{\Delta t}$ ($\Delta t \neq 0$) - átlagos bomlási sebesség

$\frac{m(t) - m(t + \Delta t)}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} -m'(t)$, ami megfigyelés alapján $\approx m(t)$

azaz:

$$m'(t) = -\alpha \cdot m(t) \quad (t \in \mathbb{R}, 0 < \alpha \in \mathbb{R})$$

$$m(0) = m_0$$

Homogén lineáris differenciálegyenlet (kezdeti érték probléma):

$$g \equiv -\alpha, \tau := 0, \xi := m_0$$

$$\Rightarrow G(t) = -\alpha t \quad (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow \varphi_0(t) = e^{-\alpha t} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : m(t) = c \cdot e^{-\alpha t} \quad (t \in \mathbb{R}), \text{ ahol}$$

$$m(0) = c = m_0 \Rightarrow m(t) = m_0 e^{-\alpha t} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\text{Ha } T \in \mathbb{R} : m(T) = \frac{m_0}{2} \text{ (felezési idő)}$$

$$\Rightarrow \frac{m_0}{2} = m_0 e^{-\alpha T} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\alpha T} \Rightarrow e^{\alpha T} = 2$$

$$\Rightarrow T = \frac{\ln(2)}{\alpha}$$

6.2 Magasabb rendű lineáris differenciálegyenletek

Definíció

$0 < n \in \mathbb{N}, I \subset \mathbb{R}$ nyílt, $a_0, \dots, a_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos és $c : I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos.

Keressünk olyan $\varphi \in I \rightarrow \mathbb{K}$ függvényt, melyre:

- $\varphi \in D^n$
- D_φ nyílt intervallum
- $\varphi^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) \cdot \varphi^{(k)}(x) = c(x) \quad (x \in D_\varphi)$

Ezt n -edrendű lineáris differenciálegyenletnek nevezzük. ($n = 1$ esetben Lineáris diff. egyenlet).

Ha még:

$\tau \in I, \xi_0, \dots, \xi_{n-1} \in \mathbb{K}$ és

- $\tau \in D_\varphi$ és $\varphi^{(k)}(\tau) = \xi_k \quad (k = 0 \dots n-1)$

Akkor Kezdeti érték problémáról beszélünk.

Homogenitás

Amennyiben $c(x) = 0$ homogén n -edrendű lineáris differenciálegyenletről beszélünk. Tehát homogén és inhomogén egyenletek megoldásainak halmazai:

$$M_h := \{\varphi : I \rightarrow \mathbb{K} : \varphi \in D^n, \varphi^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \varphi^{(k)} = 0\}$$

$$M := \{\varphi : I \rightarrow \mathbb{K} : \varphi \in D^n, \varphi^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \varphi^{(k)} = c\}$$

(Itt M_h n -dimenziós lineáris tér, így valamilyen $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in M_h$ bázist, más néven alaprendszer alkot.)

Állandó együtthatós eset

Ebben az esetben $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$

- Karakterisztikus polinom szerepe

Legyen $P(t) := t^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k \quad (t \in \mathbb{K})$ karakterisztikus polinom és

$$\varphi_\lambda(x) := e^{\lambda x} \quad (x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{K})$$

Ekkor: $\varphi_\lambda \in M_h \iff P(\lambda) = 0$
 Sőt ha λ r -szeres gyöke P -nek, és

$$\varphi_{\lambda,j}(x) := x^j e^{\lambda x} \quad (j = 0..r-1, x \in \mathbb{R}), \text{ akkor: } \varphi_{\lambda,j} \in M_h \iff \varphi_{\lambda,j}^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi_{\lambda,j}^{(k)}$$

$$\text{azaz } P(\lambda)^{(j)} = 0 \quad (j = 0..r-1)$$

- Valós megoldások

Legyen $\lambda = u + iv \quad (u, v \in \mathbb{R}, v \neq 0, i^2 = -1)$

\Rightarrow az $x \mapsto x^j e^{ux} \cos(vx)$, és $x \mapsto x^j e^{ux} \sin(vx)$ függvények valós alapszisztemet (bázist) alkotnak (M_h -ban)

Példa: Rezgések

Írjuk le egy egyenes mentén, rögzített pont körül rezgőmozgást végző m tömegű tömegpont mozgását, ha ismerjük a megfigyelés kezdetekor elfoglalt helyét és az akkori sebességét!

$\varphi \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \in D^2$: kitérés-idő függvény

$m > 0$: tömeg

$F \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: kitérítő erő

$\alpha > 0$: visszatérítő erő, mely arányos φ -vel

$\beta \geq 0$: fékezőerő, mely arányos a sebességgel.

\Rightarrow (Newton-féle mozgástörvény alapján):

$$m \cdot \varphi'' = F - \alpha \varphi - \beta \varphi'$$

$$\varphi(0) = s_0, \varphi'(0) = s'_0$$

Másodrendű lineáris differenciál egyenlet (kezdeti érték probléma)

$$\text{Standard alakba írva: } \varphi'' + \frac{\beta}{m} \varphi' + \frac{\alpha}{m} \varphi = \frac{F}{m}$$

Tekintsük kényszerrezgésnek a periodikus külső kényszert, amikor:

$$\frac{F(x)}{m} = A \sin(\omega x) \quad [A > 0 \text{ (amplitúdó)}, \omega > 0 \text{ (kényszerfrekvencia)}]$$

Ekkor $\omega_0 := \sqrt{\frac{\beta}{m}}$ - saját frekvencia

$$\text{és } \varphi''(x) + \omega_0^2 \varphi(x) = A \sin(\omega x)$$

Melynek karakterisztikus polinomja : $P(t) = t^2 + \omega_0^2 \quad (t \in \mathbb{R})$

Megoldásai: $\lambda = \pm \omega_0 i$

Korábban láttuk, hogy ha $\lambda = u + iv$ akkor $x \mapsto x^j e^{ux} \cos(vx)$, és $x \mapsto x^j e^{ux} \sin(vx)$ függvények valós alapszisztemet (bázist) alkotnak (M_h -ban). Így $\varphi(x) = c_1 \cos(\omega_0 x) + c_2 \sin(\omega_0 x)$ alakban írható mely fázisszög segítségével: $d \cdot \sin(\omega_0 x + \delta) \quad (d = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \delta \in \mathbb{R})$ alakra átírható. Így:

$$M_h = \{d \cdot \sin(\omega_0 x + \delta)\}$$

Ekkor már könnyen megadhatunk egy partikuláris megoldást:

- $\omega \neq \omega_0$ esetén partikuláris megoldás:

$$x \rightarrow q \cdot \sin(\omega x)$$

És $q = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}$ kielégíti a $-q\omega^2 \sin(\omega x) + \omega_0^2 q \cdot \sin(\omega x) = A \sin(\omega x)$ egyenletet. Tehát:

$$\varphi(x) = d \cdot \sin(\omega_0 x + \delta) + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega x) \text{ megoldás két harmonikus rezgés összege.}$$

- $\omega = \omega_0$ (rezonancia) esetén partikuláris megoldás:

$$x \rightarrow qx \cdot \cos(\omega x)$$

És $q = \frac{-A}{2\omega}$ kielégíti a $-2q\omega \cdot \sin(\omega x) - q\omega^2 x \cdot \cos(\omega x) + \omega^2 qx \cdot \cos(\omega x) = A \sin(\omega x)$ egyenletet.

Tehát:

$$\varphi(x) = d \cdot \sin(\omega x + \delta) - \frac{A}{2\omega} x \cdot \cos(\omega x) \text{ megoldás egy harmonikus és egy aperiodikus rezgés összege.}$$

(Ebben az esetben az idő (x) elteltével a φ értéke nő. Bizonyos modellekben ez a "rendszer szétesését" idézi elő)