# Záróvizsga tételsor
## 1. Függvények határértéke, folytonossága

Fekete Dóra

**Függvények határértéke, folytonossága**

Függvények határértéke, folytonossága. Kompakt halmazon folytonos függvények tulajdonságai: Heine-tétel, Weierstrass-tétel, Bolzano-tétel. A hatványsor fogalma, Cauchy–Hadamard-tétel, analitikus függvények.

## 1 Függvények határértéke

Adott $f \in \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2, a \in \mathcal{D}'_f$ (torlódási pont). Az $f$ függvénynek az $a$ helyen van határértéke, ha $\exists A \in \overline{\mathbb{K}}_2$, ahol $\overline{\mathbb{K}} = \mathbb{C} \vee \mathbb{R} \vee +\infty \vee -\infty$, amelyre tetszőleges $K(A) \subset \mathbb{K}_2$ környezetet is véve megadható az $a$-nak egy alkalmas $k(a) \subset \mathbb{K}_1$ környezete, amellyel $f[(k(a)\backslash\{a\}) \cap \mathcal{D}_f] \subset K(A)$ teljesül.
Másképp: $f(x) \in K(A), (a \neq x \in k(a) \cap \mathcal{D}_f)$.
Ekkor az egyértelműen létező $A \in \overline{\mathbb{K}}_2$ számot vagy valamelyik végtelent az $f$ függvény $a$ helyen vett határértékének nevezzük.
Jelölés: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{a} f = A$

### 1.1 Torlódási pont

$A \subset \mathbb{K}$, ekkor az $\alpha \in \overline{\mathbb{K}}$ torlódási pontja az $A$ halmaznak, ha bármely $K(\alpha)$ környezetre $(K(\alpha)\backslash\{\alpha\}) \cap A \neq \emptyset$.
Egyenlőtlenségekkel: $A \subset \mathbb{K}$, ekkor $\alpha \in \mathbb{K}$ szám torlódási pontja az $A$ halmaznak, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists x \in A$, hogy $0 < |x - \alpha| < \varepsilon$.

### 1.2 Környezet

$A \subset \mathbb{K}, a \in A, r > 0 : K_r(a) = K(a) = \{x \in A : |x - a| < r\}$.

### 1.3 Függvény

$\emptyset \neq A, B$ halmazok, $f \subset A \times B$ reláció. Valamely $x \in A$ elemre legyen $f_x := \{y \in B : (x, y) \in f\}$. $f$ reláció függvény, ha $\forall x \in A$-ra az $f_x$ halmaz legfeljebb egy elemű.

## 2 Függvények folytonossága

Az $f \in \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$ függvény az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban folytonos, ha $\forall \varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $\delta > 0$ szám, amellyel bármely $x \in \mathcal{D}_f, |x - a| < \delta$ esetén $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
Jelölés: $f \in \mathcal{C}\{a\}$, ha $\forall x \in \mathcal{D}_f : f \in \mathcal{C}\{x\}$, akkor $f \in \mathcal{C}$.

## 3 Összefüggés határérték és folytonosság között

Legyen $f \in \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2, a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}'_f$. Ekkor $f \in \mathcal{C}\{a\} \iff \lim\limits_{a} f = f(a)$.

# 4 Fogalmak

## 4.1 Kompakt halmaz

$A \subset \mathbb{K}$ kompakt, ha bármely $(x_n) : \mathbb{N} \to A$ sorozatnak van olyan $(x_{\nu_n})$ részsorozata, amely konvergens és $\lim (x_{\nu_n}) \in A$.
Ekkor $A$ korlátos és zárt.

## 4.2 Konvergens

Egy $x = (x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ számsorozatot konvergensnek nevezünk, ha $\exists \alpha \in \mathbb{K}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N : |x_n - \alpha| < \varepsilon$.
$\alpha$ az $x$ sorozat határértéke.

## 4.3 Korlátos

Sorozatra: $x_n$ korlátos $\Rightarrow \exists \nu : x \circ \nu$ konvergens
Halmazra: $\emptyset \neq A \subset \mathbb{K}$ korlátos, ha $\exists q \in \mathbb{R} : |x| \leq q, (x \in A)$

## 4.4 Zárt halmaz

Komplementere nyílt halmaz.

## 4.5 Nyílt halmaz

$A$ nyílt halmaz $\iff \forall a \in A, \exists K(a) : K(a) \subset A$, vagyis az $A$ halmaz minden pontja belső pont.

# 5 Heine-tétel

Ha az $f \in \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$ függvény folytonos és $\mathcal{D}_f$ kompakt, akkor $f$ egyenletesen folytonos.

## 5.1 Egyenletesen folytonos

$f \in \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$ függvény egyenletesen folytonos, ha $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |f(x) - f(t)| < \varepsilon, (x, t \in \mathcal{D}_f, |x - t| < \delta)$.

# 6 Weierstrass-tétel

Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos és $\mathcal{D}_f$ kompakt. Ekkor az $\mathcal{R}_f$ értékkészletnek van legnagyobb és legkisebb eleme ($\exists \max \mathcal{R}_f, \exists \min \mathcal{R}_f$).

# 7 Bolzano-tétel

Tegyük fel, hogy valamely $-\infty < a < b < +\infty$ esetén az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, és $f(a) \cdot f(b) < 0$ (ellenkező előjelű).
Ekkor van olyan $\xi \in (a, b)$, amelyre $f(\xi) = 0$.

# 8 A hatványsor fogalma

Legyen adott az $a \in \mathbb{K}$ középpont és az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ együttható-sorozat, továbbá ezek segítségével tekintsük az alábbi függvényeket: $f_n(t) := a_n(t - a)^n, (t \in \mathcal{D} := \mathbb{K}, n \in \mathbb{N})$. Ekkor a $\sum (f_n)$ függvénysort hatványsornak nevezzük.

## 8.1 Sorozat

Az $f$ függvényt sorozatnak nevezzük, ha $\mathcal{D}_f = \mathbb{N}$.

### 8.2 Függvénysorozat, függvénysor

$(f_n)$ sorozat függvénysorozat, ha $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n$ függvény, és valamilyen $\mathcal{D} \neq \emptyset$ halmazzal $\mathcal{D}_{f_n} = \mathcal{D}, (n \in \mathbb{N})$.
Ha a szóban forgó $(f_n)$ függvénysorozatra $\mathcal{R}_{f_n} \subset \mathbb{K}, (n \in \mathbb{N})$ is igaz, akkor az $(f_n)$ függvénysorozat által meghatározott $\sum (f_n)$ függvénysor a következő függvénysorozat: $\sum (f_n) := (\sum\limits_{k=0}^{n} f_k)$.

## 9 Cauchy–Hadamard-tétel

Tegyük fel, hogy az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat esetén létezik a $\lim ( \sqrt[n]{|a_n|})$ határérték, és legyen

$$r := \begin{cases} +\infty & ha \lim ( \sqrt[n]{|a_n|}) = 0 \\ \dfrac{1}{\lim ( \sqrt[n]{|a_n|})} & ha \lim ( \sqrt[n]{|a_n|}) > 0 \end{cases}$$

$r$-t a konvergenciasugárnak nevezzük. Ekkor bármely $a \in \mathbb{K}$ mellett a $\sum (a_n(t-a)^n)$ hatványsorról a következőket mondhatjuk:

1. Ha $r > 0$, akkor minden $x \in \mathbb{K}, |x-a| < r$ helyen a $\sum (a_n(t-a)^n)$ hatványsor az $x$ helyen abszolút konvergens.
2. Ha $r < +\infty$, akkor tetszőleges $x \in \mathbb{K}, |x-a| > r$ mellett a $\sum (a_n(t-a)^n)$ hatványsor az $x$ helyen divergens.

### 9.1 Abszolút konvergens

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sort abszolút konvergensnek nevezzük, ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor konvergens.

### 9.2 Divergens

Ha a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ nem létezik, vagy nem véges, akkor a $\sum a_n$ végtelen sor divergens.

### 9.3 Cauchy–Hadamard-tételből következik

1. Ha $r = +\infty$, akkor $\mathcal{D}_0 = \mathbb{K}$, és $\forall x \in \mathbb{K}$-ra a hatványsor abszolút konvergens.
2. Ha $r = 0$, akkor $\mathcal{D}_0 = \{a\}$ és $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(a-a)^n = a_0$.
3. Ha $0 < r < +\infty$, akkor $K_r(a) \subset \mathcal{D}_0 \subset G_r(a) = \{x \in \mathbb{K} : |x-a| \leq r\}$ és a $K_r(a)$ környezet $\forall x$ pontjára a hatványsor az $x$ helyen abszolút konvergens.
4. Ha $r > 0$, akkor tetszőleges $0 \leq \rho < r$ számhoz válasszuk az $x \in K_r(a)$ elemet úgy, hogy $|x-a| = \rho$. Ekkor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n(x-a)^n| = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n||x-a|^n) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|\rho^n) < +\infty$

## 10 Analitikus függvények

Tegyük fel, hogy a $\sum (a_n(t-a)^n)$ hatványsor $r$ konvergenciasugara (ld. C–H-tétel) nem nulla. Ekkor értelmezhetjük az alábbi függvényt: $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, (x \in K_r(a))$, ami nem más, mint a $\sum (a_n(t-a)^n)$ függvénysor $F(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, (x \in \mathcal{D}_0)$ összegfüggvényének a leszűkítése a $K_r(a)$ környezetre: $f = F|_{K_r(a)}$, ($f$ a hatványsor összegfüggvénye). Az ilyen szerkezetű $f$ függvényt analitikusnak nevezzük.
Megjegyzés: $\mathcal{D}_0$ a $\sum (a_n(t-a)^n)$ hatványsor konvergenciatartományát jelöli.

## 10.1 Fontos analitikus függvények

Olyan $a_n$-ek, amire $\lim\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) = 0$, tehát $r = +\infty$ a $\sum(a_n t^n)$ hatványsorok esetén. Ezek az $a_n$-ek: $\frac{1}{n!}, \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}, \frac{(-1)^n}{(2n)!}, \frac{1}{(2n+1)!}, \frac{1}{(2n)!}$.

- $\exp x := \exp(x) = e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, (x \in \mathbb{K})$
- $\sin x := \sin(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, (x \in \mathbb{K})$
- $\cos x := \cos(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, (x \in \mathbb{K})$
- $\sinh x := \sinh(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, (x \in \mathbb{K})$
- $\cosh x := \cosh(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, (x \in \mathbb{K})$