

# Biológiai jelek Hilbert-térbeli approximációja

Dózsa Tamás

Programtervező Informatikus BSc

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Informatikai Kar

Budapest,

2017. június x.

# Tartalomjegyzék

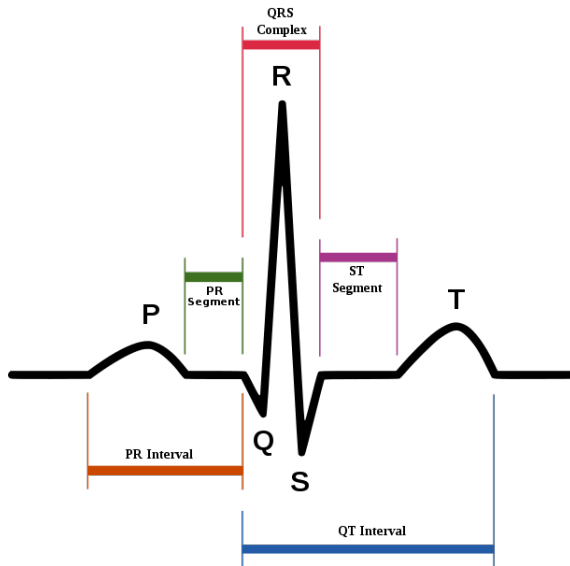
- 1 Bevezetés
- 2 Előzmények
- 3 Kidolgozott módszer
- 4 Implementáció
- 5 Tesztek, eredmények

## Motiváció

- Az EKG elemzése nagy jelentőséggel bír az orvostudományban.
- Hosszú mérések, vagy több elvezetés esetén költséges a tárolás.
- A jel zajjal terhelt, ami nehezíti a pontos diagnózis felállítását.
- Hullámszegmensek meghatározása fontos probléma.

## Alkalmazások

- **Tömörítés**
- Zajszűrés
- QRS detektálás
- Szívütések osztályozása



# Approximáció Hilbert-terekben

## Definíciók

- Legyen  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  Hilbert-tér, ahol

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t) \, dt$$

- $\{ \Phi_k : 0 \leq k \leq n \}$  ortonormált rendszer (ONR)
- Ortogonális projekció:

$$S_n f := \sum_{k=0}^n \langle f, \Phi_k \rangle \Phi_k$$

# Approximáció Hilbert-terekben

## Definíciók

- Az approximáció hibája:

$$\|f - S_n f\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n |\langle f, \Phi_k \rangle|^2.$$

## Feladat

- EKG esetén másodpercenként több száz adat keletkezik.
- A dolgozat célja a jel **tömörítése**.
- Ezért véges dimenziós altereket használunk (Euklideszi tér).

# Hermite-polinomok

## Definíció

- Rekurzió:

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x) \quad (n \geq 2)$$

$$H_{-1}(x) = 0, \quad H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x$$

- Ortogonalitás:

$$\langle H_n, H_m \rangle_\rho := \int_{-\infty}^{\infty} H_n(t) H_m(t) \rho(t) \, dt$$

$$\langle H_n, H_m \rangle_\rho = 0 \quad (n \neq m)$$

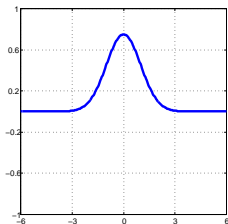
- Súlyfüggvény:

$$\rho(t) := e^{-t^2}$$

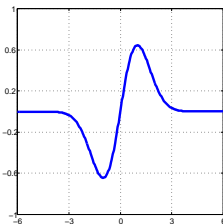
# Hermite-függvények

## Definíció

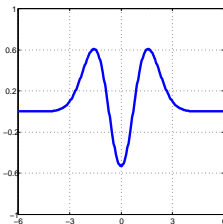
$$\Phi_n(x) := H_n(x)e^{-x^2/2}/\sqrt{\pi^{1/2}2^n n!} \quad (n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R})$$



(a)  $\Phi_0(x)$



(b)  $\Phi_1(x)$



(c)  $\Phi_2(x)$

**Figure:** A Hermite-függvényrendszer első három tagja.



# Hermite-függvények

## Tulajdonságok

- ONR
- Gyorsan tartanak 0-hoz:

$$|\Phi_n(x)| \leq M_n e^{-x^2/4} \leq M_n \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$$

- Stabil, másodrendű rekurzió:

$$\Phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{n}} x \Phi_{n-1} - \sqrt{\frac{n-1}{n}} \Phi_{n-2}(x) \quad (n \geq 2)$$

$$\Phi_0(x) = e^{-x^2/2}/\pi^{1/4}, \quad \Phi_1(x) = \sqrt{2} x e^{-x^2/2}/\pi^{1/4} \quad (x \in \mathbb{R})$$

# Hermite-függvények

## Tulajdonságok

- $\Phi_n$  deriváltja:

$$\Phi'_n(x) = \sqrt{2n}\Phi_{n-1}(x) - x\Phi_n(x) \quad (n \geq 0, x \in \mathbb{R})$$

- Alakjuk korrelál az EKG-vel.
- Korábbi cikkek is használták <sup>1</sup> <sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup>R. Jane, S. Olmos, P. Laguna, and P. Caminal, *Adaptive Hermite models for ECG data compression: Performance and evaluation with automatic wave detection*, in Proc. of the Int. Conf. on Comp. in Card., 1993, pp. 389–392.

<sup>2</sup>A. Sandryhaila, S. Saba, M. Püschel, and J. Kovacevic, *Efficient compression of QRS complexes using Hermite expansion*, IEEE Trans. on Sig. Proc., vol. 60, no. 2, pp. 947–955, 2012.

# Rendszerek affin transzformáltja

## Ötlet

- Transzlációs, és dilatációs paraméterek bevezetése:

$$\Phi_k^{a,\lambda}(x) := \Phi_k(\lambda x + a) \quad (x, a \in \mathbb{R}, \lambda > 0).$$

- $\left\{ \sqrt{\lambda} \Phi_k^{a,\lambda} : 0 \leq k \leq n \right\}$  is ONR.
- Legjobb közelítés:

$$S_n^{a,\lambda} f := \sum_{k=0}^n \langle f, \Phi_k^{a,\lambda} \rangle \Phi_k^{a,\lambda} \quad (n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}, \lambda > 0).$$

- Implementációs szempontok miatt  $f^{a,\lambda}$ -t használjuk.

# Rendszerek affin transzformáltja

## Célfüggvény definíciója

- A Bessel egyenlőtlenség alapján a hibaformula:

$$D_n^2(a, \lambda) := \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n |\langle f, \Phi_k^{a, \lambda} \rangle|^2.$$

- Használható továbbá a

$$F_n(a, \lambda) := \sum_{k=0}^n |\langle f, \Phi_k^{a, \lambda} \rangle|^2.$$

## Problémák

- Létezik-e a hibafüggvényeknek minimum, maximum helye?
- Nem triviális: az értelmezési tartomány nem kompakt halmaz.

# Optimalizációs módszerek

## Cél

A legjobb translációs, dilatációs paraméterek megtalálása.

## Módszerek

- Determinisztikus:
  - Gradiens módszer (**parciális deriváltak szükségesek**)
  - Nelder–Mead (NM) szimplex alapú módszer
- Nem determinisztikus:
  - Particle Swarm Optimization (PSO), raj alapú optimalizáció

# Matching Pursuit algoritmus

## Cél

- Egy szívütés – több függvényrendszer.
- Mohó algoritmus, minden körben a hibafüggvény minimumát keresi (a reziduum jelre nézve).

## Előnyök

- Alkalmas a szegmensek detektálására.
- Adaptív reprezentáció.
- Pontosabb approximáció kevesebb együtthatóval.
- A dolgozatban használt együtthatók száma: 7, 6, 2 .

# Matching Pursuit algoritmus

**Figure:** QRS paramétereinek optimalizációja.

# Matching Pursuit algoritmus

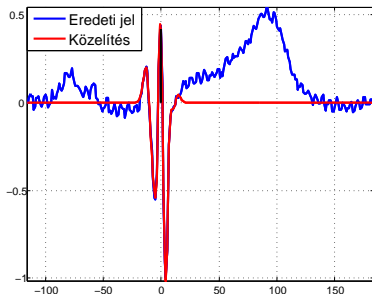
**Figure:** T paramétereinek optimalizációja.



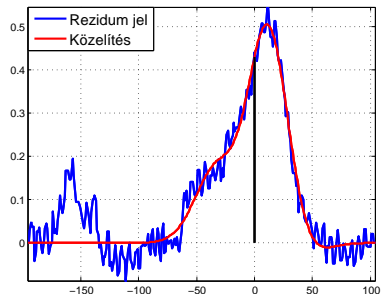
# Matching Pursuit algoritmus

**Figure:** P paramétereinek optimalizációja.

# Matching Pursuit algoritmus



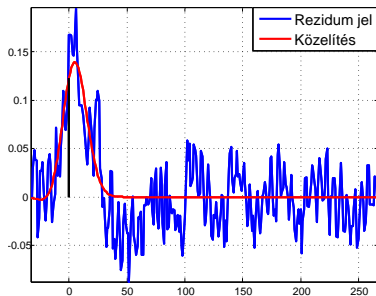
(a) A QRS approximációja.



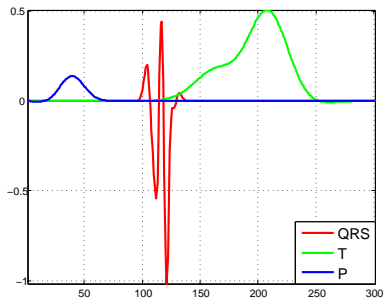
(b) A T hullám approximációja.

**Figure:** Az MP algoritmus lépései (1-2).

# Matching Pursuit algoritmus



(a) A P hullám approximációja.



(b) Szeparált szívütés.

**Figure:** Az MP algoritmus lépései (3-4).

# Megvalósítás

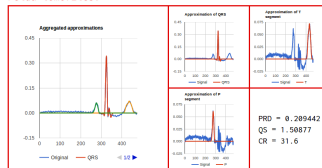
## Felépítés

- C++ nyelven megírt jelfeldolgozó rész.
- Webes felhasználói felület.

EKG JELEK TÖMÖRÍTÉSE  
HERMITE FÜGGVÉNYEK SEGÍTSÉGÉVEL

ISMERTEKŐ TÖMÖRÍTÉS KITÖMÖRÍTÉS ANIMÁCIÓ

Példa tömörítés:



© 2014-2015, János János  
www.janosjanos.com

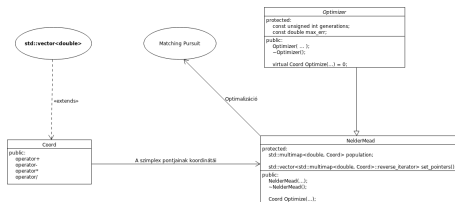
Developed by János János  
www.janosjanos.com

**Figure:** Az animation.php

# A tömörítés implementációja

## Modulok

- Objektum orientált felépítés.
- Jól definiált interfészek.
- Elkülönített szolgáltatások.
- Újrafelhasználhatóság, könnyen bővíthetőség.



**Figure:** A NelderMead modul UML diagrammja

# Tesztelés

## Értékelés

- Percentage root mean square difference (PRD):

$$\text{PRD} = \frac{\|S_n^{a,\lambda} f - f\|_2}{\|f - \bar{f}\|_2} \times 100.$$

- Compression ration (CR):

$$\text{CR} = \frac{\text{eredeti EKG mérete}}{\text{tömörített EKG mérete}} \times 100.$$

- Quality score (QS):

$$\text{QS} = \frac{\text{CR}}{\text{PRD}}.$$

# Tesztelés

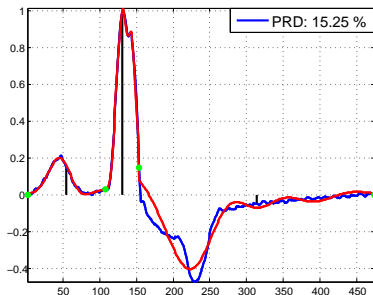
## Technikai adatok

- PhysioNet EKG adatbázisból 6 egyenként fél órás rekordon.
- 12830 szívütés, rekordonként 1400-1600 másodperces futásidő.

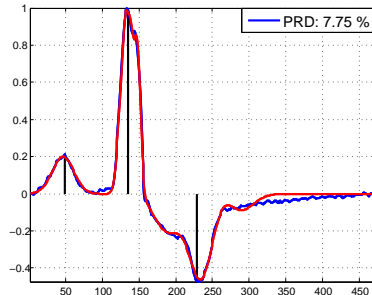
| Rec.         | Hiba (PRD %) |             |              |             | A tömörítés aránya (CR 1 : X) |       |       |       | Quality Score (CR : PRD) |             |             |             |
|--------------|--------------|-------------|--------------|-------------|-------------------------------|-------|-------|-------|--------------------------|-------------|-------------|-------------|
|              | Eredeti      | NM          | PSO          | JPEG2       | Eredeti                       | NM    | PSO   | JPEG2 | Eredeti                  | NM          | PSO         | JPEG2       |
| 101          | 11.20        | 11.10       | 11.13        | 11.07       | 29.71                         | 27.22 | 27.22 | 18.94 | <b>2.65</b>              | 2.45        | 2.47        | 1.71        |
| 117          | 13.20        | 11.81       | 17.66        | 11.66       | 36.07                         | 33.06 | 33.06 | 23.66 | 2.73                     | <b>2.79</b> | 1.87        | 2.02        |
| 118          | 19.83        | 17.79       | 16.65        | 17.72       | 24.34                         | 22.30 | 22.30 | 32.91 | 1.22                     | 1.25        | 1.33        | <b>1.85</b> |
| <b>119</b>   | <b>14.27</b> | <b>8.76</b> | <b>10.20</b> | <b>8.80</b> | 27.89                         | 25.55 | 25.55 | 23.85 | 1.95                     | <b>2.91</b> | 2.51        | 2.71        |
| 201          | 13.51        | 12.17       | 12.17        | 12.14       | 28.21                         | 25.35 | 25.35 | 13.15 | <b>2.08</b>              | <b>2.08</b> | <b>2.08</b> | 1.08        |
| 213          | 19.92        | 18.28       | 17.60        | 18.29       | 17.08                         | 15.64 | 15.64 | 35.23 | 0.85                     | 0.85        | 0.88        | <b>1.92</b> |
| <b>Átlag</b> | 14.22        | 12.55       | 13.83        | 12.51       | 26.83                         | 24.45 | 24.51 | 23.86 | 1.91                     | <b>2.06</b> | 1.85        | 1.88        |

**Table:** A tömörítés összehasonlítása különböző módszerek esetén.

# Tesztelés



(a) Eredeti módszer.

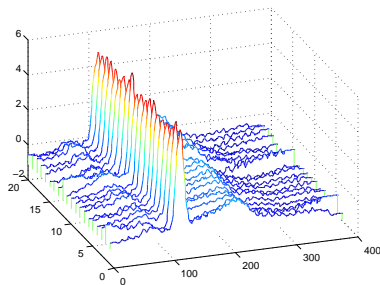


(b) Saját módszer.

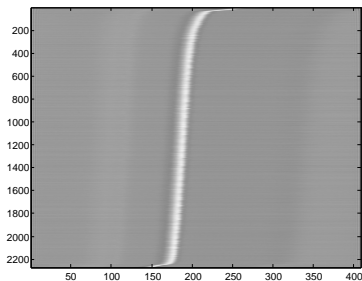
**Figure:** Asszimmetrikus EKG jel közelítése (119-es rekord).



# Más algoritmusokkal való összehasonlítás



(a) 180 szomszédos szívütés.



(b) Szívütések 2D képe.

**Figure:** EKG jelek feldolgozása képtömörítő algoritmusok segítségével.

# Összefoglalás

## Eredmények

- Új ONR szerkesztése translációval és dilatációval.
- Optimum létezésének belátása.
- Alkalmazás EKG jelek tömörítésére, szegmentálására.
- Tesztelés valós adatsorozatokon.
- Hatékony implementáció elkészítése, webes felhasználói felülettel.
- Összehasonlítás más módszerekkel: fix Hermite, JPEG2000.
- Módszer publikálása nemzetközi folyóiratban [5].

## Konklúzó

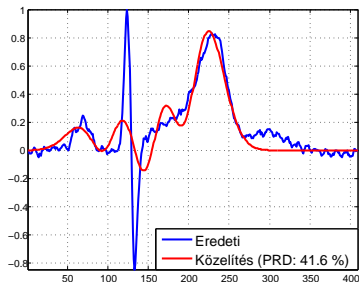
- A módszer hatékonyan alkalmazható EKG jelek tömörítésére.
- Pontosabb közelítés érhető el asszimetrikus jelek esetén.
- Közel valósidejű feldolgozás lehetséges.

# Irodalomjegyzék

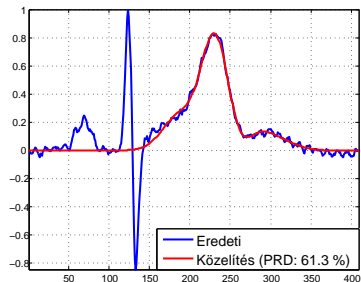
-  B. Szokefalvi-Nagy, “Valós függvények és függvénysorok,” in *Polygon Könyvtár*, Szeged, HU, 2002.
-  G. Szegő, “Orthogonal polynomials,” *AMS Colloquium Publications*, New York, USA, 3rd edition, 1967.
-  W. Gautschi, “Orthogonal Polynomials, Computation and Approximation,” in *Numerical Mathematics and Scientific Computation*, Oxford University Press, Oxford, UK, 2004.
-  S. G. Mallat, Z. Zhang, “Matching pursuit in time-frequency dictionary,” in *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, no. 12, pp. 3397–3415, 1993.
-  T. Dozsa, P. Kovacs, „ECG Signal Compression Using Adaptive Hermite Functions,” *Advances in Intelligent Systems and Computing*, AISC, volume 399



# Kitekintés



(a) Rossz eset.



(b) Jó eset.

**Figure:** A mohó stratégia hátránya.

# Nelder–Mead szimplex módszer

## Cél

A  $D_n^2(a, \lambda)$  hibafüggvény minimumhelyének meghatározása.

## Algoritmus

- Kizárólag az  $f(x_3) \leq f(x_2) \leq f(x_1)$  értékekre támaszkodik.
- Keressük az  $x' = x_1 + \alpha(x - x_1)$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) pontot, melyre

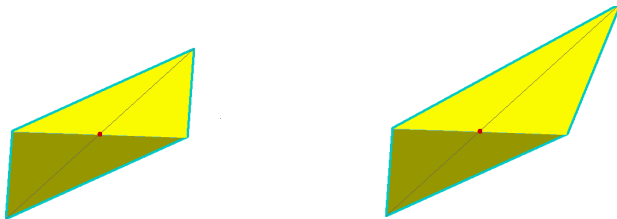
$$f(x') \leq f(x_2) \leq f(x_1),$$

ahol  $x = (x_2 + x_3)/2$  a két kisebb érték között húzott szakasz felezőpontja.

# Nelder–Mead szimplex módszer

## Geometriai transzformációk

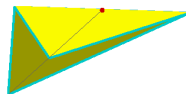
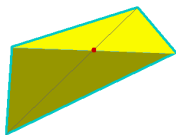
- $\alpha = 2$  esetén pont egy  $x$ -re vonatkozó középpontos tükrözés ( $T_1$ ).
- $\alpha > 2$  esetén a tükrözés és nyújtás ( $T_2$ ).
- $1 < \alpha < 2$  esetén tükrözés és zsugorítás ( $T_3$ ).
- $-1 < \alpha < 0$  esetén egyszerű zsugorítás ( $T_4$ ).



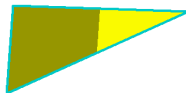
(a) Tükrözés ( $T_1 : \alpha = 2$ ).

(b) T-Nyújtás ( $T_2 : \alpha = 2.5$ ).

# Nelder–Mead szimplex módszer



(c) T-Összehúzás ( $T_3 : \alpha = 1.5$ ).    (d) Összehúzás ( $T_4 : -1 < \alpha < 0$ ).



(e) Kicsinyítés  $x_3$ -ból ( $T_5$ ).



# Diagnosztikai torzulás jellemzése

## Alternatívák

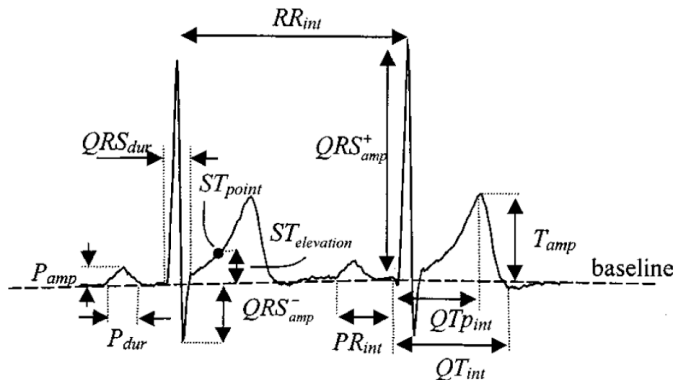
- WDD (2000): orvosdiagnosztikában használt jellemzők közvetlen átvétele <sup>1</sup>.
  - Hátrány: a felhasznált feature-k detektálása nagyon nehéz.
- WWPRD (2006): wavelet együtthatók súlyozott PRD-je <sup>2</sup>.
  - Előny: könnyen implementálható, csak QRS detektálás szükséges.

---

<sup>1</sup>Y. Zigel, A. Cohen, and A. Katz, *The Weighted Diagnostic Distortion (WDD) Measure for ECG Signal Compression*, IEEE Trans. on Biomed. Eng., vol. 47, no. 11, pp. 1422–1430, 2000.

<sup>2</sup>A. S. Al-Fahoum, *Quality Assessment of ECG Compression Techniques Using a Wavelet-Based Diagnostic Measure*, IEEE Trans. on Inf. Tech. in Biomed., vol. 10, no. 1, pp. 182–191, 2006.

# Diagnosztikai torzulás jellemzése



**Figure:** Egy szívütés diagnosztikai jellemzői (WDD).

# Diagnosztikai torzulás jellemzése

| Mérték                   | Minősítés |           |             |            |        |
|--------------------------|-----------|-----------|-------------|------------|--------|
|                          | Tökéletes | Nagyon jó | Jó          | Nem Rossz  | Rossz  |
| <b>PRD</b>               | 0-4.33    | 4.33-7.8  | 7.8-11.59   | 11.59-22.5 | 22.5 < |
| <b>WWPRD<sub>h</sub></b> | 0-7.4     | 7.4-15.45 | 15.45-25.18 | 25.18-37.4 | 37.4 < |

**Table:** Tömörítés diagnosztikai minősége PRD és WWPRD<sub>h</sub> alapján.