

Záróvizsga tételsor

5. Valószínűségszámítási és statisztikai alapok

Fekete Dóra

Valószínűségszámítási és statisztikai alapok

Diszkrét és folytonos valószínűségi változók, nagy számok törvénye, centrális határeloszlás tétel. Statisztikai becslések, klasszikus statisztikai próbák.

1 Kolmogorov-féle valószínűségi mező

(Ω, \mathcal{A}, P) hármas, ahol:

Ω nem üres halmaz, eseménytér, ω elemi esemény.

\mathcal{A} Ω részhalmazainak egy rendszere, $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$, $A \in \mathcal{A}$ események, \mathcal{A} σ -algebra.

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
3. $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

$P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ halmazfüggvény, valószínűség, amelyre $P(\Omega) = 1, P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{A}$ -ra, páronként kizáró $(A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j)$ $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ eseményekre $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

2 Diszkrét és folytonos valószínűségi változók

- *Valószínűségi változó:* $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvény, azaz amire $\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}, \forall x \in \mathbb{R}$, ahol \mathcal{A} az eseménytér (Ω) részhalmazainak egy rendszere. ($\omega \in \Omega$ elemi esemény).
- *Valószínűségi változó eloszlása/eloszlásfüggvénye:* $F_\xi(x) = P(\xi < x), \forall x \in \mathbb{R}$.
Tulajdonságai:

1. $0 \leq F_\xi(x) \leq 1$
2. monoton növekvő
3. balról folytonos
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_\xi(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} F_\xi(x) = 1$

2.1 Diszkrét valószínűségi változók

Értékkészlete legfeljebb megszámlálhatóan végtelen, azaz $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ elemekből áll. Ekkor eloszlása: $p_k := P(\xi = x_k)$.

Név	Értelmezés	Eloszlás	EX	D^2X
indikátor $Ind(p)$	Egy p valószínűségű esemény bekövetkezik-e vagy sem.	$P(X = 1) = p$ $P(X = 0) = 1 - p$	p	$p(1 - p)$
geometriai (Pascal) $Geo(p)$	Hányadikra következik be először egy p valószínűségű esemény.	$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$ $k = 1, 2, \dots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
hipergeometriai $Hipgeo(N, M, n)$	Visszatevés nélküli mintavétel.	$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ $k = 0, 1, \dots, n$	$n \frac{M}{N}$	$n \frac{M}{N} (1 - \frac{M}{N}) (1 - \frac{n-1}{N-1})$
binomiális $Bin(n, p)$	Visszatevéses mintavétel.	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ $k = 0, 1, \dots, n$	np	$np(1 - p)$
negatív binomiális $Negbin(n, p)$	Hányadikra következik be n . alkalommal egy p valószínűségű esemény.	$P(X = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1 - p)^{k-n}$ $k = n, n + 1, \dots$	$\frac{n}{p}$	$\frac{n(1-p)}{p^2}$
Poisson $Poi(\lambda)$	Ritka esemény.	$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ

2.2 Folytonos valószínűségi változók

Egy ξ valószínűségi változó abszolút folytonos, ha létezik olyan $f(x)$ függvény, amelyre $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$. Ilyenkor $f(x)$ *sűrűségfüggvény*. ($F(x)$ pedig az eloszlásfüggvény.)

Másik megfogalmazás: $\forall a < b$ -re $P(a < \xi < b) = \int_a^b f(t) dt$, $F_\xi(x) = P(\xi < x) = \lim_{a \rightarrow -\infty} P(a < \xi < b) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

Sűrűségfüggvény tulajdonságai:

1. $f(x) = F'(x)$
2. $f(x) \geq 0$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

Név	Eloszlásfüggvény	Sűrűségfüggvény	EX	D^2X
egyenletes $E(a, b)$	$\begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x \leq b \\ 1 & b < x \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x \leq b \\ 0 & otherwise \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
exponenciális $Exp(\lambda)$	$\begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$	$\begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
normális $N(m, \sigma^2)$...	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad x \in \mathbb{R}$	m	σ^2
standard normális $N(0, 1^2)$	$\Phi(x) = \dots$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad x \in \mathbb{R}$	0	1
gamma $\Gamma(\alpha, \lambda)$...	$\begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$

2.3 Fogalmak

- *Konvolúció*: X, Y független valószínűségi változók, konvolúciójuk az $X + Y$ v. v.
- *Függetlenség*: $P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n) = \prod_{i=1}^n P(\xi_i < x_i)$ vagy diszkrét esetben: $P(\xi_1)x_1, \dots, \xi_n = x_n) = \prod_{i=1}^n P(\xi_i = x_i)$
- *Várható érték*: (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mező, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó, $EX = \int_{\Omega} X dP$, ha ez létezik. Diszkrét esetben $EX = \sum_k x_k \cdot p_k$, ha abszolút konvergens. Abszolút folytonos esetben $EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$, ha abszolút folytonos.
- *Szórásnégyzet*: $D^2X = E((X - EX)^2) = EX^2 - E^2X$

- *l. momentum:* $EX^l = \int_{\Omega} x^l dP$, ha létezik.
- *Szórás:* $DX = \sqrt{D^2X}$
- *Kovariancia:* $cov(X, Y) = E((X - EX)(Y - EY)) = E(XY) - EX \cdot EY$. Ha $cov(X, Y) = 0$, akkor X és Y korrelálatlan. (Megjegyzés: ha két v.v. független, akkor $cov(X, Y) = 0$, vagyis korrelálatlanok; illetve $cov(X, X) = D^2X$.)
- *Korreláció:* $R(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}}$, két v.v. lineáris kapcsolatát méri. $R > 0 \rightarrow$ pozitív, $R < 0 \rightarrow$ negatív; $R^2 \sim 1 \rightarrow$ erős, $R^2 \sim 0.5 \rightarrow$ közepes, $R^2 \sim 0 \rightarrow$ gyenge.

3 Nagy számok törvénye

3.1 Gyenge törvény

X_1, X_2, \dots függetlenek, azonos eloszlásúak, $EX_i = m < \infty$, $D^2X_i = \sigma^2 < \infty$.
 $P(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - m \geq \varepsilon) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) $\forall \varepsilon > 0$ -ra (sztochasztikus konvergencia).

3.2 Erős törvény

X_1, X_2, \dots függetlenek, azonos eloszlásúak, $EX_1 = m < \infty$, $D^2X_1 = \sigma^2 < \infty$.
 $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \rightarrow m$ ($n \rightarrow \infty$) 1 valószínűséggel.

Megjegyzés: Csebisev-egyenlőtlenséggel bizonyítjuk. ($\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$))

3.2.1 Csebisev-egyenlőtlenség

EX véges.

Ekkor $P(|X - EX| \geq \lambda) \leq \frac{D^2X}{\lambda^2}$

Megjegyzés: Bizonyítás Markov-egyenlőtlenséggel.

3.2.2 Markov-egyenlőtlenség

$X \geq 0, c > 0$.

Ekkor $P(X \geq c) \leq \frac{EX}{c}$

3.3 Konvergenciafajták

$\xi_n \rightarrow \xi$, vagyis ξ konvergens.

- *sztochasztikusan:* ha $\forall \varepsilon > 0$ -ra $P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).
- *1 valószínűséggel (majdnem mindenütt):* ha $P(\omega : \xi_n(\omega) \rightarrow \xi(\omega)) = 1$.
- *L^p -ben:* ha $E(|\xi_n - \xi|^p) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) ($p > 0$ rögzített).
- *eloszlásban:* ha $F_{\xi_n}(x) \rightarrow F_{\xi}(x)$ ($n \rightarrow \infty$) az utóbbi minden folytonossági pontjában.

Kapcsolataik: 1 valószínűségű és L^p -beli a legerősebb, ezekből következik a sztochasztikus, ebből pedig az eloszlásbeli.

4 Centrális határeloszlás tétel

X_1, X_2, \dots függetlenek, azonos eloszlásúak, $EX_1 = m < \infty$, $D^2X_1 = \sigma^2 < \infty$.

Ekkor $\frac{X_1 + \dots + X_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} \rightarrow N(0, 1)$ ($n \rightarrow \infty$) eloszlásban, azaz $P(\frac{X_1 + \dots + X_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} < x) \rightarrow \Phi(x)$ ($n \rightarrow \infty$).

5 Statisztikai mező

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ hármas, ha $\mathcal{P} = \{P_{\vartheta}\}_{\vartheta \in \Theta}$ és $(\Omega, \mathcal{A}, P_{\vartheta})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező $\forall \vartheta \in \Theta$ -ra.

5.1 Fogalmak

- *Minta*: $\underline{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) : \Omega \rightarrow \Xi \in \mathbb{R}^n$. (ξ_i valószínűségi változó)
- *Mintatér*: Ξ , minta lehetséges értékeinek halmaza, gyakran $\mathbb{R}^n, \mathbb{Z}^n$.
- *Minta [realizációja]*: $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, konkrét megfigyelés.
- *Statisztika*: $T : \Xi \rightarrow \mathbb{R}^k$.
- *Statisztika alaptétele*: (Glivenko–Cantelli-tétel) ξ_1, ξ_2, \dots független, azonos eloszlású F eloszlásfüggvénnyel. Ekkor az F_n tapasztalati eloszlásfüggvényre teljesül, hogy $\sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F(x)| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) 1 valószínűséggel.

6 Statisztikai becslések

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ statisztikai mező, $\vartheta \in \Theta$, $P_\vartheta(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n) = F_\vartheta(\underline{x})$

$T(\underline{\xi})$ a ϑ becslése, ha $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \Theta$.

$T(\underline{\xi})$ a $h(\vartheta)$ becslése, ha $T : \mathbb{R}^n \rightarrow h(\Theta)$.

Torzítatlanság: $T(\underline{\xi})$ torzítatlan becslése $h(\vartheta)$ -nak, ha $E_\vartheta T(\underline{\xi}) = h(\vartheta) \forall \vartheta \in \Theta$.

Aszimptotikusan torzítatlan: $T(\underline{\xi})$ aszimptotikusan torzítatlan a $h(\vartheta)$ -ra, ha $E_\vartheta T(\underline{\xi}) \rightarrow h(\vartheta)$ ($n \rightarrow \infty$) $\forall \vartheta \in \Theta$.

A T_1 torzítatlan becslés *hatásosabb* T_2 torzítatlan becslésnél, ha $D_\vartheta^2 T_1 \leq D_\vartheta^2 T_2 \forall \vartheta \in \Theta$.

Hatásos, ha minden más torzítatlan becslésnél hatásosabb. Ha van hatásos becslés, akkor az egyértelmű.

- *Maximum-likelihood becslés*: Likelihood függvény: $L(\vartheta, \underline{x}) = \begin{cases} P_\vartheta(\underline{\xi} = \underline{x}) & \text{diszkr.} \\ f_{\vartheta, \underline{\xi}}(\underline{x}) & \text{absz.folyt.} \end{cases}$

Független esetben: $L(\vartheta, \underline{x}) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n P_\vartheta(\xi_i = x_i) & \text{diszkr.} \\ \prod_{i=1}^n f_{\vartheta, \xi_i}(x_i) & \text{absz.folyt.} \end{cases}$

$\hat{\vartheta}$ a ϑ ismeretlen paraméter maximum-likelihood becslése, ha $L(\hat{\vartheta}, \underline{\xi}) = \max_{\vartheta \in \Theta} L(\vartheta, \underline{\xi})$.

- *Momentum-módszer becslés*: $\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_k)$, ξ_1, \dots, ξ_n , l . momentum: $M_l(\vartheta) = E_\vartheta \xi_i^l$, tapasztalati l . momentum: $\hat{M}_l = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i^l}{n}$.
 $\hat{\vartheta}$ a ϑ momentum módszer szerinti becslése, ha megoldása az $M_l(\vartheta) = \hat{M}_l$, $l = 1..k$ egyenletrendszernek.

7 Hipotézisvizsgálat

Felteszünk egy hipotézist, és vizsgáljuk, hogy igaz-e. Elfogadjuk vagy elutasítjuk. Lehet paraméteres vagy nem paraméteres, vizsgálhatjuk várható értékek, szórások egyezőségét, értékét, teljes eseményrendszerek függetlenségét. Illeszkedésvizsgálattal megállapíthatjuk, hogy a valószínűségi változók adott eloszlásfüggvényűek-e, homogenitásvizsgálattal pedig azt, hogy ugyanolyan eloszlású-e két minta.

H_0 : nullhipotézis, $\vartheta \in \Theta_0$; H_1 : ellenhipotézis, $\vartheta \in \Theta_1$; $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$.

Egy- és kétoldali vizsgálat: Kétoldali ellenhipotézisnél a nem egyezőséget tesszük fel, egyoldalinál valamilyen relációt. Kétoldalinál a próba értékének abszolút értékét vizsgáljuk, hogy az elfogadási tartományon belül van-e, ekkor például az u-próbánál az adott hibaszázalékot meg kell felelni a számításhoz, hiszen a Φ függvény szimmetrikus az y tengelyre.

- *Statisztikai próba*: $\Xi = \Xi_e \cup \Xi_k$ (diszjunkt halmazok) elfogadási és kritikus tartomány. Ez a felbontás a statisztikai próba. Ha a megfigyelés eleme a kritikus tartománynak, akkor elutasítjuk a nullhipotézist, ha nem eleme, akkor elfogadjuk. $T(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & x \in \Xi_k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$
- *Elsőfajú hiba*: H_0 igaz, de elutasítjuk. Valószínűsége: $P_\vartheta(\underline{\xi} \in \Xi_k)$, $\vartheta \in \Theta_0$.
- *Másodfajú hiba*: H_0 hamis, de elfogadjuk. Valószínűsége: $P_\vartheta(\underline{\xi} \notin \Xi_k)$, $\vartheta \in \Theta_1$.
Az a cél, hogy ezek a hibák minél kisebbek legyenek. Egymás kárára javítható a két valószínűség, ha a megfigyelések száma rögzített.
- *Próba terjedelme*: α a próba terjedelme, ha $P_\vartheta(\underline{\xi} \in \Xi_k) \leq \alpha$, $\vartheta \in \Theta_0$.
 α a próba pontos terjedelme, ha $\sup_{\vartheta \in \Theta_0} P_\vartheta(\underline{\xi} \in \Xi_k) = \alpha$.

8 Klasszikus statisztikai próbák

- *u-próba*: Feltételezzük, hogy a minta normális eloszlású ($\xi_i \sim N(m, \sigma^2)$), $i = 1..n$, és hogy a szórás ismert.
 - *Egymintás*: A nullhipotézis az, hogy a várható érték megegyezik-e egy konkrét értékkel (m_0), másképpen fogalmazva azt vizsgáljuk, hogy a mintabeli átlag nem tér-e el szignifikánsan m_0 -tól. Tehát $H_0 : m = m_0$, és kétoldali esetben $H_1 : m \neq m_0$, egyoldaliban pedig például $H_1 : m \geq m_0$ vagy $H_1 : m < m_0$.
Az u-próba értéke: $u = \sqrt{n} \frac{\bar{\xi} - m_0}{\sigma}$. Ha igaz a nullhipotézis, akkor ez közel standard normális eloszlású.
 ε hibavalószínűséggel vizsgáljuk a hipotézist, ehhez szükségünk van a $\Phi(u_{1-\varepsilon}) = 1 - \varepsilon$ értékre. Kétoldali esetben H_0 -t elutasítjuk, ha $|u| > u_{1-\frac{\varepsilon}{2}}$, és elfogadjuk, ha $|u| \leq u_{1-\frac{\varepsilon}{2}}$. Egyoldali esetben $u > u_{1-\varepsilon}$ (jobb) és $u < u_{1-\varepsilon}$ (bal) esetét vizsgáljuk, ezen esetekben utasítjuk el H_0 -t.
 - *Kétmintás*: Itt a feltételek a következők: $\xi_i \sim N(m_1, \sigma_1^2)$, $i = 1..n$ és $\eta_j \sim N(m_2, \sigma_2^2)$, $j = 1..m$. A szórások szintén ismertek. $H_0 : m_1 = m_2$, és $u = \frac{\bar{\xi} - \bar{\eta}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}}$. $H_1 : m_1 > m_2$, ez a felső (jobb?) oldali, $H_1 : m_1 < m_2$ pedig az alsó (bal?) ellenhipotézis.
- *t-próba*: Ennél a próbánál nem ismert a szórás, viszont ugyanúgy normális eloszlást feltételezünk, mint az u-próbánál. $\xi_i \sim N(m, \sigma^2)$, $i = 1..n$.
 - *Egymintás*: $H_0 : m = m_0$. Ellenhipotézis az u-próbához hasonlóan. $t = \sqrt{n} \frac{\bar{\xi} - m_0}{\sqrt{\sigma_*^2}}$, ahol σ_*^2 a korrigált tapasztalati szórásnégyzet, amit a mintából számíthatunk ki. (Megjegyzés: n helyett $n - 1$ -gyel osztunk a képletben.) Ez az érték t -eloszlású H_0 esetén, ami $n - 1$ szabadságfokú. Más néven szokás ezt a próbát Student-próbának is nevezni.
 - *Kétmintás*: $\xi_i \sim N(m_1, \sigma_1^2)$, $i = 1..n$ és $\eta_j \sim N(m_2, \sigma_2^2)$, $j = 1..m$. Ez esetben sem ismert a szórás, viszont feltételezzük, hogy a két minta szórása megegyezik. Ekkor $t_{n+m-2} = \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}} \frac{\bar{\xi} - \bar{\eta}}{\sqrt{\sum (\xi_i - \bar{\xi})^2 + \sum (\eta_j - \bar{\eta})^2}}$. $n + m - 2$ a próba szabadságfoka.
- *f-próba*: Két minta esetén használható. Ez a próba szórások egyezőségének vizsgálatára alkalmas, tehát itt $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$. Ha a két minta szórásnégyzete megegyezik, akkor a hányadosuk 1-hez tart. $f_{n-1, m-1} = \max(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}, \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2})$. A két szabadsági fok közül az első az f számlálójához tartozó minta elemszáma -1 , a második a nevezőjéhez.
- *Welch-próba*: Más néven d-próba. Hasonló, mint a kétmintás t-próba, de itt a szórások egyezőségét nem kell feltenni. Szabadsági foka bonyolult képlettel számítható.
- *szekvenciális próbák*: $V_n = \frac{\prod f_1(x_i)}{\prod f_0(x_i)} = \frac{L_1(x)}{L_0(x)}$. f_0 a nullhipotézis szerinti sűrűségfüggvény, f_1 az ellenhipotézis szerinti. Adott egy A és egy B érték, $A < B$. Ha $V_n \geq B$, akkor elutasítjuk H_0 -t, ha $V_n \leq A$, akkor elfogadjuk, és ha $A < V_n < B$, akkor új mintaelemet veszünk. *Stein tétele* szerint N 1 valószínűséggel véges. $N = \min\{n : V_n \leq A \vee V_n \geq B\}$.
- *Minőség-ellenőrzés*: n_1 elemet nézünk, $c_1 < c_2$ és c_3 határértékek. Ha $X_1 \leq c_1$, akkor elfogadjuk H_0 -t, ha $X_1 \geq c_2$, akkor elutasítjuk. Ha $c_1 < X_1 < c_2$, akkor megnézzük n_2 elemet, és ha $X_1 + X_2 \leq c_3$, akkor szintén elfogadjuk H_0 -t. A várható mintaelemszám méri a hatékonyságát.
- χ^2 -próba: $H_0 : A_1, \dots, A_n$ teljes eseményrendszer. $P(A_i) = p_i$, $i = 1..n$, ν_i a gyakoriság. Ha teljesül a nullhipotézis, akkor $\frac{\nu_i}{n} \sim p_i$.
 $\chi^2 = \sum \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i}$. Ez χ^2 eloszlású, aminek $r - 1$ szabadságfoka van. r az összeadott csoportok száma. (Megjegyzés: ha túl kicsi lenne 1-1 csoportban a gyakoriság, akkor azokat összevonjuk.) χ^2 -próbát használhatunk illeszkedés-, homogenitás- és függetlenségvizsgálatra is. (Megjegyzés: más képlet van mindhez.)
- *Egyéb próbák*:
 - *Kolmogorov–Szmirnov-próba*: 2 tapasztalati eloszlásfüggvény megegyezik-e (homogenitásvizsgálat), vagy 1 minta esetén megegyezik-e valamilyen eloszlásfüggvénnyel. $D_{m,n} = \max_x |F_n(x) - G_m(x)|$. X_i F eloszlásfüggvénnyel, Y_j G -vel. $H_0 : F \equiv G$.

- *Előjel-próba*: Hányszor teljesül, hogy valami pozitív.
- *Wilcoxon-próba*: (rangstatisztika), $P(X > Y) = \frac{1}{2}$ tesztelésére összeszámoljuk, hogy hány párra teljesül, hogy $X_i > Y_j$.