# Numerikus módszerek 1.

## Bevezető

Krebsz Anna

ELTE IK

# Elérhetőségek

**Dr. Krebsz Anna**
docens, ELTE IK Numerikus Analízis tanszék

| | |
|---|---|
| e-mail: | krebsz@inf.elte.hu |
| honlap: | http://numanal.inf.elte.hu/∼ krebsz |
| szoba: | 2-302. |

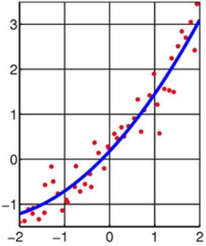
# Technikai információk

| | |
|---|---|
| **Tárgy:** | Numerikus módszerek 1. előadás |
| | Prog. inf. BSc |
| **Kód:** | IP-18abNM1E (IK) |
| **Félév:** | 2025/2026. tanév ősz |
| **Helyszín:** | Déli tömb, 0-822. Mogyoródi terem |
| **Teams:** | Csoport kód a kurzus Canvas felületén |
| **Időpont:** | Hétfő 8:10 - 9:50-ig 10 perc szünettel |

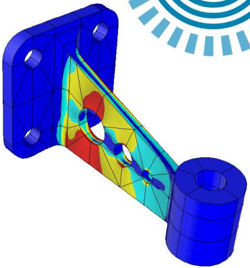
# Miről szól ez a tárgy?

A numerikus analízis célja olyan módszerek kidolgozása és elemzése, amelyek matematikai illetve **műszaki, természettudományos problémák** pontos vagy közelítő **számítógépes megoldását** célozzák meg.
Az első két félévben a **lineáris algebra** és az **analízis** numerikus módszereit tárgyaljuk. Ez egy bevezető kurzus a numerikus módszerekbe.

$$\sqrt{2}$$







források: LaTeX, Prezi, http://met.hu/idojaras/elorejelzes/modellek/: AROME, WRF, INCA, WinAmp, Wikipedia

# Tematika

1. I. félév.
   - Gépi számábrázolás. Hibaszámítás.
   - Lineáris egyenletrendszerek megoldása (direkt / iteratív).
     (Gauss-elimináció, LU-felbontás, LDU-felbontás, Cholesky-felbontás, QR-felbontás Gram–Schmidt-ortogonalizációval és Householder-transzformációval, mátrixnormák, Banach-féle fixponttétel, Jacobi-iteráció, Gauss–Seidel-iteráció, Richardson-iteráció)
   - Nemlineáris egyenletek megoldása.
     (intervallumfelezés, fixpont iterációk, Newton-módszer, szelőmódszer, húrmódszer)
   - Polinomok gyökeinek becslése. Horner-algoritmus a polinom és deriváltjainak helyettesítései értékeinek számítására.
2. II. félév
   - Sajátértékfeladatok megoldása (csak A szakirányon)
   - Interpoláció, approximáció
   - Numerikus integrálás

Könyvek, jegyzetek (Numerikus analízis, Numerikus módszerek)

- Gergó Lajos
- Stoyan Gisbert
- Móricz Ferenc
- Linalg: Csörgő István

Elektronikus segédanyagok:

- **Előadás diasorai a Canvasban.**
- Példatár: Krebsz–Bozsik
- A Numerikus Analízis Tanszék, illetve oktatóinak honlapján:
  `http://numanal.inf.elte.hu/~{hegedus,krebsz,laszlo,soveg}`

# Az előadás terve

1. Példák kézzel és Matlab-ban. (A legtöbb gépteremben legálisan hozzáférhető, lehet vele ismerkedni. Az A szakirányon a következő félévben kötelező.)

2. Előadás diasorok. (Elérhetőek lesznek a Canvasban. Definíciók, tételek, bizonyítások, példák. Néha krétás kiegészítés a táblán.)

**Gyakorlati jegy:**

- két évfolyam zh-ból és
- beadható HF-ból,
- részletek a gyakorlaton és a Canvasban.

**Vizsga:**

- „beugró kérdések”: 15 pontos beugróból legalább 8 pont elérése,
- „szóbeli vizsga”: egy tétel részletes kidolgozása.
- Az írásbeli és szóbeli együtt adja a vizsga jegyét. Részletek a kurzus Canvas felületén.)

**Kérdések?**

# A matematikai modellezés (kör) folyamata és a hibaforrások megjelenése

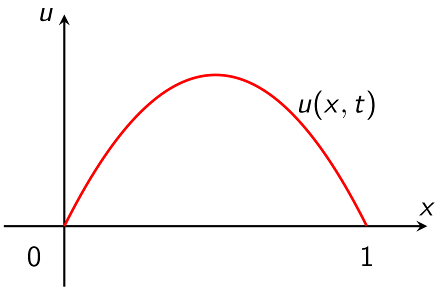
- A valóság egy részét vizsgálva igyekszünk a jelenséget fizikai, kémiai, stb. törvények alapjén matematikailag leírni, egy lehetséges **matematikai modell**t megalkotni. Ez általában az adott tudományterületen dolgozó szakember feladata a rendelkezésre álló törvények, elvek felhasználásával. A valóságot csak közelíteni tudja, ezzel megjelenik a **modellhiba**.
- A modell pontos megoldása gyakran nem állítható elő véges lépésben, **közelítő módszerek**re van szükségünk. Elkészül a program, a végtelen eljárást végessel helyettesítjük, az itt megjelenő hibát **képlethibá**nak nevezzük.

## A matematikai modellezés (kör) folyamata és a hibaforrások megjelenése

- A modell **bemenő paraméterei** általában mérési adatok, melyek pontatlanok, itt megjelenik a **mérési (vagy öröklött) hiba**.
- A közelítő módszer bemenő adatait véges aritmetikában ábrázoljuk, ezzel megjelenik az **input hiba**.
- A véges aritmetikában történő számolás során kerekítés, túl- illetve alulcsordulás léphet fel. Ezek **a műveleti (kerekítési) hibák**.
- A megvalósított **közelítő módszert teszteljük** és összehasonlítjuk a várt eredménnyel. Ha a kapott eredmény rossz, akkor elölről kezdjük az egyes lépések finomításával.

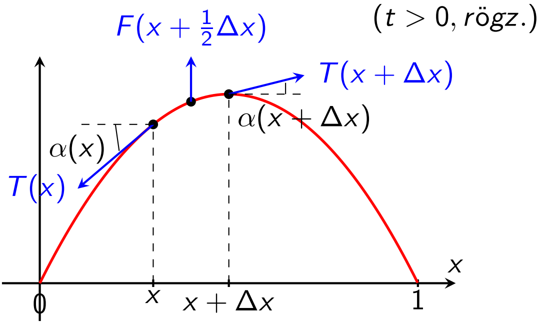
Húzzunk ki egy egységnyi hosszú rugalmas fémszálat és rögzítsük a végpontjait. Feszítsük meg, $t = 0$ időpontban engedjük el és hagyjuk rezegni.

**Feladat:** a rugalmas szál rezgésének meghatározása, vagyis az $u(x,t)$ elmozdulás meghatározása az $x$ pontban és $t > 0$ időpontban.



**Fizikai feltételek:**

1. A szál tömegeloszlása homogén ($\varrho(x) \equiv \varrho$).
2. A szál tökéletesen rugalmas, azaz a szálban feszítő erő ($T(x)$) érintő irányú.
3. A nehézségi erő szálra gyakorolt hatását elhanyagoljuk.
4. A szálra ható kitérítő erő ($F(x)$) függőleges irányú és nem túl nagy.



# A rezgő húr differenciálegyenlete

- Az erők vízszintes komponesei kiegyenlítik egymást:

  $$T(x)\cos(\alpha(x)) = T(x+\Delta x)\cos(\alpha(x+\Delta x)) = V(\text{állandó})$$

  Ha $V$ nem állandó, akkor elmozdul a szál (a 4. feltétel nem teljesül).

- Az $x$ és $x+\Delta x$ pontokban ébredő feszítő erők függőleges komponenseinek különbsége az $x+\frac{\Delta x}{2}$ pontban ható kitérítő erőt egyenlíti ki:

  $$F\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = T(x+\Delta x)\sin(\alpha(x+\Delta x)) - T(x)\sin(\alpha(x)) \approx$$

  $$\approx \underbrace{(\Delta x \cdot \varrho)}_{tömeg} \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)}_{gyorsulás} = m \cdot a$$

A kapott egyenletet osszuk le $V$-vel:

$$\frac{T(x+\Delta x)\sin(\alpha(x+\Delta x))}{T(x+\Delta x)\cos(\alpha(x+\Delta x))}-\frac{T(x)\sin(\alpha(x))}{T(x)\cos(\alpha(x))} \approx \frac{(\Delta x \cdot \varrho)}{V}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$$

$$\tan(\alpha(x+\Delta x)) - \tan(\alpha(x)) \approx \frac{(\Delta x \cdot \varrho)}{V}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \approx \frac{(\Delta x \cdot \varrho)}{V}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$$

Leosztunk $\Delta x$-szel

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)}{\Delta x} \approx \frac{\varrho}{V}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t).$$

## A rezgő húr differenciálegyenlete

$\Delta x \to 0$ esetén a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\varrho}{V} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$$

hiperbolikus differenciálegyeletet kapjuk.

Kiegészítjük a kezdeti feltételekkel és peremfeltételekkel:

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0 \\ u(1,t) &= 0 \\ u(x,0) &= s(x): \quad \text{a szál alakja kezdetben} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,t_0) &= v(x): \quad \text{az elengedés pillanatában a kezdősebesség.} \end{aligned}$$

További egyszerűsítéseket teszünk, csak az időtől független speciális esettel foglalkozunk a továbbiakban.

**Stacionárius eset:**

$$\begin{aligned} t_0 : &\quad \text{egy adott időpillanat,} \\ U(x) &:= u(x, t_0) \\ A(x) &:= \frac{\varrho}{V} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t_0) \quad \text{a de. jobboldala} \end{aligned}$$

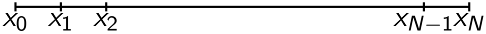
Ekkor a következő elliptikus de-t kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x) &= A(x) \\ U(0) &= U(1) = 0. \end{aligned}$$

# A de. numerikus megoldása

**A de. numerikus megoldása véges differencia módszerrel:**
Elkészítjük a $[0; 1]$ intervallum $N$ részre történő egyenletes felosztását:

$$h = \frac{1}{N}, \quad x_i = ih \ (i = 0, \ldots, N)$$




Ezekben a diszkrét pontokban felhasználjuk a jobboldali függvény értékét $A_i := A(x_i)$ és a megoldást is ezekben a pontokban keressük $u_i := U(x_i)$.

Tegyük fel, hogy a pontos megoldás $U \in D^3(0;1)$ és alkalmazzuk a Taylor-formulát:

$$U(x+h) = U(x) + U'(x)h + \frac{1}{2}U''(x)h^2 + \frac{1}{3!}U'''(\xi_1)h^3$$
$$U(x-h) = U(x) - U'(x)h + \frac{1}{2}U''(x)h^2 - \frac{1}{3!}U'''(\xi_2)h^3$$

Összeadva és átrendezve
$U(x+h)+U(x-h) = 2U(x)+U''(x)h^2 + \frac{1}{3!}h^3(U'''(\xi_1) - U'''(\xi_2))$

$$\frac{U(x+h) - 2U(x) + U(x-h)}{h^2} = U''(x) + \frac{h}{6}(U'''(\xi_1) - U'''(\xi_2))$$

Ezzel megkaptuk az $U''(x) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x)$ operátor 3 pontos közelítő sémáját:

$$\frac{U(x+h) - 2U(x) + U(x-h)}{h^2} \approx U''(x).$$

Ahogy láttuk a fenti képletben a közelítés hibája $h$-val arányos.

A diszkretizált pontokat behelyettesítve a következő LER-t kapjuk:

$$\frac{U(x_{i+1}) - 2U(x_i) + U(x_{i-1})}{h^2} = A(x_i) \quad (i = 1, \ldots, N-1)$$
$$U(x_0) = U(x_N) = 0.$$

A bevezetett jelölésekkel:

$$
\begin{aligned}
u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} &= h^2 A_i \quad (i = 1, \dots, N-1) \\
u_0 = u_N &= 0.
\end{aligned}
$$

Mátrix alakban

$$
\begin{bmatrix}
2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\
-1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\
\ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
 & & & & \\
0 & \dots & 0 & -1 & 2
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-1}
\end{bmatrix}
= -h^2 \cdot
\begin{bmatrix}
A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ A_{N-1}
\end{bmatrix}
$$

$(N-1) \times (N-1)$ méretű LER (lineáris egyenletrendszer). Megoldása a gyors Gauss-eliminációval (progonka módszerrel) történik, lásd a félév során.