Szóbeli tételek a 2024/25/2 félévtől

Programtervező informatikus BSc
Numerikus módszerek 1. (IP-18aNM1E, IP-18bNM1E)

1. Lebegőpontos számok és tulajdonságaik.
  a) Ismertesse a lebegőpontos számábrázolás modelljét, és definiálja a gépi számokat. Nevezze meg és számítsa ki a számhalmaz nevezetes mennyiségeit (elemszám, M_∞, ε_0). Szemléltesse a halmaz elemeit számegyenesen. Adjon meg két példát a véges szám-ábrázolásból fakadó furcsaságokra.
  b) Az input függvény fogalma, tétel az ábrázolt szám hibájáról, ε_1 mennyiség bevezetése és értelmezése.

2. A hibaszámítás alapjai.
  a) Ismertesse az abszolút- és relatív hiba, valamit az abszolút- és relatív hibakorlát fogalmát. Mondja ki az alapműveletek hibakorlátaira vonatkozó állításokat. Ez alapján mely műveletek elvégzése veszélyes az abszolút és relatív hibára nézve és miért? Igazolja az összeadás- és szorzás hibakorlátjára vonatkozó összefüggéseket.
  b) Igazolja az osztás- és a függvényérték hibakorlátjára vonatkozó tételeket. Definiálja függvény adott pontbeli kondíciószámát.

3. A Gauss-elimináció.
  a) Vázolja a Gauss-elimináció alapötletét LER megoldására, vezesse le az algoritmus képleteit. Mutassa be a Gauss-elimináció további alkalmazásait azonos mátrixú lineáris egyenletrendszerek megoldására, determináns kiszámítására és inverzmátrix meghatározására.
  b) Vezesse le a visszahelyettesítés algoritmusát. Határozza meg az elimináció és a visszahelyettesítés műveletigényét.

4. A Gauss-elimináció és az LU-felbontás kapcsolata I.
  a) Mutassa be a Gauss-elimináció algoritmusát. Ismertesse a részleges és teljes főelem-kiválasztás módszereit. Mit mondhatunk az elakadásról részleges főelemkiválasztás alkalmazása esetén? Miért érdemes teljes főelemkiválasztást használni?
  b) Mutassa meg, hogy a GE lépései végrehajthatók speciális mátrix-szorzásokkal. Vezesse le a kapott mátrixok inverzére és szorzatára tanult állításokat. Végül ezeket felhasználva állítsa elő a kiinduló mátrix LU-felbontását.

5. A Gauss-elimináció és az LU-felbontás kapcsolata II.
  a) Mutassa be a Gauss-elimináció algoritmusát. Adjon szükséges és elégséges feltételeket a GE elakadására illetve végrehajthatóságára. Ismertesse LER megoldását LU-felbontás segítségével. Miért előnyös ennek használata a GE-vel szemben?
  b) Vezesse le az L és U háromszögmátrixokkal történő LER megoldás képleteit és határozza meg ezek műveletigényét.

6. Az LU-felbontás direkt módon.
  a) Definiálja egy mátrix LU-felbontását. Adjon módszert L és U mátrixok elemenkénti meghatározására, vezesse le az elemekre vonatkozó képleteket. Térjen ki az elemek meghatározásának sorrendjére és a műveletigényre is.
  b) Igazolja az LU-felbontás létezése és egyértelműségére (főminorokkal) vonatkozó tételt.

7. A Schur-komplementer.
  a) Definiálja a Schur-komplementert. Ismertesse a GE megmaradási tételeit (és a kapcsolódó fogalmakat), majd bizonyítsa a determináns megmaradására vonatkozó tételt.
  b) Igazolja a szimmetria és pozitív definitség megmaradására vonatkozó állítást.

8. LDU-felbontás.
  a) Az LDU-felbontás fogalma, előállítása LU-felbontásból. Mutassa be az elemenkénti (közvetlen) meghatározásra szolgáló LDU-algoritmust, vezesse le a képleteket és határozza meg a műveletigényt.
  b) Igazolja a szimmetrikus mátrix felbontására vonatkozó tétel. Vesse össze az LDU és a Cholesky felbontások alkalmazhatóságát.

9. A Cholesky-féle LL^T-felbontás.
  a) Definiálja a Cholesky-felbontást. Mutassa be az elemenkénti (közvetlen) meghatározásra szolgáló (Cholesky-)algoritmust, vezesse le a képleteket és határozza meg a műveletigényt, tárigényt.
  b) Definiálja a Cholesky-felbontást, igazolja a létezésére és egyértelműségére vonatkozó tételeket. Vesse össze az LDL^T és a Cholesky felbontások alkalmazhatóságát.

10. A QR-felbontás Gram–Schmidt ortogonalizációval.
  a) Definiálja a QR-felbontást és vezesse le az előállítására alkalmas Gram–Schmidt ortogonalizációs eljárást. Milyen feltétel garantálja, hogy az algoritmus nem akad el? Igazolja az ortogonális mátrixok szorzatára vonatkozó tételt.
  b) Igazolja a QR-felbontás egyértelműségére vonatkozó tételt. Vesse össze a QR-felbontást az LU-felbontáson alapuló LER megoldással (műveletigény, alkalmazhatóság).

11. A Householder-transzformáció I.
  a) Definiálja a Householder-transzformációt, ismertesse geometriai tartalmát, vezesse le elemi tulajdonságait. Mutassa be a transzformáció alkalmazásának módját vektorra illetve mátrixra (mindkét irányból), adja meg e számítások műveletigényeit.
  b) Határozza meg különböző, azonos (de nem 0) hosszúságú a, b vektorokhoz azt a H transzformációt, melyre $Ha = b$. Alkalmazza ezt az eredményt tetszőleges vektor σe_1 alakra hozására, indokolja σ értékének megválasztását.

12. A Householder-transzformáció II.
  a) Definiálja a Householder-transzformációt, ismertesse geometriai tartalmát és elemi tulajdonságait (nem kell bizonyítani). Mutassa be a transzformáció alkalmazásának módját vektorra illetve mátrixra (mindkét irányból), adja meg e számítások műveletigényeit. Mutassa be a transzformáció alkalmazásának módját LER megoldására.
  b) Mutassa be a Householder-transzformáció alkalmazását QR-felbontás elkészítésére. Vesse össze a módszert a Gram–Schmidt eljárással műveletigény és numerikus stabilitás szempontjából.

13. Mátrixnormák és tulajdonságaik I.
  a) Definiálja a vektornormát, mátrixnormát és indukált mátrixnormát. Igazolja, hogy az indukált mátrixnorma eleget tesz a mátrixnorma tulajdonságainak. Adja meg az 1-es, 2-es és ∞ mátrixnormákat.
  b) Igazolja mátrix tetszőleges normája és a spektrálsugara közti egyenlőtlenséget. Igazolja az 1-es vektornorma által indukált mátrixnorma képletét.

14. Mátrixnormák és tulajdonságaik II.
  a) Definiálja a mátrixnormát és indukált mátrixnormát. Definiálja az illeszkedés fogalmát és igazolja, hogy indukált norma mindig illeszkedik a megfelelő vektornormához. Igazolja a ∞ vektornorma által indukált mátrixnorma képletét.
  b) Igazolja a 2-es vektornorma által indukált mátrixnorma képletét. Vezesse le, mivel egyenlő normális mátrix 2-es normája. Mit mondhatunk ortogonális mátrix 2-es normájáról?

15. Frobenius mátrixnorma, illeszkedés.
- **a)** Írja fel a Frobenius mátrixnorma képletét (bizonyítás nélkül), igazolja, hogy nem indukált norma. Definiálja az illeszkedés fogalmát. Igazolja, hogy indukált norma mindig illeszkedik a megfelelő vektornormához.
- **b)** Igazolja a Frobenius-norma sajátértékekkel való kifejezésének képletét. Ezt felhasználva mutasson olyan vektornormát, melyhez a Frobenius-norma illeszkedik.

16. LER érzékenysége I.
- **a)** Formalizálja LER jobboldalának perturbációját. Ismertesse a megoldás megváltozásának mértékére tanult tételeket (bizonyítás nélkül). Definiálja a kondíciószámot és igazolja tulajdonságait.
- **b)** Bizonyítsa a LER jobboldalának megváltozására vonatkozó tételt. Hogyan változik a mátrix kondíciószáma az LU, QR szorzatfelbontások alkalmazása esetén.

17. LER érzékenysége II.
- **a)** Formalizálja LER mátrixának perturbációját, ismertesse a megoldás megváltozásának mértékére tanult tételeket (bizonyítás nélkül). Definiálja a kondíciószámot és igazolja tulajdonságait.
- **b)** Bizonyítsa a mátrix megváltozására vonatkozó tételt és a felhasznált lemmát.

18. Iterációs módszerek konvergenciája.
- **a)** Vázolja LER iterációs módszerrel történő megoldásának alapötletét, vesse össze a direkt módszerekkel. Kontrakció fogalma $\mathbb{R}^n$-en. Igazolja az elégséges feltételt a konvergenciára. Igazolja a konvergencia szükséges és elégségséges feltételét.
- **b)** Ismertesse és bizonyítsa a Banach-féle fixponttételt.

19. A Jacobi-iteráció.
- **a)** Vezesse le a Jacobi-iteráció mátrixos és koordinátás alakját. Írja át az iterációt a reziduumvektoros alakra, térjen ki annak szerepére.
- **b)** Igazolja a Jacobi-iteráció tanult konvergenciatételét.

20. A csillapított Jacobi-iteráció.
- **a)** Vezesse le a csillapított Jacobi-iteráció mátrixos és koordinátás alakját. Írja át az iterációt a reziduumvektoros alakra, térjen ki annak szerepére.
- **b)** Igazolja a csillapított Jacobi-iteráció konvergenciatételét.

21. A Gauss–Seidel-iteráció.
- **a)** Vezesse le a Gauss–Seidel-iteráció vektoros és koordinátás alakját. Írja át az iterációt a reziduumvektoros alakra, térjen ki annak szerepére.
- **b)** Bizonyítsa a relaxációs módszer konvergenciájának szükséges feltételét.

22. A Gauss–Seidel relaxációs módszer.
- **a)** Vezesse le a Gauss–Seidel-iteráció relaxált változatának vektoros és koordinátás alakját. Írja át az iterációt a reziduumvektoros alakra, térjen ki annak szerepére.
- **b)** Bizonyítsa a relaxációs módszer konvergenciájának szükséges feltételét. Vesse össze a Jacobi és Gauss-Seidel típusú iterációkat. Ismertesse a speciális mátrixosztályok eseteire tanult tételeket (bizonyítás nélkül), értelmezze az eredményeket.

23. A Richardson-típusú iterációk.
- **a)** Vezesse le a Richardson-típusú iterációk képletét. Írja fel a reziduumvektoros alakot és ismertesse annak jelentőségét. Fogalmazza meg a tanult konvergenciatételt (bizonyítás nélkül).
- **b)** Igazolja a tanult konvergenciatételt.

24. A részleges LU-felbontás és az ILU algoritmus.
- **a)** Definiálja a részleges LU-felbontást. Adja meg a részleges LU-felbontás előállításának algoritmusát. Adjon elégséges feltételt a felbontás létezésére és egyértelműségére. Bizonyítsa a felbontást előállító algoritmus helyességének tételét.
- **b)** Vezesse le az ILU algoritmust. Írja át reziduumvektoros alakra. Adjon nevezetes példákat az algoritmus speciális eseteiként.

25. Nemlineáris egyenletek megoldása I.
- **a)** Ismertesse a nemlineáris egyenletek megoldásának feladatát. Mutassa be a megoldás létezését biztosító állításokat, a Bolzano-tételt (bizonyítás nélkül), és igazolja a Brouwer-féle fixpont-tételt. Kontrakció fogalma $[a; b]$ intervallumon és a Banach-féle fixponttétel (bizonyítás nélkül).
- **b)** Igazolja az elégséges feltételt a kontrakcióra. Ismertesse a konvergenciarend fogalmát és elemi tulajdonságait. Igazolja a fixpont-iterációk magasabb rendű konvergenciájáról szóló tételt.

26. Nemlineáris egyenletek megoldása II.
- **a)** Ismertesse a húrmódszer és szelőmódszer alapötletét, szemléltesse működésüket és vezesse le az algoritmusok képletét. Ismertesse a konvergenciarend fogalmát. Hasonlítsa össze a két módszer alkalmazhatóságát és konvergencia rendjét egymással és a Newton-módszerrel.
- **b)** Ismertesse a Newton-módszer alapötletét. Igazolja a Newton-módszer lokális konvergenciájáról szóló állítást.

27. Nemlineáris egyenletek megoldása III.
- **a)** Vázolja az intervallumfelezés algoritmusát és mutasson hozzá hibabecslést. Ismertesse a Newton-módszer alapötletét, szemléltesse működését és vezesse le a képletét. Vezesse le a többváltozós Newton-módszert.
- **b)** Igazolja a Newton-módszer monoton konvergenciájáról szóló állítást.

28. Polinomok gyökeinek becslése és a polinom helyettesítési- és derivált értékeinek meghatározása.
- **a)** Becslés polinom gyökeinek elhelyezkedésére és a tétel bizonyítása.
- **b)** Vezesse le a polinom helyettesítési értékének kiszámítására szolgáló Horner-algoritmust. Ismertesse az algoritmus előnyös tulajdonságait. Alkalmazza a Horner-algoritmust polinom deriváltjainak helyettesítési értékeinek meghatározására.

Megjegyzések:

- A tételek **a)** része alaptudást feltételez az adott témakörből. Ebből a részből legalább egy előadáson elhangzott nem triviális tétel vagy levezetés kidolgozása szükséges az elégséges (2) jegyhez. Ezen rész teljeskörű ismeretével max. közepes (3) jegy szerezhető.
- A tételek **b)** részében nagyobb/nehezebb bizonyítást, levezetést kérünk kidolgozni és elmagyarázni a vizsgán. Ezzel szerezhető csak jó (4) és jeles (5) vizsgajegy. A tétel **b)** részének ismerete nem helyettesíti az **a)** részt.
- A jegy eldöntésére a vizsgáztató más tételből, anyagrészből is kérdezhet.