Алгебраическое решение ЗЛП (симплекс-метод)

Алгоритм симплекс-метода

1. Приводим ЗЛП к стандартному (каноническому)виду
2. Находим начальное базисное решение.
   2.1 Выделяем свободные и базисные переменные
   2.2 Переразрешаем систему относительно выбранного базиса (используем алгоритм Гаусса-Жордана)
   2.3 Свободные переменные приравниваем 0, находим базисные переменные и значение критериальной функции в этой точке.

   Все элементы решения (полученные коэффициенты при переменных в ограничениях, значение критериальной функции и вектор решения) записываем в виде начальной симплекс-таблицы (таблица 1):

Таблица 1

№ ограничения	Базис (№ базисных переменных)	$C_j \rightarrow$	C_1	C_2	…	C_i	…	C_m	C_{m+1}	…	C_j	…	C_n		
		$c_i^{базиса}$	A_1	A_2	…	A_i	…	A_m	A_{m+1}	…	A_j	…	A_n	B	
1	1	C_1	1	0	…	0	…	0	$a_{1,m+1}$	…	a_{1j}	…	a_{1n}	x_1	
2	2	C_2	0	1	…	0	…	0	$a_{2,m+1}$	…	a_{2j}	…	a_{2n}	x_2	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
i	i	C_i	0	0	…	1	…	0	$a_{i,m+1}$	…	A_{ij}	…	A_{in}	X_i	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
m	m	C_m	0	0	…	0	…	1	$a_{m,m+1}$	…	a_{mj}	…	a_{mn}	x_m	
														$\boxed{W_0}$	

3. Проверка начального базисного решения на опорность (принадлежность области допустимых решений (ОДР)): все переменные $X_j \geq 0$. Используя симплекс-таблицу – проверяем все элементы столбца **В** - они должны быть неотрицательными.

3.1 Условие неотрицательности не выполняется. Решение базисное, но не опорное, не принадлежит ОДР.

Применяем **алгоритм поиска базисного опорного решения:**

1) Выбираем в столбце свободных членов **В** минимальный из отрицательных элементов. В соответствующей ему строке также выбираем наименьший отрицательный элемент. Этот столбец принимаем за разрешающий. *Если таких элементов нет, значит нет решения ЗЛП т.е. при совместной системе ограничений вся ОДР не соответствует положительности переменных.*

2) В разрешающем столбце выбираем элементы имеющие одинаковый знак с соответствующим свободным членом (правая часть ограничений) и ищем отношением к ним свободных членов - $\frac{b_i}{a_{ij}}$.

Из этих отношений выбираем минимальное. Эта строка будет разрешающей.

3) Проводим процедуру однократного замещения – взаимообмен переменных. (Переразрешаем систему относительно измененного базиса)

4) Процедура итерационная. Проводится до тех пор пока все переменные в решении не станут неотрицательные. Т.е. мы упорядоченно, целенаправленно «спускаемся» на ОДР.

3.2 Условие неотрицательности выполняется. Переходим к следующему пункту.

4. Проверка полученного базисного опорного решения на оптимальность

Введем понятие: D_j – оценка переменной относительно выбранного базиса.

$$D_j = Z_j - C_j \quad \text{где} \quad Z_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} * c_i^{базиса}$$

Критерий оптимальности: если среди оценок переменных относительно выбранного базиса D_j в задаче максимизации нет отрицательных (в задаче минимизации нет положительных), то полученное базисное решение оптимально (Таблица № 2)

Замечание: оценки базисных переменных всегда равны 0.

Таблица № 2

№ ограничения	Базис (№ базисных переменных)	$C_j \longrightarrow$	C_1	C_2	…	C_i	…	C_m	C_{m+1}	…	C_j	…	C_n		
		$c_i^{базиса}$	A_1	A_2	…	A_i	…	A_m	A_{m+1}	…	A_j	…	A_n	B	
1	1	C_1	1	0	…	0	…	0	$a_{1,m+1}$	…	a_{1j}	…	a_{1n}	x_1	
2	2	C_2	0	1	…	0	…	0	$a_{2,m+1}$	…	a_{2j}	…	a_{2n}	x_2	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
i	i	C_i	0	0	…	1	…	0	$a_{i,m+1}$	…	A_{ij}	…	A_{in}	X_i	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
m	m	C_m	0	0	…	0	…	1	$a_{m,m+1}$	…	a_{mj}	…	a_{mn}	x_m	
	$D_j=Z_j-C_j$		0	0	…	0	…	0	$Z_{m+1}-C_{m+1}$	…	Z_j-C_j	…	Z_n-C_n	$\boxed{W}$	

Если решение не оптимально (отрицательные оценки есть), то переходим к смежной точке. Смежные точки отличаются одной базисной и одной свободной переменной.

5. **Определяем** включаемую в базис переменную. (Напомним: при включении в базис переменная увеличивается, становится отличной от нуля). Включаемой в базис переменной соответствует наибольшая по модулю отрицательная оценка D_j (в задаче максимизации). В задаче минимизации должны остаться только отрицательные оценки, поэтому выбираем наибольшую положительную оценку. (таблица 2)

6. Условие допустимости. Определяем исключаемую из базиса переменную (т.е ту с которой поменяется местами включаемая переменная). В качестве таковой выбираем ту переменную текущего базиса, которая первой обращается в ноль при увеличении включаемой переменной вплоть до значения, соответствующего смежной базисной точке.

Для этого в разрешающем столбце среди коэффициентов в ограничениях a_{ij} выбираем положительные элементы и находим отношения к ним свободных членов (правых частей ограничений) - $\frac{b_i}{a_{ij}}$. Будем обозначать это отношение θ. Из этих отношений выбираем минимальное (Таблица 3). Переменная ему соответствующая будет исключаемой из базиса, а строка разрешающей.

(Геометрическую интерпретацию этого правила см. Х.Таха Введение в ИО, 1985 стр 82)

Таблица 3

№ ограничения	Базис (№ базисных переменных)	$C_j \longrightarrow$	C_1	C_2	…	C_i	…	C_m	C_{m+1}	…	C_j	…	C_n		
		$c_i^{базиса}$	A_1	A_2	…	A_i	…	A_m	A_{m+1}	…	A_j	…	A_n	B	θ
1	1	C_1	1	0	…	0	…	0	$a_{1,m+1}$	…	a_{1j}	…	a_{1n}	x_1	
2	2	C_2	0	1	…	0	…	0	$a_{2,m+1}$	…	a_{2j}	…	a_{2n}	x_2	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
i	i	C_i	0	0	…	1	…	0	$a_{i,m+1}$	…	A_{ij}	…	A_{in}	X_i	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
m	m	C_m	0	0	…	0	…	1	$a_{m,m+1}$	…	a_{mj}	…	a_{mn}	x_m	
	$D_j=Z_j-C_j$		0	0	…	0	…	0	$Z_{m+1}-C_{m+1}$	…	Z_j-C_j	…	Z_n-C_n	$\boxed{W}$	

7. Переразрешаем задачу относительно измененного базиса и возвращаемся к пункту 4.

Таблица 3 соответствует полному и окончательному виду симплекс-таблицы. Элементы таблицы, выделенные желтым цветом, на каждой итерации могут находиться по процедуре Гаусса-Жордана. Для проверки (на начальных этапах изучения и для отладки программы) необходимо оценки и значение критериальной функции **W** искать еще и по формулам. Значение θ ищется всегда только по формуле и для удобства представления заносится в симплекс-таблицу.

В следующей лекции разберем алгебраический метод решения ЗЛП (симплекс-метод) на примере задачи № 2.