Тема 2.3.2. Методы решения тригонометрических уравнений и их систем.

Тригонометрическим уравнением называется равенство тригонометрических выражений, содержащих переменную только под знаком тригонометрических функций. Решить тригонометрическое уравнение – значит найти все его корни – все значения неизвестного, удовлетворяющие уравнению. Тригонометрические уравнения сводятся цепочкой равносильных преобразований, заменами и решениями алгебраических уравнений к простейшим тригонометрическим уравнениям. Уравнения $\sin x = \frac{1}{2}x$; $\operatorname{tg} 3x = x^2+1$ и т.д. не являются тригонометрическими и, как правило, решаются приближенно или графически. Может случится так, что уравнение не является тригонометрическим согласно определению, однако оно может быть сведено к тригонометрическому. Например, $2(x – 6) \cos 2x = x – 6$, $(x – 6)(2 \cos 2x – 1) = 0$, откуда $x = 6$ или $\cos 2x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{x}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

Выделим основные методы решения тригонометрических равнений

1. **Разложение на множители.**
2. **Введение новой переменной:**
   а) сведение к квадратному;
   б) универсальная подстановка;
   в) введение вспомогательного аргумента.
3. **Сведение к однородному уравнению.**
4. **Применение формул.**
5. **Использование свойств функций, входящих в уравнение:**
   а) обращение к условию равенства тригонометрических функций;
   б) использование свойства ограниченности функции.

1.Уравнения, в которых все функции выражаются через одну тригонометрическую функцию от одного и того же аргумента.

Примеры: $\sin^2 x – \cos x – 1 = 0$,
$\operatorname{tg} 3x + 2 \operatorname{ctg} 3x – 3 = 0$.

Преобразованиями $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ и $\operatorname{ctg} 3x = \frac{1}{tg3x}$ эти уравнения приводятся к алгебраическим, решая которые получаем простейшие тригонометрические уравнения. Метод сведения к квадратному состоит в том, что, пользуясь изученными формулами, надо преобразовать уравнение к такому виду, чтобы какую-то функцию (например, sin x или cos x) или комбинацию функций обозначить через у, получив при этом квадратное уравнение относительно у.

2.Уравнения, решаемые разложением на множители.

Под разложением на множители понимается представление данного выражения в виде произведения нескольких множителей. Если в одной части уравнения стоит несколько множителей, а в другой – 0, то каждый множитель приравнивается к нулю. Таким образом, данное уравнение можно представить в виде совокупности более простых уравнений.

Например:

$\sin 4x - \cos 2x = 0,$

$2 \sin 2x \cos 2x - \cos 2x = 0,$

$\cos 2x\,(2 \sin 2x – 1) = 0,$

$\cos 2x = 0$ или $2 \sin 2x – 1 = 0.$

3.Уравнения однородные относительно sin x и cos x.

Примеры: $3 \sin^2 x + 4 \sin x \cos x + \cos^2 x =0,$

$2 \sin^3 5x - 2 \sin^2 5x \cos 5x + \sin 5x \cos^2 5x – \cos^3 x =0,$

$3 \sin 7x - 2 \cos 7x =0.$

Если первый коэффициент не равен нулю, то разделив обе части уравнения на $\cos^n x$, получим уравнение *n*- степени, относительно tg. Решая полученное уравнение перейдем к простейшему. При делении уравнения на выражение, содержащее неизвестное, могут быть потеряны корни. Поэтому нужно проверить, не являются ли корни уравнения $\cos x =0$ корнями данного уравнения. Если $\cos x =0$, то из уравнений следует, что $\sin x = 0$. Однако sin x и cos x не могут одновременно равняться нулю, так как они связаны равенством $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Следовательно, при делении уравнения на $\cos^n x$, получаем уравнение, равносильное данному. В случае, если первый или последний коэффициент равен нулю, то имеет смысл вынести за скобки sin x или cos x. Решить уравнение приравняв к нулю каждый множитель.

4.Уравнения, сводящиеся к однородным.

Примеры: $3 \sin^2 x - \sin x \cos x - 4\cos^2 x =2,$

$\sin^3 x + \sin x \cos^2 x – 2\cos x =0.$

Эти уравнения сводятся к однородным уравнениям следующим образом:

$3 \sin^2 x - \sin x \cos x - 4\cos^2 x =2 (\sin^2 x + \cos^2 x),$

$\sin^3 x + \sin x \cos^2 x – 2\cos x(\sin^2 x + \cos^2 x) =0.$

5. Уравнения, линейные относительно sin x и cos x

$a \sin x + в \cos x = c$, где а, в и с – любые действительные числа.

Если а=в=0, а $c \neq 0$, то уравнение теряет смысл;

Если а=в=с=0, то х – любое действительное число, то есть уравнение обращается в тождество.

Рассмотрим случай, когда а,в,с $\neq 0$.

Примеры:

$$\sin x + 4\cos x = 1,$$
$$3\sin 5x - 4\cos 5x = 2,$$
$$2\sin 3x + 5\cos 3x = 8.$$

Последнее уравнение не имеет решений, так как левая часть его не превосходит 7.

Уравнения, этого вида можно решить многими способами: с помощью универсальной подстановки, выразив sin x и cos x через tg $\frac{\alpha}{2}$; сведением уравнения к однородному; введением вспомогательного аргумента и другими.

Рассмотрим последний из них.

Разделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$.

Так как $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, то найдется аргумент φ, при котором

$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Уравнение примет вид $\sin x\cos\varphi + \sin\varphi\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Используя формулу получим $\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Следовательно решением уравнения будет $x = (-1)^n \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} - \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi n,\ n \in Z$.

Решение этого уравнения существует при $a^2 + b^2 \geq c^2$.

6.Уравнения, сводящиеся к равенству одной тригонометрической функции от различных аргументов:

1) $\sin x = \sin y$, 2) $\cos x = \cos y$, 3) $\mathrm{tg}\, x = \mathrm{tg}\, y$.

При решении этих уравнений можно применить метод использования условий равенства одноименных тригонометрических функций. Равенство этих функций имеет место тогда и только тогда, когда, соответственно, $x = (-1)^n y + \pi n$,

$x = \pm y + 2\pi n$, $x = y + \pi n$.

sin f(x) = sin g(x)	cos f(x) = cos g(x)	tg f(x) = tg g(x)

$f(x) = g(x) + 2\pi k$ $f(x) = \pi - g(x) + 2\pi n$ $n\in Z,\ k\in Z$	$f(x) = g(x) + 2\pi k$ $f(x) = -g(x) + 2\pi n$ $n\in Z,\ k\in Z$	$f(x) = g(x) + \pi k$ $g(x)\neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ $n\in Z,\ k\in Z$

Примеры: $\cos 4x = \sin 6x$, $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} \frac{1}{x}$.

Первое уравнение с помощью формул приведения приводим к виду : $\sin(\frac{\pi}{2} - 4x) = \sin 6x$, а второе – к виду $\operatorname{tg} (\frac{\pi}{2} - x) = \operatorname{tg} \frac{1}{x}$.

Решим уравнение $\operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} (5x + \frac{\pi}{3}) = 1$.

Разделим обе части уравнения на tg 3x. Это допустимо, так как в данных условиях tg 3x не может равняться нулю:

$\operatorname{tg} (5x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{tg3x}$, $\operatorname{tg} (5x + \frac{\pi}{3}) = \operatorname{ctg} 3x$, $\operatorname{tg} (5x + \frac{\pi}{3}) = \operatorname{tg} (\frac{\pi}{2} - 3x)$.

На основании условия равенства тангенсов двух углов имеем:

$5x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + 3x = \pi n$;

$8x = \frac{x}{6} + \pi n$; $x = \frac{\pi}{48} + \frac{\pi n}{8}$; $x = (6n + 1) \frac{\pi}{48}$, $n\in Z$.

При каждом значении x из этой совокупности каждая из частей уравнения $\operatorname{tg} (5x + \frac{\pi}{3}) = \operatorname{tg} (\frac{\pi}{2} - 3x)$ существует.

Уравнения $\sin x = \sin y$ и $\cos x = \cos y$ можно решать и с применением формул, заменив разность функций произведением.

7. Выделение полного квадрата в тригонометрических уравнениях.

Примеры:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x,$$
$$\cos^6 x + \sin^6 x = \cos 2x,$$
$$\cos^6 x + \sin^6 x + \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \sin 2x.$$

Данный метод можно применить для уравнений, содержащих следующие выражения:

$$\sin^4 x + \cos^4 x, \quad \cos^6 x \pm \sin^6 x, \quad \sin^8 x \pm \cos^8 x.$$

Преобразуем первое выражение:

$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$.

Преобразуем второе выражение:

$\cos^6 x + \sin^6 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x - \frac{1}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x.$

$\cos^6 x - \sin^6 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) = \cos 2x\,(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{1}{4}\sin^2 2x) = \cos 2x\,(1 - \frac{1}{4}\sin^2 2x).$

Можно упростить эти выражения и с помощью формул понижения степени.

8. Уравнения вида $f(\sin x + \cos x, \sin x \cos x) = 0$, $f(\sin x - \cos x, \sin x \cos x) = 0$.

Решить такие уравнения можно заменой $\sin x + \cos x = t$ или $\sin x - \cos x = t$.

Примеры:

$\sin x + \cos x = 1 + \sin 2x,$

$6 \sin x \cos x + 2 \sin x = 2 + 2 \cos x,$

$3 \sin 3x = 1 + 3 \cos 3x - \sin 6x.$

После преобразования и соответствующей замены эти уравнения сводятся к квадратным. В первом уравнении, сделав замену $\sin x + \cos x = t$, получим

$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = t^2$, $1 + \sin 2x = t^2$, $\sin 2x = 1 - t^2$. Уравнение примет вид $t = 1 + 1 - t^2$.

9. Универсальная тригонометрическая подстановка $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$.

Эта подстановка позволяет рационально выразить все тригонометрические функции через одну переменную.

$$\sin x = \frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}{tg^2\left(\frac{x}{2}\right)+1}; \qquad \cos x = \frac{1-tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{tg^2\left(\frac{x}{2}\right)+1}; \qquad \mathrm{tg}\, x = \frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1-tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Значит, если $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$, то $\sin x = \frac{2t}{t^2+1}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\mathrm{tg}\, x = \frac{2t}{1-t^2}$.

Универсальная подстановка может привести к потере корней, так как $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ не существует при $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, значит $x \neq \pi + 2\pi n$.

Примеры:

$\mathrm{ctg}\frac{x}{2} + \sin x + \mathrm{tg}\, x = 1,$

$\sin 2x + \cos x = 2 - \mathrm{tg}\, x.$

Решим уравнение $\mathrm{ctg}\frac{x}{2} = 2 - \sin x$.

Пусть $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$, тогда $\sin x = \frac{2t}{t^2+1}$, а так как $\mathrm{tg}\frac{x}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{x}{2} = 1$, то $\mathrm{ctg}\frac{x}{2} = \frac{1}{t}$.

Получим $\frac{1}{t} = 2 - \frac{2t}{t^2+1}$, $2t^3 - 3t^2 + 2t - 1 = 0$, $(t - 1)(2t^2 - t + 1) = 0$.

Уравнение $2t^2 - t + 1 = 0$ не имеет решений, значит $t - 1 = 0$, $t = 1$.

Следовательно, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. Убедимся, что $x = \pi + 2\pi n$ не является решением исходного уравнения.

10**. Метод использования свойства ограниченности функции.**

Суть этого метода заключается в следующем: если функции f(x) и g(x) таковы, что для всех x выполняются неравенства $f(x) \le a$ и $g(x) \le в$, и дано уравнение

f(x) + g(x) = a + в, то оно равносильно системе $\begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = b. \end{cases}$

Примеры:

$$3\sin^5 x + 2\cos^5 x = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^5 x = 1, \\ \cos^{10} x = 1. \end{cases}$$

$$2\sin^2 2x + 1 = \cos 5x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0, \\ \cos 5x = 1. \end{cases}$$

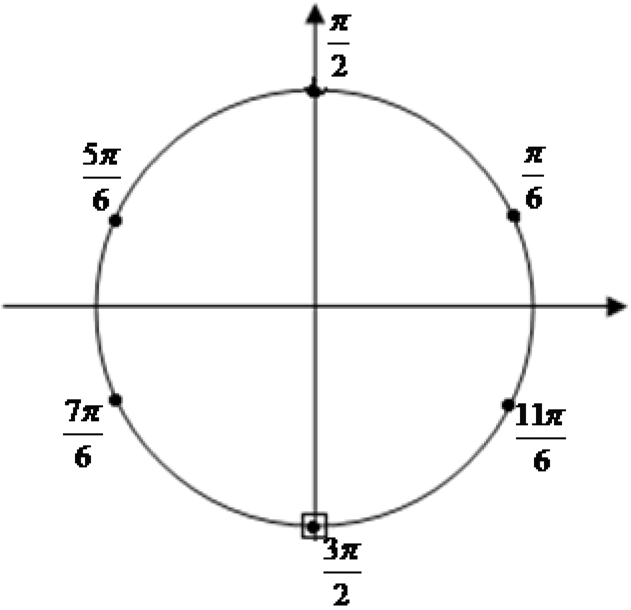
$$\sin 9x + \cos 3x = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 9x = -1, \\ \cos 3x = -1. \end{cases}$$

$$\sin\frac{x}{3} - \cos 6x = 2.$$

Решим последнее уравнение $\sin\frac{x}{3} - \cos 6x = 2$.

Так как $\left|\sin\frac{x}{3}\right| \le 1$ и $|\cos 6x| \le 1$, то имеем систему: $\begin{cases} \sin\frac{x}{3} = 1, \\ \cos 6x = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \\ 6x = \pi + 2\pi n, n \in Z \end{cases}$;

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{2} + 6\pi k, k \in Z \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z \end{cases}.$$



Покажем общее решение на тригонометрической окружности. Решение первого уравнения системы обозначим □, а второго – точкой и найдем их общее решение.

Ответ: $\frac{3\pi}{2} + 6\pi m$, $m \in Z$.

Нужна ли проверка решения тригонометрического уравнения? На этот вопрос утвердительно ответить нельзя. Если тригонометрическое уравнение представляет собой целый многочлен относительно синуса и косинуса и если грамотно решать уравнение, то проверка может понадобится только для самоконтроля – для уверенности в правильности решения. Проверка, как правило, не нужна. Если следить в процессе решения уравнения за равносильностью перехода, то проверку решения можно не делать. Если же решать уравнение без учета равносильности перехода, то проверка обязательно нужна, особенно когда уравнение содержит тангенс, котангенс, дробные члены или тригонометрические функции от неизвестного, входящие под знак радикала. Не сделав в этом случае проверку, приходят к грубым ошибкам, к посторонним решениям. При решении уравнений, содержащих дробные члены, нужно следить за сокращением дробей, ссылаясь на основное свойство дроби. В этом случае мы избегаем посторонних корней и избавляем себя от проверки найденных решений.

Проблемы, возникающие при решении тригонометрических уравнений.

1.Потеря корней.

- Делим на g(x).
- Применяем опасные формулы.

1 cosx = sinx* sin$\frac{x}{2}$,

Решение.

Заменим левую часть уравнения по формуле $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$,

а правую часть уравнения по формуле $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}*\cos\frac{x}{2}$,

получим

$2\sin^2\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}*\cos\frac{x}{2}*\sin\frac{x}{2}$, разделим на $2\sin^2\frac{x}{2}$ обе части уравнения,

получим $1 = \cos\frac{x}{2}$, решая это уравнение, найдем корни $\frac{x}{2} = 2\pi n$, $x = 4\pi n$, $n \in Z$.

Потеряли корни $\sin\frac{x}{2} = 0$, $x = 2\pi k$, $k \in Z$.

Правильное решение: $2\sin^2\frac{x}{2}(1 - \cos\frac{x}{2}) = 0$.

$$\sin^2\frac{x}{2} = 0 \quad \text{или} \quad 1 - \cos\frac{x}{2} = 0$$

$$x = 2\pi k,\ k \in Z. \qquad x = 4\pi n,\ n \in Z.$$

Ответ: $x = 2\pi k$, $k \in Z$, $x = 4\pi n$, $n \in Z$.

2. Посторонние корни.

- Освобождаемся от знаменателя.
- Возводим в четную степень.

(sin4x – sin2x – cos3x + 2sinx - 1):(2sin2x - $\sqrt{3}$) = 0.

Решение.

О.Д.З.: $\sin 2x \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2cos 3x sinx – cos3x + 2sinx - 1 = 0

(cos3x + 1)(2sinx - 1) = 0

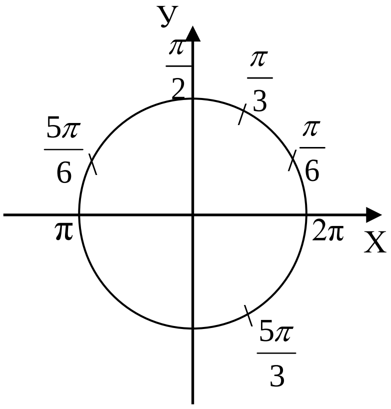
1. cos3x + 1 = 0,

$x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in Z$.

2. 2sinx - 1 = 0

$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$.

$0 \leq x < \pi$



I. x **=** $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in$ **Z**

1. n = 0

$\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

не удовл-т. О.Д.З.

2. n = 1

$\sin 2\pi = 0$

удовл-т О.Д.З.

3. n = 2

II. $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$

1. k = 0

$\sin \frac{2\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

не удовл-т О.Д.З.

2. k = 1

$\sin \frac{10\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

удовл-т О.Д.З.

$\sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

удовл-т О.Д.З.

Ответ: $x = \pi + 2\pi k$, $x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Решение систем тригонометрических уравнений и тригонометрических неравенств.

Методы решения систем тригонометрических уравнений объединяют приемы, характерные для решения систем любого типа, и технику решения тригонометрических уравнений.

Например:

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\cos x} = 3, \\ x + y = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Из второго уравнения имеем: y = $\frac{\pi}{2}$-x. Подставим это выражение в первое уравнение, получим $\frac{\sin x}{\cos(\frac{\pi}{2} - x)} = 3$, $\frac{\sin x}{\cos x} = tgx = 3.$ Значит, x = arctg 3 +πn и y= $\frac{\pi}{2}$ - arctg 3 - πn, n$\in$Z.

2. Решить систему уравнений $\begin{cases} tgx + tgy = 2, \\ \cos x \cos y = \frac{1}{2}. \end{cases}$

Преобразуем первое уравнение:

tg x + tg y = $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = 2.$

Применяя для числителя формулу синуса суммы и подставляя значение знаменателя из второго уравнения, получим уравнение sin (x + y) = 1,

Из которого следует, что x + y = $\frac{\pi}{2}$ + 2πn, значит y = $\frac{\pi}{2}$ + 2πn – x. Подставим это значение во второе уравнение, получим cosx cos($\frac{\pi}{2}$ + 2πn – x) = $\frac{1}{2}$, cosx sinx = $\frac{1}{2}$,

$\frac{1}{2}$ sin 2x = $\frac{1}{2}$, sin 2x = 1, 2x = $\frac{\pi}{2}$ + 2πm, x = $\frac{\pi}{4}$ + πm. Следовательно,

y = $\frac{\pi}{2}$ + 2πn - $\frac{\pi}{4}$ - πm = $\frac{\pi}{4}$ + (2n – m), n,m $\in Z$.

Решение тригонометрических неравенств осложняется тем, что решения тригонометрических уравнений состоят из бесконечной серии корней и поэтому применение метода интервалов потребовало бы определения знака функции в бесконечном количестве интервалов. Но благодаря периодичности тригонометрических функций достаточно решить неравенство на отрезке длиной в период, а затем перенести полученный ответ на бесконечное число интервалов.