

Карточка – информатор

Арксинус, арккосинус, арктангенс

Сформируем важное утверждение, которым удобно пользоваться при решении уравнений.

Теорема 1. (о корне) Пусть функция f возрастает (или убывает) на промежутке I , а число a – любое из значений, принимаемых f на этом промежутке. Тогда уравнение

$f(x) = a$ имеет единственный корень в промежутке I .

Исходя из теоремы о корне можно дать следующие определения: арксинусу, арккосинусу и арктангенсу.

Определение 1. Арксинусом числа a называется такое число из отрезка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, синус которого равен a .

Определение 2. Арккосинусом числа a называется такое число из отрезка $[0; \pi]$, косинус которого равен a .

Определение 3. Арктангенсом числа a называется такое число из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a .

Определение 4. Арккотангенсом числа a называется такое число из промежутка $[0; \pi]$, котангенс которого равен a .

Утверждение 1. Для любых чисел x_1 и x_2 из отрезка $[-1; 1]$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует:

а) $\arcsin x_1 < \arcsin x_2$;

б) $\arccos x_1 > \arccos x_2$.

Утверждение 2. Для любых чисел x_1 и x_2 из неравенства $x_1 < x_2$ следует:

а) $\operatorname{arctg} x_1 < \operatorname{arctg} x_2$;

б) $\operatorname{arcctg} x_1 > \operatorname{arcctg} x_2$.

Карточка – информатор

Арксинус, арккосинус, арктангенс

Используя таблицу значений тригонометрических функций, свойства функции и теорему о корне, можно составить таблицу, которая будет помогать при нахождении арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса (учитывая, конечно, их определения)

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-
α^*	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π				$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0

Теперь для нахождения арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса будем использовать α^*

Пример 1. Найти значение $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

РЕШЕНИЕ – АЛГОРИТМ

1) Так как надо найти \arcsin , то в строчке $\sin \alpha$ находим заштрихованное

(выделенное) значение $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) В том же столбце смотрим α^* и получаем: $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$

Ответ: $-\frac{\pi}{4}$.

Пример 2. Найти значение $\arccos \left(-\frac{1}{2}\right)$

РЕШЕНИЕ – АЛГОРИТМ

- 1) В строчке $\cos \alpha$ находим заштрихованное (выделенное) значение $-\frac{1}{2}$
- 2) В том же столбце смотрим α^* и получаем: $\arccos \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$

Ответ: $\frac{2\pi}{3}$.

Пример 3. Найти значение выражения: $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arcctg} (-\sqrt{3})$

РЕШЕНИЕ – АЛГОРИТМ

- 1) Найдём $\operatorname{arctg} 1$
 - а) В строчке $\operatorname{tg} \alpha$ находим заштрихованное значение 1.
 - б) В том же столбце смотрим α^* и получаем: $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$
- 2) Найдём $\operatorname{arcctg} (-\sqrt{3})$
 - а) В строчке $\operatorname{ctg} \alpha$ находим заштрихованное значение $-\sqrt{3}$.
 - б) В том же столбце смотрим α^* и получаем: $\operatorname{arcctg} (-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$
- 3) Вычисляем значение выражения $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arcctg} (-\sqrt{3}) = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{6} =$

$$\frac{\pi \cdot 6 + 5\pi \cdot 4}{4 \cdot 6} = \frac{6\pi + 20\pi}{24} = \frac{26\pi}{24} = \frac{13 \cdot 2\pi}{12 \cdot 2} = \frac{13\pi}{12}$$

Ответ: $\frac{13\pi}{12}$

Пример 4. Сравнение числа: $\arcsin (-1)$ и $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$

РЕШЕНИЕ – АЛГОРИТМ

- 1) Найдём $\arcsin (-1)$ (смотри пример 1)
- 2) Найдём $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ (смотри пример 2)
- 3) Сравним $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4}$, отсюда получаем $\arcsin (-1) < \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ответ: $\arcsin (-1) < \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$

Пример 5. Вычислите $2 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 \arccos (-1) - 5 \operatorname{arctg} (-\sqrt{3})$.

РЕШЕНИЕ – АЛГОРИТМ

1) Найдём $2 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$; $2 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

2) Найдём $4 \arccos (-1)$; $\arccos (-1) = \pi$; $4 \arccos (-1) = 4\pi$

3) Найдём $5 \operatorname{arctg} (-\sqrt{3})$; $\operatorname{arctg} (-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$; $5 \operatorname{arctg} (-\sqrt{3}) = 5 \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) =$
 $= \frac{5}{1} \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{5\pi}{3}$

4) $2 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 \arccos (-1) - 5 \operatorname{arctg} (-\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} + 4\pi - \left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{1} + \frac{5\pi}{3} =$
 $= \frac{3\pi + 24\pi + 10\pi}{6} = \frac{37\pi}{6}$

Ответ: $\frac{37\pi}{6}$

Пример 6. Расположите числа в порядке возрастания:

а) $\arcsin \frac{\pi}{6}$; $\arcsin (-0,3)$; $\sin \alpha$

б) $\operatorname{arcctg} (-7)$; $\operatorname{arcctg} (-2,5)$; $\operatorname{arctg} 1,4$

РЕШЕНИЕ – АЛГОРИТМ

а) используя утверждение 1а (см. карточку-информатор) $\frac{\pi}{6} \approx \frac{3}{6} = 0,5$

сравним 0,5; -0,3 и 0,9, получим $-0,3 < 0,5 < 0,9$, а значит

$$\arcsin (-0,3) < \arcsin 0,5 < \arcsin 0,9$$

$$\arcsin (-0,3) < \arcsin \frac{\pi}{6} < \arcsin 0,9$$

б) используя утверждение 1б (см. карточку-информатор)

сравним -7; -2,5; 1,4, получим $-7 < -2,5 < 1,4$, а значит

$$\operatorname{arcctg} (-7) > \operatorname{arcctg} (-2,5) > \operatorname{arctg} 1,4$$

Так как по условию числа надо расположить в порядке возрастания, то

$$\operatorname{arctg} 1,4 < \operatorname{arcctg} (-2,5) < \operatorname{arcctg} (-7)$$

Инструкция по самоконтролю

- 1) Таблица значений тригонометрических функций.
- 2) Теорема о корне.
- 3) Определение арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса.
- 4) Для каких чисел определён арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс.
- 5) Уметь находить значения арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса.

Карточка – тренажёр
Арксинус, арккосинус, арктангенс

1. Вычислите:

- а) $\arcsin 0$; б) $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})$; в) $\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})$; г) $\arccos 1$; д) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$;
е) $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$; ж) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$; з) $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$

Ответы: а) 0; б) $-\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{3\pi}{4}$; г) 0; д) $\frac{5\pi}{6}$; е) $\frac{\pi}{6}$; ж) $-\frac{\pi}{3}$; з) $\frac{\pi}{3}$.

2. Найдите значение выражения.

- а) $\operatorname{arctg} 0 + \arccos(-1)$;
б) $\operatorname{arctg}(-\frac{1}{\sqrt{3}}) - \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$;
в) $\arcsin(-\frac{1}{2}) + \arccos \frac{1}{2}$.

Ответы: а) π ; б) π ; в) $\frac{\pi}{6}$.

3. Сравните числа:

- а) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$;
б) $\arccos \frac{1}{2}$ и $\operatorname{arctg} 1$;
в) $\arcsin(-\frac{1}{2})$ и $\operatorname{arctg}(-1)$;
г) $\arccos \frac{1}{2}$ и $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответы: а) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} < \operatorname{arctg} \sqrt{3}$; б) $\arccos \frac{1}{2} > \operatorname{arctg} 1$;

в) $\arcsin(-\frac{1}{2}) > \operatorname{arctg}(-1)$; г) $\arccos \frac{1}{2} = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Вычислите значение выражения.

- а) $2 \arcsin \frac{1}{2} + 4 \arccos(-\frac{1}{2}) + \operatorname{arctg} 1$;
б) $-3 \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \operatorname{arctg} \sqrt{3} - \arcsin \frac{1}{2}$;
в) $2 \arccos \frac{1}{2} + \operatorname{arctg}(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + \arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Ответы: а) $\frac{13\pi}{4}$; б) π ; в) $\frac{\pi}{4}$.

5. Расположите числа в порядке убывания.

а) $\arccos 0,2$; $\arccos \pi$; $\arccos 1,8$; $\arccos (-2)$;

б) $\operatorname{arccctg} 1,8$; $\operatorname{arccctg} \frac{\pi}{2}$; $\operatorname{arccctg} (-0,2)$; $\operatorname{arccctg} (-1,2)$.

Ответы: а) $\arccos (-2)$; $\arccos 0,2$; $\arccos 1,8$; $\arccos \pi$

б) $\operatorname{arccctg} (-1,2)$; $\operatorname{arccctg} (-0,2)$; $\operatorname{arccctg} \frac{\pi}{2}$; $\operatorname{arccctg} 1,8$.

6. Вычислите:

а) $\cos \left(\arcsin \frac{1}{2} \right)$;

б) $\operatorname{tg} \left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$;

в) $\operatorname{tg} \left(\operatorname{arccctg} (-\sqrt{3}) \right)$.

Ответы: а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; в) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Карточка с программным обучением

Арксинус, арккосинус, арктангенс

Задание	Ответы			
	А	Б	В	Г
Вариант 1.				
1. Арксинусом числа a называется такое число из..., синус которого равен a .	отрезка $[0;\pi]$	отрезка $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$	интервала $[0; \frac{\pi}{2}]$	интервала $[-\frac{\pi}{2}; 0]$
2. Арккотангенсом числа a называется такое число из..., котангенс которого равен a .	отрезка $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$	интервала $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$	интервала $(0;\pi)$	отрезка $[-\frac{\pi}{2}; \pi]$
3. Вычислите: $\arccos(-0,5)$	$-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$
4. Вычислите: $\operatorname{arctg}(-\frac{1}{\sqrt{3}})$	$-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$
5. Вычислите: $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} - \arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	π	$-\pi$
6. Вычислите: $\sin(2 \operatorname{arctg}(-1))$	1	2	0,5	-1
Вариант 2.				
1. Арккосинусом числа a называется такое число из..., косинус которого равен a .	отрезка $[0;\pi]$	отрезка $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$	интервала $[0; \frac{\pi}{2}]$	интервала $[-\frac{\pi}{2}; 0]$
2. Арктангенсом числа a называется такое число из..., тангенс которого равен a .	отрезка $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$	интервала $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$	интервала $(0;\pi)$	отрезка $[-\frac{\pi}{2}; \pi]$
3. Вычислите: $\arcsin(-0,5)$	$-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$
4. Вычислите: $\operatorname{arctg}(-\frac{1}{\sqrt{3}})$	$-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$
5. Вычислите: $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	π	$-\pi$
6. Вычислите: $\cos(3 \operatorname{arctg}(-\frac{1}{\sqrt{3}}))$	1	0	0,5	-1

Задачник
Арксинус, арккосинус, арктангенс

1. Вычислите:

- а) $\arcsin 0$; б) $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})$; в) $\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})$; г) $\arccos 1$; д) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$;
е) $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$; ж) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$; з) $\operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. Найдите значение выражения.

- а) $\arcsin(-1) + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{arctg}(-1)$;
б) $\arcsin \frac{1}{2} + \arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \arccos 0$;
в) $\arccos(-1) + \operatorname{arctg} \sqrt{3}$;
г) $\arccos \frac{1}{2} + \arcsin \frac{1}{2}$;
д) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$;
е) $2 \arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \operatorname{arctg}(-1) + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$;
ж) $3 \arcsin \frac{1}{2} + 4 \arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}) - \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$;
з) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) - \frac{3}{2} \arccos \frac{1}{2} + \arcsin 1$.

3. Сравните числа:

- а) $\arcsin(-\frac{1}{2})$ и $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$;
б) $\arccos(-\frac{1}{2})$ и $\operatorname{arctg}(-1)$;
в) $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$ и $\arcsin 1$;
г) $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$ и $\arcsin \frac{1}{2}$;
д) $\arcsin(-1)$ и $\operatorname{arctg}(-\frac{1}{\sqrt{3}})$;
е) $\arccos(-\frac{1}{2})$ и $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$.

4. Расположите числа в порядке возрастания.

- а) $\operatorname{arctg} 100$; $\operatorname{arctg}(-5)$; $\operatorname{arctg} 0,7$;
б) $\operatorname{arcctg} 1,2$; $\operatorname{arcctg} \pi$; $\operatorname{arcctg}(-5)$.

5. Расположите числа в порядке убывания.

а) $\arcsin 17$; $\arcsin \frac{5\pi}{2}$; $\arcsin \pi$;

б) $\arccos (-1,7)$; $\arccos (-2,5)$; $\arccos 4$.

6. Вычислите значение выражения.

а) $\sin (\arccos (-\frac{\sqrt{3}}{2}))$; б) $\cos (\operatorname{arctg} (-\frac{1}{\sqrt{3}}))$;

в) $\operatorname{tg} (\arcsin (-\frac{1}{2}))$; г) $\operatorname{ctg} (\arcsin \frac{1}{2})$;

д) $\cos (\operatorname{arcctg} \sqrt{3})$.