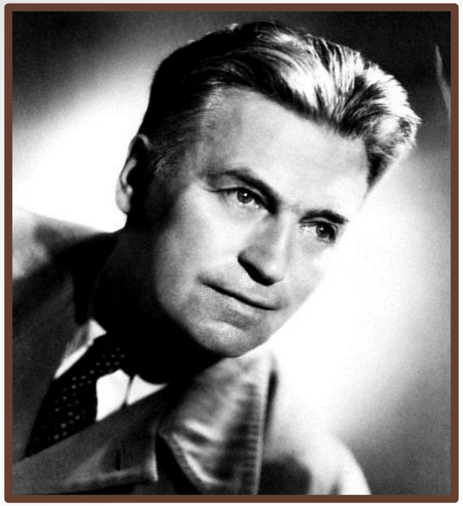
Логарифмические уравнения.



«Ничему тому, что важно знать, научить нельзя, – всё, что может сделать учитель, это указать дорожки»

Ричард Олдингтон
(1892 – 1962гг..) - английский поэт, прозаик, критик

«Кто говорит – тот сеет, кто слушает – тот собирает».

Русская народная пословица

Уравнение, содержащее неизвестное под знаком логарифма или (и) в его основании, называется ***логарифмическим уравнением***.

1. *Решение логарифмических уравнений на основании определения логарифма.*

Определение логарифма: $\log_a b = c : a^c = b, a > 0, b > 0, a \neq 1.$

$$\boxed{\log_a f(x) = c \Rightarrow f(x) = a^c,}$$

$$f(x) > 0, a > 0, a \neq 1.$$

Пример 1:

$$\log_4 x = \boxed{2,}$$

$$ОДЗ: x > 0,$$

$$x = 4^{\boxed{2}},$$

$$x = 16.$$

Ответ: 16.

Пример 2:

$$\log_3(2x+1)=\boxed{2,}$$

$$2x+1=3^{\boxed{2}},$$

$$2x+1=9,$$

$$x=4.$$

Проверка:

$$\log_3(2\cdot 4+1)=2,$$

$$\log_3 9=2,$$

$$2=2$$

Ответ: 4.

Пример 3:

$$4^{x-3}=5,$$

$$x-3=\log_4 5,$$

$$x=3+\log_4 5.$$

Ответ: $3+\log_4 5.$

$$\boxed{\log_{g(x)} f(x) = c \Rightarrow f(x) = g(x)^c,}$$

$$f(x) > 0, g(x) > 0, g(x) \neq 1.$$

Пример 4: $\log_{x+1}(2x^2+1) = 2,$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x^2+1>0, \\ x+1>0, \\ x+1 \neq 1, \end{cases} \Rightarrow \quad x \in (-1;0) \cup (0;+\infty)$

$$\log_{x+1}(2x^2+1) = \boxed{2,}$$

$$2x^2+1 = (x+1)^{\boxed{2}},$$

$$2x^2+1 = x^2+2x+1,$$

$$x^2-2x=0,$$

$$x(x-2)=0,$$

$$x_1 = 0, x_2 = 2.$$

Ответ: 2.

2. Метод потенцирования.

Под **потенцированием** понимается переход от равенства, содержащего логарифмы, к равенству, не содержащему их.

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x), \text{ где } a > 0, a \neq 1, f(x) > 0, g(x) > 0.$$

Пример 5:

$$(x^2 + 7x - 5) = (4x - 1),$$

$$x^2 + 7x - 5 = 4x - 1,$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0,$$

$$x_1 = 1, x_2 = -4.$$

Проверка:

$x = 1 \Rightarrow \log_2(1^2 + 7\cdot 1 - 5) = \log_2(4\cdot 1 - 1) \Rightarrow \log_2 3 = \log_2 3$ - верно

$x = -4 \Rightarrow \log_2((-4)^2 + 7\cdot(-4) - 5) = \log_2(4\cdot(-4) - 1) \Rightarrow \log_2(-17) = \log_2(-17)$

- не верно

Ответ: 1.

$$\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x) \Rightarrow \; f(x) = g(x)$$

$$f(x) > 0, g(x) > 0, h(x) > 0, h(x) \neq 1.$$

Пример 6:  $(x^2 + 7x - 5) =$  $(4x - 1),$

$$x^2 + 7x - 5 = 4x - 1,$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0,$$

$$x_1 = 1, x_2 = -4.$$

ОДЗ: $\begin{cases} x^2 + 7x - 5 > 0, \\ 4x - 1 > 0, \\ 2 + x > 0, \\ 2 + x \neq 1. \end{cases}$

Проверка:

$$x = 1 \Rightarrow \log_{2+1}(1^2 + 7 \cdot 1 - 5) = \log_{2+1}(4 \cdot 1 - 1) \Rightarrow \log_3 3 = \log_3 3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 1 = 1$ верно.

$$x = -4 \Rightarrow \log_{2-4}((-4)^2 + 7 \cdot (-4) - 5) = \log_{2-4}(4 \cdot (-4) - 1) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \log_{-2}(-17) = \log_{-2}(-17)$ не верно

Ответ: 1.

Пример 7:

$$\log_4(4+7x)=\log_4(1+5x)+1.$$

$1=\log_4 4^1$ получим

$$\log_4(4+7x)=\log_4(1+5x)+\log_4 4,$$

$\log_c a+\log_c b=\log_c ab$

$$\log_4(4+7x)=\log_4((1+5x)\cdot 4),$$

$$4+7x=4(1+5x),$$

$$x=0.$$

Проверка:

$$\log_4(4+7\cdot 0)=\log_4(1+5\cdot 0)+1,$$

$$\log_4 4=\log_4 1+1,$$

$1=1$ верно

Ответ: 0.

3. Метод подстановки.

Пример 8: $$\log_3^2 x - \log_3 x = 2$$

ОДЗ: $x > 0.$

Пусть $\log_3 x = t,$ тогда $t^2 - t = 2,\ t^2 - t - 2 = 0.$

$$t_1 = -1, t_2 = 2.$$

Значит, $\log_3 x = -1$ или $\log_3 x = 2$

$x = 3^{-1}$ $\qquad$ $x = 3^2$

$x = \frac{1}{3}.$ $\qquad$ $x = 9.$

Ответ: $\frac{1}{3},\ 9.$

$$a\log^2_{g(x)} f(x) + b\log_{g(x)} f(x) + c = 0$$

$$f(x) > 0, g(x) > 0, g(x) \neq 1, a, b, c - \text{числа}, a \neq 0.$$

Пример 9: $\log_7 x - \log_x 7 = 2{,}5$ *ОДЗ:* $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Приведём логарифмы к одному основанию – 7: $\log_7 x - \dfrac{1}{\log_7 x} = \dfrac{5}{2}.$

Подстановка: $t = \log_7 x.$ Уравнение примет вид: $t + \dfrac{1}{t} = \dfrac{5}{2},$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0,$$

$$t_1 = 2, t_2 = \frac{1}{2}.$$

Значит, $\log_7 x = 2$ или $\log_7 x = \dfrac{1}{2}$

$x = 7^2,$

$x = 49.$

$x = 7^{\frac{1}{2}},$

$x = \sqrt{7}.$

Ответ: $\sqrt{7}$, 49.

4. Метод логарифмирования.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow \log_{h(x)} f(x)=\log_{h(x)} g(x)$$

$$f(x)>0, g(x)>0, h(x)>0, h(x)\neq 1.$$

Пример 10: $x^{\log_3 x-4}=\dfrac{1}{27},$ ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1. \end{cases}$

$$\log_3(x^{\log_3 x-4})=\log_3\frac{1}{27},$$

$$(\log_3 x-4)\log_3 x=-3.$$

$$\log_c a^p = p\log_c a$$

Пусть $\log_3 x=t,$ тогда $(t-4)t=-3,$

$$t^2-4t+3=0,$$

$$t_1=1, t_2=3.$$

Значит, $\log_3 x=1$ или $\log_3 x=3,$

$x=3^1,$ $x=3^3,$

$x=3.$ $x=27.$

Ответ: 3; 27.

Выводы:

1. На основании определения логарифма.
2. Метод потенцирования.
3. Метод постановки.
4. Метод логарифмирования.

$$\log_a b$$