Тема 1.1.1. Функция и способы ее задания. Преобразования графиков функций. Свойства функции.

Пусть *X,Y* – множества произвольной природы

Определение. Если каждому элементу *x* из множества *X* по определённому правилу или закону *f* ставится в соответствие один элемент *y* из множества *Y*, то говорят, что **на множестве *X* задана функция *f*.**

Обозначение: f : или $y = f(x)$.

(где *f* – ***закон***, осуществляющий соответствие)

Называют:

X **– область (множество) определения функции**

x **($x \in X$) – аргумент** (независимая переменная)

Y **– область (множество) значений** ***y*** **($y \in Y$) – зависимая переменная** (функция)

Определение. **Графиком функции** y = f(x) называется геометрическое место точек плоскости с координатами (x; f(x)).

График функции y = f(x) будем также называть **«кривой y = f(x)»**

Способы задания функции:

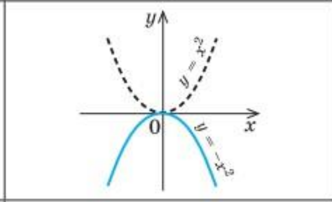
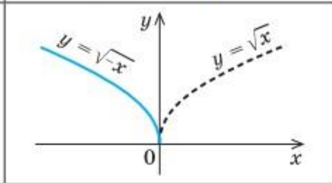
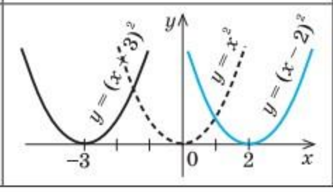
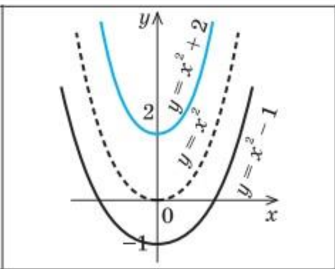
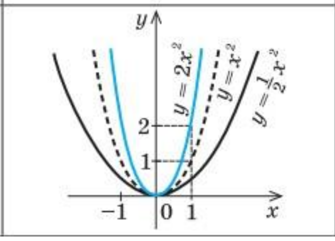
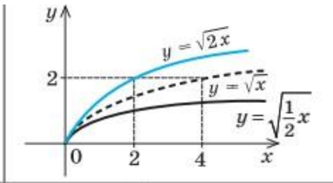
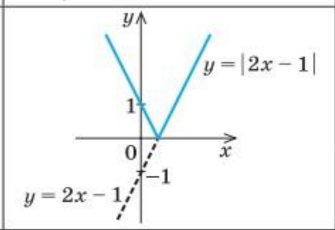
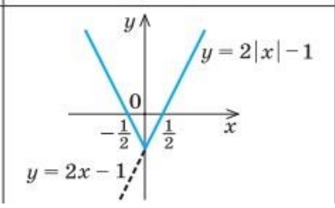
- ***словесный***
- ***аналитический***
  - а) явное задание (т.е. формулой y = f(x))
  - б) неявное задание (т.е. с помощью уравнения F(x,y)=0).
- ***табличный***
- ***графический***

Определение. **Элементарной функцией** называется функция, которая может быть задана одной формулой **y = f(x)**, где f(x) – выражение, составленное из основных элементарных функций и действительных чисел с помощью конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функции от функции.

Основные характеристики поведения функции:

- ***Четность функции*** (четная, нечетная, общего вида)
- ***Периодичность*** функции
- ***Монотонность*** функции (возрастающая, убывающая, неубывающая, невозрастающая)
- ***Ограниченность*** функции (ограниченная сверху, ограниченная снизу, ограниченная)

В) Преобразование графиков функций

Преобразование графика функции $y = f(x)$			
№	Формула зависимости	Пример	Преобразование
1	2	3	4
1	$y = -f(x)$		Симметрия относительно оси Ox
2	$y = f(-x)$		Симметрия относительно оси Oy
3	$y = f(x - a)$		Параллельный перенос графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox на a единиц
4	$y = f(x) + c$		Параллельный перенос графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy на c единиц
5	$y = kf(x)$ $(k > 0)$		Растяжение или сжатие вдоль оси Oy (при $k > 1$ — растяжение, при $0 < k < 1$ — сжатие)
6	$y = f(\alpha x)$ $(\alpha > 0)$		Растяжение или сжатие вдоль оси Ox (при $\alpha > 1$ — сжатие, при $0 < \alpha < 1$ — растяжение)
7	$y = \lvert f(x) \rvert$		Выше оси Ox (и на самой оси) график функции $y = f(x)$ — без изменений, ниже оси Ox — симметрия относительно оси Ox
8	$y = f(\lvert x \rvert)$		Справа от оси Oy (и на самой оси) — без изменений, и эта же часть графика — симметрия относительно оси Oy

Алгоритм исследования функции $y = f(x)$:

1. Найти ***область определения*** функции $D(y)$
2. Найти (если это можно) ***точки пересечения*** графика с осями координат (при $x = 0$ и при $y = 0$)
3. Исследовать на ***четность и нечетность*** функции($y(-x) = y(x)$ –четность; $y(-x)$ $= -y(x)$ –нечетность)
4. Найти ***асимптоты*** графика функции
5. Найти **интервалы монотонности** функции
6. Найти ***экстремумы*** функции
7. Найти ***интервалы выпуклости*** (вогнутости) и точки перегиба графика функции
8. На основании проведенных исследований ***построить график*** функции

Графики и основные свойства элементарных функций

График линейной функции $y = kx + b$

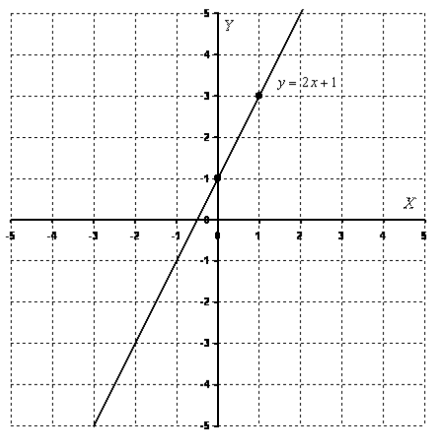


График линейной функций представляет собой **прямую**. Для того, чтобы построить прямую достаточно знать две точки.

Пример. *Построить график функции $y = 2x+1$.*

Найдем две точки. В качестве одной из точек выгодно выбрать ноль.

Если x=0, то $y = 2*0+1=1$

Берем еще какую-нибудь точку, например, 1.

Если x=1, то $y = 2*1+1=3$

При оформлении заданий координаты точек обычно сводятся в таблицу:

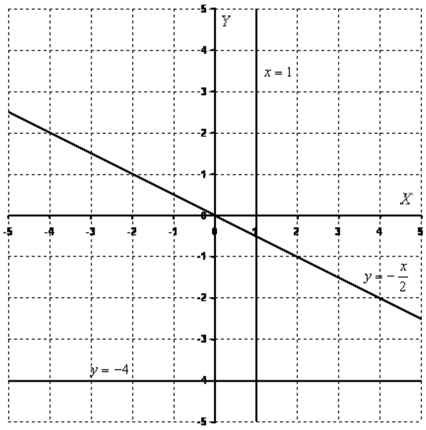
x	0	1
y	1	3

А сами значения рассчитываются устно или на черновике, калькуляторе.

Две точки найдены, выполним чертеж:

При оформлении чертежа всегда подписываем графики.

Не лишним будет вспомнить *частные случаи* линейной функции:



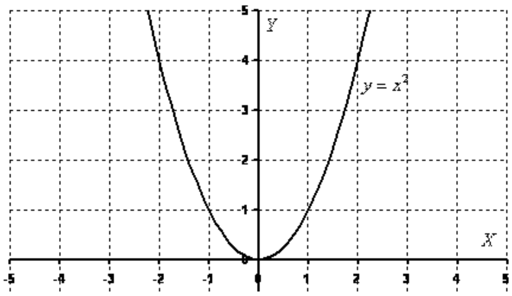
1) Линейная функция вида y = kx (a≠0) называется **прямой пропорциональностью**. Например, $y=-\frac{x}{2}$. График прямой пропорциональности всегда проходит через начало координат. Таким образом, построение прямой упрощается – достаточно найти всего одну точку.

2) Уравнение вид ky=b задает прямую, параллельную оси OX, в частности, сама ось OX задается уравнением y=0. График функции строится сразу, без нахождения всяких точек.
То есть, записьy= - 4 следует понимать так: «игрек всегда равен –4, при любом значении икс».

3) Уравнение вида x=b задает прямую, параллельную оси OY, в частности, сама ось OY задается уравнением x=0. График функции также строится сразу. Запись x=1 следует понимать так: «икс всегда, при любом значении игрек, равен 1».

График квадратичной функции.

Парабола. График квадратичной функциис <u>$y=ax^2+bx+c$ (a≠0)</u> представляет собой параболу.



<u>Пример.</u> *Рассмотрим знаменитый случай*: $y = x^2$
Вспоминаем некоторые свойства функции $y = x^2$.
<u>Область определения</u> – D(y) = R Область значений – E(y) = [0; +∞) Функция $y = x^2$ является **чётной.**
Если функция является чётной, то ее график симметричен относительно оси OY.

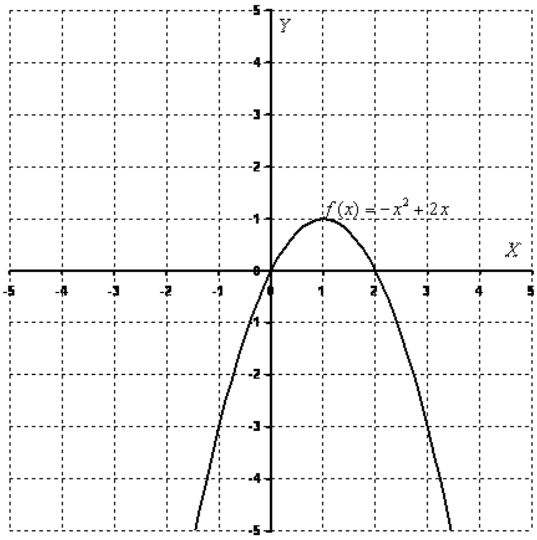
<u>Пример.</u> *Построить график функции* $f(x) = - x^2+2x$.

Сначала находим вершины параболы: $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2*(-1)} = 1$; $y_0 = -1^2+2*1 = -1+2=1$

Таким образом, вершина находится в точке (1;1).

Теперь находим другие точки, при этом пользуемся симметричностью параболы. Следует заметить, что функция $f(x) = -x^2+2x$ – **не является чётной**, но, тем не менее, симметричность параболы никто не отменял.

x	-1	0	1	2	3
y	-3	0	1	0	-3



Выполним чертеж:

Из рассмотренных графиков вспоминается еще один полезный признак:

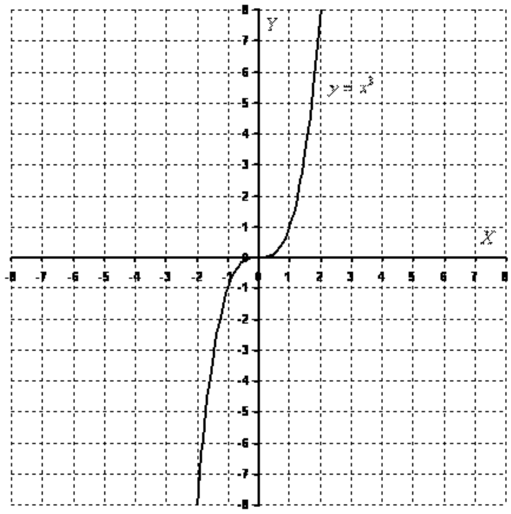
Для квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ (a≠0) справедливо следующее:

Если a > 0, то ветви параболы направлены вверх.
Если a < 0, то ветви параболы направлены вниз.

Кубическая парабола

Кубическая парабола задается функцией $y = x^3$.

Перечислим основные свойства функции $y = x^3$



Область определения – любое действительное число: D(y)=R.

Область значений – E(y) = R - любое действительное число.

Функция $y = x^3$ является **нечётной.**

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-1	0	1	8

Если функция является нечётной, то ее график симметричен относительно начала координат.