

DÉDICACE

A mes parents , MANSA Bani Kabirou et OROU ZIME Bana ;
A mes frères et soeurs ;
A tous les fils et filles de la commune de Banikoara ;
A tous ceux qui me sont chers ;
Je dédie ce mémoire de MASTER .

REMERCIEMENTS

En premier lieu, je remercie **Allah** le Très Haut; le Tout Miséricordieux et le Très miséricordieux pour tous ses bienfaits à mon égard.

J'adresse ma très vive reconnaissance au Professeur **Gabriel Y. H. AVOSSEVOU** pour le choix du sujet de ce mémoire de Master. Sincèrement merci pour le soutien, l'aide et les nombreux conseils apportés tout au long de la réalisation de ce travail, malgré leurs multiples occupations.

Je témoigne également ma gratitude :

-Au professeur **Carlos OGOUYANDJOU**; Directeur de l'Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (IMSP) de l'Université d'Abomey-Calavi (Bénin)

-A son adjoint Professeur **Vincent MONWANOU**.

-Aux membres de jury pour leurs disponibilités et conseils;

-A tous nos enseignants qui ne ménagent aucun effort pour hisser haut le flambeau de l'IMSP;

-A tout le personnel administratif de **l'IMSP** pour le soutien qu'il nous apporte toujours;

-A tous mes enseignants de la Faculté des Sciences et Techniques de Natitingou (**FAST-NATI**), plus particulièrement ceux du Département de Physique;

-A tous mes enseignants du primaire et du secondaire;

-Aux familles **MANSA** et **ALLASSANE**, pour leurs soutien et encouragements durant tout mon parcours, je leur suis reconnaissant;

-A **BOUKARI Amidou**, pour ses conseils, ses encouragements et son aide;

-A mes camarades du groupe de travail pendant les études: **OMOLERE Florentin**, **ADJIBADE Salimanth** et **HOUEDOKOU Cébastien**

-A mes frères et sœurs, cousins et cousines pour tout leur soutien indéfectible;

-A tous les autres étudiants de **l'IMSP** pour les sages conseils qu'ils ne manquent de me prodiguer;

-A tous ceux, qui de près ou de de loin ont contribué pour améliorer ce travail.

RÉSUMÉ

Connaissant les équations régissant la dynamique d'un système non contraint, avec un nombre de particules fixé dans le cadre de la mécanique classique, nous utilisons les règles de quantification canonique permettant de retrouver les équations quantiques correspondantes. Dans le cas des systèmes contraints, nous faisons recours à la quantification de Dirac où nous imposons les contraintes au niveau quantique en éliminant les degrés de libertés associés à la symétrie de jauge. Pour les systèmes comportant un nombre de particules variables, nous utilisons la procédure de deuxième quantification en fonction de la nature des particules pour retrouver la description quantique équivalente.

Inspirés par une modification invariante conforme et de dualité récemment proposée (ModMax), nous construisons une famille d'un paramètre de systèmes dynamiques partageant de nombreuses caractéristiques avec la théorie ModMax. Elle se compose, qui préserve néanmoins la dualité ($q \rightarrow p, p \rightarrow -q$) et dépend d'un paramètre γ , comme dans le cas ModMax. Malgré ses fonctionnalités non linéaires, le système est intégrable de deux oscillateurs couplés dont les fréquences dépendent de certains invariants de symétrie et de dualité et de la symétrie de rotation. Sur la base des propriétés du dual linéaire dépendant de γ qui transforme l'oscillateur en 2D à l'oscillateur non linéaire, mais avec le paramètre 2γ . La dynamique montre également le phénomène de transfert d'énergie et on calcule un angle et aux holonomies.

ABSTRACT

Knowing the equations governing the dynamics of an unconstrained system, with a fixed number of particles in the framework of classical mechanics, we use the rules of canonical quantization allowing us to find the corresponding quantum equations. In the case of constrained system, we resort to Dirac quantization where we impose constraints at the quantum level by eliminating the degrees of freedom associated with gauge symmetry. For system where the number of particles can change, we use the second quantization procedure depending on the nature of the particles to find the equivalent quantum description.

Inspired by a recently proposed Duality and Conformal invariant modification of Maxwell theory (ModMax), we construct a one-parameter family of two-dimensional dynamical system in classical mechanics that share many features with the ModMax theory. It consists of a couple of $\sqrt{T\bar{T}}$ -deformed oscillators that nevertheless preserves duality ($q \rightarrow p, p \rightarrow -q$) and depends on a continuous parameter γ , as in the ModMax case. Despite its non-linear features, the system is integrable. Remarkably can be interpreted as a pair of two coupled oscillators whose frequencies depend on some basic invariants that correspond to the duality symmetry and rotational symmetry. Based on the properties of the model, we can construct a non-linear map dependent on γ that maps the oscillator in 2D to the nonlinear one, but with parameter 2γ . The dynamics also shows the phenomenon of energy transfer and we calculate a Hannay angle associated to geometric phases and holonomies.

INTRODUCTION

La mécanique quantique n'est pas une théorie physique autonome : elle s'appuie nécessairement sur la mécanique et l'électromagnétisme classique, puisqu'elle ne fait que fournir des prévisions sur des résultats de mesures. Chaque résultat de mesure résulte d'une interaction du système étudié avec un appareil de mesure dont le comportement est régi par la physique classique. D'autre part, la description d'un système classique au moyen de la mécanique classique doit être une première approximation d'une description plus fine de ce même système au moyen de la mécanique quantique. Comment faire, lorsqu'on connaît les équations régissant l'évolution d'un système dans le cadre de la mécanique classique, pour trouver les équations quantiques correspondantes ? C'est le problème de la quantification.

La déformation cohérente des théories de champ est un outil puissant pour explorer dans quel sens ou dans quelle mesure une théorie donnée peut être déformée en déformant ces symétries de jauge et /ou ses couplages de telle manière que la théorie résultante soit également cohérente. Les déformations sont régulées par des symétries et d'autres contraintes que nous imposons en fonction des questions que nous abordons lors de la déformation. Toutes les déformations préservent le contenu du champ de la théorie donnée. Un exemple bien connu est une déformation de N champs de Maxwell libres où la symétrie de jauge de l'interaction, préservant la symétrie globale de Poincaré, peuvent être déformées pour construire la théorie de Yang-Mills $SU(N)$. La théorie de Maxwell peut être déformée de différentes manières en préservant la dualité et la symétrie conforme en 4D. Quelques exemples célèbres sont les déformations de Born-Infeld [2], de Plebansky [3], et de Bialynicki-Birula [4,5]. Récemment, une nouvelle déformation de la théorie de Maxwell préservant l'invariance conforme et de dualité a été construite [6,7]. Cette déformation connue sous le nom de déformation $T\bar{T}$ nous donne une nouvelle théorie électromagnétique non linéaire (ModMax).

Dans le chapitre 1, nous rapelons quelques règles de quantification canonique, puis nous abordons la quantification selon Dirac et enfin la seconde quantification sera abordée dans le cas des bosons et des fermions.

Dans le chapitre 2, nous étudions la théorie ModMax à travers la détermination des densités hamiltonienne et lagrangienne.

Dans le chapitre 3, nous construisons d'abord le modèle non linéaire dans le formalisme lagrangien et hamiltonien. Ensuite, nous intégrons le système hamiltonien, nous introduisons en outre la notation nécessaire pour mettre en œuvre la transformation de Legendre afin d'intégrer le système lagrangien. Plus tard, nous montrons comment construire la carte explicite qui

transforme l'oscillateur harmonique 2D en un problème non linéaire paramétré par 2γ , puis nous montrons que notre modèle présente un phénomène de transfert d'énergie entre oscillateurs et enfin nous calculons l'angle de Hannay.

Le chapitre 4 est une conclusion et nous offre un résumé des points abordés

.

1 La quantification canonique

1.1 Introduction

Les théories quantiques sont des descriptions de la nature nées de l'étude des propriétés microscopiques des systèmes physiques. Ce ne sont cependant pas simplement des théories de l'infiniment petit, ce sont les descriptions les plus fondamentales des phénomènes physiques qui aient été développées à ce jour. Le passage de la description classique d'un système à son traitement quantique est appelé quantification (ou quantisation). Cette procédure, nécessaire pour comprendre les implications fondamentales de toute théorie classique, n'est malheureusement pas algorithmique, et il est parfois nécessaire pour quantifier un système d'utiliser des méthodes heuristiques et des approximations.

1.2 Rappel des règles de quantification canoniques

Le passage d'une description classique (dans le formalisme de Hamilton) à une description quantique se fait de la manière suivante : les quantités définies sur l'espace des phases deviennent des opérateurs agissant dans l'espace des états et le crochet de Poisson $\{F, G\}$ de deux quantités est remplacé par le commutateur des deux opérateurs, fois une constante :

$$\{F, G\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar}(FG - GF) = \frac{1}{i\hbar}[F, G]. \quad (1)$$

Le facteur de $i = \sqrt{-1}$ a pour but de s'assurer que le membre de droite est hermitien si F et G le sont et le facteur \hbar est la constante de Planck réduite ($\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} J.s$) ayant les dimensions de l'action dont le rôle est de préserver les unités du crochet de Poisson. Aux variables canoniques p_i, q_j de la mécanique classique correspondent donc des opérateurs P_i et Q_j obéissant aux relations de commutations suivantes :

$$[Q_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}. \quad (2)$$

Les valeurs de deux variables conjuguées Q et P obéissant à $[Q, P] = i\hbar$ ne peuvent être bien déterminées simultanément suivant la relation d'incertitude suivante :

$$\Delta Q \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (3)$$

L'évolution temporelle d'une quantité physique représentée par un opérateur A pour un système physique ayant un hamiltonien H est donnée par la relation :

$$\dot{A} = \frac{i}{\hbar}[H, A] + \frac{\partial A}{\partial t} . \quad (4)$$

1.3 Quantification selon Dirac

Dans la méthode de Dirac, on ne s'empêche pas à sacrifier des degrés de liberté de jauge au niveau des espaces des phases, mais on quantifie d'abord toutes les variables du système en suivant la procédure décrite dans le cas des systèmes non contraints. On impose ensuite les contraintes au niveau quantique en éliminant les degrés de liberté associés à la symétrie de jauge. On obtient ainsi l'espace des états physiques du système, noté ξ_{phys} . La réduction se fait ici après la quantification.

Soient G_n , $n=1, \dots, N$, les contraintes de première classe du système. Si les contraintes se expriment en termes des observables élémentaires de la théorie, il est possible d'associer à chaque contrainte un opérateur $\iota(G_n)$ sur l'espace des états du système quantique ξ . Les états physiques du système sont définis par leurs propriétés d'invariance par transformations de jauge, c'est-à-dire, par les transformations engendrées par les contraintes. En d'autres termes, un état est un état physique s'il appartient au noyau de chaque opérateur de contrainte $\iota(G_n)$, pour $n = 1, \dots, N$. Notons qu'en général ξ_{phys} n'est pas un sous-espace de ξ . Les états physiques sont en toute généralité des vecteurs propres généralisés des opérateurs de contrainte, et ils appartiennent au dual d'un sous-espace dense de l'espace de Hilbert de tous les états, ξ .

La condition d'invariance par les transformations de jauge mène au problème de cohérence suivant. Les contraintes G_n , $n = 1, \dots, N$, étant de première classe, elles engendrent par combinaisons linéaires une sous-algèbre de l'algèbre de Poisson des fonctions sur l'espace de phases, \mathcal{P} . À cause des ambiguïtés dues à la non-commutativité du produit des opérateurs, il est possible que, contrairement au cas classique, les opérateurs $\iota(G_n)$ correspondant aux contraintes n'engendrent pas une algèbre de Lie au sens strict mais seulement au premier ordre en \hbar . Les opérateurs $\iota(G_n)$, vérifient alors des relations de la forme,

$$[\iota(G_n), \iota(G_m)] = i\hbar \sum_{p=1}^N \iota(G_n) \iota(f_{nm}^p) + \hbar^2 D_{nm} . \quad (5)$$

Ceci peut avoir des conséquences importantes puisque les opérateurs $\iota(G_n)$ cessent d'être de première classe et ne peuvent donc plus être considérés comme

engendrant les transformations de jauge du système quantique. On dit alors que l'invariance de jauge est brisée au niveau quantique et les opérateurs D_{nm} sont appelés des anomalies de jauge.

Si l'invariance de jauge est brisée par des effets d'origine quantique, il devient incohérent de sélectionner des états invariants de jauge. On voit ainsi que la procédure de Dirac ne peut être directement appliquée lorsque des anomalies sont présentes. Un exemple d'une telle situation est obtenu en considérant une corde bosonique se propageant sur un espace-temps plat. Dans ce cas, il existe une anomalie, dite anomalie de Weyl, qui s'annule si et seulement si la dimension de l'espace-temps est égale à 26.

1.4 La seconde quantification

1.4.1 Introduction

Nous observons des processus de transformations de particules dans la nature, par exemple $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$. Le problème est : comment peut-on décrire un système qui admet des réactions avec non conservation du nombre de particules dans la mécanique quantique? D'habitude, si nous avons un système avec N particules, nous avons N impulsions \vec{p}_i et N coordonnées \vec{x}_i pour décrire la dynamique et ce nombre N est fixé. Comment représenter les fonctions d'onde de système où le nombre de particules peut changer? Comment et dans quel espace représenter un opérateur capable de changer le nombre de particule d'un état? C'est là que la seconde quantification rentre en jeu. Elle consiste à promouvoir une fonction d'onde $\psi(x)$ en un opérateur $\hat{\psi}$, dépendant des opérateurs de création et d'annihilation.

1.4.2 Bosons

1.4.2.1 Seconde quantification et système de particules indiscernables.

Pour un système de N particules dans un potentiel externe $U(x)$ et sans interaction entre elles, nous avons l'hamiltonien suivant :

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N H_i = \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i^2}{2m_i} + U(x_i) \right) \quad (6)$$

où $H_i \equiv H(p_i, x_i)$ est l'hamiltonien d'une particule seule quelconque. Par exemple pour une particule libre : $U(x_i) = 0$ et pour un oscillateur harmonique : $U(x_i) = \frac{m\omega^2}{2} x_i^2$.

Le nombre de coordonnées dans ce est toujours N , il ny a pas de changement au cours du temps. Nous disons que le nombre de particules est strictement conservé. Par conséquent, pour avoir une description dun système avec un nombre de particules variable nous devons passer de la représentation des (x_i, p_i) à un nouveau type de représentation. Cette représentation sappelle la représentation de nombre d'occupation et est associée à la procédure de deuxième quantification. On suppose connu le spectre et les fonctions propres de H :

$$H\psi_n(x) = E_n\psi_n(x) \quad (7)$$

Alors les solutions du probleme à N corps peuvent s'écrire sous la forme

$$\Psi(x_1, \dots, x_N) = \sum_Q \psi_{n_1}(x_1) \dots \psi_{n_N}(x_N) \quad (8)$$

où Q représente toutes les permutations possibles des indices qui numérotent les particules .

Par exemple ,pour deux particules ,un état propre peut être obtenu en mettant une particule dans l'état 0 et une dans l'état 1 .Cette somme sur les permutations comportera donc deux termes ,une fois la particule 1 sera dans l'état 0 , une fois ce sera la particule 2.

Les énergies propres associées à ces fonctions d'ondes sont simplement :

$$E = E_{n_1} + E_{n_2} + \dots + E_{n_N} \quad (9)$$

Cette façon de raisonner ne fait appel qu'à nos connaissances précédentes. On va introduire maintenant le formalisme de la seconde quantification pour reformuler le problème et obtenir une expression plus compacte des fonctions d'onde. On ne justifiera cette approche qu'en prenant des exemples pour se convaincre de son bien-fondé.

On associe à chaque fonction propre $\psi_n(x)$ des opérateurs de création et d'annihilation bosoniques a_n^+ et a_n^- , qui obéissent aux relations suivantes :

$$[a_n, a_m] = 0 \quad [a_n^+, a_m^+] = 0 \quad [a_n, a_m^+] = \delta_{nm} \quad (10)$$

On introduit le vecteur de vide $|0\rangle$ qui satisfait la propriété $a_n |0\rangle = 0$. Alors la fonction $\Psi(x_1, \dots, x_N)$ peut être associée à $a_{n_1}^+ \dots a_{n_N}^+ |0\rangle$, où $a_{n_1}^+$ crée une particule de fonction d'onde $\psi_{n_1}(x_1)$ et d'énergie E_{n_1} . Si l'on réécrit l'hamiltonien initial comme étant désormais

$$\mathcal{H} = \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n a_n^+ a_n \quad (11)$$

on se rendra compte par la suite à travers des exemples que cet hamiltonien décrit bien le même problème mais ne contient plus d'information sur le nombre de particules du système.

L'équation (11) est la forme de l'hamiltonien après la seconde quantification. On voit bien qu'il n'y a pas grand chose à voir avec une véritable quantification!

Exemple $n = 0$: pas de particule,

$$\mathcal{H} |0\rangle = 0 \quad (12)$$

Exemple $n = 1$: un système avec une seule particule. Les états du système sont les fonctions donc $a_i^+ |0\rangle \leftrightarrow \varphi_i(x)$. On applique \mathcal{H}

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(a_i^+ |0\rangle) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n a_n^+ a_n (a_i^+ |0\rangle) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n a_n^+ (a_i^+ a_n + \delta_{in}) |0\rangle \quad \text{car } [a_n, a_i^+] = \delta_{in} \text{ et } a_n a_i^+ = \delta_{in} + a_i^+ a_n \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n a_n^+ a_i^+ a_n |0\rangle + \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n a_n^+ \delta_{in} |0\rangle \\ \mathcal{H}(a_i^+ |0\rangle) &= 0 + E_i a_i^+ |0\rangle \end{aligned}$$

$$\mathcal{H}(a_i^+ |0\rangle) = E_i a_i^+ |0\rangle. \quad (13)$$

Ceci montre que $(a_i^+ |0\rangle)$ est un vecteur propre de \mathcal{H} avec la valeur propre E_i .

Exemple $n = 2$: un système de deux particules, par exemple deux bosons sur deux niveaux d'énergie différents. Les états du système sont obtenus en appliquant sur le vide un opérateur a_i^+ pour créer une particule sur le niveau E_i et a_j^+ pour en créer une autre avec énergie E_j . Donc

$$a_i^+ a_j^+ |0\rangle \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_i(x_1) \psi_j(x_2) + \psi_i(x_2) \psi_j(x_1)]$$

On applique \mathcal{H} à cet état.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(a_i^+ a_j^+ |0\rangle) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n a_n^+ a_n (a_i^+ a_j^+ |0\rangle) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n a_n^+ (a_i^+ a_n + \delta_{in}) a_j^+ |0\rangle \quad \text{car } [a_n, a_i^+] = \delta_{in} \text{ et } a_n a_i^+ = \delta_{in} + a_i^+ a_n \\ &= E_i a_i^+ a_j^+ + \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n a_n^+ a_i^+ (a_j^+ a_n + \delta_{jn}) |0\rangle \quad \text{car } a_n a_j^+ = \delta_{jn} + a_j^+ a_n \\ \mathcal{H}(a_i^+ a_j^+ |0\rangle) &= E_i a_i^+ a_j^+ |0\rangle + E_j a_j^+ a_i^+ |0\rangle. \end{aligned}$$

Soit

$$\mathcal{H}(a_i^+ a_j^+ |0\rangle) = (E_i + E_j) a_i^+ a_j^+ |0\rangle \quad (14)$$

car a_i^+ et a_j^+ commutent entre eux .

Généralisation

On peut généraliser cette procédure avec une base de fonctions à une particule qui ne sont pas fonctions propres de lhamiltonien. Si on appelle $\{\psi_n(x)\}$ cette base complète, et on associe à chaque membre de cette base des opérateurs a_n^+ et a_n , on a alors que lhamiltonien $\mathcal{H} = \sum H_i$ est équivalent à

$$\mathcal{H} = \sum_{n,m} H_{mn} a_m^+ a_n \quad (15)$$

où

$$H_{nm} = \langle \psi_m | H | \psi_n \rangle = \int d^3x \psi_m^*(x) H \psi_n(x). \quad (16)$$

Interactions

Pour un théorie avec interaction entre paires ,comme par exemple :

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N H(x_i, p_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} V(|x_i - x_j|) \quad (17)$$

Le hamiltonien d'interaction en seconde quantification est construite de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int} \\ \mathcal{H} &= \sum_{n,m} H_{nm} a_m^+ a_n + \frac{1}{2} \sum_{m,n,k,l} V_{mnkl} a_m^+ a_n^+ a_k a_l \end{aligned} \quad (18)$$

où

$$V_{mnkl} = \int d^3x d^3y \psi_m^*(x) \psi_n^*(y) V(|x - y|) \psi_k(x) \psi_l(y). \quad (19)$$

On va encore une fois se convaincre de la justesse de cette formule (18) en regardant les exemples avec un petit nombre de particules .

Pas de particule : $\mathcal{H} |0\rangle = 0$.

Une particule, puisque linteraction est à deux corps, le terme \mathcal{H}_{int} appliqué à un état à une particule sera toujours nul. On se retrouve donc dans le cas sans interaction.

Calculons $\mathcal{H}_{int} a_i^+ a_j^+ |0\rangle$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{int} a_i^+ a_j^+ |0\rangle &= \frac{1}{2} \sum_{m,n,k,l} V_{mnkl} a_m^+ a_n^+ a_k a_l a_i^+ a_j^+ |0\rangle \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m,n,k,l} V_{mnkl} a_m^+ a_n^+ a_k (\delta_{li} + a_i^+ a_l) a_j^+ |0\rangle \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m,n,k,l} V_{mnkl} a_m^+ a_n^+ (\delta_{li} \delta_{kj} + a_k a_i^+ \delta_{lj}) |0\rangle \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m,n,k,l} V_{mnkl} a_m^+ a_n^+ (\delta_{li} \delta_{kj} + (\delta_{ki} + a_i^+ a_k) \delta_{lj}) |0\rangle \quad \text{car} \quad a_k a_i^+ = \delta_{ki} + a_i^+ a_k \\
\mathcal{H}_{int} a_i^+ a_j^+ |0\rangle &= \frac{1}{2} \sum_{m,n,k,l} V_{mnkl} a_m^+ a_n^+ (\delta_{li} \delta_{kj} + \delta_{ki} \delta_{lj}) |0\rangle
\end{aligned}$$

Soit

$$\mathcal{H}_{int} a_i^+ a_j^+ |0\rangle = \sum_{m,n} V_{mnij} a_m^+ a_n^+ |0\rangle. \quad (20)$$

En remplaçant l'élément de matrice de la perturbation par son expression explicite donnée par l'équation(19),on obtient

$$\mathcal{H}_{int} a_i^+ a_j^+ |0\rangle = \sum_{m,n} \int d^3x d^3y \psi_m^*(x) \psi_n^*(y) V(|x-y|) \psi_i(x) \psi_j(y) a_m^+ a_n^+ |0\rangle \quad (21)$$

On a également que $a_m^+ a_n^+ |0\rangle \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_m(x_1) \psi_n(x_2) + \psi_m(x_2) \psi_n(x_1)]$. Par ailleurs la base étant orthonormée ,on a la relation suivante :

$$\sum_n \psi_n^*(x) \psi_n(x') = \delta(x-x'). \quad (22)$$

Si on met maintenant tout ensemble , on obtient

$$\mathcal{H}_{int} a_i^+ a_j^+ |0\rangle = \int d^3x d^3y V(|x-y|) \psi_i(x) \psi_j(y) \frac{\delta(x-x_1) \delta(y-x_2) + \delta(x-x_2) \delta(y-x_1)}{\sqrt{2}}.$$

Soit

$$\mathcal{H}_{int} a_i^+ a_j^+ |0\rangle = V(|x_1 - x_2|) \frac{[\psi_i(x_1) \psi_j(x_2) + \psi_i(x_2) \psi_j(x_1)]}{\sqrt{2}}, \quad (23)$$

qui vérifie l'équation(17) $\mathcal{H}_{int} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V(|x_i - x_j|)$ pour le cas de deux particules $i, j = 1, 2$ avec

$$\mathcal{H}_{int} = \frac{1}{2} [V(|x_1 - x_2|) + V(|x_2 - x_1|)] = V(|x_1 - x_2|) \quad (24)$$

Espace de fock

Comme il a déjà fait mention précédemment , l'hamiltonien écrit seconde quantification ne depend pas du nombre de particules contenues dans le système .Il ne depend non plus des coordonnées individuelles des particules .

On peut construire l'espace de Hilbert dans lequel vit cet hamiltonien comme étant la somme directe des espaces de Hilbert avec un nombre fixé de particules .Ce nouvel espace est appelé espace de Fock \mathcal{F} .

$$\mathcal{F} = 0 \oplus 1 \oplus 2 \oplus 3 \oplus \dots \quad (25)$$

Cet espace de Fock nous permet de décrire des processus où le nombre de particules n'est pas conservé . Ce type de réaction est très fréquent en physique des particules , par exemple une désintégration β :

$$n \leftrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e. \quad (26)$$

L'hamiltonien d'interaction s'écrit ici

$$\mathcal{H}_{int} = a_p^+ a_e^+ a_{\bar{\nu}}^+ a_n + h.c.$$

où h.c. signifie hermitien conjugué , et représente la réaction dans l'autre sens , c'est-à-dire la création d'un neutron .

1.4.3 Fermions

On définit les opérateurs de création et destruction a^+ et a pour les particules fermioniques .Ils vérifient

$$\{a, a\} = \{a^+, a^+\} = 0 \quad \{a, a^+\} = 1 \quad (27)$$

où l'anticommutateur $\{a, b\} = ab + ba$.On considère l'opérateur $N_f = a^+ a$, qui est l'opérateur de nombre pour les fermions .Il vérifie les théorèmes suivants :

Toutes les valeurs propres de l'opérateur $N_f = a^+ a$ sont réelles et positives .

$$N_f |\alpha\rangle = a^+ a |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad (28)$$

Les valeurs propres de $N_f = a^+ a$ sont soit 0 soit 1 .

Généralisation

On peut généraliser cette description pour un grand nombre de fermions si on introduit pour chaque $\psi_n(x)$, où $\psi_n(x)$ indique une base complète de

fonctions donne pour une particule des opérateurs de création et destruction fermioniques tels que :

$$\{a_i, a_j\} = \{a_i^+, a_j^+\} = 0 \quad \{a_i, a_j^+\} = \delta_{ij} \quad (29)$$

L'opérateur fermionique

$$\psi(x) = \sum_n \psi_n(x) a_n$$

et son hermitien conjugué

$$\psi^+(x) = \sum_n \psi_n^*(x) a_n^+$$

satisfont les relations

$$\{\psi(x), \psi(x')\} = \{\psi^+(x), \psi^+(x')\} = 0 \quad \text{et} \quad \{\psi(x), \psi^+(x')\} = \delta(x - x'). \quad (30)$$

L'hamiltonien a la même que dans le cas scalaire

$$\mathcal{H} = \int d^3x \psi^+(x) H \psi(x) + \frac{1}{2} \int d^3x d^3y \psi^+(x) \psi^+(y) V(|x - y|) \psi(x) \psi(y). \quad (31)$$

Les états fermioniques se trouvent en appliquant a_i^+ sur le vide $a_i^+ a_j^+ \dots \dots \dots |0\rangle$

2 La théorie de Maxwell modifiée(ModMax)

2.1 Introduction

Les théories ModMax sont les seuls théories électrodynamiques non linéaire qui préserve toutes les mêmes symétries que celles de l'électrodynamiques de Maxwell à savoir l'invariance de Poincaré et l'invariant de l'espace temps ainsi que l'invariance de dualité.

La théorie ModMax correspond à une déformation de l'électrodynamique linéaire de Maxwell .

2.2 La densité hamiltonienne de ModMax

La densité hamiltonienne \mathcal{H} pour une théorie électromagnétique générique sans source dans la vide doit dépendre de l'induction magnétique \vec{B} et du courant de déplacement \vec{D} . Les équations de mouvements sont :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \wedge \vec{E} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge \vec{H} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad (32)$$

prise avec les relations constitutives :

$$\vec{E} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{D}} \quad \vec{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{B}} \quad (33)$$

où \vec{E} et \vec{H} sont respectivement le champ le électrique et le champ magnétique . Les équations du mouvement sont invariantes dans le temps et dans les translations spatiales ,alors l'intégrale sur l'espace de :

$$\dot{\mathcal{H}} = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H}) \quad \mathcal{P}_i = -\partial_j T_i^j \quad (34)$$

sont des charges conservées ,où $\mathcal{P}_i, i = \{1, 2, 3\}$ sont les composantes du moment de densité $\vec{\mathcal{P}} = \vec{D} \wedge \vec{B}$ et T_j^i sont les composantes du tenseur énergie-impulsion 3×3 définies par :

$$T_j^i = \delta_j^i (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{H} \cdot \vec{B} - \mathcal{H}) - (D^i \cdot E_j + H^i \cdot B_j), \quad (35)$$

compte tenu de l'invariance rotationnelle ,ce sont les symétries manifestées des équations de champ .L'invariance rotationnelle implique: $\vec{B} \wedge \vec{H} + \vec{D} \wedge \vec{E} = 0$

Il existe d'autres symétries qui ne sont pas manifestées dans les équations de

champ ,comme l'invariance de Lorenz .

Dans une théorie des invariants de Lorenz ,il est possible d'écrire les équations(31) sous la forme d'une équation de continuité à 4 vecteurs pour un tenseur de moment d'énergie symétrique ,si seulement si :

$$\vec{E} \wedge \vec{H} = \vec{D} \wedge \vec{B}, \quad (36)$$

ce qui est la condition pour que les équations (29) soient invariantes de Lorenz.

De l'équation (32), on peut écrire que ,

$$T_i^i = (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{H} \cdot \vec{B} - \mathcal{H}) - (D^i \cdot E_i + H^i \cdot B_i). \quad (37)$$

En exprimant les composantes contravariantes en fonction des composantes covariantes ,on a: $\mathbf{D}^i = g^{ij} \mathbf{D}_j$ et $\mathbf{H}^i = g^{ij} \mathbf{H}_j$ ou g^{ij} est le tenseur métrique 3×3 .

Par suite l'équation (34) devient :

$$T_i^i = (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{H} \cdot \vec{B} - \mathcal{H}) - g^{ij} (D_j \cdot E_i + H_j \cdot B_i). \quad (38)$$

Soit :

$$T_i^i = (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{H} \cdot \vec{B} - \mathcal{H}) - g^{ii} (D_i \cdot E_i + H_i \cdot B_i). \quad (39)$$

Par ailleurs en utilisant la signature $(- + + +)$ dans un espace temps, pour le tenseur métrique 3×3 on a: $g_j^i = \text{diag}(1, 1, 1)$. Soit donc:

$$g_i^i = 1 \quad (40)$$

L'équation (37) dans (36) donne :

$$T_i^i = (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{H} \cdot \vec{B} - \mathcal{H}) - (D_i \cdot E_i + H_i \cdot B_i). \quad (41)$$

La trace du tenseur énergie impulsion 3×3 est donnée par la relation suivante:

$$Tr(T) = g_i^i T_i^i \quad (42)$$

où $i = \{1, 2, 3\}$.

Par suite, on obtient ,

$$Tr(T) = 3(\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{H} \cdot \vec{B} - \mathcal{H}) - \sum_{i=1}^3 (D_i \cdot E_i + H_i \cdot B_i). \quad (43)$$

Soit

$$Tr(T) = 3(\vec{D}.\vec{E} + \vec{H}.\vec{B} - \mathcal{H}) - (\vec{D}.\vec{E} + \vec{H}.\vec{B})$$

$$Tr(T) = 2(\vec{D}.\vec{E} + \vec{H}.\vec{B}) - 3\mathcal{H}$$

et on peut écrire que ,

$$Tr(T) - \mathcal{H} = 2(\vec{D}.\vec{E} + \vec{H}.\vec{B} - 2\mathcal{H}) \quad (44)$$

Ainsi les conditions d'invariances conformes sont (33) et

$$\vec{D}.\vec{E} + \vec{H}.\vec{B} = 2\mathcal{H}. \quad (45)$$

Cette dernière équation(42),en terme des équations constitutive(30),signifie que la densité hamiltonienne est une fonction homogène de degré 2 en terme de \vec{D} et \vec{B} .

Enfin ,la condition d'invariance sous la dualité électromagnétique $SO(2)$,qui fait office de rotations entre les vecteurs est:

$$\vec{E}.\vec{B} = \vec{D}.\vec{H} . \quad (46)$$

Bien qu'il existe trois scalaires de rotations indépendants ,il existe au plus deux invariants de dualité

$$s = \frac{1}{2}(\vec{D}^2 + \vec{B}^2), \quad p = \vec{D}.\vec{B} \quad (47)$$

Si \mathcal{H} est un invariant de dualité ,il doit être fonction de s et p .La condition invariante de Lorenz(33) implique, en utilisant les relations constitutives (30) , on trouve :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{D}} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{B}} = \vec{D}.\vec{B}. \quad (48)$$

Soit

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \vec{D}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \vec{D}} \right) \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \vec{B}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \vec{B}} \right) = \vec{D}.\vec{B},$$

ce qui donne

$$(\mathcal{H}_s \vec{D} + \mathcal{H}_p \vec{B})(\mathcal{H}_s \vec{B} + \mathcal{H}_p \vec{D}) = \vec{D}.\vec{B} .$$

Par suite , on obtient

$$(\vec{D}.\vec{B}\mathcal{H}_s^2 + 2s\mathcal{H}_s\mathcal{H}_p + \vec{D}.\vec{B}\mathcal{H}_p^2) = \vec{D}.\vec{B}$$

et finalement , on a

$$\mathcal{H}_s^2 + \frac{2s}{p}\mathcal{H}_s\mathcal{H}_p + \mathcal{H}_p^2 = 1 \quad (49)$$

car $p = \vec{D}\vec{B}$.

Une base alternative pour les scalaires de rotation invariants de dualité est

$$u = \frac{1}{2}(s + \sqrt{s^2 - p^2}), \quad v = \frac{1}{2}(s - \sqrt{s^2 - p^2}). \quad (50)$$

Ces variables sont bien définies puisque ,

$$s^2 - p^2 = \xi^2 \geq 0 \quad (51)$$

où ξ est un invariant de rotation ,

$$\xi = \frac{1}{2}(\vec{D}^2 - \vec{B}^2) \quad (52)$$

mais ξ n'est pas un invariant de dualité .

Pour une solution de la forme $\mathcal{H} = \sqrt{K} + \text{constante}$, l'équation (46) en terme des variables (u, v) est $K_u K_v = 4K$. La solution pour $K(u, v)$ quadratique et non négatif et l'énergie nulle du vide dépendent d'un paramètre T ayant les dimensions de densité d'énergie et d'un paramètre sans dimension γ ,

$$\mathcal{H} = \sqrt{T^2 + 2T(e^{-\gamma}u + e^{\gamma}v) + 4uv} - T \quad (53)$$

Pour $\gamma = 0$, il s'agit de la densité hamiltonienne de l'électrodynamique de Born-Infeld [2] .La limite du champ fort , $T \rightarrow 0$, donne la dualité et la densité hamiltonienne invariante conforme $\mathcal{H} = p$ de l'électrodynamique de Bialynicki-Bural [4,5], pour tout γ .La tentative de trouver une densité lagrangienne échoue , puisque $\mathbf{D.E} - \mathcal{H} \equiv 0$.La limite du champ hebdomadaire , $T \rightarrow \infty$ donne la densité hamiltonienne

$$\mathcal{H} = (\cosh \gamma)s - (\sinh \gamma)\sqrt{s^2 - p^2}. \quad (54)$$

En remplaçant s et p par leurs expressions explicites données par les équations (44) , une expression équivalente de la densité hamiltonienne est ,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\cosh \gamma) \left(\vec{D}^2 + \vec{B}^2 \right) - \frac{1}{2}(\sinh \gamma) \sqrt{\left(\vec{D}^2 + \vec{B}^2 \right)^2 - 4 \left(\vec{D}.\vec{B} \right)^2}. \quad (55)$$

Il s'agit de l'extension à un paramètre de l'électrodynamique de Maxwell . Pour toute valeur de γ , cette densité hamiltonienne satisfait (42) requise pour l'invariance conforme .Bien qu'il puisse exister d'autres théorie électrodynamiques non linéaires de Lorenz et invariantes de dualité correspondant à des solution de (46) , il n'existe que deux théorie qui sont également invariantes conformes ,l'électrodynamique de Bialynicki-Bural et la famille des théories ModMax comme [6] l'a prouvé .

2.3 La densité lagrangienne de ModMax

L'existence de la densité lagrangienne ModMax peut être dérivée d'une manière simple comme l'a prouvé [7] .

Considérant le critère de Bessel-Hagen pour l'invariance conforme est [40]

$$\Theta_\mu^\mu = 0 \quad (56)$$

où Θ_μ^μ est le tenseur énergie-impulsion symétrique 4×4 .

La densité lagrangienne doit être une fonction de (S, P) , dans ce cas d'équation (53) peut être choisi comme

$$\mathcal{L}_S S + \mathcal{L}_P P = \mathcal{L}, \quad (57)$$

où $S = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, $P = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ sont des invariants de Lorenz avec $F_{\mu\nu}$ le tenseur d'intensité de champ et $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ est le tenseur dual , ensemble avec les définitions $\mathcal{L}_S S = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S}$ et $\mathcal{L}_P P = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P}$.Ainsi ,cette dernière équation montre que la densité lagrangienne est une fonction homogène de degré 1 en termes de (S, P) .

Les équations du mouvement sont

$$\partial_\mu E^{\mu\nu} = 0 \quad (58)$$

où

$$E_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F^{\mu\nu}} = - \left(\mathcal{L}_S F_{\mu\nu} + \mathcal{L}_P \tilde{F}_{\mu\nu} \right) \quad (59)$$

avec l'identité de Bianchi

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (60)$$

qui peut être utilisé pour trouver une solution $F_{\mu\nu}$ en terme de potentiel de jauge A_μ de forme 1.

Dans cette approche lagrangienne , les équations constitutives sont définis via (56) .En général , ils ne sont pas invariants dans la dualité.Le critère de Gaillard-Zumino [41] pour l'invariance sous transformation de dualité rotation est

$$\tilde{E}_{\mu\nu} E^{\mu\nu} = \tilde{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (61)$$

qui est équivalent à l'équation (43).

En utilisant (56) , l'équation (58) donne

$$\mathcal{L}_S^2 F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} - 2\mathcal{L}_S \mathcal{L}_P \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} - \mathcal{L}_P^2 F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = P \quad (62)$$

En utilisant l'identité $\tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = -F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, on trouve

$$\mathcal{L}_S^2 F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} + 2\mathcal{L}_S \mathcal{L}_P F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \mathcal{L}_P^2 F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = P. \quad (63)$$

De plus $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -4S$ et $F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = 4P$, donc l'équation (60) devient

$$4(\mathcal{L}_S^2 - \mathcal{L}_P^2) P - 8\mathcal{L}_S \mathcal{L}_P S = P. \quad (64)$$

Par ailleurs, de l'équation (54), on trouve

$$\mathcal{L}_P = \frac{\mathcal{L} - \mathcal{L}_S S}{P} \quad (65)$$

et l'équation (62) devient

$$4 \left[\mathcal{L}_S^2 - \left(\frac{\mathcal{L} - \mathcal{L}_S S}{P} \right)^2 \right] P - 8\mathcal{L}_S \left(\frac{\mathcal{L} - \mathcal{L}_S S}{P} \right) S = P \quad (66)$$

soit

$$4 [\mathcal{L}_S^2 P^2 - (\mathcal{L} - \mathcal{L}_S S)^2] - 8\mathcal{L}_S (\mathcal{L} - \mathcal{L}_S S) S = P^2. \quad (67)$$

Par suite , on obtient

$$4 [\mathcal{L}_S^2 P^2 - (\mathcal{L}^2 - 2\mathcal{L}\mathcal{L}_S S + \mathcal{L}_S^2 S^2)] - 8\mathcal{L}\mathcal{L}_S S + 8\mathcal{L}_S^2 S^2 = P^2 \quad (68)$$

soit

$$4 (\mathcal{L}_S^2 P^2 + \mathcal{L}_S^2 S^2 - \mathcal{L}^2) = P^2. \quad (69)$$

L'équation (66) peut être réécrite comme suit

$$4 \left(\sqrt{P^2 + S^2} \mathcal{L}_S - \mathcal{L} \right) \left(\sqrt{P^2 + S^2} \mathcal{L}_S + \mathcal{L} \right) = P^2 \quad (70)$$

Pour résoudre cette équation différentielle partielle non linéaire , il convient de définir

$$x = \sqrt{P^2 + S^2}, \quad y = S, \quad (71)$$

ces x et y sont des variables indépendantes partout sauf le point $P = 0$ qui est le seul point singulier de la condition Gaillard-Zumino (58) .

Puisque l'équation (54) implique que \mathcal{L} est une fonction homogène de degré 1 en termes de (S, P) , la solution de (67) est sous la forme

$$\mathcal{L} = \alpha x + \beta y \quad (72)$$

avec α et β à déterminer . En remplaçant cette dernière relation dans l'équation (67) , les valeurs de x et y peuvent être obtenues ,

$$\alpha = \pm \sinh \gamma, \quad \beta = \cosh \gamma. \quad (73)$$

La solution avec $\alpha = -\sinh \gamma$ et $y = \cosh \gamma$, $\gamma > 0$ représente la densité lagrangienne qui n'est pas limité par le bas et doit être écartée .Par conséquent , l'ensemble des densités lagrangiennes , invariantes sous transformation de groupe conforme et rotation de dualité , est donné par la famille de fonctions à un paramètre ,

$$\mathcal{L}(S, P, \gamma) = S \cosh \gamma + \sqrt{P^2 + S^2} \sinh \gamma, \quad (74)$$

où $\gamma \geq 0$

3 Oscillateur déformé $\sqrt{T\bar{T}}$ inspiré de ModMax

En identifiant $E \rightarrow \dot{q}$, $D \rightarrow p$, $B \rightarrow q$,

3.1 Oscillateur non linéaire issu d'une déformation $\sqrt{T\bar{T}}$

Nous allons construire le modèle en utilisant une déformation $\sqrt{T\bar{T}}$. Le modèle peut également être construite à partir de l'invariance d'échelle (invariance conforme). Il consiste à prendre l'oscillateur harmonique en 2D et à la déformer en ModMax. Même s'il s'agit du modèle le plus simple, nous considérons que ses détails théoriques sont pertinents pour la compréhension des systèmes non linéaires qui préservent la dualité et améliore en outre la compréhension des déformations $T\bar{T}$.

3.1.1 Déformation $\sqrt{T\bar{T}}$ dans le formalisme lagrangien

Nous effectuons des déformations $\sqrt{T\bar{T}}$ pour l'oscillateur harmonique. Tout d'abord, nous considérons le lagrangien de l'oscillateur harmonique 2D de masse $m_i = 1$ et de fréquence $w_i = 1$ pour $i = 1, 2$

$$L_0 = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - q^2) \quad (75)$$

où $\dot{q}^2 = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2$ et $q^2 = q_1^2 + q_2^2$.

En raison de la rotation et de l'invariance par translation dans le temps de l'action, il existe deux types de charges de Noether conservées définies par

$$\delta_E q^i = \dot{q}^i, \quad E_0 = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 + q^2) \quad (76)$$

$$\delta_J q^i = \epsilon^{ij} q^j, \quad J_0 = \epsilon^{ij} \dot{q}^i q^j \quad (77)$$

Afin de conserver ces symétries à tout ordre en γ , le paramètre de la déformation, nous définissons les grandeurs conservées E_n et J_n qui sont l'énergie et le moment cinétique de l'action déformée à l'ordre n . Puis nous définissons l'opérateur de type $T\bar{T}$ d'ordre n

$$O_n^\gamma = \sqrt{E_n^2 + J_n^2}. \quad (78)$$

C'est l'analogie de l'opérateur de type $T\bar{T}$ utilisé dans [23,24,30] déformer le Maxwell en théorie ModMax.

Le lagrangien déformé d'ordre $n+1$ est défini par l'équation d'écoulement

$$L_{n+1} = L_0 + \int d\gamma O_n^\gamma, \quad (79)$$

alors la déformation du premier ordre du lagrangien

$$L_1 = L_0 + \gamma \sqrt{E_0^2 - J_0^2} \quad (80)$$

qui est invariant sous les symétries $\delta_E q^i$ et $\delta_J q^i$. Alors les quantités conservées déformées sont

$$E_1 = E_0 \left(1 + \frac{L_0 \gamma}{\sqrt{E_0^2 - J_0^2}} \right) \quad (81)$$

$$J_1 = J_0 \left(1 + \frac{L_0 \gamma}{\sqrt{E_0^2 - J_0^2}} \right) \quad (82)$$

Maintenant , nous pouvons calculer l'opérateur O_1^γ

$$O_1^\gamma = \sqrt{E_1^2 - J_1^2} = \sqrt{E_0^2 - J_0^2} + \gamma L_0, \quad (83)$$

donc le lagrangien du second ordre est :

$$L_2 = L_0 + \int d\gamma O_1^\gamma. \quad (84)$$

Soit

$$L_2 = L_0 + \gamma \sqrt{E_0^2 - J_0^2} + \frac{1}{2} \gamma^2 L_0. \quad (85)$$

Puisque $\delta_E q^i$ et $\delta_J q^i$ sont toujours des symétries de l'action , nous obtenons les quantités conservée du deuxième ordre

$$E_2 = E_0 \left(1 + \frac{L_0 \gamma}{\sqrt{E_0^2 - J_0^2}} + \frac{1}{2} \gamma^2 L_0 \right) \quad (86)$$

$$J_2 = J_0 \left(1 + \frac{L_0 \gamma}{\sqrt{E_0^2 - J_0^2}} + \frac{1}{2} \gamma^2 L_0 \right) \quad (87)$$

et l'opérateur de type $T\bar{T}$ du deuxième ordre est

$$O_2^\gamma = \sqrt{E_2^2 - J_2^2}, \quad (88)$$

soit

$$O_2^\gamma = \sqrt{E_0^2 - J_0^2} + \gamma L_0 + \frac{1}{2} \gamma^2 \sqrt{E_0^2 - J_0^2}. \quad (89)$$

Le lagrangien du troisième ordre est donnée par la relation suivante ,

$$L_3 = L_0 + \int d\gamma O_2^\gamma \quad (90)$$

soit

$$L_3 = L_0 + \gamma \sqrt{E_0^2 - J_0^2} + \frac{1}{2} \gamma^2 L_0 + \frac{1}{3!} \sqrt{E_0^2 - J_0^2}. \quad (91)$$

Par récurrence ,il est simple de montrer que la déformation d'ordre n en fonction lagrangienne est ,

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{\gamma^{2n}}{(2n)!} \right) L_0 + \left(\frac{\gamma^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \sqrt{E_0^2 - J_0^2} \right]. \quad (92)$$

Par ailleurs en faisant le développement en série de Taylor de $\cosh \gamma$ et de $\sinh \gamma$ on obtient ,

$$\cosh \gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^{2n}}{(2n)!} \quad \sinh \gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (93)$$

Alors l'équation (70) devient

$$L = L_0 \cosh \gamma + \sqrt{E_0^2 - J_0^2} \sinh \gamma, \quad (94)$$

et les symétries $\delta_E q^i$ et $\delta_J q^i$ génèrent les quantités conservées .

$$E = E_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{\gamma^{2n}}{(2n)!} \right) + \frac{\gamma^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{L_0}{\sqrt{E_0^2 - J_0^2}} \right] = E_0 \left(\cosh \gamma + \frac{L_0 \sinh \gamma}{E_0^2 - J_0^2} \right) \quad (95)$$

$$J = J_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{\gamma^{2n}}{(2n)!} \right) + \frac{\gamma^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{L_0}{\sqrt{E_0^2 - J_0^2}} \right] = J_0 \left(\cosh \gamma + \frac{L_0 \sinh \gamma}{E_0^2 - J_0^2} \right). \quad (96)$$

Il est important de souligner que l'énergie et le moment cinétique de la théorie sont respectivement E et J .La fonction lagrangienne n'est pas l'énergie du système dynamique comme nous le verrons plus tard .

Pour toutes ordres , l'opérateur de type $T\bar{T}$ est

$$O_\gamma = \sum_{k=0}^{max} \left[\left(\frac{\gamma^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) L_0 + \left(\frac{\gamma^{2n}}{(2n)!} \right) \sqrt{E_0^2 - J_0^2} \right] \quad (97)$$

qui est solution de l'équation d'écoulement

$$\frac{dS_{NL}}{d\gamma} = \int dt O_\gamma \quad (98)$$

avec $S_{NL} = \int dt L$.

Si on utilise les définitions

$$S = \frac{1}{2} (\dot{q}^2 - q^2) \quad P = \dot{q} \cdot q, \quad (99)$$

on remarque que

$$S = L_0 \quad E_0^2 - J_0^2 = S^2 + P^2. \quad (100)$$

Ainsi la fonction lagrangienne déformée est

$$L = S \cosh \gamma + \sqrt{S^2 + P^2} \sinh \gamma. \quad (101)$$

De plus en considérant l'équation (78) et $L_0 = \frac{1}{2} (\dot{q}^2 - q^2)$, on a

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} (\dot{q}^2 - q^2) \cosh \gamma + \sqrt{E_0^2 - J_0^2} \sinh \gamma \\ L &= \frac{1}{2} [(\dot{q}^2 + q^2) - q^2] \cosh \gamma + \sqrt{E_0^2 - J_0^2} \sinh \gamma \end{aligned}$$

soit

$$L = \frac{1}{2} (\dot{q}^2 + q^2) \cosh \gamma + \sqrt{E_0^2 - J_0^2} \sinh \gamma - q^2 \cosh \gamma. \quad (102)$$

En termes de E_0 et J_0 , nous pouvons écrire la fonction lagrangienne comme

$$L_0 = E_0 \cosh \gamma + \sqrt{E_0^2 - J_0^2} \sinh \gamma - q^2 \cosh \gamma \quad (103)$$

3.1.2 Déformations \sqrt{TT} dans le formalisme hamiltonien

Pour implémenter la déformation dans le formalisme hamiltonien, nous commençons par les quantités conservées, puis calculons les symétries de Noether et nous utilisons les quantités conservées déformées qui viennent d'être construites. Afin de construire les déformations ordre par ordre en γ comme dans le cas lagrangien, on part de l'oscillateur harmonique et de ses quantités conservées,

$$H_0 = \frac{1}{2} (\dot{q}^2 + q^2), \quad (104)$$

$$s_0 = \frac{1}{2} (p^2 + q^2) \quad j_0 = \epsilon^{ij} p^i q^j, \quad (105)$$

où $p^2 = p_1^2 + p_2^2$ et $q^2 = q_1^2 + q_2^2$ pour $i = \{1, 2, 3\}$. Les quantités conservées s_0 et j_0 ne sont que des générateurs hamiltoniens de la dualité et des symétries de rotation,

$$\delta_{s_0} q^i = [q^i, s_0] = p^i \quad \delta_{j_0} p^i = [p^i, j_0] = -q^i, \quad (106)$$

$$\delta_{j_0} q^i = [q^i, j_0] = \epsilon^{ij} q^j \quad \delta_{j_0} p^i = [p^i, j_0] = -\epsilon^{ij} p^j. \quad (107)$$

Il est important de noter que s_0 coincide avec l'énergie du système d'ordre zéro en γ . Néanmoins à l'ordre $n > 0$, s_0 n'est pas l'énergie mais est toujours la quantité conservée associée à la symétrie de dualité.

Afin de garder s_0 et j_0 comme les générateurs hamiltoniens de la dualité et de la symétrie de la rotation, nous définissons l'opérateur hamiltonien d'ordre n de type $T\bar{T}$ comme

$$O_n^\gamma = \sqrt{s_n^2 - j_n^2}. \quad (108)$$

L'hamiltonien déformé est défini comme

$$H_{n+1} = s_0 - \int d\gamma O_n^\gamma. \quad (109)$$

La déformation du premier ordre de la fonction hamiltonienne est alors

$$H_1 = s_0 - \gamma \sqrt{s_0^2 - j_0^2} \quad (110)$$

Dans un second temps, nous proposons s_1 et j_1 en termes de s_0 et j_0 de la manière suivante

$$s_1 = s_0 \left(1 - \frac{s_0 \gamma}{\sqrt{s_0^2 - j_0^2}} \right) \quad (111)$$

$$j_1 = j_0 \left(1 - \frac{s_0 \gamma}{\sqrt{s_0^2 - j_0^2}} \right) \quad (112)$$

s_1 et j_1 sont des quantités conservées du système car s_0 et j_0 sont conservées. En utilisant le théorème de Noether, nous calculons les symétries déformées générées par s_1 et j_1

$$\delta_{s_1} q^i = \frac{\partial}{\partial p^i} \left(s_0 \left[1 - \frac{s_0 \gamma}{\sqrt{s_0^2 - j_0^2}} \right] \right), \quad \delta_{s_1} p^i = -\frac{\partial}{\partial q^i} \left(s_0 \left[1 - \frac{s_0 \gamma}{\sqrt{s_0^2 - j_0^2}} \right] \right) \quad (113)$$

$$\delta_{j_1} q^i = \frac{\partial}{\partial p^i} \left(j_0 \left[1 - \frac{s_0 \gamma}{\sqrt{s_0^2 - j_0^2}} \right] \right), \quad \delta_{j_1} p^i = -\frac{\partial}{\partial q^i} \left(j_0 \left[1 - \frac{s_0 \gamma}{\sqrt{s_0^2 - j_0^2}} \right] \right), \quad (114)$$

qui correspondent à la dualité et aux symétries déformées par rotation.

Nous construisons maintenant l'opérateur $T\bar{T}$ du premier ordre

$$O_1^\gamma = \sqrt{s_1^2 - j_1^2}, \quad (115)$$

soit

$$O_1^\gamma = \sqrt{s_0^2 - j_0^2} - \gamma s_0 \quad (116)$$

et la fonction hamiltonienne du second ordre est

$$H_2 = s_0 - \int d\gamma O_1^\gamma \quad (117)$$

$$H_2 = s_0 - \int d\gamma \left(\sqrt{s_0^2 - j_0^2} - \gamma s_0 \right)$$

$$H_2 = s_0 - \gamma \sqrt{s_0^2 - j_0^2} + \frac{1}{2} \gamma^2 s_0. \quad (118)$$

Afin de construire l'opérateur de type $T\bar{T}$ du second ordre ,nous proposons les quantités conservées s_2 et j_2 en terme de s_0 et j_0 comme suit

$$s_2 = s_0 \left(1 - \frac{s_0 \gamma}{\sqrt{s_0^2 - j_0^2}} + \frac{1}{2} \gamma^2 \right), \quad (119)$$

$$j_2 = j_0 \left(1 - \frac{s_0 \gamma}{\sqrt{s_0^2 - j_0^2}} + \frac{1}{2} \gamma^2 \right), \quad (120)$$

ces quantités conservées génèrent les symétries déformées

$$\delta_{s_2} q^i = \frac{\partial}{\partial p^i} \left(s_0 \left[1 - \frac{s_0 \gamma}{\sqrt{s_0^2 - j_0^2}} + \frac{1}{2} \gamma^2 \right] \right), \quad \delta_{s_2} p^i = -\frac{\partial}{\partial q^i} \left(s_0 \left[1 - \frac{s_0 \gamma}{\sqrt{s_0^2 - j_0^2}} + \frac{1}{2} \gamma^2 \right] \right) \quad (121)$$

$$\delta_{j_2} q^i = \frac{\partial}{\partial p^i} \left(j_0 \left[1 - \frac{s_0 \gamma}{\sqrt{s_0^2 - j_0^2}} + \frac{1}{2} \gamma^2 \right] \right), \quad \delta_{j_2} p^i = -\frac{\partial}{\partial q^i} \left(j_0 \left[1 - \frac{s_0 \gamma}{\sqrt{s_0^2 - j_0^2}} + \frac{1}{2} \gamma^2 \right] \right), \quad (122)$$

qui à leur tour sont la dualité déformée et les symétries de rotations .

L'opérateur du type $T\bar{T}$ du deuxième ordre est

$$O_2^\gamma = \sqrt{s_2^2 - j_2^2} \quad (123)$$

soit

$$O_2^\gamma = \sqrt{s_0^2 - j_0^2} - \gamma s_0 + \frac{1}{2} \gamma^2 \sqrt{s_0^2 - j_0^2}. \quad (124)$$

En continuant avec les même étapes ,la fonction hamiltonienne du troisième ordre est

$$H_3 = s_0 - \gamma \sqrt{s_0^2 - j_0^2} + \frac{1}{2} \gamma^2 s_0 - \frac{1}{3!} \gamma^3 \sqrt{s_0^2 - j_0^2}. \quad (125)$$

Par récurrence , nous prouvons que lafonctipn..... est

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{\gamma^{2n}}{(2n)!} \right) s_0 + \left(\frac{\gamma^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \sqrt{s_0^2 - j_0^2} \right], \quad (126)$$

soit

$$H = s_0 \cosh \gamma + \sqrt{s_0^2 - j_0^2} \sinh \gamma. \quad (127)$$

qui a été construite en utilisant l'énergie déformée s_0 et le moment cinétique j

$$s = s_0 \left(\cosh \gamma - \frac{s_0 \sinh \gamma}{\sqrt{s_0^2 - j_0^2}} \right) \quad (128)$$

$$j = j_0 \left(\cosh \gamma - \frac{s_0 \sinh \gamma}{\sqrt{s_0^2 - j_0^2}} \right). \quad (129)$$

En raison de la symétrie d'échelle sous-jacente , nous avons la relation suivante :

$$\frac{s}{j} = \frac{s_0}{j_0}. \quad (130)$$

Ces quantités conservées génèrent les symétries déformées

$$\delta_s q^i = \frac{\partial}{\partial p^i} \left(s_0 \left[\cosh \gamma - \frac{s_0 \sinh \gamma}{\sqrt{s_0^2 - j_0^2}} \right] \right), \quad \delta_s p^i = -\frac{\partial}{\partial q^i} \left(s_0 \left[\cosh \gamma - \frac{s_0 \sinh \gamma}{\sqrt{s_0^2 - j_0^2}} \right] \right), \quad (131)$$

$$\delta_j q^i = \frac{\partial}{\partial p^i} \left(j_0 \left[\cosh \gamma - \frac{s_0 \sinh \gamma}{\sqrt{s_0^2 - j_0^2}} \right] \right), \quad \delta_j p^i = -\frac{\partial}{\partial q^i} \left(j_0 \left[\cosh \gamma - \frac{s_0 \sinh \gamma}{\sqrt{s_0^2 - j_0^2}} \right] \right). \quad (132)$$

Les quantités conservées s et j peuvent être utilisées pour construire un opérateur de type $T\bar{T}$ qui déforment les oscillateurs harmoniques aux oscillateurs non linéaires en utilisant l'équation d'écoulement

$$H = - \int d\gamma O^\gamma$$

où

$$O^\gamma = -s_0 \sinh \gamma + \sqrt{s_0^2 - j_0^2} \cosh \gamma. \quad (133)$$

Par suite l'équation, la fonction lagrangienne est ,

$$H = - \int d\gamma \left(-s_0 \sinh \gamma + \sqrt{s_0^2 - j_0^2} \cosh \gamma \right) \quad (134)$$

soit

$$H = s_0 \cosh \gamma - \sqrt{s_0^2 - j_0^2} \sinh \gamma. \quad (135)$$

Dans la suite , nous utiliserons à la place de s_0 , j_0 juste s , j et donc la fonction hamiltonienne est

$$H = s \cosh \gamma - \sqrt{s^2 - j^2} \sinh \gamma. \quad (136)$$

3.2 Intégration du système hamiltonien

Nous discutons maintenant de la manière d'utiliser les quantités conservées s et j pour intégrer le système hamiltonien .Comme on le sait , lorsque nous avons n degrés de liberté, le système physique à besoin de n quantités conservées en involution pour être intégrable [36] .Ainsi grâce à la connaissance de s et j , nous avons puis intégrer le système .

Il est facile de prouver que nos oscillateurs non linéaires possèdent deux quantités conservées en involution qui peuvent être utilisé pour une intégration analytique explicite des équations de Hamilton du mouvement .

Dans le formalisme de hamiltonien ,certains aspects peuvent être simplifiés .La condition conforme , comme dans ModMax , implique que la fonction hamiltonienne (114) est une fonction homogène de degré 1 en terme de (i, j) ,

$$H(s, j) = \frac{\partial H}{\partial s} s + \frac{\partial H}{\partial j} j. \quad (137)$$

Alors les équations de Hamilton sont ,

$$\begin{aligned} \dot{p}^i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} = - \left(\cosh \gamma - \frac{s \sinh \gamma}{\sqrt{s^2 - j^2}} \right) q^i + \frac{j \epsilon^{ij} p^j \sinh \gamma}{\sqrt{s^2 - j^2}} \\ \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p^i} = \left(\cosh \gamma - \frac{s \sinh \gamma}{\sqrt{s^2 - j^2}} \right) p^i + \frac{j \epsilon^{ij} \sinh \gamma}{\sqrt{s^2 - j^2}}. \end{aligned} \quad (138)$$

Il est simple de monter que s et j sont des quantités conservées en involution, c'est-à-dire

$$\{s, j\} = \{J, H\} = \{s, H\} = 0 \quad (139)$$

où $\{F, G\}$ désigne le crochet de Poisson .

En utilisant ce fait ,nous pouvant définir deux quantités conservées

$$A \equiv \cosh \gamma - \frac{s \sinh \gamma}{\sqrt{s^2 - j^2}} \quad B \equiv \frac{j \sinh \gamma}{\sqrt{s^2 - j^2}} \quad (140)$$

qui sont aussi en involution

$$\{A, B\} = \{A, H\} = \{B, H\} = 0. \quad (141)$$

En termes de ces quantités ,les équations de Hamilton peuventêtre réécrites comme

$$\begin{aligned} \dot{p}^i &= -Aq^i + B\epsilon^{ij}p^j, \\ \dot{q}^i &= Ap^i + B\epsilon^{ij}q^j, \end{aligned} \quad (142)$$

Ainsi, sur la surface définie par les constantes A et B , les équations hamiltoniennes non linéaires ne sont que des équations linéaires !

Nous pouvons réécrire les équations différentielles dans une notation matricielle comme

$$\begin{pmatrix} \dot{p}^i \\ \dot{q}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B\epsilon^{ij} & -A\delta^{ij} \\ A\delta^{ij} & B\epsilon^{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^j \\ q^j \end{pmatrix}, \quad C^{ab} \equiv \begin{pmatrix} B\epsilon^{ij} & -A\delta^{ij} \\ A\delta^{ij} & B\epsilon^{ij} \end{pmatrix}, \quad z^a \equiv \begin{pmatrix} p^j \\ q^j \end{pmatrix}, \quad (143)$$

avec $a, b = \{1, 2, 3\}$. Sur la surface définie par les constantes A et B , les solutions du système sont obtenues en l'exponentielle de la matrice C

$$\dot{z}^a = D^{ab}z_0^b, \quad D^{ab} = (e^{Ct})^{ab} \quad (144)$$

où z_0^b sont les conditions initiales .

Une propriété remarquable de cette dynamique est que la matrice C^{ab} admet une décomposition en terme de deux matrices respectivement C_A et C_B ,

$$C^{ab} = \begin{pmatrix} B\epsilon^{ij} & -A\delta^{ij} \\ A\delta^{ij} & B\epsilon^{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -A\delta^{ij} \\ A\delta^{ij} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B\epsilon^{ij} & 0 \\ 0 & B\epsilon^{ij} \end{pmatrix}. \quad (145)$$

Ces matrices commutes entre elles et l'exponentielle de C est l'exponentielle de C_A multipliée par l'exponentielle de C_B ,

$$D^{ab} = (e^{C_A t} e^{C_B t})^{ab}, \quad D_A \equiv e^{C_A t}, \quad D_B \equiv e^{C_B t}. \quad (146)$$

Nous observons ensuite que que la dynamique de notre système est la même que celle de deux oscillateurs couplés de fréquences A et B (que

nous fixons désormais sous forme de nombres correspondant aux données initiale). La construction explicite est alors

$$D_A^{ab} z_0^b = e^{C_A t} \begin{pmatrix} p_0^i \\ q_0^i \end{pmatrix} \quad (147)$$

et

$$D_B^{ab} z_0^b = e^{C_B t} \begin{pmatrix} p_0^i \\ q_0^i \end{pmatrix}. \quad (148)$$

Par ailleurs, pour $i = j$,

$$C_A = \begin{pmatrix} 0 & -A \\ A & 0 \end{pmatrix} \quad (149)$$

et

$$e^{C_A t} = \begin{pmatrix} \cos(At) & -\sin(At) \\ \sin(At) & \cos(At) \end{pmatrix}, \quad (150)$$

. l'équation (147) devient

$$D_A^{ab} z_0^b = \begin{pmatrix} \cos(At) & -\sin(At) \\ \sin(At) & \cos(At) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0^i \\ q_0^i \end{pmatrix}$$

soit

$$D_A^{ab} z_0^b = \begin{pmatrix} p_0^i \cos(At) - q_0^i \sin(At) \\ q_0^i \cos(At) + p_0^i \sin(At) \end{pmatrix}, \quad (151)$$

De façon analogue pour $i \neq j$, on obtient

$$D_B^{ab} z_0^b = \begin{pmatrix} p_0^i \cos(Bt) + \epsilon^{ij} p_0^j \sin(Bt) \\ q_0^i \cos(Bt) + \epsilon^{ij} q_0^j \sin(Bt) \end{pmatrix}. \quad (152)$$

Notons que les deux oscillateurs ne sont pas les mêmes dans l'espace des phases.

Les solutions du système sont

$$\begin{aligned} p^i(t) &= \cos(At) [p_0^i \cos(Bt) + \epsilon^{ij} p_0^j \sin(Bt)] - \sin(At) [q_0^i \cos(Bt) + \epsilon^{ij} q_0^j \sin(Bt)] \\ q^i(t) &= \sin(At) [p_0^i \cos(Bt) + \epsilon^{ij} p_0^j \sin(Bt)] + \cos(At) [q_0^i \cos(Bt) + \epsilon^{ij} q_0^j \sin(Bt)] \end{aligned} \quad (153)$$

où p_0^i et q_0^i sont les conditions initiales. Ces relations sont la solution générale du système (116) et correspondent à deux oscillateurs couplés de fréquences A et B respectivement.

3.3 Transformation de Legendre

Comme cela a été montré dans [6] , la transformation de Legendre dans la théorie ModMax doit être implémentée avec précaution .En raison du comportement non linéaire de la théorie , la tâche consistant à inverser les vitesses en termes de variables de quantité de mouvement est fastidieuse .Une tâche plus simple consiste à implémenter la transformation de Legendre sur la surface des constantes A et B car le système est linéaire sur cette dernière (cf.équation(120)).

Tout d'abord , considérons la fonction hamiltonienne ,

$$H(q, p) = \frac{1}{2}A(q, p) (p^2 + q^2) + B\epsilon^{ij}p^i q^j, \quad (154)$$

et nous prenons A et B comme des constantes.Les équations hamiltoniennes sont

$$\begin{aligned} \dot{p}^i &= -Aq^i + B\epsilon^{ij}p^j, \\ \dot{q}^i &= Ap^i + B\epsilon^{ij}q^j, \end{aligned} \quad (155)$$

la substitution de A et B par leurs définitions en termes de variables de l'espace des phases données par l'équation (118) dans l'équation (129) conduit à la fonction hamiltonienne non linéaire (114).Une propriété remarquable de cet hamiltonien est que nous pouvons le récupérer à partir des équations complètes du mouvement .Nous pouvons maintenant inverser les variables de quantité de mouvement en termes d'espace de configuration ,

$$p^i = \frac{1}{A}\dot{q}^i - \frac{B}{A}\epsilon^{ij}q^j, \quad (156)$$

et sur la surface des constantes A et B la fonction lagrangienne est ,

$$L = \frac{1}{2A} [\dot{q}^2 - (A^2 - B^2) q^2] - \frac{B}{A}\epsilon^{ij}\dot{q}^i q^j \quad (157)$$

qui est cohérente en tenant compte de la définition l'impulsion(131). En considérant la notation

$$\sigma \equiv \frac{1}{2} (\dot{q}^2 + q^2) = E_0 \quad \rho \equiv \epsilon^{ij}\dot{q}^i q^j = J_0 \quad (158)$$

où E_0 et J_0 sont en termes de \dot{q}, q (quations(54), (55)). Nous pouvons définir les fonctions C_1 et C_2

$$C_1 \equiv \cosh \gamma + \frac{\sigma \sinh \gamma}{\sqrt{\sigma^2 - \rho^2}} \quad C_2 \equiv -\frac{\rho \sinh \gamma}{\sqrt{\sigma^2 - \rho^2}}. \quad (159)$$

Par suite la fonction lagrangienne (79) devient ,

$$L(\dot{q}, q) = C_1(\dot{q}, q)\sigma(\dot{q}, q) + C_2(\dot{q}, q)\epsilon^{ij}q^j. \quad (160)$$

Maintenant , nous définissons l'impulsion par

$$p^i = C_1(\dot{q}, q)\dot{q}^i + C_2(\dot{q}, q)\epsilon^{ij}q^j. \quad (161)$$

Cette définition de l'impulsion est cohérente avec le lagrangien de départ en de termes (\dot{q}, q) . Cette propriété vient du fait que le lagrangien est une fonction homogène de degré un en termes de σ et ρ . En exigeant la cohérence entre l'impulsion hamiltonienne (131) et l'impulsion lagrangienne (136) nous remarquons que la transformation implicite de Legendre est

$$C_1(\dot{q}, q) = \frac{1}{A} \quad C_2(\dot{q}, q) = -\frac{B}{A}, \quad (162)$$

et en utilisant ces identités , nous pouvons prouver que la fonction lagrangienne (132) correspond à la fonction lagrangienne (135) , la fonction lagrangienne non linéaire complète .

Nous avons donc implémenter la transformation de Legendre sur la surface définie par les constantes A et B . Etant donné que A et B sont des constantes de mouvement dans l'espace des phases, C_1 et C_2 sont également conservés dans l'espace de configuration . Notons également que bien que C_1 et C_2 soient conservés , σ et ρ ne le sont pas .

3.4 Intégration du système lagrangien

Nous disposons désormais de tous les outils nécessaire pour montrer l'intégration complète des équations lagrangiennes du mouvement . Comme dans le formalisme hamiltonien , on utilise les quantités conservées au niveau de l'équation du mouvement pour intégrer le système .

A partir du lagrangien (80) ,

$$L = \frac{1}{2} (\dot{q}^2 + q^2) \cosh \gamma + \sqrt{E_0^2 - J_0^2} \sinh \gamma - q^2 \cosh \gamma, \quad (163)$$

en utilisant ρ et σ comme dans (133) , nous obtenons

$$L = \sigma \cosh \gamma + \sqrt{\sigma^2 - \rho^2} \sinh \gamma - q^2 \cosh \gamma, \quad (164)$$

, puis nous définissons

$$\bar{L} = \sigma \cosh \gamma + \sqrt{\sigma^2 - \rho^2} \sinh \gamma, \quad (165)$$

qui est une fonction de degré 1 en (ρ, σ) . Ainsi on a la relation suivante

$$\bar{L} = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \sigma} \sigma + \frac{\partial \bar{L}}{\partial \rho} \rho, \quad (166)$$

et la fonction lagrangienne complète est

$$L = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \sigma} \sigma + \frac{\partial \bar{L}}{\partial \rho} \rho - q^2 \cosh \gamma. \quad (167)$$

De la définition des impulsions conjuguées

$$p^i = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \rho} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \sigma} + \frac{\partial L}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial L}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \dot{q}^i}, \quad (168)$$

nous pouvons prouver que

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \rho} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \sigma} = 0 \quad (169)$$

Ainsi, si l'on définit

$$C_1 = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \sigma} \quad C_2 = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \rho}, \quad (170)$$

on obtient respectivement les expressions du lagrangien et de l'impulsion

$$L = C_1(\dot{q}, q) \sigma(\dot{q}, q) + C_2(\dot{q}, q) \rho(\dot{q}, q) - q^2 \cosh \gamma, \quad (171)$$

$$p^i = C_1(\dot{q}, q) \dot{q}^i + C_2(\dot{q}, q) \epsilon^{ij} q^j \quad (172)$$

où il semble que nous pouvons dériver par rapport à \dot{q}^i sans tenir compte de la dépendance de C_1 et C_2 sur \dot{q}^i . D'après l'équation d'Euler-Lagrange, on a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad (173)$$

soit

$$\frac{dp^i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q^i}, \quad (174)$$

car $p^i = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right)$.

Par suite, l'équation (149) implique

$$\dot{C}_1 \dot{q}^i + \dot{C}_2 \epsilon^{ij} q^j + C_1 \ddot{q}^i + C_2 \epsilon^{ij} \ddot{q}^j = \frac{\partial C_1}{\partial q^i} \sigma + \frac{\partial C_2}{\partial q^i} \rho + \frac{C_2^2 - 1}{C_1} q^i - C_2 \epsilon^{ij} \dot{q}^j. \quad (175)$$

En tenant compte de la dérivée temporelle de C_1 et C_2 , on peut rassembler les termes avec \ddot{q}^i

$$\left(C_1 \delta^{ki} + \frac{\partial C_1}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^i + \frac{\partial C_2}{\partial \dot{q}^k} \epsilon^{ij} q^j \right) \ddot{q}^k = -\frac{\partial C_1}{\partial q^k} \dot{q}^k \dot{q}^i - \frac{\partial C_2}{\partial q^k} \dot{q}^k \epsilon^{ij} q^j + \frac{\partial C_1}{\partial q^i} \sigma + \frac{\partial C_2}{\partial q^i} \rho + \frac{C_2^2 - 1}{C_1} q^i - 2C_2 \epsilon^{ij} \dot{q}^j. \quad (176)$$

Il est simple de prouver que

$$\frac{\partial C_1}{\partial q^i} \sigma + \frac{\partial C_2}{\partial q^i} \rho = 0, \quad (177)$$

et en identifiant

$$W^{ik} = C_1 \delta^{ki} + \frac{\partial C_1}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^i + \frac{\partial C_2}{\partial \dot{q}^k} \epsilon^{ij} q^j, \quad (178)$$

alors les équations du mouvement sont

$$W^{ik} \ddot{q}^k = -\frac{\partial C_1}{\partial q^k} \dot{q}^k \dot{q}^i - \frac{\partial C_2}{\partial q^k} \dot{q}^k \epsilon^{ij} q^j + \frac{C_2^2 - 1}{C_1} q^i - 2C_2 \epsilon^{ij} \dot{q}^j. \quad (179)$$

Cette équation peut être considérablement simplifiée sur la surface des constantes C_1 et C_2 ,

$$\ddot{q}^k = \frac{C_2^2 - 1}{C_1^2} q^i - 2\frac{C_2}{C_1} \epsilon^{ij} \dot{q}^j. \quad (180)$$

En particulier ces équations différentielles sont linéaires sur la surface définie par les constantes C_1 et C_2 , et la solution est

$$q^i(t) = \cos\left(\frac{1}{C_1}t\right) \left[q_0^i \cos\left(\frac{C_2}{C_1}t\right) - \epsilon^{ij} q_0^j \sin\left(\frac{C_2}{C_1}t\right) \right] + \sin\left(\frac{1}{C_1}t\right) \left[\left(C_1 \dot{q}_0^i + C_2 \epsilon^{ij} q_0^j \right) \cos\left(\frac{C_2}{C_1}t\right) - \epsilon^{ij} (C_1 \dot{q}_0^j + C_2 \epsilon^{kj} q_0^k) \sin\left(\frac{C_2}{C_1}t\right) \right]. \quad (181)$$

On remarque qu'en utilisant la définition de l'impulsion () les solutions hamiltoniennes () sont cohérentes avec (). Ce fait est une autre vérification que notre transformation de Legendre sur la surface définie par les constantes A et B , ou de manière équivalente par les constantes C_1 et C_2 , est cohérente.

Il est intéressant de noter que la forme fonctionnelle des fonctions hamiltonienne et lagrangienne en termes de (s, p) et (S, P) respectivement sont les mêmes que les densités hamiltonienne et lagrangienne de ModMax [6, 7].

3.5 Une carte de déformation

Dans cette partie , nous montrerons comment construire une carte depuis l'oscillateur harmonique 2D vers l'oscillateur couplé non linéaire .

A partir d'un oscillateur 2D de masse $m = 1$ et de fréquence $w = 1$

$$H_0 = \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + \hat{q}^2) \quad (182)$$

on définit les nouvelles variables \hat{p}_i, \hat{q}_i et en utilisant la notation matricielle ,on a

$$\begin{pmatrix} \hat{p}_i \\ \hat{q}_i \end{pmatrix} = \mathbf{M}(\gamma) \begin{pmatrix} p^j \\ q^j \end{pmatrix} \quad (183)$$

où

$$\mathbf{M}(\gamma) = \begin{pmatrix} B(q, p, \gamma)\epsilon^{ij} & -A(q, p, \gamma)\delta^{ij} \\ A(q, p, \gamma)\delta^{ij} & B(q, p, \gamma)\epsilon^{ij} \end{pmatrix} \quad (184)$$

Comme A et B sont des fonctions de q, p, γ , la carte de déformation est tout à fait non linéaire .Mais sur la surface des constantes A et B , la carte semble linéaire .Cette cartographie est très puissante car, en une seule étape, elle implémente la déformation de l'oscillateur harmonique (157) en oscillateur non linéaire complet en 2γ

$$H(q, p, 2\gamma) = \frac{1}{2} (A^2(q, p, \gamma) + B^2(q, p, \gamma)) (\mathbf{p}^2 + \mathbf{q}^2) + 2A(q, p, \gamma)B(q, p, \gamma)\epsilon^{ij}p^i q^j. \quad (185)$$

En faisant le calcul explicite prenant en compte la dépendance fonctionnelle de A et B en termes de q, p, γ , on trouve

$$H(q, p, 2\gamma) = \frac{1}{2}A(q, p, \gamma) (\mathbf{p}^2 + \mathbf{q}^2) + B(q, p, \gamma)\epsilon^{ij}p^i q^j, \quad (186)$$

ainsi cette cartographie fait le travail de la déformation $T\bar{T}$ en une seule étape.Mais noton qu'ici la déformation est obtenue en 2γ .

Dans le formalisme lagrangien ,la même peut même implémentée .En considérant le lagragien donné par l'équation (132),on a

$$L = \frac{1}{2A} [\dot{q}^2 - (A^2 - B^2) q^2] - \frac{B}{A}\epsilon^{ij}\dot{q}^i q^j \quad (187)$$

or $C_1 = \frac{1}{A}$ et $C_2 = -\frac{B}{A}$ alors

$$L = \frac{1}{2}C_1 \left(\dot{q}^2 + \frac{C_2^2 - 1}{C_1^2} \right) + C_2\epsilon^{ij}\dot{q}^i q^j. \quad (188)$$

En utilisant la notation matricielle , on trouve

$$L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{q}^i \\ q^i \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} C_1 \delta^{ij} & C_2 \epsilon^{ij} \\ -C_2 \epsilon^{ij} & \frac{C_2^2 - 1}{C_1} \delta^{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}^j \\ q^j \end{pmatrix}. \quad (189)$$

Maintenant, nous définissons les matrices et le vecteur

$$M^{ab} = \begin{pmatrix} -C_2 \epsilon^{ij} & \frac{C_2^2 - 1}{C_1} \delta^{ij} \\ C_1 \delta^{ij} & C_2 \epsilon^{ij} \end{pmatrix}, \quad g^{ab} = \begin{pmatrix} \delta^{ij} & 0 \\ 0 & -\delta^{ij} \end{pmatrix}, \quad v^a = \begin{pmatrix} \dot{q}^i \\ q^i \end{pmatrix} \quad (190)$$

avec $i = 1, 2$ et $a, b = 1, 2, 3, 4$. En utilisant ces définitions , on trouve

$$L[v; 2\gamma] = -\frac{1}{2} (v^T)^a (M^{T(\gamma)})^{ab} g^{bc} M^{cd}(\gamma) v^b, \quad (191)$$

où $M(\gamma)$ est la matrice M évaluée sur γ . Ensuite , en identifiant un ensemble de variables

$$\hat{v}^a = M^{ab}(\gamma) v^b. \quad (192)$$

En utilisant ces nouvelles variables (167), le lagrangien(166) s'écrit

$$L[\hat{v}; 2\gamma] = -\frac{1}{2} (\hat{v})^a g^{ab} \hat{v}^b \quad (193)$$

Ce dernier résultat est le lagrangien de l'oscillateur harmonique en 2D .Nous sommes donc partis du lagrangien non linéaire complet pour obtenir le lagrangien de l'oscillateur harmonique 2D en utilisant la définition (167).

3.6 Quelques propriétés dynamiques du système

Dans cette partie , nous allons présenter deux propriétés du système dynamique. Dans un premier temps , nous montrerons comment ces deux oscillateurs couplés présentent un phénomène de transfert d'énergie entre oscillateurs . Ensuite , nous calculons l'angle de Hannay , qui est l'analogie classique de la phase de Berry pour le système quantique correspondant . Ainsi l'angle de Hannay capture des informations géométriques (holonomie , transport parallèle) dans l'espace des solutions .

3.6.1 Transfert d'énergie

Une propriété bien connue de deux systèmes couplés qui oscillent et conservent l'énergie est le phénomène de transfert d'énergie [37] . Cela consiste en ce que les amplitudes des deux oscillateurs oscillent également de telle manière que lorsque l'un des systèmes oscille avec une grande amplitude , le second

oscille avec une petite amplitude et vice versa .

Si l'on considère les amplitudes

$$\alpha^i = q_0^i \cos\left(\frac{C_2}{C_1}t\right) - \epsilon^{ij} q_0^j \sin\left(\frac{C_2}{C_1}t\right), \quad (194)$$

et

$$\beta^i = \left(C_1 \dot{q}_0^i + C_2 \epsilon^{ij} q_0^j\right) \cos\left(\frac{C_2}{C_1}t\right) - \epsilon^{ij} (C_1 \dot{q}_0^j + C_2 \epsilon^{kj} q_0^k) \sin\left(\frac{C_2}{C_1}t\right), \quad (195)$$

les solutions du système lagrangien (156) ont la forme

$$q^i(t) = \alpha \cos\left(\frac{1}{C_1}t\right) + \beta \sin\left(\frac{1}{C_1}t\right) \quad (196)$$

qui sont des fonctions d'oscillation qui ont des amplitude qui oscillent également .

Nous pouvons observer le phénomène de transfert si nous traçons quelques solutions du système .

Figure 1: ces solutions sont tracées en utilisant $\gamma = 1$ et les conditions initiales $q^1(0) = 1.5, \dot{q}^1(0) = -5.1, q^2(0) = 0.3, \dot{q}^2(0) = 1$.

3.6.2 Angle de Hannay

Comme nous l'avons observé , notre système pourrait être interprété comme un oscillateur de fréquence A monté dans un référentiel non inertiel qui oscille également mais de fréquence B . L'angle de Hannay [38] pourrait être interprété comme un déphasage entre les deux oscillateurs .

On calcul l'angle de Hannay en considérant le décalage $2\pi + Bt'$ où t' est le temps qu'il faut prendre pour une période du premier oscillateur de fréquence A .Alors

$$t' = \frac{2\pi}{A} \quad (197)$$

et l'angle de Hannay de notre système est

$$\Theta_H = 2\pi + Bt' \quad (198)$$

soit

$$\Theta_H = 2\pi + 2\pi \frac{B}{A}. \quad (199)$$

Par ailleurs , des équations (134) et (137) , nous avons respectivement

$$C_2 = -\frac{\rho \sinh \gamma}{\sqrt{\sigma^2 - \rho^2}}$$

et

$$C_2 = -\frac{B}{A}$$

alors

$$\frac{B}{A} = -C_2 \quad (200)$$

soit

$$\frac{B}{A} = \frac{\rho \sinh \gamma}{\sqrt{\sigma^2 - \rho^2}}. \quad (201)$$

En utilisant l'équation (176) , nous pouvons réécrire l'angle de Hannay sous la forme

$$\Theta_H = 2\pi \left(1 + \frac{\rho \sinh \gamma}{\sqrt{\sigma^2 - \rho^2}} \right). \quad (202)$$

Pour $\gamma = 0$, alors $\Theta = 2\pi$ et cela signifie que les deux oscillateurs sont en phase . Ce t'angle géométrique dépend des conditions initiales à travers les définitions de A et B évaluées au vecteur de condition initiale correspondant . C'est aussi la conséquence d'un couplage qui peut être interprété comme une dérivée covariante

$$Dv^i = \frac{dv^i}{dt} + \frac{C_2}{C_1} \epsilon^{ij} q^j. \quad (203)$$

Aors nous avons

$$Dq^i Dq^i = \dot{q}^2 + 2 \frac{C_2}{C_1} \epsilon^{ij} \dot{q}^i q^j + \frac{C_2^2}{C_1^2} q^2 \quad (204)$$

ce qui implique que

$$\frac{1}{2} C_1 Dq^i Dq^i = \frac{1}{2} C_1 \left(\dot{q}^2 + \frac{C_2^2}{C_1^2} q^2 \right) + 2C_2 \epsilon^{ij} \dot{q}^i q^j$$

soit

$$\frac{1}{2} C_1 Dq^i Dq^i - \frac{1}{2C_1} q^2 = \frac{1}{2} C_1 \left(\dot{q}^2 + \frac{C_2^2 - 1}{C_1^2} q^2 \right) + 2C_2 \epsilon^{ij} \dot{q}^i q^j. \quad (205)$$

Par comparaison de cette dernière équation avec l'équation (188), la fonction lagrangienne peut être comme

$$L = \frac{1}{2} C_1 Dq^i Dq^i - \frac{1}{2C_1} q^2 \quad (206)$$

Conclusion

Nous avons retrouvé la description quantique d'un système non contraint à travers la quantification des variables classiques .La quantification des variables classiques n'est pas suffisant dans le cas des systèmes contraints et nous utilisons la procédure de quantification de Dirac qui ne peut être directement appliquée lorsque des anomalies de jauge sont présentes . Dans le cas des systèmes avec un nombre de particules variable , nous avons utilisé la seconde quantification où nous ne faisons aucune quantification supplémentaire , mais elle nous permet de trouver une nouvelle forme de l'hamiltonien du système .

Nous avons construit un système classique non linéaire , composé de deux oscillateurs couplés . La construction peut être réaliser pour une déformation $\sqrt{T\bar{T}}$ (dans les formalismes lagrangiens et hamiltonien).Le système est intégrable , il possède deux charges conservées en involution s et j , qui sont associées respectivement à la dualité et à la symétrie de rotation .En considérant les constantes de mouvement A et B (définies en termes de s et j) , il est simple d'intégrer l'équation du mouvement en tant que système linéaire .Les constantes A et B sont respectivement les fréquences des deux oscillateurs couplés .Par utilisation des quantités conservées dans l'action , nous avons trouvé comment effectuer la transformation de Legendre de manière plus simple .Il pourrait être intéressant de considérer notre modèle comme une limite non relativiste d'une action , ce domaine de recherche a été abordé par [33,34] dans le contexte des déformations $T\bar{T}$.La carte construite à partir de l'oscillateur harmonique 2D réalise en une seule étape la déformation complète de l'oscillateur harmonique produit par le mécanisme $T\bar{T}$.De nombreuses propriétés dynamiques du système étudié ici peut être traduit en ModMax.Enfin , notre système présente également un phénomène de transfert d'énergie et le déphasage entre les deux oscillateurs couplés est appelé angle de Hannay , qui est une propriété géométrique du système .