Date No.

BÀI 6: CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA BNN 2 CHIỀU

6.1: Giả sử X, Y là hai bnn độc lập với phân phối xác suất đồng thời như sau:

y \ x	2	4
1	0,1	0,15
3	0,2	0,3
5	0,1	0,15

Hãy tìm: a, $E(2X-3Y)$

b, $E(XY)$

Giải:

a, $E(2X-3Y) = \sum_x \sum_y (2x-3y) f(x,y)$

$= -2,6$

b, $E(XY) = \sum_x \sum_y xy \cdot f(x,y)$

$= 2.0,1 + 6.0,2 + 10.0,1 + 4.0,15 +$

$+ 12.0,3 + 20.0,15$

$= 9,6$

Vậy $E(2X-3Y) = -2,6$

$E(XY) = 9,6$

6.2: Từ một túi trái cây gồm 3 quả cam, 2 quả táo với 3 quả chuối, lấy ngẫu nhiên ra 4 quả. Gọi X là số quả cam Y là số quả táo được lấy ra, tìm

Date . . . No.

a, $E(X-Y)$ b, Covariance của X và Y

Giải

Gọi X là biến chỉ số quả cam được lấy

$X = \{0, 1, 2, 3\}$

Gọi Y là biến chỉ số quả táo được lấy

$Y = \{0, 1, 2\}$

Số cách lấy ngẫu nhiên 4 quả trong túi trái cây gồm 8 quả là:

$N = C_8^4$

Số cách lấy ngẫu nhiên x quả cam trong 3 quả là: $n_1 = C_3^x$

Số cách lấy ngẫu nhiên y quả táo trong 2 quả là: $n_2 = C_2^y$

Số cách lấy ngẫu nhiên 4 - x - y quả chuối trong 3 quả là: $n_3 = C_3^{4-x-y}$

⇒ Hàm phân phối xác suất đồng thời là:

$$f(x,y) = \frac{C_3^x \cdot C_2^y \cdot C_3^{4-x-y}}{C_8^4}$$

Ta có bảng phân phối xác suất:

HẢI TIẾN

Date . . . No.

Y \ X	0	1	2	3
0	0	$\frac{3}{70}$	$\frac{9}{70}$	$\frac{3}{70}$
1	$\frac{1}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{1}{35}$
2	$\frac{3}{70}$	$\frac{9}{70}$	$\frac{3}{70}$	0

a, $E(X-Y) = \sum_x \sum_y (x-y) \cdot f(x,y)$

$= \frac{1}{2}$

b, Ta có:

phân phối biên duyên của X là:

X	0	1	2	3
$g(x)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$

phân phối biên duyên của Y là:

Y	0	1	2
$h(y)$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{14}$

$\Rightarrow E(X) = \sum_x x\, g(x) = \frac{3}{2}$

$E(Y) = \sum_y y \cdot h(y) = 1$

Date . . . No.

Ta có:

$$E(XY) = \sum_x \sum_y xy\, f(x,y) = \frac{9}{7}$$

=> Covariance của X và Y là:

$$\sigma_{XY} = E(XY) - E(X).E(Y)$$
$$= \frac{9}{7} - \frac{3}{2}.1$$
$$= -\frac{3}{14}$$

Vậy $E(X-Y) = \frac{1}{2}$

$$\sigma_{XY} = -\frac{3}{14}$$

6.3: Cho bnn 2 chiều với bảng phân phối xác suất đồng thời như sau

Y \ X	20	40	60
10	3λ	λ	0
20	2λ	4λ	2λ
30	λ	2λ	5λ

a, Tìm λ

b, Tính hệ số tương quan của X với Y

Giải:

a, Ta có:

$$\sum_x \sum_y f(x,y) = 1$$

HẢI TIẾN

$\Leftrightarrow 3\lambda + 2\lambda + \lambda + \lambda + 4\lambda + 2\lambda + 2\lambda + 5\lambda = 1$

$\Leftrightarrow 20\lambda = 1$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{20}$

=> Bảng phân phối xác suất đồng thời:

Y \ X	20	40	60
10	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	0
20	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
30	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$

=> phân phối biên duyên của X là:

X	20	40	60
g(x)	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{7}{20}$

phân phối biên duyên của Y là:

Y	10	20	30
h(y)	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

=> phương sai của X là:

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - E^2(X)$$

$$= \sum_x x^2 g(x) - \left(\sum_x x\, g(x)\right)^2$$

Date . . . . . . No.

$$= 1940 - 1681 = 259$$

$$\Rightarrow \sigma_X = \sqrt{259}$$

phương sai của Y là:

$$\sigma_Y^2 = E(Y^2) - E^2(Y)$$
$$= \sum_y y^2 h(y) - \left(\sum_y y.h(y)\right)^2$$
$$= 540 - 484 = 56$$

$$\Rightarrow \sigma_Y = \sqrt{56}$$

Ta có: +) $E(X) = \sum_x x g(x) = 41$

+) $E(Y) = \sum_y y h(y) = 22$

+) $E(XY) = \sum_x \sum_y xy f(x,y) = 970$

$$\Rightarrow \sigma_{XY} = E(XY) - E(X).E(Y)$$
$$= 970 - 41.22 = 68$$

$\Rightarrow$ Hệ số tương quan của X và Y là:

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X . \sigma_Y} = \frac{68}{\sqrt{259}.\sqrt{56}}$$
$$= 0,5646$$

Vậy +) $\lambda = \frac{1}{20}$

+) $\rho_{XY} = 0,5646$

HẢI TIẾN

6.4 : Nếu hàm mật độ đồng thời của X với Y được cho như sau:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{7}(x+2y) & ; (x,y) \in (0,1) \times (1,2) \\ 0 & ; (x,y) \notin (0,1) \times (1,2) \end{cases}$$

a, Tìm kỳ vọng của $\frac{X}{Y^3} + X^2Y$.

b, Tìm Covariance của X với Y.

Giải:

a, Kỳ vọng của $\frac{X}{Y^3} + X^2Y$ là:

$$E\left(\frac{X}{Y^3} + X^2Y\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{x}{y^3} + x^2y\right)\cdot f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_1^2\int_0^1\left(\frac{x}{y^3} + x^2y\right)\cdot\frac{2}{7}(x+2y)\,dx\,dy$$

$$= \frac{2}{7}\int_1^2\int_0^1\left(\frac{x^2}{y^3} + \frac{2x}{y^2} + x^3y + 2x^2y^2\right)dx\,dy$$

$$= \frac{2}{7}\int_1^2\left(\frac{x^3}{3y^3} + \frac{x^2}{y^2} + \frac{x^4y}{4} + \frac{2x^3y^2}{3}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} dy$$

$$= \frac{2}{7}\int_1^2\left(\frac{1}{3y^3} + \frac{1}{y^2} + \frac{y}{4} + \frac{2}{3}y^2\right)dy$$

$$= \frac{2}{7}\cdot\frac{23}{9} = \frac{46}{63}$$

Date . . . . No.

b, + Phân phối biên duyên của X là:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

$$= \int_{1}^{2} \frac{2}{7}(x+2y)\,dy$$

$$= \frac{2}{7}\int_{1}^{2}(x+2y)\,dy$$

$$= \frac{2}{7}\left[(xy + y^2)\Big|_{y=1}^{y=2}\right]$$

$$= \frac{2}{7}\left(2x + 4 - x - 1\right)$$

$$= \frac{2}{7}x + \frac{6}{7}$$

+ Phân phối biên duyên của Y là:

$$h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

$$= \int_{0}^{1} \frac{2}{7}(x+2y)\,dx$$

$$= \frac{2}{7}\int_{0}^{1}(x+2y)\,dx$$

$$= \frac{2}{7}\left[\left(\frac{x^2}{2} + 2xy\right)\Big|_{x=0}^{x=1}\right]$$

$$= \frac{1}{7} + \frac{4}{7}y$$

Date   No.

$\Rightarrow E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, g(x)\, dx = \int_{0}^{1} x\left(\frac{2}{7}x + \frac{6}{7}\right) dx$

$= \frac{11}{21}$

$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y . h(y)\, dy = \int_{1}^{2} y\left(\frac{1}{7} + \frac{4}{7}y\right) dy$

$= \frac{65}{42}$

$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy \cdot f(x,y)\, dx\, dy$

$= \int_{1}^{2}\int_{0}^{1} xy \cdot \frac{2}{7}(x+2y)\, dx\, dy$

$= \frac{17}{21}$

$\Rightarrow$ Covariance của X và Y là:

$\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y)$

$= \frac{17}{21} - \frac{11}{21} \cdot \frac{65}{42}$

$= -\frac{1}{882} = -0,0011$

Vậy: +, $E\left(\frac{X}{Y^3} + X^2Y\right) = \frac{46}{63}$

+, $\sigma_{XY} = -0,0011$

6.5: Tìm Covariance và hệ số tương quan của các biến ngẫu nhiên X và Y biết hàm mật độ đồng thời như sau:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & ; (x,y) \in (0,1)\times(0,1) \\ 0 & ; (x,y) \notin (0,1)\times(0,1) \end{cases}$$

Giải:

+) Phân phối biên duyên của X là:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

$$= \int_0^1 (x+y)\,dy = x + \frac{1}{2}$$

+ Phân phối biên duyên của Y là:

$$h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

$$= \int_0^1 (x+y)\,dx = y + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.g(x)\,dx = \int_0^1 x.\left(x+\frac{1}{2}\right)dx$$

$$= \frac{7}{12}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y.h(y)\,dy = \int_0^1 y\left(y+\frac{1}{2}\right)dy$$

Date . . . No.

$$= \frac{7}{12}$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy \cdot f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1\int_0^1 xy\cdot(x+y)\,dx\,dy = \frac{1}{3}$$

+) Covariance của X và Y là:

$$\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)\,E(Y)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{7}{12}\cdot\frac{7}{12}$$

$$= -\frac{1}{144} = -0,0069$$

+) Phương sai của X là:

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - E^2(X)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot g(x)\,dx - \left(\frac{7}{12}\right)^2$$

$$= \int_0^1 x^2\left(x+\frac{1}{2}\right)dx - \frac{49}{144}$$

$$= \frac{5}{12} - \frac{49}{144} = \frac{11}{144}$$

$$\Rightarrow \sigma_X = \sqrt{\frac{11}{144}} = \frac{\sqrt{11}}{12}$$

Phương sai của Y là:

$$\sigma_Y^2 = E(Y^2) - E^2(Y)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 . h(y)\, dy - \left(\frac{7}{12}\right)^2$$

$$= \int_0^1 y^2 . \left(y + \frac{1}{2}\right) dy - \frac{49}{144}$$

$$= \frac{5}{12} - \frac{49}{144} = \frac{11}{144}$$

$$\Rightarrow \sigma_Y = \frac{\sqrt{11}}{12}$$

$\Rightarrow$ Hệ số tương quan của X và Y là:

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X . \sigma_Y}$$

$$\Leftrightarrow \rho_{XY} = \frac{-\frac{1}{144}}{\frac{\sqrt{11}}{12} . \frac{\sqrt{11}}{12}}$$

$$= -\frac{1}{11} = -0,0909$$

Vậy +) $\sigma_{XY} = -0,0069$

+) $\rho_{XY} = -0,0909$