BÀI 4: BIẾN NGẪU NHIÊN HAI CHIỀU

4.1: Xác định giá trị của c để các hàm số sau là phân phối xác suất đồng thời của các biến ngẫu nhiên X và Y:

a, $f(x,y) = cxy$ với $x = 1,2,3$; $y = 1,2,3$

b, $f(x,y) = c|x-y|$ với $x = -2,0,2$; $y = 2,3$

Giải:

a. Hàm $f(x,y)$ là phân phối xác suất đồng thời của các bnn X và Y

$$\Rightarrow \sum_x \sum_y f(x,y) = 1$$

Ta có bảng phân phối xác suất

Y \ X	1	2	3
1	c	2c	3c
2	2c	4c	6c
3	3c	6c	9c

$$\Rightarrow c + 2c + 3c + 2c + 4c + 6c + 3c + 6c + 9c = 1$$

$$\Leftrightarrow 36c = 1$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{1}{36}$$

Vậy $c = \frac{1}{36}$ thì $f(x,y) = \frac{xy}{36}$ là hàm số phân phối xác suất đồng thời của các bnn X và Y.

Date . . . No.

b, Hàm $f(x,y)$ là phân phối xác suất đồng thời của các bnn X và Y

$$\Rightarrow \sum_x \sum_y f(x,y) = 1$$

Ta có bảng phân phối xác suất:

Y \ X	-2	0	2
-2	0c	2c	4c
3	5c	3c	1c

$$\Rightarrow 2c + 4c + 5c + 3c + 1c = 1$$

$$\Leftrightarrow 15c = 1$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{1}{15}$$

Vậy $c = \frac{1}{15}$ thì hàm số $f(x,y) = \frac{1}{15}|x-y|$ là hàm số phân phối xác suất đồng thời của các bnn X và Y

4.2: Cho phân phối xác suất đồng thời của X với Y là: $f(x,y) = \frac{x+y}{30}$, với $x = 0,1,2,3$; $y = 0,1,2$

Tính: a, $P(X \le 2, Y = 1)$

b, $P(X > 2, Y \le 1)$

c, $P(X > Y)$ d, $P(X+Y = 4)$

Giải:

Ta có bảng phân phối xác suất:

HẢI TIẾN

Date . . . No.

Y \ X	0	1	2	3
0	0	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$
1	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{15}$
2	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{6}$

a, $P(X \le 2, Y = 1) = f(0,1) + f(1,1) + f(2,1)$
$= \frac{1}{5}$

b, $P(X > 2, Y \le 1) = f(3,0) + f(3,1)$
$= \frac{1}{10} + \frac{2}{15} = \frac{7}{30}$

c, $P(X > Y) = f(1,0) + f(2,0) + f(3,0)$
$+ f(2,1) + f(3,1) + f(3,2)$
$= \frac{1}{30} + \frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{2}{15} + \frac{1}{6}$
$= \frac{3}{5}$

d, $P(X + Y = 4) = f(1,3) + f(2,2)$
$= \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{4}{15}$

4.3: Từ một túi trái cây gồm 3 quả cam, 2 quả táo và 3 quả chuối, lấy ngẫu nhiên 4 quả. Gọi X là số quả cam, Y là số quả táo được lấy ra, tìm:

a, Phân phối xác suất đồng thời của X, Y

b, $P[(X, Y) \in A]$, trong đó A là miền

HẢI TIẾN

Date . . . No.

$\{(x,y) \mid x+y \leq 2\}$

Giải:

a) Gọi X là biến chỉ số quả cam

$X = \{0, 1, 2, 3\}$

Gọi Y là biến chỉ số quả táo

$Y = \{0, 1, 2\}$

Số cách chọn ngẫu nhiên 4 quả từ túi trái cây có 8 quả là:

$N = C_8^4$

Số cách chọn x quả cam trong 3 quả là: $n_1 = C_3^x$

Số cách chọn y quả táo trong 2 quả là: $n_2 = C_2^y$

Số cách chọn $4-x-y$ quả chuối trong 3 quả là:

$n_3 = C_3^{4-x-y}$

=> Hàm phân phối xác suất đồng thời là

$$f(x,y) = \frac{C_3^x \cdot C_2^y \cdot C_3^{4-x-y}}{C_8^4}$$

Ta có bảng phân phối xác suất:

Y \ X	0	1	2	3
0	0	$\frac{3}{70}$	$\frac{9}{70}$	$\frac{3}{70}$
1	$\frac{1}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{1}{35}$
2	$\frac{3}{70}$	$\frac{9}{70}$	$\frac{3}{70}$	0

HẢI TIẾN

Date . . . . No.

b, $P[(X,Y) \in A]$ với A là $\{(x,y) \mid x+y \le 2\}$

$\Rightarrow P[(X,Y) \in A] = f(0,0) + f(1,0) + f(2,0) + f(0,1) + f(1,1) + f(0,2)$

$= \frac{3}{70} + \frac{9}{70} + \frac{1}{35} + \frac{9}{35} + \frac{3}{70}$

$= \frac{1}{2}$

4.4 : Giả sử một biến ngẫu nhiên 2 chiều có bảng phân phối xs đồng thời như sau:

Y \ X	1	2	3
1	0,05	0,05	0,1
2	0,05	0,1	0,35
3	0	0,2	0,1

Tìm: a, Phân phối biên duyên của X

b, ____ Y

c, $P(Y=3 \mid X=2)$

Giải:

a, Phân phối biên duyên của X là:

x	1	2	3
g(x)	0,1	0,35	0,55

HẢI TIẾN

b Phân phối biên duyên của Y là:

y	1	2	3
h(y)	0,2	0,5	0,3

c) ~~P(X=3~~ $P(Y=3 \mid X=2) = \dfrac{f(2,3)}{g(2)}$

$\Rightarrow P(Y=3 \mid X=2) = \dfrac{0,2}{0,35} = \dfrac{4}{7}$

4.5: Một cửa hàng rượu tổ chức bán rượu tại quầy và trong cái tủ trưng bày. Chọn ngẫu nhiên 1 ngày, gọi X và Y lần lượt là tỷ lệ thời gian hoạt động của quầy rượu và tủ rượu. Biết hàm mật độ đồng thời của X và Y là:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x+y), & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{tại các điểm khác} \end{cases}$$

Tìm: a, Hàm mật độ biên duyên của X, Y

b, ____

c, Xác suất để thời gian hoạt động của quầy rượu nhỏ hơn một nửa ngày

Giải:

a, Nếu $x \notin [0,1] \Rightarrow g(x) = 0$

Nếu $x \in [0,1]$

$\Rightarrow g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$

Date . . . No.

$\Leftrightarrow \quad g(x) = \int_0^1 \frac{2}{3}(x+y)\,dy$

$= \left(\frac{2}{3}xy + \frac{y^2}{3}\right)\Big|_0^1$

$= \frac{2x+1}{3}$

Vậy $g(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{3} & , x \in [0,1] \\ 0 & , x \notin [0,1] \end{cases}$

b, Nếu $y \notin [0,1] \Rightarrow h(y) = 0$

Nếu $y \in [0,1] \Rightarrow h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$

$\Leftrightarrow \quad h(y) = \int_0^1 \frac{2}{3}(x+y)\,dx$

$= \left(\frac{x^2}{3} + \frac{2}{3}xy\right)\Big|_0^1$

$= \frac{1+2y}{3}$

Vậy $h(y) = \begin{cases} \frac{1+2y}{3} & , y \in [0,1] \\ 0 & , y \notin [0,1] \end{cases}$

HẢI TIẾN

c) Xác suất để thời gian hoạt động của quầy rượu nhỏ hơn một nửa ngày là:

$$P(X < 0,5 \mid Y = 1) = \int_0^{0,5} f(x \mid y)\,dx$$

$$= \int_0^{0,5} \frac{f(x,y)}{h(y)}\,dx = \int_0^{0,5} \frac{\frac{2}{3}(x+y)}{\frac{1+2y}{3}}\,dx$$

$$= \int_0^{0,5} \frac{\frac{2}{3}(x+1)}{\frac{1+2}{3}}\,dx = \int_0^{0,5} \frac{2}{3}(x+1)\,dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3}\right)\Big|_0^{0,5} = \frac{5}{12}$$

4.6: Giả sử X và Y là tuổi thọ (tính theo năm) của hai bộ phận trong một hệ thống điện tử. Biết hàm mật độ đồng thời của cái bnn ~~ng~~ này là:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & , x > 0,\ y > 0 \\ 0 & , \text{tại các điểm khác} \end{cases}$$

Tính $P(0 < X < 1 \mid Y = 2)$

Giải:

+) Nếu $y \notin (0, +\infty) \Rightarrow h(y) = 0$

Nếu $y \in (0, +\infty) \Rightarrow h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$

$$\Leftrightarrow h(y) = \int_0^{+\infty} e^{-(x+y)}\,dx$$

$$= -e^{-x-y}\Big|_0^{+\infty}$$

HẢI TIẾN

$= -e^{-\infty - y} + e^{-y}$

$= 0 + e^{-y} = e^{-y}$

$$\Rightarrow h(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

+) Ta có:

$$P(0 < X < 1 \mid Y = 2) = \int_0^1 f(x \mid y)\, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{f(x,y)}{h(y)}\, dx = \int_0^1 \frac{e^{-(x+y)}}{e^{-y}}\, dx$$

$$= \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{e}$$

Vậy $P(0 < X < 1 \mid Y = 2) = 1 - \frac{1}{e}$

4.7: Một công ty kẹo phân phối các hộp kẹo sôcôla trong hộp với các loại nhân kem, nhân bơ cứng và nhân rượu ở mỗi hộp là khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một hộp, Gọi X và Y lần lượt là trọng lượng của kẹo socola nhân kem và socola nhân bơ cứng trong hộp đó. Biết hàm mật độ đồng thời của các bnn này là:

$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy, & 0 \leq x, y \leq 1,\ x + y \leq 1 \\ 0, & \text{tại các điểm khác} \end{cases}$$

a) Tìm xác suất để trong hộp được chọn có lượng sôcôla nhân rượu lớn hơn 1/2 trọng lượng của hộp

b) Tìm hàm mật độ biên duyên của trọng lượng

Date . . . No.

socola nhân kem.

c, Tìm xác suất để trọng lượng của kẹo socola nhân bơ ướng trong hộp ít hơn 1/8 kg biết rằng trọng lượng của kẹo socola nhân kem trong hộp đó là 3/4 kg.

Giải:

Gọi X là trọng lượng của kẹo scl nhân kem

Y là trọng lượng của kẹo scl nhân bơ

a, Xác suất để có lượng sô cô la nhân nguyên lớn hơn 1/2 trọng lượng của hộp là: $P\left(X+Y<\frac{1}{2}\right)$

Với $X+Y<\frac{1}{2} \Rightarrow x \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$

$y \in \left[0, \frac{1}{2}-x\right)$

$$\Rightarrow P\left(X+Y<\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}-x} 24xy\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 12xy^2\Big|_0^{\frac{1}{2}-x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 12x\left(\frac{1}{2}-x\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{16}$$

b, Nếu $x \notin [0,1]$ và $x+y>1$

$\Rightarrow g(x) = 0$

Nếu $x \in [0,1]$ và $x + y \leq 1$

$$\rightarrow g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

$$= \int_0^1 24xy\,dy = 12xy^2 \Big|_0^1$$

$$= 12x$$

Vậy $g(x) = \begin{cases} 12x, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$

c, Ta có: xác suất để trọng lượng của kẹo sôl nhân bơ cứng trong một hộp ít hơn 1/8 kg với điều kiện trọng lượng của kẹo sôl nhân kem trong đó là 3/4 kg là:

$$P\left(0 \leq Y \leq \frac{1}{8} \,\middle|\, X = \frac{3}{4}\right) = \int_0^{\frac{1}{8}} \frac{f(x,y)}{g(x)}\,dy$$

$$= \int_0^{\frac{1}{8}} \frac{24xy}{12x}\,dy = \int_0^{\frac{1}{8}} 2y\,dy = y^2 \Big|_0^{\frac{1}{8}}$$

$$= \frac{1}{64}$$