B12: PHÉP BIẾN ĐỔI TUYẾN TÍNH

B1: Cho tương ứng sau:

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$v = (x_1, x_2) \longmapsto T(v) = (2x_1 + 3x_2, 3x_1 + 2x_2)$

a, CMR: T là một phép biến đổi tuyến tính

b, Tìm ma trận chính tắc của T.

Giải:

a. Xét $T(v) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$= A . v \quad (\forall v \in \mathbb{R}^2)$

Lấy bất kỳ: $v \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, w \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Ta có: +, $T(v + w) = A(v + w)$

$= Av + Aw$

$= Tv + Tw \quad (1)$

+, $T(cv) = A(cv)$

$= cAv$

$= cT(v) \quad (c \in \mathbb{R}) \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra T là biến

b, Ta có: $T(v) = A . v$ ~~$c\, v \in \mathbb{R}$~~

Với $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

=> Ma trận chính tắc của T là:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

B2: a, Tìm ma trận của phép biến đổi tuyến tính trong $\mathbb{R}^2$ biến (1,0) thành (2,5) và (0,1) thành (1,3)

Giải:

Gọi T là phép biến đổi tuyến tính trong $\mathbb{R}^2$

Ta có: $T(1,0) = (2,5)$

$T(0,1) = (1,3)$

+) $(1,0) = e_1$

+) $(0,1) = e_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} T(1,0) = T(e_1) \\ T(0,1) = T(e_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T(e_1) = (2,5) \\ T(e_2) = (1,3) \end{cases}$$

=> Ma trận của phép biến đổi là:

$$A = [T(e_1) \quad T(e_2)] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

b, Tìm ma trận của phép biến đổi tuyến tính trong $\mathbb{R}^2$ biến (2,5) thành (1,0) với (1,3) thành (0,1)

Giải:

Gọi T là phép biến đổi tuyến tính trong $\mathbb{R}^2$

Ta có: $T(2,5) = (1,0)$

$T(1,3) = (0,1)$

+, $(2,5) = 2e_1 + 5e_2$

+, $(1,3) = e_1 + 3e_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} T(2,5) = 2T(e_1) + 5T(e_2) \\ T(1,3) = T(e_1) + 3T(e_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2T(e_1) + 5T(e_2) = (1,0) \\ T(e_1) + 3T(e_2) = (0,1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T(e_1) = (0,-2) \\ T(e_2) = (0,1) \end{cases}$$

⇒ Ma trận của phép biến đổi là:

$$A = [T(e_1) \quad T(e_2)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

c, Tại sao không có phép biến đổi tuyến ~~tính~~ tính trong $\mathbb{R}^2$ biến (2,6) thành (1,0) và (1,3) thành (0,1)

Giải:

Gọi T là phép biến đổi tuyến tính trong $\mathbb{R}^2$

Ta có: $T(2,6) = (1,0)$

$T(1,3) = (0,1)$

Date . . . No.

+, $(2,6) = 2e_1 + 6e_2$

+, $(1,3) = e_1 + 3e_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} T(2,6) = 2T(e_1) + 6T(e_2) \\ T(1,3) = T(e_1) + 3T(e_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2T(e_1) + 6T(e_2) = (1,0) \\ T(e_1) + 3T(e_2) = (0,1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0T(e_2) = (1,-2) \quad (\text{Vô lý}) \\ T(e_1) = (0,1) - 3T(e_2) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Không tồn tại T trong $\mathbb{R}^2$

B3: Cho $\{e_1, e_2\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$. Cho T là phép biến đổi tuyến tính từ $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}^2$ thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} T(e_1 + e_2) = (1,1) \\ T(2e_1 + e_2) = (0,1) \end{cases}$$

a, Tìm ma trận chính tắc của T

~~Giải~~: b, CMR T khả nghịch và tìm ma trận chính tắc của T^{-1}

c, Tìm vectơ $u \in \mathbb{R}^2$ sao cho

$$T(u) = (2,-1)$$

<u>Giải:</u>

a, Ta có: $\begin{cases} T(e_1 + e_2) = (1,1) \\ T(2e_1 + e_2) = (0,1) \end{cases}$

Vì T biến đổi tuyến tính nên:

$$\begin{cases} T(e_1) + T(e_2) = (1,1) \\ 2T(e_1) + T(e_2) = (0,1) \end{cases}$$

Date . . . No.

$\Rightarrow \begin{cases} T(e_1) = (-1, 0) \\ T(e_2) = (2, 1) \end{cases}$

~~$\Rightarrow$ $T(e_1)$~~

$\Rightarrow$ Ma trận chính tắc là:

$$A = [T(e_1) \quad T(e_2)]$$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b, Ta có: $\det A = -1 \ (\neq 0)$

$\Rightarrow$ T khả nghịch

$\Rightarrow$ Ma trận chính tắc của T^{-1} là: ~~A~~ $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c, Ta có: $T(u) = (2, -1)$

$$\Leftrightarrow \quad A \cdot u = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad u = A^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad u = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Vậy $u = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}$

HẢI TIẾN

Date . . . No.

B4, Cho $\{e_1, e_2, e_3\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ với T là phép biến đổi tuyến tính từ $\mathbb{R}^3$ vào $\mathbb{R}^3$, TMĐK:

$$\begin{cases} T(e_1 + e_2 + e_3) = (3, 3, 3) \\ T(e_1 + 2e_2) = (4, 1, 4) \\ T(e_3) = (1, 2, 0) \end{cases}$$

a, Tìm ma trận chính tắc của T

b, Với $v = (1, 2, 3)$, xác định $T(v)$

c, T có khả nghịch không? Nếu có hãy tìm ma trận chính tắc của T^{-1}?

Giải:

a, Ta có: $\begin{cases} T(e_1 + e_2 + e_3) = (3, 3, 3) \\ T(e_1 + 2e_2) = (4, 1, 4) \\ T(e_3) = (1, 2, 0) \end{cases}$

Vì T biến đổi tuyến tính nên:

$$\begin{cases} T(e_1) + T(e_2) + T(e_3) = (3, 3, 3) \\ T(e_1) + 2T(e_2) = (4, 1, 4) \\ T(e_3) = (1, 2, 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T(e_1) = (0, 1, 2) \\ T(e_2) = \cancel{(2, 1, 0)}\ (2, 0, 1) \\ T(e_3) = (1, 2, 0) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Ma trận chính tắc là:

$$A = [T(e_1) \quad T(e_2) \quad T(e_3)]$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

HẢI TIẾN

Date . . . No.

b, Với $v = (1, 2, 3)$. Ta có:

$T(v) = Av$

$\Leftrightarrow T(v) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow T(v) = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$

c, A là ma trận chính tắc của T

$\Rightarrow \det A = 9 \ (\neq 0)$

$\Rightarrow$ T khả nghịch

$\Rightarrow$ Ma trận chính tắc của T^{-1} là:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

B5: Cho phép biến đổi tuyến tính:

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$v = (x_1, x_2) \longmapsto T(v) = (2x_1, x_1 + x_2)$

a, Tìm ma trận chính tắc của T

b, Cho phép biến đổi tuyến tính

$S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$v = (x_1, x_2) \longmapsto T(v) = (x_1 - x_2, x_1 - x_2, 2x_1)$

Tìm ma trận chính tắc của $S \circ T$ và tìm $(S \circ T)(v)$ với $v = (1; 1)$

HẢI TIẾN

Date . . . No.

Giải:

a, Xét $T(v) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= Av$$

Với $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

=> Ma ~~chận~~ trận chính tắc của T là: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

b, Xét: $T(v) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 2x_1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= Av$$

Với $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ với $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

=> Ma trận chính tắc của $S \circ T$ là:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

HẢI TIẾN

Date . . . No.

+) Với $v = (1, 1)$. Ta có:

$(S \circ T)(v) = Av$

$$\Rightarrow (S \circ T)(v) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

HẢI TIẾN