

BÀI 13 : CHUYỂN CƠ SỞ.

B1: Trong \mathbb{R}^2 cho 2 cơ sở:

$$E = \left\{ u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$F = \left\{ u'_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, u'_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

a, Tìm ma trận chuyển cơ sở từ E sang F với ngược lại?

b, Cho $[v]_E = (1, 2)$, tìm $[v]_F$?

Giải:

a, Ta có: $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$F = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Ma trận chuyển cơ sở từ E sang F là:

$$P_{E \rightarrow F} = E^{-1} F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 17 \\ 3 & -10 \end{bmatrix}$$

Ma trận chuyển cơ sở từ F sang E là:

$$P_{F \rightarrow E} = F^{-1}E = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{10}{11} & \frac{17}{11} \\ \frac{3}{11} & \frac{4}{11} \end{bmatrix}$$

b. Ta có:

~~$$[v]_E = P_{E \rightarrow F} [v]_F$$~~

$$[v]_F = P_{F \rightarrow E} [v]_E$$

$$\Rightarrow [v]_F = \begin{bmatrix} \frac{10}{11} & \frac{17}{11} \\ \frac{3}{11} & \frac{4}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vậy $[v]_F = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

B2: Thay \mathbb{R}^2 cho 2 cơ sở:

$$B = \left\{ u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$B' = \left\{ w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

a. Tìm ma trận chuyển cơ sở B sang B' và ngược lại?

b. Cho $v = 2w_1 - w_2$, tìm $[v]_B$?

(2)

Giải:

$$a, \text{ Ta có: } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Ma trận chuyển cơ sở từ B sang B' là

$$P_{B \rightarrow B'} = B^{-1} \cdot B' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$P_{B' \rightarrow B} = B'^{-1} B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b, Ta có:

$$v = 2w_1 - w_2$$

$$\Rightarrow v = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [v]_B = B^{-1} \cdot v$$

$$= [v]_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

B3: Trong \mathbb{R}^3 cho 2 cơ sở:

$$E = \left\{ e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$F = \left\{ u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Tìm ma trận chuyển cơ sở từ F sang E bằng 2 cách

Giải: Cách 1

Ta có:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận chuyển cơ sở từ F sang

E là:

$$P_{F \rightarrow E} = F^{-1} \cdot E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow P_{F \rightarrow E} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Giải 2:

Đa biến thì các vector trong F sang E như sau:

$$e_1 = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 \quad (1)$$

$$e_2 = b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3 \quad (2)$$

$$e_3 = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 \quad (3)$$

→ Giải phương trình (1):

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ a_2 + a_3 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

→ Giải phương trình (2):

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 0 \\ b_2 + b_3 = 1 \\ b_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 = -1 \\ b_2 = 1 \\ b_3 = 0 \end{cases}$$

→ Giải phương trình (3):

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \\ c_3 = 1 \end{cases}$$

(5)

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = -1 \\ c_3 = 1 \end{cases}$$

→ Tạo ra các vectơ trong F biểu diễn song E là:

$$[e_1]_F = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[e_2]_F = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[e_3]_F = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P_{F \rightarrow E} = \begin{bmatrix} [e_1]_F & [e_2]_F & [e_3]_F \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$