$4: KHÔNG GIAN VÉC TƠ

+ **Khái niệm không gian vectơ và không gian con** + **Bốn không gian con liên kết với ma trận.**

1. Dùng định nghĩa chứng minh rằng tập $W = \{\ \mathbf{u} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\ \mid\ 3x + 2y - z - t = 0\}$ là một không gian vectơ con của $\mathbb{R}^4$.

Giải

+ Dễ thấy $\mathbf{0}(0,0,0,0) \in W$ nên W không rỗng.

+ Lấy $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1, t_1) \in W \Rightarrow\ 3x_1 + 2y_1 - z_1 - t_1 = 0$, $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in W \Rightarrow\ 3x_2 + 2y_2 - z_2 - t_2 = 0$

$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2)$ có $3(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) - (t_1 + t_2) = 0$ nên $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$.

+ $c\mathbf{u} = (c\,x_1, c\,y_1, c\,z_1, c\,t_1)$ có $3cx_1 + 2cy_1 - cz_1 - ct_1 = 0$ nên $c\mathbf{u} \in W$.

Nên W là không gian con của $\mathbb{R}^4$.

2. **(10.t146)** Tập hợp con nào sau đây của $\mathbb{R}^3$ cùng với các phép toán cộng và nhân thông thường trong $\mathbb{R}^3$ là không gian con của $\mathbb{R}^3$?

a) $V_1 = \left\{(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3:\ \ b_1 = b_2\right\}$.

b) $V_2 = \left\{(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 : b_1 > 0; b_2 > 0\right\}$.

c) $V_3 = \left\{(b_1, b_2, b_3):\ \ b_1 = 0\right\}$.

d) Tất cả các tổ hợp tuyến tính của $\mathbf{v} = (1,4,0)$ và $\mathbf{w} = (2,2,2)$.

e) Tất cả các vectơ thỏa mãn $b_1 + b_2 + b_3 = 0$.

Giải

a) $V_1 = \left\{(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 : b_1 = b_2\right\} \Leftrightarrow V_1 = \left\{(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 : b_1 - b_2 = 0\right\}$.

Đặt $A = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow V_1 = N(A)$. Nên V_1 là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

b) Lấy **0** (0,0,0) $\notin V_2$ nên V_2 không là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

c) Đặt $A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow V_3 = N(A)$. Nên V_3 là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

d) Đặt $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 2\\ 0 & 2\end{bmatrix} \Rightarrow V_4 = C(A)$. Nên V_4 là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

e) Đặt $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow V_5 = N(A)$. Nên V_1 là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

3. **(19.t147)** Hãy mô tả các không gian cột (đường thẳng hoặc mặt phẳng) của các ma trận sau:

a) $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

Giải

a) $\mathbf{v} \in C(A) \Rightarrow \mathbf{v} = c_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix} = (c_1 + 2c_2)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$. Khi đó C(A) là đường thẳng.

b) $\mathbf{v}\in C(B)\Rightarrow \mathbf{v}=c_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}$. Khi đó C(B) là mặt phẳng.

c) Tương tự là C(C) đường thẳng.

4. **(20.t147)** Tìm điều kiện của **b** để $\mathbf{b}\in C(A)$ với

a) $A=\begin{bmatrix}1&4&2\\2&8&4\\-1&-4&-2\end{bmatrix}$ b) $A=\begin{bmatrix}1&4\\2&9\\-1&-4\end{bmatrix}$

Giải

a) $\mathbf{b}\in C(A)\Leftrightarrow A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ có nghiệm.

$$\left[A|b\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&4&2&b_1\\2&8&4&b_2\\-1&-4&-2&b_3\end{array}\right]\xrightarrow[h_3+h_1\to h_3]{h_2-2h_1\to h_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&4&2&b_1\\0&0&0&b_2-2b_1\\0&0&0&b_3+b_1\end{array}\right]$$

Để hệ có nghiệm $\begin{cases}b_2-2b_1=0\\b_3+b_1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b_2=2b_1\\b_3=-b_1\end{cases}$. Khi đó $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}b_1\\2b_1\\-b_1\end{bmatrix}=b_1\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$

b) $\mathbf{b}\in C(A)\Leftrightarrow A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ có nghiệm.

$$\left[A|b\right]=\left[\begin{array}{cc|c}1&4&b_1\\2&9&b_2\\-1&-4&b_3\end{array}\right]\xrightarrow[h_3+h_1\to h_3]{h_2-2h_1\to h_2}\left[\begin{array}{cc|c}1&4&b_1\\0&1&b_2-2b_1\\0&0&b_3+b_1\end{array}\right]$$

Để hệ có nghiệm $b_3+b_1=0\Leftrightarrow b_3=-b_1$. Khi đó $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\-b_1\end{bmatrix}=b_1\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}+b_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$

5. Mô tả 4 không gian con của ma trận $B=\begin{bmatrix}2&4&2\\0&4&4\\0&8&8\end{bmatrix}$.

Giải:

a) **Không gian cột**

$$\mathbf{v}\in C(B)\Rightarrow \mathbf{v}=c_1\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}4\\4\\8\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}2\\4\\8\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\left[\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\4\\8\end{bmatrix}\right]+c_3\begin{bmatrix}2\\4\\8\end{bmatrix}=(c_1++c_2)\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}+(\mathrm{c}_2+c_3)\begin{bmatrix}2\\4\\8\end{bmatrix}$$

C(B) là mặt phẳng.

b) **Không gian hàng** $\mathbf{v}\in C(B^T)\Rightarrow \mathbf{v}=c_1\begin{bmatrix}2\\4\\2\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\4\\4\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}0\\8\\8\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}2\\4\\2\end{bmatrix}+(c_2+2c_3)\begin{bmatrix}0\\4\\4\end{bmatrix}$

c) **Không gian nghiệm**

Xét hệ phương trình $B\mathbf{x}=\mathbf{0}$

$$\left[B\middle|0\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}2&4&2&0\\0&4&4&0\\0&8&8&0\end{array}\right]\xrightarrow{h_3-2h_2\to h_3}\left[\begin{array}{ccc|c}2&4&2&0\\0&4&4&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

Biến trụ x_1,x_2, biến tự do x_3 Khôi phục hệ $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=0\\ \quad\quad x_2+x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=-x_3\end{cases}$

Khi đó $\mathbf{v}\in N(\mathrm{B})\Rightarrow\mathbf{v}=\begin{bmatrix}x_3\\-x_3\\x_3\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$. Khi đó N(B) là đường thẳng.

d) không gian nghiệm trái

Xét hệ phương trình $B^T\mathbf{x}=\mathbf{0}$

$$\left[B^T\middle|0\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}2&0&0&0\\4&4&8&0\\2&4&8&0\end{array}\right]\xrightarrow{h_2-2h_2\to h_2}\left[\begin{array}{ccc|c}2&0&0&0\\0&4&8&0\\0&4&8&0\end{array}\right]\xrightarrow{h_3-h_2\to h_3}\left[\begin{array}{ccc|c}2&0&0&0\\0&4&8&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

Biến trụ x_1,x_2, biến tự do x_3 Khôi phục hệ $\begin{cases}2x_1=0\\4x_2+8x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=-2x_3\end{cases}$

Khi đó $\mathbf{v}\in N(\mathrm{B}^T)\Rightarrow\mathbf{v}=\begin{bmatrix}0\\-2x_3\\x_3\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix}$. Khi đó $N(\mathrm{B}^T)$ là đường thẳng.

6. Cho $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\-1&4&6\end{bmatrix}$

a) Với giá trị nào của a,b,c thì $\mathbf{v}=(a,b,c)$ thuộc không gian $C(A)$.

b) Với giá trị nào của a,b,c thì $\mathbf{v}=(a,b,c)$ thuộc không gian $N(A)$.

Giải:

a) $\mathbf{v}\in C(A)\Leftrightarrow A\mathbf{x}=\mathbf{v}$ có nghiệm.

$$\left[A\middle|\mathbf{v}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&a\\2&4&6&b\\-1&4&6&c\end{array}\right]\xrightarrow[h_3+h_1\to h_3]{h_2-2h_1\to h_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&a\\0&0&0&b-2a\\0&6&9&c+a\end{array}\right]$$

Để hệ có nghiệm $b=2a$.

b) $\mathbf{v}=(a,b,c)\in N(A)\Rightarrow\mathrm{A}\,\mathbf{v}=0$

$\left[A\middle|0\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\2&4&6&0\\-1&4&6&0\end{array}\right]\xrightarrow[h_3+h_1\to h_3]{h_2-2h_1\to h_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&0&0&0\\0&6&9&0\end{array}\right]$ Khôi phục hệ ta có $\begin{cases}a+2b+3c=0\\6b+9c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b=\dfrac{-3}{2}c\end{cases}$

7. Xây dựng một ma trận mà không gian cột chứa véc tơ $(1,1,5)$ và $(0,3,1)$ còn không gian nghiệm chứa vectơ $(1,1,2)$.