Bài 1 Hệ phương trình tuyến tính

I. GIỚI THIỆU VECTƠ

1. Vec tơ và tổ hợp tuyến tính.

a. Định nghĩa

Gọi bộ gồm n số thực $(x_1;x_2;...;x_n)$ là một ***vectơ gồm n - thành phần***. Kí hiệu $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}$.

Tập các vectơ cột n - thành phần được kí hiệu là $\mathbb{R}^n$.

Ta gọi $\mathbb{R}^n$ là một ***không gian n-chiều***. $\mathbb{R}^n = \{(x_1;x_2;...;x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$

b. Các phép toán vectơ

Phép cộng hai vectơ:

Xét 2 vec tơ $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ ... \\ x_n' \end{bmatrix}$ thì $\mathbf{v}+\mathbf{w} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ ... \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_1' \\ x_2 + x_2' \\ ... \\ x_n + x_n' \end{bmatrix}$

Phép nhân vectơ với một vô hướng:

Tích $c\mathbf{v}$ của vectơ $\mathbf{v}$ với số thực c là một vectơ được xác định như sau: $c\mathbf{v} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ ... \\ cx_n \end{bmatrix}$

+) Nếu $c \geq 0$ thì $c\mathbf{v}$ cùng hướng với $\mathbf{v}$.

+) Nếu $c < 0$ thì $c\mathbf{v}$ ngược hướng với $\mathbf{v}$.

Phép trừ hai vectơ:

Hiệu hai vectơ $\mathbf{v}$ và $\mathbf{w}$ được xác định bởi $\mathbf{v}-\mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w})$.

Tổ hợp tuyến tính của n vectơ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ là một vectơ có dạng

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + ... + c_n\mathbf{v}_n \text{ với } c_1, c_2, ... c_n \in \mathbb{R}.$$

Nhận xét

Trong không gian 2 chiều:

+ khi vectơ $\mathbf{v} \neq 0$, tập tất cả các tổ hợp $c\mathbf{v}$ lấp đầy một đường thẳng.

+ khi hai vectơ $\mathbf{v}$ và $\mathbf{w}$ không cùng phương, tập tất cả các tổ hợp $c_1\mathbf{v} + c_2\mathbf{w}$ lấp đầy một mặt phẳng.

Trong không gian 3 chiều, khi ba vectơ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ không đồng phẳng, tập tất cả các tổ hợp $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$ lấp đầy không gian.

Tích vô hướng

Tích vô hướng của hai vectơ $\mathbf{v}$ và $\mathbf{w}$ là số thực $\mathbf{vw} = x_1x_1' + x_2x_2' + \ldots + x_nx_n'$

Độ dài

+) $|\mathbf{v}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

+ Véc tơ đơn vị $\mathbf{u}$ là vec tơ có độ dài bằng 1.

II. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH.

1. Định nghĩa.

Hệ phương trình tuyến tính m phương trình, n ẩn (hệ mxn) có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Trong đó các a_{ij}, b_i là các số thực, x_i là các ẩn.

2. Các dạng biểu diễn

a. ***Dạng hàng:***

Là dạng biểu diễn trong định nghĩa.

b. ***Dạng phương trình véc tơ***

Ký hiệu $\mathbf{c}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \ldots \\ a_{mj} \end{bmatrix}; j = \overline{1,n};\quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$

Khi đó hệ phương trình có thể viết dưới dạng phương trình véc tơ $x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \ldots + x_n\mathbf{c}_n = \mathbf{b}$

c. *Dạng ma trận*

<u>Định nghĩa</u> Bảng số gồm m dòng và n cột $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$ được gọi là ma trận hệ số của hpt.

Ký hiệu $\mathbf{h}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \ldots \\ a_{in} \end{bmatrix}; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$

Ta định nghĩa phép nhân ma trận cỡ m dòng, n cột với véc tơ n dòng 1 cột như sau

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 x \\ \mathbf{h}_2 x \\ \ldots \\ \mathbf{h}_m x \end{bmatrix}$$

Khi đó hệ phương trình viết $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Ví dụ Thực hiện phép nhân ma trận với véc tơ theo hai cách

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Ví dụ Hãy biểu diễn các hệ sau dưới ba dạng: hàng, phương trình véc tơ và phương trình ma trận

a. $\begin{cases} 2x_1 \qquad + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$

b. $x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

3. Phương pháp khử Gauss.

a. Ma trận bậc thang và trụ

Ma trận bậc thang là ma trận thỏa mãn

- đi từ trên xuống dưới số số 0 ở đầu hàng tăng dần
- Nếu hàng nào chứa toàn số 0 thì hàng đó phải đứng cuối cùng.

Phần tử khác 0 đầu tiên trong một hàng gọi là **trụ.**

b. Ma trận mở rộng

Xét hệ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, ta gọi ma trận $\left[A \middle| \mathbf{b} \right]$ là ma trận mở rộng của hệ.

Ví dụ. Xác định ma trận mở rộng của hệ $\begin{cases} x - \quad y + 3z = 1 \\ 2x + 3y \qquad = -2 \\ \qquad y - 5z = 1 \end{cases}$

c. Hệ dạng bậc thang

Hệ dạng bậc thang là hệ phương trình tuyến tính có ma trận mở rộng dạng bậc thang.

Ẩn có hệ số là trụ được gọi là **biến trụ**.

Những ẩn còn lại được gọi là **biến tự do**.

Ví dụ. Trong các hệ sau hệ nào là hệ bậc thang, xác định biến trụ và biến tự do ở các hệ bậc thang

a. $\begin{cases} x - \quad y + 3z = 1 \\ 2x + 3y \qquad = -2 \\ \qquad y - 5z = 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ \quad - y + 3z = 2 \\ \qquad\quad 5z = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x - y + 2z + t = 11 \\ \quad 2y + 3z - t = -1 \\ \qquad\quad 5z + 3t = 3 \end{cases}$

c. Cách giải:

Hệ tam giác

Hệ tam giác là hệ có số hàng bằng số cột với các $a_{ii} \neq 0$.

Cách giải: Sử dụng phép thế ngược từ dưới lên.

Hệ tam giác có nghiệm duy nhất

Ví dụ. Giải hệ $\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ \quad -y + 3z = 2 \\ \qquad\quad 5z = 1 \end{cases}$

Hệ bậc thang.

Chuyển tất cả các hạng tử chứa biến tự do sang vế phải và coi các biến tự do như các tham số, hệ bậc thang trở thành hệ tam giác

Ví dụ. Xét hệ $\begin{cases} \mathbf{1}x - y + 3z + t = 1 \\ \quad \mathbf{-1}y + 3z - t = 2 \end{cases}$

Hệ phương trình bất kỳ

Phương pháp khử Gauss là chuyển hệ bất kỳ về hệ bậc thang bằng cách sử dụng các phép biến đổi hàng, cụ thể là:

Đổi chỗ hai hàng của hệ.

Lấy một phương trình cộng (trừ) với bội của một phương trình khác trong hệ

Nhân cả hai vế của một phương trình với một số khác 0.

<u>Chú ý:</u> Trong quá trình thực hiện nếu xuất hiện phương trình dạng $0 = 0$ thì ta loại khỏi hệ, còn nếu xuất hiện dạng $0 = b$ thì hệ vô nghiệm.

Ví dụ. Giải hệ phương trình sau: $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Ví dụ: Tìm véc tơ $\mathbf{x} = (x_1; x_2; x_3; x_4)$ thỏa mãn phương trình

$$x_1\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\3\\3\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}2\\2\\4\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}3\\0\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\5\\10\end{bmatrix}$$

Ví dụ: Giải và biện luận hệ phương trình sau: $\begin{cases} x+y-2z=1 \\ 2x+3y+mz\ =2 \\ 4x+5y-z=m+1 \end{cases}$

<u>Chú ý</u> Ta sử dụng trụ trong cột *j* để khử các số cùng cột *j* nằm bên dưới và khử theo quy tắc **"từ trên xuống dưới, từ trái qua phải".**

BÀI 2: MA TRẬN

a. <u>KHÁI NIỆM MA TRẬN</u>

1. <u>Định nghĩa</u>

Một bảng số gồm mxn số thực được xếp thành m hàng và n cột được gọi là một **ma trận cỡ m×n**:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dùng chữ cái A, B, C,...để đặt tên cho ma trận.

a_{ij} là ***phần tử nằm ở hàng i và cột j***.

$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$ *là* ***hàng thứ i***

$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ *là* ***<u>cột thứ j</u>.***

Kí hiệu $A=(a_{ij})$.

Ma trận cỡ n×n được gọi là **ma trận vuông cấp n**.

Các phần tử a_{ii} (i = 1,...,n) lập nên **đường chéo** của ma trận.

Ma trận tam giác trên $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Ma trận tam giác dưới $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Ma trận đường chéo $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Ma trận đơn vị $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$

Ma trận-không O là ma trận có tất cả các phần tử bằng 0.

$A = (a_{ij})$ và $B = (b_{ij})$ bằng nhau nếu $a_{ij} = b_{ij}$ với mỗi cặp i và j.

2. Các phép toán ma trận.

a. Phép nhân ma trận với một số

Định nghĩa *Nếu* $A = (a_{ij})$ *là ma trận m×n và c là một số, thì* $cA = (c\,a_{ij})$

Ma trận đối *của ma trận A là ma trận* $(-1)A = (-1)(a_{ij}) = (-a_{ij})$.

Nhận xét Nhân một vectơ của $\mathbb{R}^n$ với một vô hướng chính là nhân một ma trận $n\times 1$ với một số.

b. Phép cộng ma trận

Định nghĩa *Nếu* $A = (a_{ij})$ *và* $B = (b_{ij})$ *là hai ma trận m×n, thì* $A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)$

Nhận xét Cộng hai vectơ của $\mathbb{R}^n$ chính là cộng hai ma trận $n\times 1$.

c. Phép nhân ma trận

Định nghĩa *Giả sử A là ma trận* mxn, *B là ma trận* nxp. *Khi đó ma trận tích* $C = AB$ *là một ma trận* mxp *được tính bởi* $C = AB = \begin{bmatrix} A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 & \dots & A\mathbf{b}_p \end{bmatrix}$

Trong đó $\mathbf{b}_j$ *là cột thứ j của ma trận B (j=1,..,p)*

Ví dụ $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$. Tính AB và BA.

Chú ý.

+ $C = AB$ có phần tử hàng i cột j là

$$\boldsymbol{c_{ij} = (h\grave{a}ng\ i\ c\mathring{u}a\ A) \cdot (c\hat{o}t\ j\ c\mathring{u}a\ B)}$$

+ Hai ma trận vuông có thể nhân với nhau khi và chỉ khi chúng có cùng cỡ.

+ Nói chung $AB \neq BA$

+ $AB = O$ không suy ra $A=O$ hoặc $B=O$.

Ví dụ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tính AB và BA.

d. Lũy thừa của ma trận vuông.

Cho $A = (a_{ij})$ thì $A^k = \underbrace{A.A...A}_{k \text{ lần}}$

Ví dụ: Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. Tính A^3.

Ví dụ: Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Tính A^n.

3. Tính chất của phép toán ma trận (trang 77)

b. MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

1. Định nghĩa

Ma trận ***vuông*** *A được gọi là* ***ma trận khả nghịch*** *nếu tồn tại ma trận B sao cho AB = BA = I.*

Ta gọi B là ***ma trận nghịch đảo*** *của A.*

Nếu A khả nghịch thì **ma trận nghịch đảo của nó là duy nhất.**

Ký hiệu ma trận nghịch đảo của A là A^{-1}.

Chú ý

+) Khi A khả nghịch, hệ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ có nghiệm duy nhất là $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$.

+) Giả sử tồn tại $\boldsymbol{x}$ khác vectơ-không sao cho $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Khi ấy A không khả nghịch.

+) Ma trân vuống cấp 2 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ khả nghịch nếu và chỉ nếu $ad - bc \neq 0$.

Khi ấy $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

+) Ma trận đường chéo có nghịch đảo nếu các giá trị trên đường chéo khác 0. Khi đó

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/a_{nn} \end{bmatrix}$$

Định lý Nếu A và B là hai ma trận $n\times n$ khả nghịch, c là số khác 0, thì $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$(cA)^{-1} = c^{-1}A^{-1}$

2. Tìm A^{-1} bằng phương pháp Gauss-Jordan

Ta có $AA^{-1} = I$. Gọi x_j là cột thứ j của A^{-1}

Khi đó $AA^{-1} = \begin{bmatrix} Ax_1 & Ax_2 & \dots & Ax_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{bmatrix}$ nên $Ax_i = e_i$

Phương pháp Gauss-Jordan là giải đồng thời n hệ phương trình $Ax_i = e_i$ đồng thời bằng phương pháp khử.

Xét ma trận [A I], sử dụng các biến đổi hàng để biến đổi ma trận $\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix}$ thành ma trận $\begin{bmatrix} I & A^{-1} \end{bmatrix}$

Các phép biến đổi hàng

Đổi chỗ *hai hàng của ma trận.*

Lấy một hàng của ma trận ***trừ đi bội*** *của một hàng khác trong ma trận.*

Nhân *một hàng của ma trận với số* ***khác 0***.

Ví dụ *Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận* $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$

Ví dụ: Giải các phương trình ma trận:

a. $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\mathbf{X}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$ **b.** $\mathbf{X}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\mathbf{X}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

Chú ý. Để biến đổi $\begin{bmatrix}A & I\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}I & A^{-1}\end{bmatrix}$ ta dùng đường chéo chính chia ma trận A thành 2 phần, sử dụng trụ để khử.

+ Phần dưới đường chéo khử **"Từ trên xuống dưới, từ trái sang phải".**

+ Phần trên đường chéo khử **"Từ dưới lên trên, từ phải sang trái ".**

c. MA TRẬN CHUYỂN VỊ, HOÁN VỊ

1. Ma trận chuyển vị

Định nghĩa *Cho A là ma trận m×n.* ***Ma trận chuyển vị*** *của A, ký hiệu là* A^T*, là ma trận có cột thứ j là hàng thứ j của A* (j = 1, ..., m).

Nhận xét

Nếu A là ma trận $m\times n$, thì A^T là ma trận $n\times m$.

Tính chất

1. $\left(A^T\right)=A$ **2.** $(cA)^T=cA^T$

3. $(A+B)^T=A^T+B^T$ **4.** $(AB)^T=B^TA^T$

5. $\left(A^{-1}\right)^T=\left(A^T\right)^{-1}$.

2. Ma trận đối xứng

Định nghĩa *Ma trận A được gọi là* ***ma trận đối xứng*** *nếu* $A^T=A$.

Ví dụ Kiểm tra tính đối xứng của các ma trận

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 10\end{bmatrix}$$

Nhận xét A là ma trận đối xứng $\Leftrightarrow$ $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall i$,j.

3. Ma trận hoán vị.

Định nghĩa Ma trận P được gọi là ma trận hoán vị nếu

+ P là một **ma trận vuông.**

+ P có mỗi hàng và cột chỉ có một phần tử có giá trị 1, các phần tử còn lại có giá trị 0.

4. Ma trận chuyển vị liên hợp A^H .

Định nghĩa: Cho ma trận A cỡ mxn. Ma trận chuyển vị liên hợp của A , kí hiệu là A^H (ma trận A Hermitian) là ma trận có được bằng cách lấy chuyển vị ma trận phức liên hợp với ma trận A.

Ví dụ: $A=\begin{bmatrix}1 & i\\ 0 & 1+i\end{bmatrix}\Rightarrow A^H=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -i & 1-i\end{bmatrix}$

Tính chất: $(AB)^H = B^H A^H$

Phép nhân Hadamard:

Định nghĩa: Phép nhân Hadamard của 2 ma trận cùng cấp $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}, B_{m\times n}=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$,

kí hiệu $A_{m\times n}\circ B_{m\times n}$ được định nghĩa như sau: $A_{m\times n}\circ B_{m\times n}=\left(a_{ij}.b_{ij}\right)_{m\times n}$

Ví dụ: $\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 4 & 3 & -1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ -4 & 3 & -5\end{bmatrix}$

Tính chất:

- Tính giao hoán: $A\circ B = B\circ A$
- Tính kết hợp: $A\circ\left(B\circ C\right)=\left(A\circ B\right)\circ C$
- Tính phân phối: $A\circ\left(B+C\right)=A\circ B+A\circ C$

BÀI 3: ĐỊNH THỨC

1. *Định nghĩa:*

Định thức của một ma trận vuông A_{nxn} là một **số thực** đại diện cho ma trận A, kí hiệu là $\det A$ hoặc $|A|$.

Ta có $\det A \neq 0 \Rightarrow A$ khả nghịch. $\det A = 0 \Rightarrow A$ không khả nghịch.

2. Các tính chất của định thức.

2.1 $\det I = 1$.

2.2 Định thức đổi dấu khi đổi chỗ hai hàng.

2.3 Định thức là hàm tuyến tính đối với một hàng khi cố định những hàng còn lại.

Ví dụ $\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$

Chú ý Với ma trận vuông A cấp n thì $\det(tA) = t^n \det A$.

2.4 Nếu hai cột của A như nhau, thì $\det A = 0$

2.5 $\det A$ không đổi khi trừ một hàng của A đi một bội của hàng khác của A.

2.6 A có một hàng toàn 0 thì $\det A = 0$.

2.7 Nếu A là ma trận tam giác thì $\det A$ = tích các phần tử trên đường chéo.

2.8 A khả nghịch khi và chỉ khi $\det A \neq 0$.

2.9 Nếu A và B là hai ma trận vuông cùng cấp, thì $\det(AB) = \det A.\det B$.

Chú ý. Nếu A khả nghịch thì $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

2.10 $\det A^T = \det A$.

3. *Công thức tính định thức*

a. Định thức cấp 2.

Xét ma trận vuông cấp hai $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ta có $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

b. Định thức cấp 3

Xét ma trận vuông cấp ba $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Quy tắc Sarrus

Cách tính bằng máy tính Casio 570ES plus

Bước 1: mode 6 1 1 nhập dữ liệu (6 chọn ma trận, 1 chọn ma trận A, 1 cỡ 3x3)

Bước 2: AC shift 4 7 shift 4 3 =

c. Định thức cấp n

Định nghĩa Giả sử $A_{nxn} = (a_{ij})$. Bỏ đi hàng i và cột j của A được ma trận vuông cỡ $n-1$, ký hiệu là M_{ij}. Ta gọi số $(-1)^{i+j} \det M_{ij}$ là **phần phụ đại số** của a_{ij}, ký hiệu là C_{ij}.

Công thức Phần phụ đại số

Cho $A_{nxn} = (a_{ij})$ với $n \geq 2$. Ta có:

Khai triển định thức theo hàng *i*, $\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$

Khai triển định thức theo cột j $\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj}$

Công thức này được gọi là ***Khai triển Laplace*** theo hàng hay cột.

Ví dụ Tính định thức

$$\text{a, } \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad \text{b, } \det A = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

Chú ý Khi sử dụng Công thức phần phụ đại số, ta nên khai triển định thức theo hàng (hay cột) có nhiều số 0 nhất.

Từ tính chất 5 và tính chất 7 ta có thêm một cách tính định thức

Bước 1: Biến đổi ma trận A đưa về ma trận tam giác (dùng tính chất 5).

Bước 2: $\det A$ = tích các phần tử trên đường chéo (dùng tính chất 7).

Ví dụ Tính định thức

$$\text{a, } \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad \text{b, } \det A = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

Bài 4. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH THỨC

Ứng dụng tìm A^{-1}.

Định nghĩa Cho $A_{nxn} = (a_{ij})$. C_{ij} *là phần phụ đại số của* a_{ij}. ***Ma trận phần phụ đại số*** *của* A *là* $C = (C_{ij})$.

Định lí Nếu A khả nghịch thì $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} C^T$.

Ví dụ Tìm ma trận nghịch đảo của $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Ứng dụng giải hệ phương trình.

Quy tắc Cramer

Xét hệ $Ax = b$ với A là ma trận vuông cấp n. Nếu $\det A \neq 0$, thì hệ có nghiệm duy nhất

$$x_j = \frac{\det B_j}{\det A}.$$

trong đó ma trận B_j nhận được từ A khi thay vectơ $\boldsymbol{b}$ vào cột thứ j của nó.

Ví dụ Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \\ -4x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$

Bài 5 KHÔNG GIAN VÉC TƠ VÀ KHÔNG GIAN CON

I. KHÔNG GIAN VECTƠ

1. *Định nghĩa*

Cho V là tập hợp khác rỗng, trên V xác định hai phép toán:

Phép cộng hai phần tử trong V (cộng hai phần tử trong V được một phần tử trong V)

Phép nhân phần tử trong V với số thực (nhân phần tử trong V với số thực thì được một phần tử trong V).

Ta gọi V và hai phép toán đã cho là một **không gian véc tơ (kgvt) thực** nếu hai phép toán có 8 tính chất sau:

1. $u + v = v + u, \forall u, v \in V$ (*giao hoán*)
2. $u + (v + w) = (v + u) + w, \forall u, v, w \in V$ (*kết hợp*)

3. $\exists$ phần tử 0 trong V sao cho $v+0=v$, $\forall v\in V$

4. Với mỗi $\forall v\in V, \exists -v\in V$ sao cho $v+(-v)=0$

5. $1.v=v$, $\forall v\in V$.

6. $(ab)v=a(bv), \forall v\in V, \forall a,b\in R$ (*kết hợp*)

7. $a(u+v)=au+av, \forall u,v\in V, \forall a\in R$ (*phân phối*)

8. $(a+b)v=av+bv, \forall v\in V, \forall a,b\in R$ (*phân phối*)

2. Chú ý

1. *Khi V là kgvt thì mỗi phần tử gọi là một véc tơ (cho dù không là đoạn thẳng có hướng); phần tử 0 gọi là véc tơ – không; phần tử (- v) gọi là véc tơ đối của véc tơ v.*
2. *Phép cộng một vectơ với vectơ đối của một vectơ được gọi là phép trừ:* $u-v=u+(-v)$.
3. *Hai phép toán có "tính chất đóng"*

3. Ví dụ

$R^n=\left\{(x_1,x_2,...,x_n)\middle| x_i\in R\right\}$ là kgvt.

Chú ý. Tính chất 3 thường được sử dụng để kiểm tra nhanh nhất một tập hợp với các phép toán trên đó ***không phải là kgvt.***

II. KHÔNG GIAN CON

1. Định nghĩa

Nếu W là một tập con không rỗng của kgvt thực V và W thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) $cv\in W, \forall v\in W, \forall c\in R$.

(ii) $u+v\in W, \forall u,v\in W$.

thì W được gọi là một ***không gian con*** *của V*.

2. Chú ý

Tất cả các phép toán trên W đều là trên V nên W cũng thỏa mãn 8 tính chất trong định nghĩa kgvt. Nên W cũng là kgvt. Để chứng minh 1 tập hợp là 1 kgvt, ta có thể chứng minh nó là không gian con của một kgvt đã biết.

Mọi kg con W đều chứa véc tơ không.

*Có thể gộp các điều kiện **(i)** và **(ii)** thành một điều kiện:* $\forall u,v \in W, x,y \in R$ thì $xu + yv \in W$

Ví dụ

1. Cho $W = \{(x,y) | y = 2x, x, y \in R\}$. Chứng minh W là không gian con của R^2
2. $W = \{(a,b,c) | b = c, a,b,c \in R\}$ là kg con của R^3.

Chú ý : Mỗi không gian con của R^3 đều thuộc một trong 4 dạng sau:

i. (L) Đường thẳng bất kỳ đi qua O(0,0,0).

ii. (P) Mặt phẳng bất kỳ đi qua O(0,0,0).

iii. R^3

iv. $Z = \{\vec{0}\}$

III. Bốn kg con liên quan đến một ma trận

1. KHÔNG GIAN CỘT

Định nghĩa *Cho A là ma trận mxn, có các vectơ cột $c_j (j = 1,...n)$. Tập hợp tất cả những tổ hợp tuyến tính của các vectơ cột c_j gọi là **không gian cột của A**.* Kí hiệu $C(A)$

Trong CNTT, không gian $C(A)$ còn được gọi là Range của A.

$$C(A) = \{x_1c_1 + x_2c_2 + ... + x_nc_n | x_j \in R\}$$

Chú ý:

+ $C(A) = \{Ax | x \in R^n\}$

+ Hệ $Ax = b$ có nghiệm khi và chỉ khi $b \in C(A)$

Ví dụ Xác định $C(A)$ với $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Ví dụ Tìm điều kiện của c để $b \in C(A)$ với $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & c \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Định lý Nếu A là ma trận $m \times n$, thì $\boldsymbol{C}(A)$ là một không gian con của $\mathbb{R}^m$.

2. KHÔNG GIAN NGHIỆM

Định nghĩa *Tập nghiệm của $Ax = 0$ được gọi là **không gian nghiệm của** A và được ký hiệu là $N(A)$.*

Trong CNTT $N(A)$ được gọi là Null của A

Định lý Nếu A là ma trận $m \times n$, thì $N(A)$ là một không gian con của R^n.

Ví dụ Hãy mô tả không gian nghiệm của $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

3. Không gian hàng và kg nghiệm trái

Định nghĩa *Cho A là ma trận thực. Ta gọi*

*$C(A^T)$ là **không gian hàng của** A. $N(A^T)$ là **không gian nghiệm trái của** A.*

Nhận xét

Nếu A_{mxn} có các vectơ hàng là $h_1, ..., h_m$, thì $C(A^T) = \left\{ y_1 h_1 + y_2 h_2 + ... + y_m h_m \middle| y_j \in R \right\}$

$N(A^T)$ là tập nghiệm của $A^T y = 0$.

Định lý Nếu A là ma trận $m \times n$, thì

+ $C(A^T)$ là một không gian con của $\mathbb{R}^n$

+ $N(A^T)$ là một không gian con của $\mathbb{R}^m$.

Bài 6: HẠNG CỦA MA TRẬN - NGHIỆM CỦA $Ax = 0, Ax = b$

I. HẠNG CỦA MA TRẬN

1. Định nghĩa

Hạng *của ma trận A là số tất cả các trụ. Ký hiệu là $r(A)$.*

2. Chú ý

+) $r(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$.

+) Nếu A là ma trận cỡ $m \times n$ thì $r(A) \le \min(m, n)$

+) Để tìm hạng của A ta đưa ma trận A về ma trận bậc thang U bằng các phép biến đổi hàng và tìm số trụ.

3. ***Ví dụ*** Tìm hạng của các ma trận sau:

a. $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 8 & 10\\ 3 & 3 & 10 & 13\end{bmatrix}$

b. $A=\left(a_{ij}\right)_{3x4}, a_{ij}=i-j$.

c. $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 1 & 3 & m\\ 2 & 6 & 4\end{bmatrix}$

Nhận xét

i. Nếu A là ma trận vuông cấp n thì $r(A)=n \Leftrightarrow \det A \neq 0$

ii. Nếu A là ma trận con của ma trận B thì $r(A) \leq r(B)$

iii. $r(A)=r(A^T)$

II. CẤU TRÚC NGHIỆM CỦA HỆ $Ax=0$.

1. *Định nghĩa*

A gọi là có hạng ***hàng đầy*** nếu mọi hàng của nó đều có trụ, tức là $r=m$.

A gọi là có hạng ***cột đầy*** nếu mọi cột của nó đều có trụ, tức là $r=n$.

Cột trụ (hàng trụ, biến trụ) là các cột (hàng, biến) chứa trụ.

Cột tự do (biến tự do) là các cột (biến) không có trụ.

2. **Ví dụ** Tìm hàng trụ và cột trụ của $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 8 & 10\\ 3 & 3 & 10 & 13\end{bmatrix}$

Định lý Nếu $r(A)=r$, thì $Ax=0 \Leftrightarrow Bx=0$, trong đó B gồm tất cả các hàng trụ của A.

3. *Nghiệm đặc biệt của Ax = 0.*

Ta thấy nghiệm x_n được tính qua các biến tự do.

Lần lượt ta cho từng biến tự do bằng 1 và các biến tự do còn lại bằng 0, ta sẽ tìm được các nghiệm $s_1, s_2 \ldots$ gọi là các ***nghiệm đặc biệt***.

Ví dụ Tìm nghiệm đặc biệt của hệ $\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 + 3x_4 \ \ = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 10x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 13x_4 = 0 \end{cases}$

Nhận xét: Mọi nghiệm của $Ax = 0$ đều biểu diễn (dưới dạng tổ hợp tuyến tính) theo các nghiệm $s_1, s_2 \ldots$.

4. Nghiệm đầy đủ (Nghiệm tổng quát).

Định lý Nếu $s_1, s_2, \ldots, s_{n-r}$ là tất cả các nghiệm đặc biệt của $Ax = 0$, thì **nghiệm đầy đủ** của $Ax = 0$ là $x_n = c_1 s_1 + c_2 s_2 + \ldots + c_{n-r} s_{n-r}$, $c_i \in R$.

Cách tìm nghiệm đặc biệt, nghiệm đầy đủ của $Ax = 0$.

Bước 1: Biến đổi $\left[A|0\right] \to \left[U|0\right]$ và xác định r biến trụ và $n - r$ biến tự do.

Bước 2: Cho từng biến tự do bằng 1, các biến tự do còn lại bằng 0 tìm được $n - r$ nghiệm đặc biệt $s_1, s_2, \ldots, s_{n-r}$.

Bước 3: **Nghiệm đầy đủ** (hay **nghiệm tổng quát)** là $x_n = c_1 s_1 + c_2 s_2 + \ldots + c_{n-r} s_{n-r}$.

Ví dụ Tìm các nghiệm đặc biệt của hệ $Ax = 0$ sau đó giải hệ.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$

5. ***Định lý*** Cho $Ax = 0$ là hệ n ẩn.

Nếu $r(A) = n$, thì hệ có nghiệm duy nhất. Khi đó $N(A) = \left\{\vec{0}\right\}$.

Nếu $r(A) < n$, thì hệ có tất cả $n - r(A)$ nghiệm đặc biệt $s_1, s_2, \ldots, s_{n-r}$. Khi đó $N(A)$ gồm tất cả những tổ hợp tuyến tính của $s_1, s_2, \ldots, s_{n-r}$. Hệ có vô số nghiệm.

6. ***Hệ quả*** Nếu hệ $Ax = 0$ có số phương trình nhỏ hơn số ẩn thì nó có vô số nghiệm.

III. CẤU TRÚC NGHIỆM CỦA Ax = b

1. Nghiệm riêng.

Định nghĩa: *Một nghiệm nào đó của $Ax = b$ được gọi là một **nghiệm riêng***, ký hiệu là x_p.

Cách tìm một nghiệm riêng.

Dùng phép khử để đưa $\left[A|b\right] \to \left[U|c\right]$ với U là ma trận dạng bậc thang.

Trong hệ $Ux = c$, ta gán 0 cho những biến tự do rồi giải ra các biến trụ, sẽ tìm được một nghiệm riêng.

Ví dụ Tìm nghiệm riêng của hệ $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 10x_4 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 13x_4 = 7 \end{cases}$

2. Nghiệm đầy đủ.

Định lý Giả sử $Ax = b$ có nghiệm riêng là x_p. Khi ấy, tập nghiệm của $Ax = b$ là

$$\left\{x = x_p + x_n \middle| x_n \in N(A)\right\}.$$

Định nghĩa *Nếu x_p là nghiệm riêng của $Ax = b$, x_n là nghiệm đầy đủ của $Ax = 0$, ta gọi $x = x_p + x_n$ là **nghiệm đầy đủ** hay **nghiệm tổng quát** của $Ax = b$.*

Cách tìm nghiệm đầy đủ của $Ax = b$.

Bước 1: Biến đổi $\left[A|b\right] \to \left[U|c\right]$ và xác định r biến trụ và $n-r$ biến tự do.

Bước 2: Xét hệ $Ax = 0$. Tìm các nghiệm đặc biệt $s_1, s_2, ..., s_{n-r}$. Từ đó ta có

$$x_n = c_1 s_1 + c_2 s_2 + ... + c_{n-r} s_{n-r}$$

Bước 3: Tìm một nghiệm riêng x_p của $Ax = b$

Bước 4: Nghiệm đầy đủ của $Ax = b$ là $x = x_p + x_n$

Ví dụ Tìm nghiệm dưới dạng $x = x_p + x_n$ của hệ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 5 \\ -x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -6 \end{cases}$

BÀI 7: CƠ SỞ VÀ SỐ CHIỀU CỦA KGVT

I. SỰ ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH

1. *Định nghĩa*

Cho hệ $S=\{v_1,v_2,...,v_n\}\subset V$ và $x_1,...,x_n\in R$.

Nếu $x_1v_1+...+x_nv_n=0\Leftrightarrow x_1=...=x_n=0$ thì hệ S gọi là độc lập tuyến tính, ngược lại gọi là phụ thuộc tuyến tính.

Ý nghĩa:

Nếu $x_1v_1+x_2v_2+...+x_nv_n=0$ và $x_1\neq 0$ thì $v_1=-\frac{x_2}{x_1}v_2-...-\frac{x_n}{x_1}v_n$ nên có sự phụ thuộc của một véc tơ qua các vec tơ còn lại.

Các cột của ma trận A là độc lập tuyến tính nếu nghiệm duy nhất của $Ax=0$ là $x=0$

Chú ý:

Các vec tơ cột của A_{mxn} là độc lập tuyến tính khi $r(A)=n$.

Nếu A là ma trận vuông, thì các véc tơ cột của A độc lập $\Leftrightarrow \det A\neq 0$.

Cách kiểm tra sự độc lập tuyến tính của dãy véc tơ $v_1,v_2,...,v_n$ trong R^m:

+ **Bước 1**: Xét $A=\begin{bmatrix}v_1 & v_2 & ... & v_n\end{bmatrix}$.

+ **Bước 2**: tính $r(A)$.

+ **Bước 3**: Kết luận $r(A)=n$ hệ đltt, $r(A)\neq n$ hệ pttt.

2. Ví dụ: Xét sự độc lập của các hệ véc tơ:

a. $v_1=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}; v_2=\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$.

b. $v_1=\begin{bmatrix}-1\\2\\5\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}2\\1\\-3\end{bmatrix}, v_3=\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$

c. Cho hệ véc tơ v_1,v_2,v_3 độc lập tuyến tính. Chứng minh rằng hệ $u_1=v_1-v_2, u_2=2v_2+v_3, u_3=v_1+v_2+v_3$ pttt.

II. TẬP SINH.

1. *Định nghĩa*

Cho $v_1, v_2, ..., v_n$ là những vectơ trong kgvt V. Một tổng có dạng $x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n$, trong đó $x_i \in R$ được gọi là một tổ hợp tuyến tính của $v_1, v_2, ..., v_n$.

Ta nói rằng tập $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ là một **tập sinh** của không gian V, nếu và chỉ nếu mỗi vectơ trong V có thể biểu diễn được ở dạng một tổ hợp tuyến tính của $v_1, v_2, ..., v_n$.

Tập hợp tất cả những tổ hợp tuyến tính của $v_1, v_2, ..., v_n$ được ký hiệu là $Span(v_1, v_2, ..., v_n)$.

2. Định lý

$Span(v_1, v_2, ..., v_n)$ là một không gian con của V

Ta nói $Span(v_1, v_2, ..., v_n)$ là không gian con của V ***sinh bởi*** (hoặc ***căng bởi***) $v_1, v_2, ..., v_n$

3. *Ví dụ*

a. Tập tất cả các vectơ cột của ma trận A là tập sinh của $C(A)$.

b. Tập tất cả các vectơ hàng của A là tập sinh của $C(A^T)$.

c. Tập tất cả những nghiệm đặc biệt của hệ phương trình $Ax = 0$ là tập sinh của $N(A)$.

d. Những tập nào sau đây là tập sinh của R^2?

$$E = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\} \quad F = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\7\end{bmatrix}\right\} \quad V = \left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}\right\}$$

III. CƠ SỞ CỦA MỘT KGVT

1. *Định nghĩa*

*Tập vectơ $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ được gọi là một **cơ sở** của không gian vectơ V nếu:*

- *$\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ là tập sinh của V.*
- *$\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ độc lập tuyến tính.*

2. *Ví dụ*

a. $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ là một cơ sở của R^n, được gọi là ***cơ sở chính tắc***.

$Z = \{0\}$ không có cơ sở vì ***0*** pttt.

b. Hệ $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ có là cơ sở của R^2 không?

Chú ý: Nếu $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ là cơ sở của không gian V, thì mỗi $u \in V$ được biểu diễn một cách **duy nhất** ở dạng $u = x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n$.

IV. SỐ CHIỀU CỦA MỘT KGVT

1. *Định nghĩa*

Số chiều của một không gian véc tơ chính là số véc tơ trong mỗi cơ sở. Kí hiệu dimV.

Ví dụ Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. Tìm số chiều của $C(A), C(A^T)$.

2. *Ý nghĩa của số chiều*

Nếu W_1, W_2 là hai kg con của không gian V và $W_1 \subset W_2$, thì $\dim W_1 \le \dim W_2$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $W_1 = W_2$. Nên số chiều là một chỉ số đo "**độ lớn**" của một không gian con.

Nếu $\dim V = n$, thì V có nhiều nhất là n vectơ độc lập tuyến tính và V được sinh ít nhất bởi n vectơ.

3. *Định lý*

Nếu V là một kgvt có $\dim V = n > 0$, thì một tập con gồm n vectơ bất kỳ của V là cơ sở của V khi và chỉ khi các vectơ của tập con này độc lập tuyến tính.

Hệ quả

Tập vectơ $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ là cơ sở của R^n khi và chỉ khi $r[v_1 \quad v_2 \quad ... \quad v_n] = n$ hay $\det[v_1 \quad v_2 \quad ... \quad v_n] \ne 0$.

V. CƠ SỞ VÀ SỐ CHIỀU CỦA BỐN KG CON

1. Định lý

Cho ma trận A_{mxn} có $r(A) = r$. Khi đó ta có:

$\dim C(A) = \dim C(A^T) = r$

$\dim N(A) = n - r$.

$\dim N(A^T) = m - r$

2. Cách tìm cơ sở

Cho ma trận A_{mxn}, tìm cơ sở của 4 kgc liên quan tới A.

- Biến đổi A thành ma trận bậc thang U.
- Cơ sở của $C(A)$: tập các cột trụ của A.
- Cơ sở của $C(A^T)$: tập các hàng trụ A.
- Cơ sở của $N(A)$: tập các nghiệm đặc biệt của hệ phương trình $Ax = 0$.
- Cơ sở của $N(A^T)$: tập các nghiệm đặc biệt của $A^T y = 0$

3. *Ví dụ*

Tìm cơ sở và số chiều của 4 không gian con liên quan tới ma trận A với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 1 & 16 \\ 5 & 15 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$

BÀI 8: TÍNH TRỰC GIAO

I. TÍNH TRỰC GIAO CỦA BỐN KGC

1. Định nghĩa

Khi $v.w = 0$ ta nói v **trực giao** với w.

Cho V và W là các không gian con của R^n

Ta nói V trực giao với W nếu mọi vectơ v trong V trực giao với mọi vectơ w trong W.

Ví dụ

$\vec{0} \in R^n$ trực giao với mọi vectơ trong R^n.

Kiểm tra tính trực giao của

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ và $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

b. $V = \{(x,0,0) | x \in R\}$ và $W = \{(0,y,0) | y \in R\}$.

2. Phần bù trực giao

Cho V là không gian con của R^n. Tập tất cả các vectơ trong R^n mà trực giao với mọi vectơ trong V được gọi là **phần bù trực giao** của V, và ký hiệu là $V^{\perp}$.

$$V^{\perp} = \{u \in R^n \,|\, u.v = 0, \forall v \in V\}.$$

Ví dụ: Tìm tất cả các vec tơ trong R^3 trực giao với không gian vec tơ V có cơ sở là $v_1 = (1,2,4); v_2 = (-1,0,2)$.

3. *Định lý cơ bản của Đại số tuyến tính.*

Cho ma trận thực A_{mxn}, thì

- $N(A) = C(A^T)^{\perp}$
- $N(A^T) = C(A)^{\perp}$

II. CƠ SỞ TRỰC CHUẨN

1. *Định nghĩa*

Tập vectơ $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ của R^n được gọi là **tập trực giao** nếu các vectơ của tập đôi một trực giao, tức là $v_i v_j = 0$ khi $i \neq j$.

Tập vectơ $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ của R^n được gọi là **tập trực chuẩn** nếu nó là một tập trực giao và mỗi vectơ đều có độ dài bằng 1, tức là

$$v_i v_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Một cơ sở của R^n đồng thời là một tập trực giao được gọi là một **cơ sở trực giao**.

Một cơ sở của R^n đồng thời là một tập trực chuẩn được gọi là một **cơ sở trực chuẩn**.

2. Ví *dụ*

1 Kiểm tra tập các véc tơ $\{v_1 = (1,1,1); v_2 = (2,1,-3); v_3 = (4,-5,1)\}$ xem có là tập trực giao trong R^3 không?

2Cơ sở chính tắc $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ của R^n là một cơ sở trực chuẩn.

3. *Chú ý*

Khi cho một tập trực giao $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ gồm các vectơ khác ***0***, ta có thể tạo ra một tập trực chuẩn $\{u_1, u_2, ..., u_k\}$ khi đặt $u_i = \frac{1}{|v_i|} v_i$

III. MA TRẬN TRỰC GIAO.

1. *Định nghĩa*

Một ma trận thực A cỡ nxn được gọi là ma trận trực giao nếu các vectơ cột của A lập thành một tập trực chuẩn.

2. *Ví dụ*

a Phép quay góc α. Ma trận A quay véc tơ trong kg một góc α $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ là 1 ma trận trực giao.

b Phép hoán vị: các ma trận hoán vị P hiển nhiên là một ma trận trực giao.

3. *Tính chất*

Nếu A là ma trận trực giao nxn, thì

- Các cột của A lập thành một cơ sở trực chuẩn của R^n.
- $A^T A = I$.
- $A^T = A^{-1}$.
- $(Av)(Au) = u.v$
- $|Av| = |v|$.

IV. TRỰC GIAO HÓA GRAM-SCHMIDT

1. Phương pháp Gram – Schmidt.

Cho V là một không gian con của R^n. $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ là một cơ sở của V.

Phương pháp trực giao hóa Gram - Schmidt nhằm xây dựng một cơ sở trực giao $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ của V từ cơ sở trên.

Đặt $u_1 = v_1$.

Tìm $u_2 = a_{21}u_1 + v_2$ thỏa mãn $u_1 u_2 = 0$.

Ta tìm tiếp u_i dưới dạng $u_i = a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + ... + a_{ii-1}u_{i-1} + v_i$

trong đó a_{ij} là các số thực được xác định từ điều kiện $u_i u_j = 0 \forall i \neq j$.

Khi đó hệ $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ là 1 cơ sở trực giao.

Khi chia mỗi u_i cho độ dài của nó, ta thu được một cơ sở trực chuẩn.

2. *Ví dụ*

Cho cơ sở của R^3 là $\{v_1(1,-1,0); v_2(2,0,-2); v_3(3,-3,3)\}$. Xây dựng cơ sở trực chuẩn của R^3.

Trường hợp đặc biệt

Khi $n = 3$, từ tập $\{v_1; v_2; v_3\}$ ta có tập trực giao $\{q_1; q_2; q_3\}$ xác định bằng công thức:

$$q_1 = v_1$$

$$q_2 = v_2 - \frac{q_1^T v_2}{q_1^T q_1} q_1$$

$$q_3 = v_3 - \frac{q_1^T v_3}{q_1^T q_1} q_1 - \frac{q_2^T v_3}{q_2^T q_2} q_2$$

Bài 9 PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG TỐI THIỂU

I. PHÉP CHIẾU

Chiếu $\vec{b}$ lên đường thẳng hoặc mặt phẳng thì hình chiếu là 1 phần đường thẳng hoặc mặt phẳng.

Mở rộng khái niệm hình chiếu, thay cho đường thẳng, mặt phẳng trong R^3, là không gian con C(A) của R^m.

1. Định nghĩa

Cho ma trân $A_{m\times n}$, $\vec{b} \in R^m$. $\vec{p}$ gọi là *hình chiếu* của $\vec{b}$ lên không gian *C(A)* nếu $\vec{b} - \vec{p}$ vuông góc với mọi véc tơ thuộc *C(A)*.

2. Cách tìm hình chiếu

Giả sử $A_{m\times n} = [a_1 \quad a_2 \ldots \quad a_n]$, $a_i \in R^m, i = \overline{1,n}$.

Khi đó : $(\vec{b} - \vec{p}) \perp \vec{y}, \forall \vec{y} \in C(A) \Leftrightarrow (\vec{b} - \vec{p}) \perp \vec{a_i}, \forall i = \overline{1,n}$

Tức là $a_i^T.(b-p)=0,\forall i=\overline{1,n} \Leftrightarrow A^T(b-p)=0$ (1)

Mặt khác: $p\in C(A)\Rightarrow p=\hat{x}_1a_1+\hat{x}_2a_2+...+\hat{x}_na_n$. Đặt $\hat{x}=(\hat{x}_1,\hat{x}_2,...,\hat{x}_n)\Rightarrow A\hat{x}=p$. Thay vào phương trình (1): $A^T(b-A\hat{x})=0\Leftrightarrow A^TA\hat{x}=A^Tb$ (2)

Giải phương trình (2) ta tìm được $\hat{x}=(\hat{x}_1,\hat{x}_2,...,\hat{x}_n)$. Từ đó suy ra hình chiếu $p=A\hat{x}$.

3. Ví dụ

a. Cho $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ và $b=\begin{bmatrix}-2\\ 0\\ -2\end{bmatrix}$. Tìm hình chiếu của b lên C(A)?

b. Cho không gian véc tơ W sinh bởi hệ véc tơ $\{v_1=(1,2,0),v_2=(0,-1,3)\}$, và $b=(-2,0,-2)$. Tìm hình chiếu của b lên W?

4. Định lý:

Cho ma trận $A_{m\times n}$. Với mỗi $b\in R^m$, tồn tại duy nhất hình chiếu p lên không gian cột C(A).

Hơn nữa : $\|b-y\|\geq\|b-p\|, \quad \forall y\in C(A)\setminus\{p\}$.

Chú ý: Vì p luôn tồn tại, mà $p=A\hat{x}$, nên $\hat{x}$ tồn tại, $\hat{x}$ có thể không duy nhất nhưng p duy nhất.

Định lý:

Nếu ma trận A^TA khả nghịch thì phương trình $A^TA\hat{x}=A^Tb$ có nghiệm duy nhất $\hat{x}=\left(A^TA\right)^{-1}A^Tb$. Do đó $p=A\hat{x}=A\left(A^TA\right)^{-1}A^Tb$.

Ma trận $P=A\left(A^TA\right)^{-1}A^T$ được gọi là *ma trận chiếu.*

Chú ý :

- Nói chung A không phải là ma trận vuông, nên không được tách $\left(A^TA\right)^{-1}=A^{-1}\left(A^T\right)^{-1}$.
- P là ma trận của phép chiếu vuông góc lên $C(A)$.
- $I-P$ là ma trận của phép chiếu vuông góc lên $N(A^T)$.
- Khi $A_{mx1}=\vec{a}$, thì $\hat{x}=\left(a^Ta\right)^{-1}a^Tb=\dfrac{a^Tb}{a^Ta}$ và $P=\dfrac{aa^T}{a^Ta}$.

- Do $P = A\left(A^T A\right)^{-1} A^T$ nên $P^T = P, P = P^2 = P^3 = ... = P^n$.
- Nếu A có các cột $a_1, a_2, ...a_n$ phụ thuộc tuyến tính thì có thể thay ma trận A bởi ma trân có cỡ nhỏ hơn có các cột là tập cơ sở của $C(A)$.

Ví dụ

a Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \\ -3 \end{bmatrix}$. Tìm cơ sở của $C(A)$ và hình chiếu của b lên $C(A)$.

b Tìm hình chiếu của véc tơ $b(1,0,-3)$ lên không gian nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

II. ỨNG DỤNG CỦA PHÉP CHIẾU

Bài toán: Giả sử chúng ta làm một dãy thí nghiệm, với giả thiết đầu ra y là một hàm tuyến tính với đầu vào *t,* tức một hàm có dạng $y = C + Dt$. Kết quả thu được ở m lần tính toán:

$$(t_1, y_1), (t_2, y_2), ..., (t_m, y_m)$$

Tính C, D? Trong các bài toán thực tế hệ phương trình sau sẽ vô nghiệm:

$$\begin{cases} y_1 = C + Dt_1 \\ y_2 = C + Dt_2 \\ .... \\ y_m = C + Dt_m \end{cases}$$

Ta không thể tìm được giá trị chính xác của C, D mà chỉ có thể tìm giá trị gần đúng.

Phương pháp bình phương tối thiểu là phương pháp đi tìm nghiệm gần đúng của hệ khi hệ không có nghiệm đúng.

Ý tưởng của phương pháp như sau:

Đặt $A=\begin{bmatrix}1 & t_1\\ 1 & t_2\\ \dots & \dots\\ 1 & t_m\end{bmatrix}$, $x=\begin{bmatrix}C\\ D\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \dots\\ y_m\end{bmatrix}$ Hệ trở thành : $Ax=b$

Ta đã biết : $Ax=b$ có nghiệm $\Leftrightarrow b\in C(A)$

$Ax=b$ vô nghiệm $\Leftrightarrow b\notin C(A)$

Khi đó lấy véc tơ $p\in C(A)$ sao cho độ dài $||b - p||$ là nhỏ nhất. p là hình chiếu vuông góc của b trên $C(A)$.

Và khi đó $\hat{x}$ thỏa mãn $A\hat{x}=p$ gọi là ***nghiệm bình phương tối thiểu*** của $Ax=b$, $e=b-p$ gọi là ***sai số*** của phép chiếu.

đường thẳng gần *m* điểm nhất.

Ví dụ: Tìm đường thẳng $y=C+Dt$, gần nhất các cặp điểm (theo phương pháp bình phương tối thiểu)

T	0	1	2
Y	2	5	5

parabol gần *m* điểm nhất (*m* >3)

Ví dụ: Tìm parabol $y=C+Dt+Et^2$, gần nhất các cặp điểm (theo phương pháp bình phương tối thiểu).

T	0	1	2	3
Y	3	2	4	4

- Sai số: $e=b-p=(e_1,e_2,\dots,e_m)$
- Bình phương tối thiểu: $E=e_1^2+e_2^2+\dots+e_m^2$.
- Sai số cực đại tối thiểu: $|e_{\max}|=\max(e_1,e_2,\dots,e_m)$

BÀI 10: GIÁ TRỊ RIÊNG VÀ VECTƠ RIÊNG

1. *Định nghĩa*

Cho A *là một ma trận* nxn. Nếu $Av = \lambda v$ với $v \neq 0$ *thì số* λ *được gọi là một* ***giá trị riêng.***

Vectơ v *được gọi là một* ***vectơ riêng*** *của* A *ứng với* λ.

Ý nghĩa: Nếu v là véc tơ riêng thì Av không thay đổi hướng, chỉ co giãn theo v.

Từ phương trình $Av = \lambda v \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0$ có nghiệm $v \neq 0$ nên $\det(A - \lambda I) = 0$.

$\det(A - \lambda I)$ gọi là **đa thức đặc trưng.**

$\det(A - \lambda I) = 0$ gọi là **phương trình đặc trưng** của ma trận A.

2. Cách tìm giá trị riêng và vectơ riêng.

Bước 1 Tính định thức $\det(A - \lambda I)$.

Bước 2 Giải phương trình $\det(A - \lambda I) = 0$

Bước 3 Thay $\lambda = \lambda_k$ vào phtrình $(A - \lambda_k I)v = 0$ để tìm $v = v_k$.

Chú ý: $(A - \lambda I)v = 0$ có vô số nghiệm nên ta chọn $v_k \neq 0$ là những nghiệm đặc biệt hoặc các nghiệm cụ thể độc lập tuyến tính.

Ví dụ Tìm giá trị riêng, vectơ riêng của

a. $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

3. *Tính chất.*

a. $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$

$a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = tr(A)$ gọi là vết của A.

b. $\det A = \lambda_1\lambda_2...\lambda_n$

c. A có một giá trị riêng $= 0 \Leftrightarrow \det A = 0$.

d. Ứng với một giá trị riêng có vô số vectơ riêng khác nhau.

e. Một vectơ riêng chỉ ứng với duy nhất một giá trị riêng.

4. Định lý

Cho đa thức $f(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_m x^m$. Xét ma trận vuông A bất kỳ. Xét ma trận $f(A) = b_0 I + b_1 A + ... + b_m A^m$.

Định lý Giả sử v là một vectơ riêng của A ứng với giá trị riêng λ.

- Nếu A khả nghịch thì A^{-1} có giá trị riêng là λ^{-1} với véc tơ riêng tương ứng là v.
- Ma trận $f(A)$ có giá trị riêng là $f(\lambda)$ với véc tơ riêng tương ứng là v.

Định lý này cho phép ta tìm giá trị riêng của một ma trận $f(A)$ thông qua ma trận A.

Ví dụ

a. Nếu ma trận A có một giá trị riêng là λ thì ma trận $A^{2018} + 2A$ có một giá trị riêng tương ứng là $\lambda^{2018} + 2\lambda$.

b. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Tính định thức của $A^{2018} + 2017A + 2016I$.

5. Chéo hóa một ma trận

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{nxn}$ có n véc tơ riêng độc lập tuyến tính $x_1, x_2, ... x_n$ tương ứng với giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, ... \lambda_n$.

Gọi $S = \begin{bmatrix} x_1 & ... & x_n \end{bmatrix}$ là **ma trận véc tơ riêng**

$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$ là **ma trận giá trị riêng**.

Định nghĩa *Ma trận vuông A gọi là* ***chéo hóa được*** *nếu tồn tại ma trận S khả nghịch và ma trận đường chéo Λ sao cho $S^{-1}AS = \Lambda$.*

Định lý Ma trận A cỡ $n \times n$ chéo hóa được khi và chỉ khi A có n vectơ riêng độc lập tuyến tính.

Ví dụ Ma trận sau có chéo hóa được không $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Định lý Nếu các giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ khác nhau từng đôi một thì các vectơ riêng $x_1, x_2, \ldots x_n$ độc lập tuyến tính nên A chéo hóa được.

Ví dụ Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ có chéo hóa được không?

Chú ý: Nếu A là ma trận $n \times n$ có n giá trị riêng nhưng không đôi một khác nhau, thì A có thể chéo hóa được hay không tùy thuộc vào nó có n vectơ riêng độc lập tuyến tính hay không.

Ví dụ Ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ có chéo hóa được không?

6. Tính lũy thừa của một ma trận

Nếu $S^{-1}AS = \Lambda \Rightarrow S^{-1}A^m S = \Lambda^m \Rightarrow A^m = S\Lambda^m S^{-1}$.

Ví dụ Tính A^k với $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Bài 11 Ma trận đối xứng và xác định dương

I- Ma trận đối xứng

1- Định nghĩa: Ma trận thực A_{nxn} được gọi là đối xứng nếu $A = A^T$.

2- Tính chất

a. Các ma trận đối xứng chỉ có các giá trị riêng là thực.

b. Các véc tơ riêng có thể chọn là các véc tơ trực chuẩn.

Mọi ma trận đối xứng đều có thể chéo hóa được. Ma trận véc tơ riêng S là ma trận trực giao.

3- Định lý.

Mọi ma trận đối xứng đều có thể phân tích thành $A = Q\Lambda Q^T$ với Λ là ma trận giá trị riêng, Q là ma trận trực giao.

Ví dụ: Chéo hóa các ma trận đối xứng bằng các ma trận véc tơ riêng trực giao.

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

II- Ma trận xác định dương

1. Định nghĩa

Các ma trận đối xứng có các giá trị riêng dương được gọi là xác định dương.

Ma trận được gọi là nửa xác định dương nếu các giá trị riêng không âm.

Ví dụ:

Ma trận $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ có là ma trận xác định dương hay không?

2. Tính chất

Một ma trận đối xứng có một trong 4 tính chất sau thì có cả 4 tính chất

Tính chất 1: A là ma trận xác định dương

Tính chất 2: Các trụ là dương. Do đó $trA, |A|$ cũng là các số dương.

Tính chất 3: $x^T Ax > 0 \forall x \neq 0$.

Tính chất 4: Cả n định thức phía trên, bên trái đều dương.

Ví dụ: Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$.

a. Hãy kiểm tra cả 4 tính chất của ma trận A

b. Thay 0 = b. Kiểm tra tính xác định dương của ma trận.

Hệ quả một ma trận nửa xác định dương là xác định dương $\Leftrightarrow$ nó không suy biến.

3. Áp dụng.

a. Kiểm tra minimum.

- Nhắc lại: Tìm cực trị hàm 1 biến và hai biến trong giải tích.

Xét ma trận đối xứng A, véc tơ $x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$.

Hàm $f(x_1,x_2)=x^T Ax$ đạt cực tiểu tại $x_1=x_2=0$ khi và chỉ khi A xác định dương.

Ví dụ:

a. Xét ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 7\end{bmatrix}$.

$f(x_1,x_2)=x^T Ax=x_1^2+4x_1x_2+7x_2^2=(x_1+2x_2)^2+3x_2^2\ge 0$.

Dấu bằng xảy ra khi $x_1=x_2=0$.

b. Xét ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & b\end{bmatrix}$. Tìm b để ma trận A là xác định dương, nửa xác định dương.

Chú ý: 4 tính chất áp dụng riêng cho ma trận cấp 2 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}$

i) Các giá trị riêng đều dương.

ii) Các định thức cấp 1, cấp 2 đều dương tức là $a>0; ac-b^2>0$.

iii) Các trụ đều dương $\Leftrightarrow a>0;\dfrac{ac-b^2}{a}>0$.

iv) $x^T Ax=ax_1^2+2bx_1x_2+cx_2^2>0, \forall x_i\neq 0$.

- Đối với hàm hai biến $f(x,y)$ ma trận $A=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$ được gọi là ma trận đạo hàm cấp 2.

Định lý:

Khi các đạo hàm bậc nhất $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ bằng 0 và ma trận đạo hàm cấp 2 là xác định dương, ta sẽ tìm được một cực tiểu.

b. Biến đổi Elip về dạng chính tắc.

Xét Elip $ax^2+2bxy+cy^2=1$ có tâm là (0,0).

Quay Elip một góc sao cho các trục đối xứng trùng với trục tọa độ.

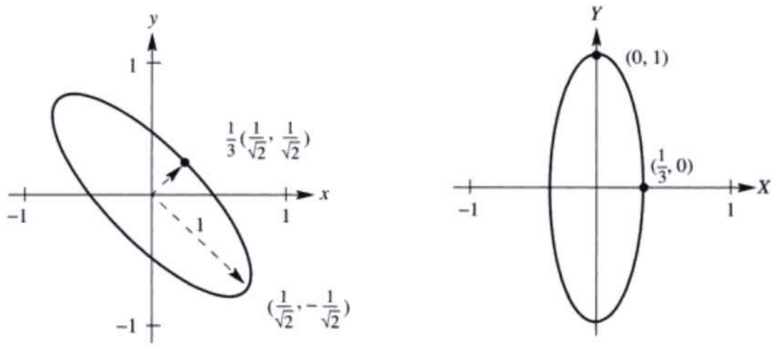


Figure 6.4 The tilted ellipse $5x^2+8xy+5y^2=1$. Lined up it is $9X^2+Y^2=1$.

Đặt $f(x,y)=x^T Ax = ax^2+2bxy+cy^2$ với $x=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$

Ta có $f(x,y)=x^T Ax = ax^2+2bxy+cy^2 \ = a\left(x+\frac{b}{a}y\right)^2+\left(\frac{ac-b^2}{a}\right)y^2$

$a, \frac{ac-b^2}{a}$ là hai trụ của ma trận A.

Khi A là ma trận xác định dương thì $f(x,y)$ có thể tách thành tổng của các bình phương.

Dạng này còn được gọi là **dạng toàn phương.**

Do A là ma trận đối xứng nên $A = Q\Lambda Q^T = Q\Lambda Q^{-1}$ với Q là ma trận vec tơ riêng, Q trực giao, Λ là ma trận giá trị riêng.

Định nghĩa:

Xét Elip $x^T Ax = ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$. Ma trận A được gọi là liên kết với Elip. Elip chính tắc $AX^2 + BY^2 = 1$ liên kết với ma trận Λ.

Ma trận quay từ x thành X là ma trận Q.

Ví dụ: Chuyển elip $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 1$ thành elip chính tắc.

Xét ma trận $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ phương trình elip $f(x, y) = x^T Ax = 1$.

- Các gtr là $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = 1$ nên $\Lambda = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- các véc tơ riêng $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ nên $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
- $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
- Khi đó elip có dạng

  $$5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2$$

Đặt $\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) = X, \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) = Y$. Phương trình Elip có dạng $9X^2 + Y^2 = 1$.

Chú ý: Cho $A = Q\Lambda Q^T$ là ma trận xác định dương. Elip $x^T Ax = 1$ có

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} Q\Lambda Q^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \Lambda \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 1$$

Độ dài hai bán trục là $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$

Bài 12 CÁC MA TRẬN ĐỒNG DẠNG

I. MA TRẬN ĐỒNG DẠNG

1. Định nghĩa

Hai ma trận vuông cùng cấp A, B được gọi là đồng dạng nếu tồn tại ma trận vuông cùng cấp khả nghịch M sao cho $B = M^{-1}AM$.

2. Tính chất.

a. Ma trận chéo hóa được thì đồng dạng với Λ. Trong trường hợp này thì M là S.

b. Các ma trận đồng dạng A, B có cùng các giá trị riêng. Nếu v là một vectơ riêng của A thì $M^{-1}v$ là một vectơ riêng của B ứng với gtr λ

c. A, B đồng dạng thì $tr(A) = tr(B)$.

d. A, B đồng dạng thì $\det A = \det B$

e. A, B đồng dạng thì $r(A) = r(B)$

f. Số vectơ riêng độc lập tuyến tính vẫn như nhau đối với mỗi giá trị riêng λ.

Không đổi	**Thay đổi**
Giá trị riêng	Véc tơ riêng
Vết và định thức	Không gian nghiệm
Hạng	Không gian cột
Số vtr đltt	Không gian hàng
Dạng Jordan	Khg nghiệm trái

Ví dụ: Hãy chứng minh A và B đồng dạng bằng cách tìm M sao cho $B = M^{-1}AM$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ và } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Dạng Jordan

Ma trận J có *giá trị riêng nằm trên đường chéo chính và đường chéo phía trên đường chéo chính đều là số* 1 được goi là khối Jordan.

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ldots & \\ & & J_s \end{bmatrix}$$ gọi là ma trận Jordan nếu J_i là khối Jordan.

Chú ý: Ma trận Λ cũng là ma trận Jordan với số khối là n và mỗi khối là 1 khối Jordan cỡ nxn.

Ma trận A có s véc tơ riêng độc lập tuyến tính thì ma trận A đồng dạng với một ma trận Jordan có s khối Jordan. Khi đó ma trận J được gọi là dạng Jordan của A.

Hai ma trận có cùng dạng Jordan thì đồng dạng.

Nếu $A = M^{-1}JM$ với J là ma trận Jordan thì $A^m = M^{-1}J^mM$.

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ldots & \\ & & J_s \end{bmatrix} \Rightarrow J^m = \begin{bmatrix} J_1^m & & \\ & \ldots & \\ & & J_s^m \end{bmatrix}$$

II. PHÂN TÍCH GIÁ TRỊ SUY BIẾN (SVD)

1. Định nghĩa

Cho ma trận A_{mxn}, khi đó tồn tại hai ma trận trực giao U_{mxm}, V_{nxn} và ma trận Σ_{mxn} (với $\sigma_{ij} = 0 \forall i \neq j$ và $\sigma_{ij} \geq 0 \forall i = j$), thỏa mãn $A = U\Sigma V^T$.

Ví dụ: Cho $A = \begin{bmatrix} 14 & 10 & 19 \\ -2 & 20 & 8 \end{bmatrix}$, A có phân tích SVD với $U = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\Sigma = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \end{bmatrix}$, $V = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

2. Tính chất.

A_{mxn} có phân tích SVD: $A = U\Sigma V^T$, khi đó

- r cột đầu tiên của V là cơ sở trực chuẩn của $C(A^T)$.
- $n - r$ cột cuối của V là cơ sở trực chuẩn của $N(A)$.
- r cột đầu tiên của U là cơ sở trực chuẩn của $C(A)$.

- $n-r$ cột cuối của U là cơ sở trực chuẩn của $N(A^T)$.

3. Cách phân tích SVD.

Trường hợp 1: r(A) = 2.

Giả sử A_{mxn} có phân tích SVD: $A = U\Sigma V^T$, khi đó:

- Các cột v_i của V là các vtr đơn vị của $A^T A$.
- Các cột u_i của U là các véc tơ đơn vị cùng hướng với Av_i, nếu cỡ của U < cỡ của V thì số véc tơ Av_i với v_i là vtr ứng với GTR 0 sẽ không xuất hiện trong U.
- Các σ_{ii} của Σ chính là $\sqrt{\lambda_i}$ với các λ_i là GTR của cả AA^T và $A^T A$.

Chú ý sự tương ứng của các GTR, VTR khi lập các ma trận.

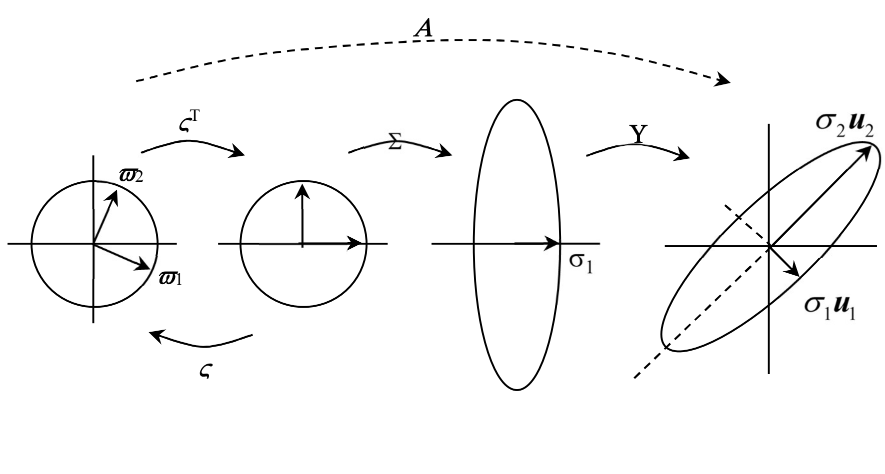
Ví dụ Tìm phân tích SVD của ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Giải

Bước 1: Tính $A^T A$ và các giá trị riêng λ_1, λ_2 của nó suy ra $\sum = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix}$

Bước 2: Tìm các vectơ riêng của $A^T A$. Sau đó chuẩn hóa thành các vectơ đơn vị: $V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$

Bước 3: Tính Av_1, Av_2 và tìm véc tơ đơn vị tương ứng là u_1, u_2. $U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}$.



Chú ý $Av_1 = \sigma_1 u_1 = \sqrt{\lambda_1} u_1, Av_2 = \sigma_2 u_2 = \sqrt{\lambda_2} u_2$. Vậy $A = U\Sigma V^T$

Chú ý: Mọi ma trận khả nghịch cấp 2, ***chuyển đường tròn đơn vị thành một ellipse***.

Chú ý: Ta có thể tìm được các vectơ u trực tiếp bằng AA^T thay vì $A^T A$

$$AA^T = U\Sigma V^T (V\Sigma^T U^T) = U\Sigma\Sigma^T U^T$$

Trường hợp 2: $r(A) = 1$.

Bước 1: Tính $A^T A$ và các giá trị riêng λ_1, λ_2 của nó suy ra $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix}$

Bước 2: Tìm cơ sở của $C(A^T)$ chuẩn hóa thành véc tơ đơn vị v_1.

Tìm cơ sở của $N(A)$ chuẩn hóa thành v_2. $V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$

Bước 3: Tìm cơ sở của $C(A)$ chuẩn hóa thành véc tơ đơn vị u_1. Tìm cơ sở của $N(A^T)$ chuẩn hóa thành u_2. $U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}$.

Bước 4: $A = U\Sigma V^T$

Ví dụ Hãy tìm SVD của ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

BÀI 13: PHÉP BIẾN ĐỔI TUYẾN TÍNH

I. KHÁI NIỆM PHÉP BIẾN ĐỔI TUYẾN TÍNH

1. Định nghĩa

Một biến đổi T từ kgvt V vào kgvt W được gọi là một ***phép biến đổi tuyến tính*** *nếu* $\forall v, w \in V$ *và* $\forall c \in R$ ta có:

a. $T(v + w) = T(v) + T(w)$

b. $T(cv) = cT(v)$

2. Tính chất

Nếu $T : V \to W$ là phép biến đổi tuyến tính, thì

i) $T(0_V) = 0_W$.

ii) Nếu $v_i \in V, \forall i; x_i \in R$ thì $T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(v_i)$

3. Ví dụ

1) Cho véc tơ $a = (1,3,4)$, và biến đổi $T: R^3 \to R$ với $T(v) = av$. Kiểm tra xem T có là BĐTT không?

2) Cho biến đổi T có $T(v) = |v|$. Kiểm tra xem T có là BĐTT không?

3) $T: R^2 \to R^3$ xác định bởi $T(v) = (x_2, x_1, x_1 + x_2)$, với mọi $v = (x_1, x_2) \in R^2$.

II. Ma trận của phép biến đổi tuyến tính

1. Định nghĩa

Cho biến đổi tuyến tính $T: V \to W$, V có cơ sở $\{v_1, v_2 ..., v_n\}$, W có cơ sở $\{w_1, w_2 ..., w_m\}$

Ta sẽ chỉ ra tồn tại ma trận A_{mxn} sao cho $T(v) = Av$.

Khi đó A gọi là **ma trận của phép biến đổi tuyến tính** T theo cơ hai sở $\{v_1, v_2, ... v_n\}$, $\{w_1, w_2, ... w_m\}$.

Lấy $v \in V$ bất kỳ $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_n v_n$. Do T là biến đổi tuyến tính nên

$$T(v) = c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2) + ... + c_n T(v_n)$$

Theo giả thiết $T(v) = Av = \begin{bmatrix} T(v_1) & T(v_2) & ... & T(v_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ ... \\ c_n \end{bmatrix}$

Nên $A = \begin{bmatrix} T(v_1) & T(v_2) & ... & T(v_n) \end{bmatrix}$

Các bước tìm ma trận A của phép BĐTT:

Bước 1: Tìm $T(v_j)$ với v_j là véc tơ cơ sở của không gian V.

Bước 2: Tìm tọa độ của $T(v_j)$ trong W.

Bước 3: Ma trận $A = \begin{bmatrix} T(v_1) & T(v_2) & \dots & T(v_n) \end{bmatrix}$.

Chú ý: Nếu cặp cơ sở của phép biến đổi là tự nhiên thì ma trận gọi là ***ma trận chính tắc***.

2. *Ví dụ*

1. Cho phép biến đổi tuyến tính $T: R^3 \to R^2$ xác định bởi $T(v) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3)$.
   a. Tìm ma trận chính tắc của *T*.
   b. Cho $v = (1,1,1)$. Tìm $T(v)$.
   c. Cho $T(v) = (1,2)$. Tìm v.
2. Xét phép quay trong mặt phẳng $T: R^2 \to R^2$ xác định bởi $T(v) = \begin{bmatrix} x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha \\ x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha \end{bmatrix}$. Xác định ma trận chính tắc của phép biến đổi.
3. Xét phép đối xứng $T: R^2 \to R^2$ xác định bởi $T(v) = (-x, y)$. Xác định ma trận chính tắc của phép biến đổi.
4. Xét phép hoán vị $T: R^3 \to R^3$ xác định bởi $T(v) = (y, z, x)$. Xác định ma trận chính tắc của phép biến đổi.

Bài 14: CHÉO HÓA VÀ GIẢ NGHỊCH ĐẢO

I. CHUYỂN CƠ SỞ

1. Tọa độ của một véc tơ trong một cơ sở

Định nghĩa Cho $S = \{v_1, v_2 \dots, v_n\}$ là cơ sở của không gian n chiều V. Với mọi $v \in V$ có biểu diễn ***duy nhất*** $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$. Các số $\{x_1, x_2 \dots, x_n\}$ gọi là **tọa độ của** v **trong cơ sở S.** Kí hiệu $[v]_S$

Chú ý Cách biểu diễn khác:

$$v = x_1 v_1 + \dots x_n v_n \Leftrightarrow v = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} [v]_S \Leftrightarrow [v]_S = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix}^{-1} v$$

Ví dụ Tìm tọa độ của $v=(2,5)$ trong cơ sở $w_1=(2,3), w_2=(1,2)$.

Chú ý: Nếu $E=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ là cơ sở tự nhiên của R^n thì mọi $v=(x_1,...,x_n)$, tọa độ trong cơ sở E $[v]_E=(x_1,...,x_n)$.

II. Ma trận chuyển cơ sở

1. Định nghĩa

Trong không gian véc tơ n chiều V cho hai cơ sở $B=\{v_1,v_2...,v_n\}$, $B'=\{v_1',v_2'...,v_n'\}$.

Ma trận P thỏa mãn $[v]_B=P[v]_{B'}$ gọi là ma trận chuyển cơ sở từ B sang B'.

2. Định lý

Nếu các véc tơ cơ sở v_j' của B' có tọa độ là $[v_j']_B$ thì ma trận chuyển cơ sở là $P=\begin{bmatrix}[v_1']_B & \dots & [v_n']_B\end{bmatrix}$

Chú ý

+ Với R^n $v_j'=[v_1 \ \dots \ v_n][v_j']_B$ nên $[v_1' \ \dots \ v_n']=[v_1 \ \dots \ v_n]\begin{bmatrix}[v_1']_B & \dots & [v_n']_B\end{bmatrix}$

$$[v_1' \ \dots \ v_n']=[v_1 \ \dots \ v_n]P \Rightarrow P=[v_1 \ \dots \ v_n]^{-1}[v_1' \ \dots \ v_n']$$

+ Ma trận chuyển cơ sở từ $B\to B'$ và ma trận chuyển từ $B'\to B$ nghịch đảo nhau.

Ví dụ

a. Cho hai cơ sở của R^2: $E=\{e_1,e_2\}$, $F=\{v_1=(1,3), v_2=(2,5)\}$. Tìm ma trân chuyển cơ sở từ $E\to F$ và $F\to E$.

b. Cho hai cơ sở của R^2: $F=\left\{v_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right\}$, $S=\left\{w_1=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, w_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$.

Biết $[v]_F=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$, tìm $[v]_S$.

III. CHÉO HÓA VÀ GIẢ NGHỊCH ĐẢO.

1. Chéo hóa ma trận của phép BĐTT.

Xét phép biến đổi tuyến tính $T:R^n\to R^n$ có ma trận $A_{n\times n}$ trong cơ sở tự nhiên.

Giả sử A chéo hóa được, tức là có n véc tơ riêng độc lập tuyến tính $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ tương ứng các giá trị riêng $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$.

Khi đó các véc tơ này tạo thành 1 cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$.

Định lý: Trong cơ sở $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ gồm các véc tơ riêng, thì ma trận của T chính là ma trận chéo Λ

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \lambda_2 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & \lambda_n \end{bmatrix} = S^{-1}AS$$

$S = [v_1 \ \ v_2 \ \ ... \ \ v_n]$ đóng vai trò là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở tự nhiên sang cơ sở

Xét phép biến đổi tuyến tính bất kỳ $T: R^n \to R^m$ có ma trận $A_{n\times m}$ trong các cơ sở tự nhiên.

Ta có, với mọi ma trận A, ta luôn có $A = U\Sigma V^T$

Lấy cơ sở cho R^n là $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, cơ sở cho R^m là $U = \{u_1, u_2, .., u_m\}$, thì ma trận của phép biến đổi tuyến tính trong các cơ sở đó được xác định như sau :

$$T(v_1) = Av_1 = \sigma_1 u_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{bmatrix}_U$$

$$T(v_r) = Av_r = \sigma_r u_r = \begin{bmatrix} 0 \\ .. \\ \sigma_r \\ .. \\ 0 \end{bmatrix}_U$$

$$T(v_{r+1}) = Av_{r+1} = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}_U, ..., T(v_n) = Av_n = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}_U$$

Và ma trận thu được chính là ma trận chéo cấp $m \times n$:

$$\Sigma_{m\times n} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \cdots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & \cdots \end{bmatrix} = U^{-1}AV$$

Nhận xét: $U = [u_1 \quad u_2 \ldots u_m]$ là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở tự nhiên của R^m sang cơ sở *U*.

$V = [v_1 \quad v_2 \ldots v_n]$ là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở tự nhiên của R^n sang cơ sở *V*.

Kết luận: Như vậy mọi ma trận *A* của phép biến đổi tuyến tính đều có thể chéo hóa được bằng cách chuyển sang các cơ sở đặc biệt.

2. Ma trận giả nghịch đảo

a. Định nghĩa: Cho ma trận $A_{m\times n}$ có khai triển SVD là $A = U\Sigma V^T$. Ma trận A^+ xác định: $A^+ = V\Sigma^+ U^T$ trong đó

- $V = [v_1 \ldots v_r \ldots v_n]$.
- $U = [u_1 \ldots u_r \ldots u_m]$
- $\Sigma^+ = \begin{bmatrix} \sigma_1^{-1} & & & \\ & \cdots & & \\ & & \sigma_r^{-1} & \\ & & & \cdots \end{bmatrix}$

được gọi là ma trận giả nghịch đảo (ma trận nghịch đảo suy rộng) của ma trận *A*.

b. Tính chất: Cho A^+ là ma trận giả nghịch đảo của *A*. Khi đó

i. A^+A là ma trận chiếu lên C(A).

ii. AA^+ là ma trận chiếu lên $C(A^T)$.

c. Định lý: Cho hệ phương trình $Ax = b$. Nghiệm bình phương tối thiểu của hệ phương trình chính là $x^+ = A^+b$. Mọi véc tơ khác là nghiệm của $A^T A\hat{x} = A^T b$ đều lớn hơn x^+

d. Tìm ma trận giả nghịch đảo trong một số trường hợp đặc biệt:

Xét ma trận $A_{m\times n}$.

Nếu $r\left(A\right)=n$, thì ma trận A có nghịch đảo trái là $C=\left(A^{T}A\right)^{-1}A^{T}$, thỏa mãn $CA=I$. Khi đó: $A^{+}=C$

Nếu $r\left(A\right)=m$, thì ma trận A có nghịch đảo phải là $B=A^{T}\left(AA^{T}\right)^{-1}$, thỏa mãn $AB=I$. Khi đó: $A^{+}=B$

Nếu $r\left(A\right)=1$, khai triển SVD của A chỉ còn $A=\sigma uv^{T}$.Khi đó: $A^{+}=\frac{1}{\sigma}vu^{T}$