BÀI 9: VECTƠ RIÊNG
GIÁ TRỊ RIÊNG

B1: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

a, Hãy tìm các gtrị riêng và vectơ riêng của A.

b, Tìm các gtrị riêng của ma trận $A^{100} - 2A^2 + A - 2I$.

Giải: Gọi λ là giá trị riêng của A
v là vectơ riêng tương ứng

a, Xét ma trận:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5$$

$$\Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 5 \end{array}\right.$$

+, Với $\lambda_1 = -1$ gọi $v_1 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ là vectơ riêng tương ứng. Khi đó, v_1 thoả mãn

$$(A - \lambda_1 I) v_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow [A - \lambda_1 I \mid 0] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{h_2 - h_1 \to h_2} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

HẢI TIẾN

Khôi phục hệ, ta có:

$$2a + 4b = 0$$

Cho $b = 1 \Rightarrow a = -2$

$$\Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

+) Với $\lambda_2 = 5$, gọi $v_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ là vectơ riêng tương ứng. Khi đó v_2 thoả mãn:

$$(A - \lambda_2 I) v_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow [A - \lambda_2 I \mid 0] = \left[\begin{array}{cc|c} -4 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

~~Khôi phục hệ, ta có~~:

$$\xrightarrow{2h_2 + h_1 \to h_2} \left[\begin{array}{cc|c} -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Khôi phục hệ, ta có:

$$-4a + 4b = 0$$

$$\Leftrightarrow -a + b = 0$$

Cho $b = 1 \Rightarrow a = 1$

$$\Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vậy giá trị riêng của A là: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$ ứng với 2 vectơ riêng là

$$v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ và } v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

HẢI TIẾN

b, Vì A có 2 vectơ riêng độc lập tuyến tính => A chéo hoá được.

$$\Rightarrow A^{100} = S.\Lambda^{100}.S^{-1}$$

Với $S = [v_1 \;\; v_2] = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow S^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Lambda^{100} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^{100} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{100} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 5^{100} \\ 1 & 5^{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(2 + 5^{100}) & -\frac{2}{3}(1 - 5^{100}) \\ -\frac{1}{3}(1 - 5^{100}) & \frac{1}{3}(1 + 2.5^{100}) \end{bmatrix}$$

Date . . . No.

B2: Tìm các ~~và~~ giá trị riêng của ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Giải:

Gọi λ là giá trị riêng của A

Xét ma trận:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2$$

Với $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 1$$

Vậy giá trị riêng của A là: $\lambda = 1$

B3: Hãy tìm các gtrị riêng, vectơ riêng của ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Giải:

Gọi λ là giá trị riêng của A

v là vectơ riêng tương ứng.

Xét ma trận:

~~A~~

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 4-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A - \lambda I) = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31}$$

$$= (1-\lambda)(4-\lambda)(6-\lambda)$$

HẢI TIẾN

Date . . . No.

Với: $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - \lambda = 0 \\ 4 - \lambda = 0 \\ 6 - \lambda = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 4 \\ \lambda_3 = 6 \end{array}\right.$$

+) Với $\lambda_1 = 1$, Gọi $v_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ là vectơ riêng tương ứng, khi đó v_1 thoả mãn:

$$(A - \lambda_1 I)\, v_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow [A - \lambda_1 I \mid 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

Khôi phục hệ, ta được:

$$\begin{cases} 2b + 3c = 0 \\ 3b + 5c = 0 \\ 5c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Cho $a = 1$

$$\Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

+) Với $\lambda_2 = 4$, gọi $v_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ là vectơ riêng tương ứng, khi đó v_2 thoả mãn:

$$(A - \lambda_2 I)\, v_2 = 0$$

$\Leftrightarrow [A - \lambda_2 I \mid 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$

Khôi phục hệ, ta được:

$$\begin{cases} -3a + 2b + 3c = 0 \\ 5c = 0 \\ 2c = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow c = 0$

Cho $b = 3 \Rightarrow a = 2$

$$\Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

+, Với $\lambda_3 = 6$, gọi $v_3 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ là vectơ riêng tương ứng, khi đó v_3 TM:

$$(A - \lambda_3 I) v_3 = 0$$

$\Leftrightarrow [A - \lambda_3 I \mid 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Khôi phục hệ, ta được:

$$\begin{cases} -5a + 2b + 3c = 0 \\ -2b + 5c = 0 \end{cases}$$

Cho $c = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{8}{5} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Date . . . No.

Vậy các giá trị riêng của A là:
$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 6$
ứng với ba vectơ riêng là:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

B4: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.
Phân tích A thành dạng $S^{-1} \Lambda S$ sau đó tính A^k, $k \in N^*$

Giải:

Gọi λ là giá trị riêng của A
v là vectơ riêng tương ứng

Xét ma trận:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 1 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \det(A - \lambda I) = (2-\lambda)(5-\lambda) - 4$

Với $\det(A - \lambda I) = 0$

$\Leftrightarrow (2-\lambda)(5-\lambda) - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 6 \end{array}\right.$

+, Với $\lambda_1 = 1$, gọi $v_1 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ là vectơ riêng tương ứng, khi đó v_1 thoả mãn:

HẢI TIẾN

$(A - \lambda_1 I) v_1 = 0$

$\Leftrightarrow [A - \lambda_1 I \mid 0] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{h_2 - h_1 \to h_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Khôi phục hệ, ta được:

$a + 4b = 0$

Cho $b = 1 \Rightarrow a = -4$

$\Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$

+, Với $\lambda_2 = 6$, gọi $v_2 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ là vectơ riêng tương ứng, khi đó v_2 thoả mãn:

$(A - \lambda_2 I) v_2 = 0$

$\Leftrightarrow [A - \lambda_2 I \mid 0] = \left[\begin{array}{cc|c} -4 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{4h_2 + h_1 \to h_2} \left[\begin{array}{cc|c} -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Khôi phục hệ, ta được:

$-4a + 4b = 0$

Cho $b = 1 \Rightarrow a = 1$

$\Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Vì A có 2 vectơ riêng độc lập tuyến tính $\Rightarrow$ A chéo hoá được

Hay: $A = S . \Lambda . S^{-1}$

Date . . . No.

Trong đó: $S = [v_1 \quad v_2] = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow S^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^k = S . \Lambda^k . S^{-1} \quad (k \in N^*)$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 6^k \\ 1 & 6^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 + 6^k & -4 + 4.6^k \\ -1 + 6^k & 1 + 4.6^k \end{bmatrix}$$

Vậy: $A^k = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 + 6^k & -4 + 4.6^k \\ -1 + 6^k & 1 + 4.6^k \end{bmatrix} \quad (k \in N^*)$

HẢI TIẾN

B5: Chéo hoá ma trận A và tính A^{100}

với $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Giải:

Gọi λ là giá trị riêng của A

v là vectơ riêng tương ứng

Xét ma trận:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A - \lambda I) = (2-\lambda)^2 - 1$$

Với $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \end{array} \right.$$

Phương trình đặc trưng có các nghiệm phân biệt $\Rightarrow$ A chéo hoá được.

+, Với $\lambda_1 = 1$, gọi $v_1 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ là vectơ riêng ~~của~~ tương ứng, v_1 thoả mãn:

$$(A - \lambda_1 I)\, v_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[A - \lambda_1 I \mid 0 \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{h_2 - h_1 \to h_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Khôi phục hệ, ta được:

$$a + b = 0$$

Cho $b = 1 \Rightarrow a = -1$

$$\Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

+, Với $\lambda_2 = 3$, gọi $v_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ là vectơ riêng tương ứng, khi đó v_2 thoả mãn:

$$(A - \lambda_2 I) v_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow [A - \lambda_2 I \mid 0] = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{h_2 + h_1 \to h_2} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Khôi phục hệ, ta được:

$$-a + b = 0$$

Cho $b = 1 \Rightarrow a = 1$

$$\Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

+, Vì A chéo hoá được nên ta viết A dưới dạng:

$$S^{-1} A S = \Lambda$$

Trong đó: $S = [v_1 \ v_2] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow S^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Từ đó, ta có: $A^{100} = S \cdot \Lambda^{100} \cdot S^{-1}$

$\Rightarrow A^{100} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{100} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 & 3^{100} \\ 1 & 3^{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+3^{100} & -1+3^{100} \\ -1+3^{100} & 1+3^{100} \end{bmatrix}$

Vậy $A^{100} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+3^{100} & -1+3^{100} \\ -1+3^{100} & 1+3^{100} \end{bmatrix}$

B6: Hãy xác định hàng thứ 2 của ma trận: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ * & * \end{bmatrix}$ sao cho A có 2 giá trị riêng là 4 và 7.

Giải:

Gọi λ là giá trị riêng của A

Với $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$

Xét ma trận:

$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ a & b-\lambda \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \det(A - \lambda I) = -\lambda(b-\lambda) - a$

$= \lambda^2 - \lambda b - a$

Với $\det(A - \lambda I) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda b - a = 0$

Thay $\lambda = 4$ với $\lambda = 7$ vào phương trình
ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 16 - 4b - a = 0 \\ 49 - 7b - a = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -28 \\ b = 11 \end{cases}$$

Vậy $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -28 & 11 \end{bmatrix}$

B7. Hãy chọn a, b, c để ma trận A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

thoả mãn $\det(A - \lambda I) = 9\lambda - \lambda^3$.
Khi đó hãy tìm các giá trị riêng của ma trận A.

Giải:

Gọi λ là giá trị riêng của A
Xét ma trận:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ a & b & c-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A - \lambda I) = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-\lambda)\left[(-\lambda)(c-\lambda) - b\right] + a$$

$$= -\lambda(-\lambda c + \lambda^2 - b) + a$$

$$= c\lambda^2 - \lambda^3 + b\lambda + a$$

Mà : $\det(A - \lambda I) = 9\lambda - \lambda^3$

$\Rightarrow c\lambda^2 - \lambda^3 + b\lambda + a = 9\lambda - \lambda^3$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 9 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Với $\det(A - \lambda I) = 9\lambda - \lambda^3$

$\Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0$

$\Leftrightarrow 9\lambda - \lambda^3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 3 \end{array}\right.$$

Vậy các giá trị riêng của A là:
$\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 0$ và $\lambda_3 = 3$