Date . . . No.

BÀI 4: KHÔNG GIAN VECTƠ

B1: Dùng định nghĩa chứng minh rằng tập
$W = \{u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x + 2y - z - t = 0\}$

là một không gian vectơ con của $\mathbb{R}^4$

Giải:

+) Xét $O(0,0,0,0)$ ta có:

$3.0 + 2.0 - 0 - 0 = 0$

$\Rightarrow O \in W$

$\Rightarrow W \neq \emptyset$ (1)

+) lấy $k, v \in W$, $c \in \mathbb{R}$

Với $k = \cancel{x_1, x_2, x}(x_1, y_1, z_1, t_1) \in W$

$\Rightarrow 3x_1 + 2y_1 - z_1 - t_1 = 0$ (2)

Với $v = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in W$

$\Rightarrow 3x_2 + 2y_2 - z_2 - t_2 = 0$ (3)

Cộng 2 vế của (2) với (3), ta được:

$3(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) - (t_1 + t_2) = 0$

Ta có: $k + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2)$

Lại có: $3(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) - (t_1 + t_2) = 0$

$\Rightarrow k + v \in W$ (4)

Với $c \in \mathbb{R}$, ta có:

$c.k = (cx_1, cy_1, cz_1, ct_1)$

Lấy c nhân với 2 vế của (2), ta được

$3cx_1 + 2cy_1 - cz_1 - ct_1 = 0$

HẢI TIẾN

$\Rightarrow c\alpha \in W$ (5)

Từ (1), (4), (5) suy ra W là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^4$

B2: Tập hợp con nào sau đây của $\mathbb{R}^3$ cùng với các phép toán cộng và nhân thông thường trong $\mathbb{R}^3$ là không gian con của $\mathbb{R}^3$

a, $V_1 = \{(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 : b_1 = b_2\}$

b, $V_2 = \{(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 : b_1 > 0; b_2 > 0\}$

c, $V_3 = \{(b_1, b_2, b_3) \in : b_1 = 0\}$

d, Tất cả các tổ hợp tuyến tính của $v = (1, 4, 0)$ và $w = (2, 2, 2)$

e, Tất cả các vectơ thoả mãn:

$$b_1 + b_2 + b_3 = 0$$

Giải:

a, +, Ta có: $0(0, 0, 0) \in V_1$

$\Rightarrow V_1 \neq \emptyset$ (1)

+, Lấy $u, v \in V_1$, $c \in \mathbb{R}$

Với: $u = (b_{11}, b_{21}, b_{31}) \in V_1$

$\Rightarrow b_{11} = b_{21}$

$v = (b_{12}, b_{22}, b_{32}) \in V_1$

$\Rightarrow b_{12} = b_{22}$

$\Rightarrow b_{11} + b_{12} = b_{21} + b_{22}$ (Cộng theo vế 2 pt)

Ta có: $u + v = (b_{11} + b_{12}, b_{21} + b_{22}, b_{31} + b_{32})$

Lại có: $b_{11} + b_{12} = b_{21} + b_{22}$

$\Rightarrow u + v \in V_1$ (2)

+) Với $u = (b_{11}, b_{21}, b_{31}) \in V_1$

có $b_{11} = b_{21}$

nhân 2 vế với $c \in \mathbb{R}$, ta có:

$c b_{11} = c . b_{21}$

Ta có: $c.u = (cb_{11}, cb_{21}, cb_{31})$

Mà $cb_{11} = cb_{21}$

$\Rightarrow c.u \in V_1$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra V_1 là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$

b) +) Lấy $u \in V_2$, $c \in \mathbb{R}$

với $u = (b_{11}, b_{21}, \cancel{b_{31}}\ b_{31}) \in V_2$

$\Rightarrow \begin{cases} b_{11} > 0 \\ b_{21} > 0 \end{cases}$

Nhân $c \in \mathbb{R}$ với 2 vế, ta được:

$\begin{cases} c.b_{11} > 0 \\ c.b_{21} > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow c > 0$

$\Rightarrow c.u = (cb_{11}, cb_{21}, cb_{31})$

$\Rightarrow c.u \in V_2$ với $c > 0$

$\Rightarrow V_2$ không là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$

c, +, Ta có : $O(0,0,0) \in V_3$

$\Rightarrow V_3 \neq \emptyset$ (1)

+, Lấy $u, v \in V_3$, $c \in \mathbb{R}$

Với $u = (b_{11}, \cancel{b_{12}} b_{21}, b_{31}) \in V_3$

có : $b_{11} = 0$

$v = (b_{12}, b_{22}, b_{32}) \in V_3$

có : $b_{12} = 0$

Cộng theo vế của 2 phương trình ta được:

$b_{11} + b_{12} = 0$

Ta có : $u + v = (b_{11} + b_{12}, b_{21} + b_{22}, b_{31} + b_{32})$

Mà $b_{11} + b_{12} = 0$

$\Rightarrow u + v \in V_3$ (2)

+, Với $u = (b_{11}, b_{21}, b_{31}) \in V_3$

có: $b_{11} = 0$

nhân 2 vế với $c \in \mathbb{R}$, ta có:

$cb_{11} = 0$

Lại có: $cu = (cb_{11}, cb_{21}, cb_{31})$

Mà $cb_{11} = 0$

$\Rightarrow c.u \in V_3$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra V_3 là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$.

d, Giả sử m là tổ hợp tuyến tính của $v(1,4,0)$ với $w(2,2,2)$

$\Rightarrow$ m có dạng : $m(b_1, b_2, b_3)$

$\Rightarrow m = x_1 v + x_2 w$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Date . . . No.

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 = x_1 + 2x_2 \\ b_2 = 4x_1 + 2x_2 \\ b_3 = 2x_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Tập hợp các vectơ là tổ hợp tuyến tính của v với w là:

$$V_4 = \{(x_1 + 2x_2, 4x_1 + 2x_2, 2x_2) \in \mathbb{R}^3 ; x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

+) Với $0(0,0,0) \in V_4$

$\Rightarrow V_4 \neq \emptyset$ (1)

+) Lấy $k, m \in V_4$, $c \in \mathbb{R}$

Với $k = (x_{11} + 2x_{21}, 4x_{11} + 2x_{21}, 2x_{21}) \in V_4$

có: $x_{11}, x_{21} \in \mathbb{R}$

$m = (x_{12} + 2x_{22}, 4x_{12} + 2x_{22}, 2x_{22}) \in V_4$

có: $x_{12}, x_{22} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow k + m = (x_{11} + 2x_{21} + x_{12} + 2x_{22}, 4x_{11} + 2x_{21} + 4x_{12} + 2x_{22}, 2x_{21} + 2x_{22})$

có: $\begin{cases} x_{11} + x_{12} \in \mathbb{R} \\ x_{21} + x_{22} \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\Rightarrow k + m \in V_4$ (2)

+) lấy $c \in \mathbb{R}$

Ta có. $c.k = (c x_{11} + 2c x_{21}, 4c x_{11} + 2c x_{21}, 2c x_{21})$

Mà: $\begin{cases} c x_{11} \in \mathbb{R} \\ c a_{21} \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\Rightarrow c.k \in V_4$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra V_4 là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$

HẢI TIẾN

Date No.

e) Ta có tập hợp các vectơ thỏa mãn $b_1 + b_2 + b_3 = 0$ là:

$$V_5 = \{(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 : b_1 + b_2 + b_3 = 0\}$$

+) Với $O(0,0,0) \Rightarrow 0 + 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow 0 \in V_5$

$\Rightarrow V_5 \neq \emptyset$ (1)

+) Lấy $u, v \in V_5$, $c \in \mathbb{R}$

Với $u = (b_{11}, b_{21}, b_{31}) \in V_5$

có: $b_{11} + b_{21} + b_{31} = 0$

$v = (b_{12} + b_{22} + b_{32}) \in V_5$

có: $b_{12} + b_{22} + b_{32} = 0$

Cộng theo vế của 2 phương trình, ta được:

$b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22} + b_{31} + b_{32} = 0$

+) Ta có: $u + v = (b_{11} + b_{12}, b_{21} + b_{22}, b_{31} + b_{32})$

Mà $b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22} + b_{31} + b_{32} = 0$

$\Rightarrow u + v \in V_5$ (2)

+) Với $u = (b_{11}, \cancel{b_{22}}\, b_{21}, b_{31}) \in V_5$

có: $b_{11} + b_{21} + b_{31} = 0$

Nhân 2 vế của phương trình với $c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow cb_{11} + cb_{21} + cb_{31} = 0$

Ta có: $cu = (cb_{11}, cb_{21}, cb_{31})$

Mà: $cb_{11} + cb_{21} + cb_{31} = 0$

$\Rightarrow cu \in V_5$ (3)

HẢI TIẾN

Từ (1), (2), (3) suy ra V_5 là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$

B3: Hãy mô tả các không gian cột (đường thẳng hoặc mặt phẳng) của các ma trận sau

a, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ b, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ c, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Giải:

a, Ta có tổ hợp tuyến tính các cột của ma trận A là ~~các vectơ có dạng~~:

$$C(A) = Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ C(A) là mặt phẳng với cặp vectơ chỉ phương là $e_1 = (1, 0, 0)$ và $e_2 = (2, 0, 0)$

b, Không gian cột của ma trận B là:

$$C(B) = \{Bx \mid x \in \mathbb{R}^2\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ C(B) là mặt phẳng với cặp vectơ chỉ phương là $e_1 = (1, 0, 0)$ và $e_2 = (0, 2, 0)$

c, Không gian cột của ma trận C là:

$$C(C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $C(C)$ là đường thẳng trong $\mathbb{R}^2$ với vecto chỉ phương là $a_1 = (1, 2, 0)$

B4. Tìm điều kiện của vế phải để $b \in C(A)$ với:

a, $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ -1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$ b, $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$

Giải:

a, +, Ta có: $b \in C(A)$ với $b = (b_1, b_2, b_3)$

Khi và chỉ khi $Ax = b$ có nghiệm

Xét ma trận mở rộng:

$$[A \mid b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & b_1 \\ 2 & 8 & 4 & b_2 \\ -1 & -4 & -2 & b_3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[h_3 + h_1 \to h_3]{h_2 - 2h_1 \to h_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + b_1 \end{array}\right]$$

Khôi phục hệ, ta được:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = b_1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = b_2 - 2b_1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = b_3 + b_1 \end{cases}$$

Date No.

~~Để~~ hệ có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} b_2 - 2b_1 = 0 \\ b_3 + b_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_2 = 2b_1 \\ b_3 = -b_1 \end{cases}$$

$\Rightarrow b = (b_1, 2b_1, -b_1)$

Vậy với $b = (b_1, 2b_1, -b_1)$ thì $b \in C(A)$ ($\forall b_1 \in \mathbb{R}$)

b) $b(b_1, b_2, b_3) \in C(A)$

khi và chỉ khi: $Ax = b$ có nghiệm

Xét ma trận mở rộng:

$$[A \mid b] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & b_1 \\ 2 & 9 & b_2 \\ -1 & -4 & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow[h_3 + h_1 \to h_3]{h_2 - 2h_1 \to h_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & b_3 + b_1 \end{array}\right]$$

Khôi phục hệ, ta được:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = b_1 \\ x_2 = b_2 - 2b_1 \\ 0x_1 + 0x_2 = b_3 + b_1 \end{cases}$$

hệ có nghiệm khi và chỉ khi

$b_3 + b_1 = 0$

$\Leftrightarrow b_3 = -b_1$

$\Rightarrow b = (b_1, b_2, -b_1)$

Vậy với $b = (b_1, b_2, -b_1)$ ($\forall b_1, b_2 \in \mathbb{R}$)

thì $b \in C(A)$

HẢI TIẾN

35: Mô tả 4 không gian con của ma trận:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

Giải:

+) Không gian cột của B là:

$$C(B) = \{x_1 c_1 + x_2 c_2 + x_3 c_3 \mid x_j \in \mathbb{R}\}$$

$$= x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

+) Không gian nghiệm của B là:

$$N(B) = \{x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3 \mid Bx = 0\}$$

Giải $Bx = 0$

Ta có ma trận mở rộng:

$$[B \mid 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{h_3 - 2h_2 \to h_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Khôi phục hệ, ta được:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

$\Rightarrow x \in N(B)$ có dạng:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow N(B)$ là đường thẳng trong $\mathbb{R}^3$ nhận vectơ $(1, -1, 1)$ là vectơ chỉ phương

+, Không gian hàng của B là:

$$C(A^T) = \{ y_1 h_1 + y_2 h_2 + y_3 h_3 \mid y_j \in \mathbb{R} \}$$

$$= y_1 [2 \;\; 4 \;\; 2] + y_2 [0 \;\; 4 \;\; 4] + y_3 [0 \;\; 8 \;\; 8]$$

$$= y_1 [2 \;\; 4 \;\; 2] + y_2 [0 \;\; 4 \;\; 4] + 2y_3 [0 \;\; 4 \;\; 4]$$

$$= y_1 [2 \;\; 4 \;\; 2] + (y_2 + 2y_3) [0 \;\; 4 \;\; 4]$$

+, Không gian nghiệm trái của B là:

$$N(B^T) = \{ y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}^3 \mid B^T y = 0 \}$$

Ta có: $B^T y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

Ta có ma trận mở rộng của hệ $B^T y = 0$

Date No.

$$[B^T \mid 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 8 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[h_3 - h_1 \to h_3]{h_2 - 2h_1 \to h_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{h_3 - h_2 \to h_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Khôi phục hệ, ta được:

$$\begin{cases} 2y_1 = 0 \\ 4y_2 + 8y_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = -2y_3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $y \in N(B^T)$ có dạng:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2y_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = y_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $N(B^T)$ là đường thẳng có vectơ chỉ phương là $(0, -2, 1)$

Vậy: +) $C(B) = x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$

+) $N(B)$ là đường thẳng trong $\mathbb{R}^3$ nhận vectơ $(1, -1, 1)$ là VTCP

+) $C(A^T)$ là mặt phẳng trong $\mathbb{R}^3$

Date . . . No.

với cặp VTCP là $(2,4,2)$ và $(0,4,4)$

+) $N(B^T)$ là đường thẳng trong $\mathbb{R}^3$ có VTCP là $(0,-2,1)$

B6: Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

a) Với giá trị nào của a, b, c thì $v=(a,b,c)$ thuộc không gian $C(A)$

b) Với giá trị nào của a, b, c thì $v=(a,b,c)$ thuộc không gian $N(A)$

Giải:

a) Để $v \in C(A)$ thì hệ phương trình $Ax = b$ có nghiệm

Xét ma trận mở rộng:

$$[A \mid v] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & b \\ -1 & 4 & 6 & c \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[h_3 + h_1 \to h_3]{h_2 - 2h_1 \to h_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & b-2a \\ 0 & 6 & 9 & a+c \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{h_2 \leftrightarrow h_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 6 & 9 & a+c \\ 0 & 0 & 0 & b-2a \end{array}\right]$$

Khôi phục hệ, ta được:

$x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = a \\ \quad 6x_2 + 9x_3 = a + c \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = b - 2a \end{cases}$$

Để hệ phương trình có nghiệm thì:

$$b - 2a = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad b = 2a$$

Vậy với $b = 2a$ thì $v(a, b, c)$ thuộc không gian $C(A)$

b, +, Ta có:

$N(A) = \{x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0\}$

$$[A \mid 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[h_3 + h_1 \to h_3]{h_2 - 2h_1 \to h_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 9 & 0 \end{array}\right]$$

Khôi phục hệ, ta được:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ \quad 6x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\dfrac{3}{2}x_3 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad x \in N(A)$ có dạng:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{3}{2}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ N(A) là đường thẳng trong $\mathbb{R}^3$ nhận vectơ $(0, -\frac{3}{2}, 1)$ là vectơ chỉ phương

Để $v \in N(A)$
thì $v = (0, -\frac{3}{2}, 1)$ (v là VTCP của N(A))

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -\frac{3}{2} \\ c = 1 \end{cases}$$

Vậy $v = (0, -\frac{3}{2}, 1)$ thì $v \in N(A)$

B7: Xây dựng một ma trận mà không gian cột chứa vectơ $(1, 1, 5)$ và $(0, 3, 1)$ còn không gian nghiệm chứa vectơ $(1, 1, 2)$

<u>Giải</u>: Gọi A là ma trận cần tìm

+ Theo đề bài, ta có:
C(A) là không gian con của $\mathbb{R}^3$
N(A) là không gian con của $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ A là ma trận cỡ 3×3

Vì không gian cột của A chứa vectơ $(1, 1, 5)$ với $(0, 3, 1)$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 3 & b \\ 5 & 1 & c \end{bmatrix} \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

Vì không gian nghiệm chứa vectơ (1, 1, 2) ta có:

$$A.\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & a\\1 & 3 & b\\5 & 1 & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}1+2a\\4+2b\\6+2c\end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}1+2a=0\\4+2b=0\\6+2c=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\b=-2\\c=-3\end{cases}$$

Vậy ma trận cần tìm là:

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\1 & 3 & -2\\5 & 1 & -3\end{bmatrix}$$