BÀI 3: ĐỊNH THỨC. ỨNG DỤNG ĐỊNH THỨC

B1: a, Cho ma trận A cỡ 4×4 có $\det A = \frac{1}{2}$. Tìm $\det(2A)$, $\det(-A)$, $\det(A^2)$ và $\det(A^{-1})$

b, Cho ma trận A cỡ 3×3 có $\det A = -1$ hãy tìm $\det(\frac{1}{2}A)$, $\det(-A)$, $\det(A^2)$, $\det(A^{-1})$

Giải:

a, Ta có: $A_{4\times4}$ có $\det A = \frac{1}{2}$ $(\neq 0)$

+, $\det(2A) = 2^4 . \det A = 8$

+, $\det(-A) = (-1)^4 \det A = \frac{1}{2}$

+, $\det(A^2) = \det A . \det A = \frac{1}{4}$

+, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = 2$

b, Ta có: $A_{3\times3}$ có $\det A = -1$ $(\neq 0)$

+, $\det(\frac{1}{2}A) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 . (-1) = -\frac{1}{8}$

+, $\det(-A) = (-1)^3 . (-1) = 1$

+, $\det(A^2) = \det A . \det A = 1$

+, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = -1$

B2. Các khẳng định sau đúng hay sai? Hãy giải thích và nêu phản ví dụ nếu sai.

a, $\det(I + A) = 1 + \det A$

b, $\det(ABC) = \det A \det B \det C$

c, $\det(4A) = 4 \det A$

d, $\det(AB - BA) = 0$

Giải:

a, SAI

Ví dụ: Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Ta có:

$$VT = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4$$

$$VP = 1 + \det A = 1 + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1 + (-2) = -1$$

$\Rightarrow VT \neq VP$

$\Rightarrow \det(I + A) \neq 1 + \det A$

b, ĐÚNG

c, SAI

Ví dụ: cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Date No

Ta có:

$VT = \det(4A) = \det\begin{vmatrix} 4 & 20 \\ 12 & 8 \end{vmatrix}$

$= -208$

$VP = 4 \det A = 4 . \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

$= 4.(-13) = -52$

$\Rightarrow VT \neq VP$

$\Rightarrow \det(4A) \neq 4 \det A$

d, SAI

Ví dụ: cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Ta có:

+) $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 15 & 23 \end{bmatrix}$

+) $BA = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 22 \\ 9 & 14 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow AB - BA = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 15 & 23 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16 & 22 \\ 9 & 14 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -9 & -13 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \det(AB - BA) = \begin{vmatrix} -9 & -13 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

$\Rightarrow \det(AB - BA) \neq 0$

HẢI TIẾN

B3: Biết rằng $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = 10$, tính:

a, $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$

b, $\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$

c, $\begin{vmatrix} 2a+d & 2b+e & 2c+f \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$

d, $\begin{vmatrix} a & b & c+3b \\ d & e & f+3e \\ g & h & k+3h \end{vmatrix}$

Giải:

a, $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = 2.10 = 20$

b, $\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & b & h \end{vmatrix} \xlongequal{h_1 - h_2 \to h_1} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$

$= 10$

Date No.

c, $\begin{vmatrix} 2a+d & 2b+e & 2c+f \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} \xrightarrow{h_1 - h_2 \to h_1} \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$

$= 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = 2 . 10 = 20$

d, $\begin{vmatrix} a & b & c+3b \\ d & e & f+3e \\ g & h & k+3h \end{vmatrix}$

$\det A = \begin{vmatrix} a & b & c+3b \\ d & e & f+3e \\ g & h & k+3h \end{vmatrix}$

~~Ta có:~~ $\cancel{A^T = \begin{matrix} a & b & g \\ d & e & h \\ c+3b & f+3 & \end{matrix}}$

Ta có: $A^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c+3b & f+3e & k+3h \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{h_3 - 3h_2 \to h_3} \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{bmatrix}$

Lại có: $(A^T)^T = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}$

HẢI TIẾN

Mà $(A^T)^T = A$

$$\Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = 10$$

B4: Tính các định thức sau theo phương pháp phần phụ đại số:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & -4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Lời giải:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & -4 \end{vmatrix} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$

$= 0 \cdot C_{11} + 0 \cdot C_{12} + 1 \cdot C_{13}$

$= C_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$

$= -8$

Vậy $\det A = -8$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$

$= 1 \cdot C_{11} + 2 \cdot C_{12} + 3 \cdot C_{13}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

$= -7 - 2.1 + 3.5$

$= 6$

Vậy $\det A = 6$

c, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33}$

$= 7C_{31} + 0C_{32} + 0C_{33}$

$= 7.(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$

$= 7.(-3) = -21$

Vậy $\det A = -21$

B5. Tìm định thức của U, U^{-1}, U^2

a, $U = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$ b, $U = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Giải:

a, +, $\det U = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad$

+, $\det U^{-1} = \cancel{\frac{1}{ad}} \det\left(\frac{1}{ad}\begin{bmatrix} d & -b \\ 0 & a \end{bmatrix}\right)$

(Với $ad \neq 0$)

$= \frac{1}{(ad)^2} \cdot \begin{vmatrix} d & -b \\ 0 & a \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{(ad)^2} \cdot ad = \frac{1}{ad}$ (Với $ad \neq 0$)

Date No.

$+)\ \det U^2 = \det U . \det U = (ad)^2$

Vậy: $+)\ \det U = ad$

$+)\ \det U^{-1} = \dfrac{1}{ad}$

$+)\ \det U^2 = (ad)^2$

b, $+)\ \det U = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31}$

$= 1 . C_{11} + 0 . C_{21} + 0 . C_{31}$

$= (-1)^2 . \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$

$+)\ \det U^{-1}$ ~~$= \dfrac{1}{\det U}$~~

Ta có: $U^{-1} = \dfrac{1}{\det U} . C^T = \dfrac{1}{6} C^T$

$C_{11} = (-1)^2 . \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$

$C_{12} = (-1)^3 . \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$C_{13} = (-1)^4 . \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$C_{21} = (-1)^3 . \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -12$

$C_{22} = (-1)^4 . \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$

$C_{23} = (-1)^5 . \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$C_{31} = (-1)^4 . \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 8$

Date No.

$$C_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -5$$

$$C_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

=> Ma trận phần phụ đại số của U là:

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -12 & 3 & 0 \\ 8 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C^T = \begin{bmatrix} 6 & -12 & 8 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow U^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 & -12 & 8 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det U^{-1} = \det\left(\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 & -12 & 8 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)^3 \begin{vmatrix} 6 & -12 & 8 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{216} \cdot (a_{31} \cdot C_{31} + a_{32} \cdot C_{32} + a_{33} \cdot C_{33})$$

$$= \frac{1}{216} \cdot 2 \cdot C_{33}$$

$$= \frac{1}{108} \begin{vmatrix} 6 & -12 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{108} \cdot 18 = \frac{1}{6}$$

+, $\det U^2 = \det U . \det U = 36$

Vậy : +, $\det U = 6$

+, $\det U^{-1} = \frac{1}{6}$

+, $\det U^2 = 36$

~~B7~~:

B6 : Chứng minh rằng :

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

Giải :

+, Xét VT $= \det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

$$\xrightarrow[h_3 - h_1 \to h_3]{h_2 - h_1 \to h_2} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b-a \\ 0 & 1 & c-a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31})$$

$$= (b-a)(c-a)(1.C_{11} + 0.C_{21} + 0.C_{31})$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b-a \\ 1 & c-a \end{vmatrix}$$

$= (b-a)(c-a)(c-b)$

$= (a-b)(b-c)(c-a) = VP$

Vậy: $\det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

Ta có điều phải chứng minh.

B7: Sử dụng công thức phần phụ đại số tìm ma trận nghịch đảo của:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Giải:

+) $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$

$\underline{\underline{h_3 - 2h_2 \to h_3}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}$

$= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$

$= 0 \cdot C_{11} + 2 \cdot C_{12} + 0 \cdot C_{13}$

$= 2 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}$

$= -2 \cdot 2 = -4$

Date . . . No.

+, $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C^T = -\frac{1}{4} \cdot C^T$

Ta có: $C_{11} = 0$

$C_{12} = 4$

$C_{13} = -4$

$C_{21} = 4$

$C_{22} = -8$

$C_{23} = 4$

$C_{31} = -3$

$C_{32} = 4$

$C_{33} = -2$

=> Ma trận phần phụ đại số của A là:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & -8 & 4 \\ -3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C^T = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 4 & -8 & 4 \\ -4 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 4 & -8 & 4 \\ -4 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

HẢI TIẾN

8 : Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau:

a, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

b, $B = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

c, $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

Giải:

a, +, Ta có: $\det A = 4$

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C^T$

Ta có ma trận phần phụ đại số của A là:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

b, +, Ta có: $\det B = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow \det B = \frac{1}{64} \cdot 16 = \frac{1}{4}$$

Ta có ma trận phần phụ đại số của B là:

$$C = \begin{matrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & \end{matrix}$$

$$C = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{-1} = 4\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

c, Ta có: $\det C = -19$

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} C_1^T$$

Ta có ma trận phần phụ đại số của C là

$$C_1 = \begin{bmatrix} -6 & -2 & 3 \\ -17 & 7 & -1 \\ 10 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C_1^T = \begin{bmatrix} -6 & -17 & 10 \\ -2 & 7 & -3 \\ 3 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C^{-1} = -\frac{1}{19} \begin{bmatrix} -6 & -17 & 10 \\ -2 & 7 & -3 \\ 3 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$