

BÀI 8: PHÉP CHIẾU - PHƯƠNG PHÁPBÌNH PHƯƠNG TỐI THIỂU

B1: Tìm hình chiếu của b lên đường thẳng chứa vector a :

$$a, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Giải:

$$a, \quad Ta \text{ có: } a^T a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3$$

$$a^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 5$$

$$+ \text{ Xét hệ: } a^T a \hat{x} = a^T b$$

$$\Leftrightarrow 3 \hat{x} = 5$$

$$\Leftrightarrow \hat{x} = \frac{5}{3}$$

\Rightarrow hình chiếu của b là:

$$p = a \hat{x}$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{5}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b, \rightarrow \text{Ta có: } a^T a = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} \\ = 11$$

$$a^T b = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= -11$$

$$\rightarrow \text{Xét hệ: } a^T a \hat{x} = a^T b$$

$$\Leftrightarrow 11 \hat{x} = -11$$

$$\Leftrightarrow \hat{x} = -1$$

\Rightarrow hình chiếu của b lên:

$$p = a \hat{x}$$

$$\Leftrightarrow p = - \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B2: \text{ Cho } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

a, Tìm hình chiếu của b lên không gian cột của ma trận A .

b, Tìm vector sai góc e .

c, Tìm ma trận chiếu P

Giải:

$$a, \text{ Với } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ ta có:}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

*) Xét hệ $A^T A \cdot \hat{x} = A^T b$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \hat{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \hat{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

\Rightarrow hình chiếu của b lên $C(A)$ là:

$$p = A \hat{x}$$

$$\Leftrightarrow p = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Vector sai số là:

$$e = b - p = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

c) Ma trận chiếu P có dạng:

$$P = A(A^T A)^{-1} A^T$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

B3: Tìm cơ sở của $C(A)$ và hình chiếu của b lên $C(A)$ với:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Giải:

$$\rightarrow \text{Xét } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{h_3 + h_1 \rightarrow h_3} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{h_3 - 2h_2 \rightarrow h_3} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

\Rightarrow Cơ sở của $C(A)$ gồm 2 vectơ:
 $(1, 0, -1)$ và $(1, 1, 1)$

Date

No.

$$\rightarrow \text{Vì } \lambda(A) = 2 (\neq 4)$$

\Rightarrow Ma trận A phụ thuộc tuyến tính

Thay A bởi ma trận có các cột là tập cơ sở của $C(A)$ ta được:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ta có: } B^T B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B^T b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Xét hệ: ~~$B^T B \hat{x}$~~

$$B^T B \hat{x} = B^T b$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \hat{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \hat{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \hat{x} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -9 \\ 20 \end{bmatrix}$$

(5)

\Rightarrow hình chiếu của b là:

$$p = B \hat{x}$$

$$\Rightarrow p = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} -9 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 11 \\ 20 \\ 29 \end{bmatrix}$$

B4: Dùng pp bình phương tối thiểu tìm đường thẳng $b = C + Dt$ gần nhất với tập điểm (t, b) sau:

a, $\{(-1, 0), (0, 1), (1, 3), (2, 9)\}$

b, $\{(0, 3), (1, 2), (2, 4), (3, 4)\}$

Giải:

a, \Rightarrow Thay tập điểm (t, b) vào phương trình $b = C + Dt$, ta được:

$$\begin{cases} C - D = 0 \\ C = 1 \\ C + D = 3 \\ C + 2D = 9 \end{cases}$$

\Rightarrow hệ phương trình vô nghiệm

\Rightarrow Tìm nghiệm gần đúng nhất của hệ

Đã $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\hat{x} = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$

$$i, A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 21 \end{bmatrix}$$

Xét hệ: $A^T A \hat{x} = A^T b$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \hat{x} = \begin{bmatrix} 13 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \hat{x} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 13 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \hat{x} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 13 \\ 29 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C = \frac{9}{5} \\ D = \frac{29}{10} \end{cases}$$

Vậy đường thẳng gần nhất với tập điểm (t, b) đã cho là:

$$b \approx \frac{9}{5} + \frac{29}{10} t$$

b. +, Thay tập điểm (t, b) vào phương trình $b = C + Dt$, ta được:

$$\begin{cases} C = 3 \\ C + D = 2 \\ C + 2D = 4 \\ C + 3D = 4 \end{cases}$$

⇒ hệ phương trình vô nghiệm

⇒ Tìm nghiệm gần đúng nhất của hệ

$$\text{Đặt } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \hat{x} = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{+ Ta có: } A^T A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^T b &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 13 \\ 22 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Giải hệ } A^T A \hat{x} = A^T b$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \hat{x} = \begin{bmatrix} 13 \\ 22 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{x} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 13 \\ 22 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{x} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C = \frac{5}{2} \\ D = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy đường thẳng gần nhất với tập điểm (t, b) đã cho là:

$$b = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}t$$

B5: Dùng phương pháp bình phương tối thiểu tìm parabol: $b = C + Dt + Et^2$ gần nhất với tập điểm (t, b) sau:
 $\{(-2, 2), (-1, -12), (0, -5), (1, 0), (2, 1)\}$

Giải:

Thay tập điểm (t, b) đã cho vào phương trình $b = C + Dt + Et^2$, ta được:

$$\begin{cases} C - 2D + 4E = 2 \\ C - D + E = -12 \\ C = -5 \\ C + D + E = 0 \\ C + 2D + 4E = 1 \end{cases}$$

\Rightarrow hệ phương trình có nghiệm

\Rightarrow Tìm nghiệm gần đúng nhất của hệ

(9)

$$\text{Đưa } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \hat{x} = \begin{bmatrix} C \\ D \\ E \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ -12 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ta có:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -12 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -14 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Xét hệ $A^T A \hat{x} = A^T b$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix} \hat{x} = \begin{bmatrix} -14 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(10)

$$\Rightarrow \hat{x} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -14 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{x} = \begin{bmatrix} \frac{17}{35} & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{1}{7} & 0 & \frac{1}{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -14 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{x} = \begin{bmatrix} -\frac{34}{5} \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C = -\frac{34}{5} \\ D = 1 \\ E = 2 \end{cases}$$

Vậy parabol gần nhất với tập điểm (t, b) đã cho là:

$$b = -\frac{34}{5} + t + 2t^2$$

BG: Cho tập dữ liệu

t	0	1	3	4
b	0	8	8	20

a) Tìm đường thẳng có dạng $b = C + Dt$ gần nhất với tập dữ liệu trên

b) Tìm đường thẳng có dạng $b = Dt$ gần nhất với tập dữ liệu trên.

c) Tìm parabol có dạng $b = C + Dt + Et^2$ gần nhất với tập dữ liệu trên.

Giải:

a) Thay tập điểm đã cho vào phương trình $b = C + Dt$, ta được:

$$\begin{cases} C = 0 \\ C + D = 8 \\ C + 3D = 8 \\ C + 4D = 20 \end{cases}$$

\Rightarrow hpt vô nghiệm

\Rightarrow Tìm nghiệm gần đúng của hệ

$$\text{Đã } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A^T A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 26 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 112 \end{bmatrix}$$

Xét hệ $A^T A \hat{x} = A^T b$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 26 \end{bmatrix} \hat{x} = \begin{bmatrix} 36 \\ 112 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \hat{x} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 26 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 36 \\ 112 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C = 1 \\ D = 4 \end{cases}$$

Vậy đường thẳng gần nhất với tập điểm dữ cho là:

$$b = 1 + 4t$$

b, Thay tập điểm dữ cho vào phương trình $b = Dt$, ta được:

$$\begin{cases} 0D = 0 \\ 1D = 8 \\ 3D = 8 \\ 4D = 20 \end{cases}$$

\Rightarrow hpt vô nghiệm

\Rightarrow Tìm nghiệm gần đúng của hệ

Đưa $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\hat{x} = D$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix}$

Ta có: $A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 26$

$A^T b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix} = 112$

Xét hệ $A^T A \hat{x} = A^T b$

$\Leftrightarrow 26 \hat{x} = 112$

$\Leftrightarrow \hat{x} = \frac{56}{13}$

$\Leftrightarrow D = \frac{56}{13}$

Vậy đưa thay gần như với tập điểm đã cho là:

$b = \frac{56}{13} t$

c) Thay tập điểm đã cho vào pt:

$b = C + Dt + Et^2$, ta được:

$$\begin{cases} C & = 0 \\ C + D + E & = 8 \\ C + 3D + 9E & = 8 \\ C + 4D + 16E & = 20 \end{cases}$$

\Rightarrow hpt vô nghiệm

$$\text{Đưa } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}, \hat{x} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ -E \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ta có: } A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 8 & 26 \\ 8 & 26 & 92 \\ 26 & 92 & 338 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 36 \\ 112 \\ 400 \end{bmatrix}$$

$$\text{Vậy là } A^T A \hat{x} = A^T b$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 8 & 26 \\ 8 & 26 & 92 \\ 26 & 92 & 338 \end{bmatrix} \hat{x} = \begin{bmatrix} 36 \\ 112 \\ 400 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{x} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 26 \\ 8 & 26 & 92 \\ 26 & 92 & 338 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 36 \\ 112 \\ 400 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{a} = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{13}{15} & \frac{1}{6} \\ -\frac{13}{15} & \frac{169}{90} & -\frac{4}{9} \\ \frac{1}{6} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 36 \\ 112 \\ 400 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Vậy parabol gần nhất với tập điểm đã cho là:

$$b = 2 + \frac{4}{3}t + \frac{2}{3}t^2$$