BÀI 7: TÍNH TRỰC GIAO
CƠ SỞ TRỰC GIAO

B1: Tìm cơ sở và số chiều của không gian $S^{\perp}$, với:

a, S là không gian sinh bởi 2 vectơ $(1, 2, 3)$ và $(0, 1, 2)$

b, S là không gian con được sinh bởi $(1, 1, 1)$

c, S là không gian con được sinh bởi $(2, 0, 0)$ và $(0, 0, 3)$

Giải:

a) Xét $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Khi đó: $S = C(A)$

$\Rightarrow S^{\perp} = N(A^T)$

+) Xét hệ: $A^T x = 0$

Ta có ma trận mở rộng của hệ:

$$[A^T \mid 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

Khôi phục hệ, ta được:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Biến trụ: x_1, x_2

Biến tự do: x_3

Cho $x_3 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

$\Rightarrow s = (1, -2, 1)$

Vậy cơ sở của $S^\perp$ là vectơ:
$s = (1, -2, 1)$
và số chiều của $S^\perp$ là:
$\dim S^\perp = 1$

b) Xét $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Khi đó: $S = C(A)$
$\Rightarrow S^\perp = N(A^T)$

+) Xét hệ $A^T x = 0$
Ta có: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

Biến trụ: x_1, biến tự do: x_2, x_3
Cho $x_2 = 1, x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$
$\Rightarrow s_1 = (-1, 1, 0)$
Cho $x_2 = 0, x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = -1$
$\Rightarrow s_2 = (-1, 0, 1)$

Vậy cơ sở của $S^\perp$ gồm 2 vectơ:
$s_1 = (-1, 1, 0)$ và $s_2 = (-1, 0, 1)$
và số chiều của $S^\perp$ là:
$\dim S^\perp = 2$

c) Xét $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Khi đó : $S = C(A)$

$\Rightarrow S^{\perp} = N(A^T)$

+) Xét hệ $A^T x = 0$

Ta có : $\begin{cases} 2x_1 = 0 \\ 3x_3 = 0 \end{cases}$

Biến trụ : x_1, x_3

Biến tự do : x_2

Cho $x_2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow s = (0, 1, 0)$

Vậy cơ sở của $S^{\perp}$ gồm 1 vectơ :

$s = (0, 1, 0)$

và số chiều của $S^{\perp}$ là :

$\dim S^{\perp} = 2$

B2: a, Hãy tìm một cơ sở của không gian con S trong $\mathbb{R}^4$ sinh bởi tất cả các nghiệm của :

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

b, Hãy tìm một cơ sở của phần bù trực giao $S^{\perp}$

Giải :

a, Xét $A = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$

$\Rightarrow S = N(A)$

+, Xét hệ: $Ax = 0$

Ta có: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

Biến trụ: x_1

Biến tự do: x_2, x_3, x_4

Cho $x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$

$\Rightarrow s_1 = (-1, 1, 0, 0)$

Cho $x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$

$\Rightarrow s_2 = (-1, 0, 1, 0)$

Cho $x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1 \Rightarrow x_1 = -1$

$\Rightarrow s_3 = (-1, 0, 0, 1)$

Vậy cơ sở của S gồm 3 vectơ:

$s_1 = (-1, 1, 0, 0)$, $s_2 = (-1, 0, 1, 0)$

và $s_3 = (-1, 0, 0, 1)$

b, ~~Ta có: S =~~

Với $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Ta có: $S = N(A)$

$\Rightarrow S^{\perp} = C(A^T)$

$\Rightarrow$ Cơ sở của $S^{\perp}$ gồm 1 vectơ:

$s = (1, 1, 1, 1)$

B3: a, Tìm số chiều và cơ sở của không gian nghiệm S của hệ sau:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

b, Từ đó tìm một cơ sở của không gian bù trực giao $S^{\perp}$

HẢI TIẾN

Giải:

Date . . . No.

a) Xét $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Khi đó: $S = N(A)$

*) Xét hệ: $Ax = 0$

Ta có ma trận mở rộng:

$$[A \mid 0] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{h_2 - h_1 \to h_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Khôi phục hệ, ta được:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -6x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Biến tự do: x_1, x_2

Biến tự do: x_3, x_4

Cho $x_3 = 1,\ x_4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ \cancel{x_2 =} \\ x_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow s_1 = \left(0, \frac{1}{3}, 1, 0\right)$

Cho $x_3 = 0,\ x_4 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow s_2 = \left(-\frac{1}{2}, 0, 0, 1\right)$ $\Rightarrow \dim S = 2$

Vậy cơ sở của S gồm 2 vectơ: $s_1 = \left(0, \frac{1}{3}, 1, 0\right)$ và $s_2 = \left(-\frac{1}{2}, 0, 0, 1\right)$

HẢI TIẾN

b, Với $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Ta có: $S = N(A)$

$\Rightarrow S^{\perp} = C(A^T)$

Xét $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{h_2 - h_1 \to h_2} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ Cơ sở của $S^{\perp}$ gồm 2 vectơ:
$(2, 3, -1, 1)$ và $(0, -6, 2, 0)$

B4: Cho các vectơ $v_1 = (1, 0, -2, 1)$, $v_2 = (0, 1, 3, -2)$. Ký hiệu W là không gian con của $\mathbb{R}^4$ gồm tất cả những tổ hợp tuyến tính của v_1, v_2

a, Hãy tìm $W^{\perp}$

b, Tính số chiều của $W^{\perp}$

Giải:

Xét $A = [v_1 \quad v_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow W = C(A)$

$\Rightarrow W^{\perp} = N(A^T)$

a, Xét hệ $A^T x = 0$

Date . . . No.

Ta có ma trận mở rộng của hệ:

$$[A^T|0] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

Khôi phục hệ, ta được:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Biến trụ: x_1, x_2

Biến tự do: x_3, x_4

Cho $x_3 = 1, x_4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

$\Rightarrow s_1 = (2, -3, 1, 0)$

Cho $x_3 = 0, x_4 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow s_2 = (-1, 2, 0, 1)$

$\Rightarrow$ Cơ sở của $W^\perp$ gồm 2 vectơ:
$s_1 = (2, -3, 1, 0)$ và $s_2 = (-1, 2, 0, 1)$

Vậy số chiều của $W^\perp$ là:
$\dim W^\perp = 2$

HẢI TIẾN