BÀI 6: CƠ SỞ, SỐ CHIỀU CỦA MỘT KHÔNG GIAN VECTƠ

B1: CMR hệ vectơ $\{v_1, v_2, v_3\}$ là hệ độc lập tuyến tính nhưng $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ lại phụ thuộc tuyến tính.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};\quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};\quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};\quad v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Giải:

+, Xét hệ $A = [v_1 \quad v_2 \quad v_3]$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow r(A) = 3$

$\Rightarrow$ hệ $\{v_1, v_2, v_3\}$ độc lập tuyến tính

+, Xét hệ $B = [v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4]$

$$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & & & \end{matrix}$$

$\Rightarrow r(B) = 3 \ (\neq 4)$

$\Rightarrow$ hệ $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ phụ thuộc tuyến tính

B2: Hệ vecto nào sau đây là cơ sở của $\mathbb{R}^3$

a, $(1,2,0)$ và $(0,1,-1)$

b, $(1,1,-1)$, $(2,3,4)$, $(4,1,-1)$ và $(0,1,-1)$

c, $(1,2,2)$, $(-1,2,1)$ và $(0,8,0)$

d, $(1,2,2)$, $(-1,2,1)$ và $(0,8,6)$

Giải:

a, Xét hệ $V = \{v_1, v_2\}$

Với $v_1 = (1,2,0)$, $v_2 = (0,1,-1)$

~~Đặt~~

Đặt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow V = C(A)$

Ta có: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{h_2 - 2h_1 \to h_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{h_3 + h_2 \to h_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow r(A) = 2$

$\Rightarrow$ hệ độc lập tuyến tính (1)

(2)

Lại có: $\forall x \in \mathbb{R}^3$ ta có:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} c_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} c_2 \quad (\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

=> hệ $\{(1,2,0), (0,1,-1)\}$ là tập sinh của $\mathbb{R}^3$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra:
$\{(1,2,0), (0,1,-1)\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$

b) Xét: ~~V=~~
$V = \{(1,1,-1), (2,3,4), (4,1,-1), (0,1,-1)\}$

~~Đặt~~ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow V = C(A)$

Xét $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[h_3 + h_1 \to h_3]{h_2 - h_1 \to h_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_3 - 6h_2 \to h_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 21 & -7 \end{bmatrix}$$

(3)

$\Rightarrow r(A) = 3 \ (\neq 4)$

$\Rightarrow$ hệ phụ thuộc tuyến tính

$\Rightarrow$ hệ đã cho không là cơ sở của $\mathbb{R}^3$

c) Xét hệ:

$V = \{(1, 2, 2), (-1, 2, 1), (0, 8, 0)\}$

Đặt $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow V = C(A)$

$\Rightarrow$ Xét $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[h_3 - 2h_1 \to h_3]{h_2 - 2h_1 \to h_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{h_3 - \frac{3}{4}h_2 \to h_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow r(A) = 3$

$\Rightarrow$ hệ độc lập tuyến tính (1)

$\Rightarrow$ Xét: $x \in \mathbb{R}^3$, ta có:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} c_1 + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} c_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} c_3$$

$(\forall c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$

Date . . . . No.

$\Rightarrow$ hệ V là tập sinh của $\mathbb{R}^3$ ②

Từ ① và ② suy ra hệ đã cho là cơ sở của $\mathbb{R}^3$

d) Xét hệ:

$V = \{(1,2,2), (-1,2,1), (0,8,6)\}$

Đặt $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow V = C(A)$

+) Xét $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[h_3 - 2h_1 \to h_3]{h_2 - 2h_1 \to h_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{h_3 - \frac{3}{4}h_2 \to h_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow r(A) = 2 \; (\neq 3)$

$\Rightarrow$ hệ phụ thuộc tuyến tính

$\Rightarrow$ hệ $\{(1,2,2), (-1,2,1), (0,8,6)\}$ không là cơ sở của $\mathbb{R}^3$

HẢI TIẾN

Date No.

33: Tìm một cơ sở ~~—~~ và số chiều của bốn không gian con liên kết với ma trận A.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Giải:

+, Xét $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow{h_2 - h_1 \to h_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_3 - h_2 \to h_3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \quad r(A) = 2$

$\Rightarrow$ Cơ sở của A gồm hai vectơ:

~~(1, 1, 0) và (3, 4, 1)~~

(1, 0, 0) và (3, 1, 0)

+, Số chiều của bốn không gian con liên kết với ma trận A là:

$\dim C(A) = \dim C(A^T) = r(A) = 2$

$\dim N(A) = 5 - 2 = 3$

$\dim N(A^T) = 3 - 2 = 1$

HẢI TIẾN

B4: Cho các vectơ $v_1 = (2, 1, 3)$, $v_2 = (3, -1, 4)$, $v_3 = (2, 6, 4)$. Ký hiệu W là không gian con của $\mathbb{R}^3$ gồm tất cả những tổ hợp tuyến tính của v_1, v_2, v_3. Tính dim W.

Giải:

Đặt: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 6 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow W = C(A)$

Xét $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 6 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[h_3 - \frac{3}{2}h_1 \to h_3]{2h_2 - h_1 \to h_2} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_3 - \frac{1}{10}h_2 \to h_3} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Cơ sở của W là 2 vectơ: $(2, 0, 0)$ và $(3, -5, 0)$

$\Rightarrow \dim W = 2$

B5: Tìm một cơ sở của mỗi không gian con sau đây của $\mathbb{R}^4$

a, Tất cả các vectơ mà các thành phần của chúng đều bằng nhau.

b, Tất cả các vectơ mà tổng các thành phần của chúng bằng 0

c, Tất cả các vectơ là tổ hợp tuyến tính của (1, 1, 0, 0) và (1, 0, 1, 1)

Giải:

a, Ta có không gian:

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 = x_3 = x_4\}$$

Đặt : $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \quad V = C(A)$

Xét $\quad A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{h_3 - h_1 \to h_3 \\ h_4 - h_1 \to h_4}]{h_2 - h_1 \to h_2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ Cơ sở của không gian đã cho là vectơ : (1, 0, 0, 0)

b, Ta có không gian:

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

Đặt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Date   No.

$\Rightarrow V = N(A)$

Xét hệ $Ax = 0$

$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

Biến trụ: x_1

Biến tự do: x_2, x_3, x_4

Cho $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$

$\Rightarrow x_1 = -1$

$\Rightarrow S_1 = (-1, 1, 0, 0)$

Cho $x_3 = 1$, $x_2 = 0$, $x_4 = 0$

$\Rightarrow x_1 = -1$

$\Rightarrow S_2 = (-1, 0, 1, 0)$

Cho $x_4 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$

$\Rightarrow x_1 = -1$

$\Rightarrow S_3 = (-1, 0, 0, 1)$

$\Rightarrow$ Cơ sở của không gian đã cho là:
$(-1, 1, 0, 0)$, $(-1, 0, 1, 0)$ và $(-1, 0, 0, 1)$

c, Ta có không gian:

$V = \{ x \in \mathbb{R}^4 \mid x = (1, 1, 0, 0)c_1 + (1, 0, 1, 1)c_2$
$(\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

Đặt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow V = C(A)$

HẢI TIẾN

Xét $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[h_4 - h_3 \to h_4]{h_2 - h_1 \to h_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_3 + h_2 \to h_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

=> Cơ sở của không gian đã cho là 2 vectơ: $(1, 0, 0, 0)$ và $(1, -1, 0, 0)$

B6: Cho tập $U = \{u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - t = m\}$

a, Tìm m để U là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^4$

b, Khi U là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^4$ tìm một cơ sở và số chiều của U.

Giải:

a, +, Xét $v_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1) \in U$

$\Rightarrow x_1 - t_1 = m$ (1)

+, Xét $v_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in U$

$\Rightarrow x_2 - t_2 = m$ (2)

Cộng theo vế của 2 phương trình, ta được:

$(x_1 + x_2) - (t_1 + t_2) = 2m$ (3)

+, ~~Xét $x_1 + x_2$~~
+, Xét $v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2)$
$v_1 + v_2 \in U$
$\Rightarrow (x_1 + x_2) - (t_1 + t_2) = m$

+, Nhân 2 vế của ① với $c \in \mathbb{R}$, ta được: $cx_1 - ct_1 = cm$ ④

+, ~~Xét $cv_1 = cx_1, cy_1, ct_1, c$~~
+, Xét $cv_1 = (cx_1, cy_1, cz_1, ct_1) \in U$
$\Rightarrow cx_1 - ct_1 = m$ ⑤
Từ ②, ③ và ④, ⑤ ta có hệ pt:
$$\begin{cases} m = 2m \\ cm = m \end{cases}$$
$\Rightarrow$ Để U là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^4$ thì m phải thỏa mãn hệ phương trình trên
$\Rightarrow m = 0$

b, $U = \{v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - t = 0\}$

Đặt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow U = N(A)$
Xét hệ $Av = 0$
$\Rightarrow x - t = 0$
Biến tự: x
Biến tự do: y, z, t.
+, Cho $y = 1, z = 0, t = 0$
$\Rightarrow x = 0$
$\Rightarrow s_1 = (0, 1, 0, 0)$

+, Cho $z = 1$, $y = 0$, $t = 0$

$\Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow S_2 = (0, 0, 1, 0)$

+, Cho $t = \cancel{0}1$, $y = 0$, $z = 0$

$\Rightarrow x = 1$

$\Rightarrow S_3 = (1, 0, 0, 1)$

$\Rightarrow$ Cơ sở của U gồm 3 vectơ:
$(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ và $(1, 0, 0, 1)$

$\Rightarrow$ Số chiều của U là:
$\dim U = 3$.