Bài 3: ĐỊNH THỨC. ỨNG DỤNG ĐỊNH THỨC

1. a) (**1.t287**) Cho ma trận A cỡ 4×4 có $\det A = \frac{1}{2}$, hãy tìm $\det(2A)$, $\det(-A)$, $\det(A^2)$, và $\det(A^{-1})$.

b) (**2.t287**) Cho ma trận A cỡ 3x3 có $\det A = -1$, hãy tìm $\det\left(\frac{1}{2}A\right)$, $\det(-A)$, $\det(A^2)$, $\det(A^{-1})$.

Giải:

a) $\det(2A) = 2^4 \det A = 8$,

$\det(-A) = (-1)^4 \det A = \frac{1}{2}$,

$\det(A^2) = \frac{1}{4}$, và

$\det(A^{-1}) = 2$.

b) $\det\left(\frac{1}{2}A\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \det A = -\frac{1}{8}$,

$\det(-A) = (-1)^3 \det A = 1$,

$\det(A^2) = 1$, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} - 1$

2. (3.t287) Các khẳng định sau đúng hay sai? Hãy giải thích nếu đúng và nêu phản ví dụ nếu sai:

a) $\det(I + A) = 1 + \det A$.

b) $\det(ABC) = \det A \det B \det C$.

c) $\det(4A) = 4\det A$.

d) $\det(AB - BA) = 0$.

Giải

a) Sai Ví dụ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \to \det A = -2$, $A + I = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \to \det(\mathrm{I} + A) = 1$ nên $\det A \neq \det(I + A)$

b) **Sai** $\det(ABC) = \det A \det B \det C$ chỉ đúng khi A,B,C là các ma trận vuông cùng cấp).

Ví dụ $A_{2x3}B_{3x2}C_{2x2} = D_{2x2}$, nhưng không tồn tại $\det A, \det B$.

c) $\det(4A) = 4\det A$ sai

d) sai Ví dụ lấy $A_{2x3}B_{3x2} = C_{2x2}; B_{3x2}A_{2x3} = D_{3x3}$ nên $AB - BA$ không tồn tại.

3 Biết rằng $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = 10$, tính

a) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = 20$

b) $\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & e & f \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = 10$

c) $\begin{vmatrix} 2a+d & 2b+e & 2c+f \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & e & f \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = 20$

d) $\begin{vmatrix} a & b & c+3b \\ d & e & f+3e \\ g & h & k+3h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & 3b \\ d & e & 3e \\ g & h & 3h \end{vmatrix} = 10$

4 Tính các định thức sau theo phương pháp phần phụ đại số:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & -4 \end{vmatrix} = a_{13}C_{13} = -8$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \underset{h_3 - h_1 \to h_3}{\overset{h_2 - 2h_1 \to h_2}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = a_{11}C_{11} = 6$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{31}C_{31} = 7.(12-15) = -21$

5. Tìm định thức của U, U^{-1} và U^2:

a) $U = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det U = ad; \det U^{-1} = \dfrac{1}{ad}(ad \neq 0); \det U^2 = (ad)^2$

b) $U = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det U = 6; \det U^{-1} = \dfrac{1}{6}; \det U^2 = 36$

7. Sử dụng công thức phần phụ đại số, tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$.

Giải $\det A = -4$

$C_{11} = 0; C_{12} = 4; C_{13} = -4$;

$C_{21} = 4; C_{22} = -8; C_{23} = 4$;

$C_{31} = -3; C_{32} = 4; C_{33} = -2$

nên $C = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & -8 & 4 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ Áp dụng công thức $A^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathrm{A}} C^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3/4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}$

8. (13.t303) Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau:

a) $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$ b) $B=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ c) $C=\begin{bmatrix}2 & 5 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 3 & 4\end{bmatrix}$.

Giải:

a) $\det A = 4$

$C_{11}=3; C_{12}=2; C_{13}=1;$

$C_{21}=2; C_{22}=4; C_{23}=2;$

$C_{31}=1; C_{32}=2; C_{33}=3$

$C=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ Áp dụng công thức $A^{-1}=\frac{1}{\text{detA}}C^T=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$

b) $B=A^{-1}$ nên $B^{-1}=A$

c) $\det C=-19$

$C_{11}=-6; C_{12}=-2; C_{13}=3;$

$C_{21}=-17; C_{22}=7; C_{23}=1;$

$C_{31}=10; C_{32}=-3; C_{33}=-5$

$C=\begin{bmatrix}-6 & -2 & 3\\ -17 & 7 & 1\\ 10 & -3 & -5\end{bmatrix}$ Áp dụng công thức $A^{-1}=\frac{1}{\text{detA}}C^T=\frac{1}{-19}\begin{bmatrix}-6 & -17 & 10\\ -2 & 7 & -3\\ 3 & 1 & -5\end{bmatrix}$