$2: HỆ PHƯƠNG TRÌNH

1. (5.t20)

a) Tính $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}$ và $\mathbf{u}+2\mathbf{v}-3\mathbf{w}$ khi

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}=\begin{bmatrix}-3\\1\\-2\end{bmatrix},\quad \mathbf{w}=\begin{bmatrix}2\\-3\\-1\end{bmatrix}.$$

b) Liệu $\mathbf{w}$ có phải là tổ hợp tuyến tính của $\mathbf{u}$ và $\mathbf{v}$ không? Tại sao?

Giải:

a. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=(-2,3,1)$; $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}=(0,0,0)$; $\mathbf{u}+2\mathbf{v}-3\mathbf{w}=(-11,13,2)$

b. $\mathbf{w}=-\mathbf{u}-\mathbf{v}$ nên có là THTT.

2. (26.t22) Tổ hợp nào của các véc tơ $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ và $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ sinh ra $\begin{bmatrix}14\\8\end{bmatrix}$?

Đặt $c_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\8\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}c_1+3c_2=14\\2c_1+4c_2=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c_1=-16\\c_2=10\end{cases}$ vậy $-16\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+10\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\8\end{bmatrix}$

3 (11+12.t59) Xét các hệ phương trình sau

i) $\begin{cases}2x+3y+z=8\\4x+7y+5z=20\\-2y+2z=0\end{cases}$ ii) $\begin{cases}2x-3y\quad\;=3\\4x-5y+z=7\\2x-y-3z=5\end{cases}$

a) Đối với mỗi hệ hãy viết dưới dạng cột, dạng ma trận.

b) Giải các hệ phương trình bằng phương pháp khử Gauss.

Giải:

a) Dạng cột $\begin{bmatrix}2\\4\\0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}3\\7\\-2\end{bmatrix}y+\begin{bmatrix}1\\5\\2\end{bmatrix}z=\begin{bmatrix}8\\20\\0\end{bmatrix}$

Dạng ma trận $\begin{bmatrix}2&3&1\\4&7&5\\0&-2&2\end{bmatrix}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}8\\20\\0\end{bmatrix}$

Giải hệ pt

$$\left[A|b\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}2&3&1&8\\4&7&5&20\\0&-2&2&0\end{array}\right]\xrightarrow{h_2:=h_2-2h_1}\left[\begin{array}{ccc|c}2&3&1&8\\0&1&3&4\\0&-2&2&0\end{array}\right]\xrightarrow{h_3:=h_3+2h_2}\left[\begin{array}{ccc|c}2&3&1&8\\0&1&3&4\\0&0&8&8\end{array}\right]$$

Biến trụ x,y,z, không có biến tự do. Khôi phục hệ

$$\begin{cases}2x+3y+z=8\\ \quad y+3z=4\\ \quad\quad 8z=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=2\\y=1\\z=1\end{cases}$$

b) **Dạng cột** $\begin{bmatrix}2\\4\\2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}-3\\-5\\-1\end{bmatrix}y+\begin{bmatrix}0\\1\\-3\end{bmatrix}z=\begin{bmatrix}3\\7\\5\end{bmatrix}$

Dạng ma trận $\begin{bmatrix}2 & -3 & 0\\4 & -5 & 1\\2 & -1 & -3\end{bmatrix}\mathrm{x}=\begin{bmatrix}3\\7\\5\end{bmatrix}$

Giải $\left[A|b\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}2 & -3 & 0 & 3\\4 & -5 & 1 & 7\\2 & -1 & -3 & 5\end{array}\right]\xrightarrow[h_3-h_1\to h_3]{h_2-2h_1\to h_2}\left[\begin{array}{ccc|c}2 & -3 & 0 & 3\\0 & 1 & 1 & 1\\0 & 2 & -3 & 2\end{array}\right]\xrightarrow{h_3-2h_2\to h_3}\left[\begin{array}{ccc|c}2 & -3 & 0 & 3\\0 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & -5 & 0\end{array}\right]$

Biến trụ x,y,z không có biến tự do. Khôi phục hệ $\begin{cases}2x-3y=3\\ y+z=1\\ -5z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=1\\ z=0\end{cases}$

4 (21.t60) Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp khử $\begin{cases}2x+y=0\\x+2y+z=0\\y+2z+t=0\\z+2t=5\end{cases}$

Giải: $\left[A|b\right]=\left[\begin{array}{cccc|c}2 & 1 & 0 & 0 & 0\\1 & 2 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 2 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 2 & 5\end{array}\right]\xrightarrow{2h_2-h_1\to h_2}\left[\begin{array}{cccc|c}2 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 3 & 2 & 0 & 0\\0 & 1 & 2 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 2 & 5\end{array}\right]\xrightarrow{3h_3-h_2\to h_3}\left[\begin{array}{cccc|c}2 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 3 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 4 & 3 & 0\\0 & 0 & 1 & 2 & 5\end{array}\right]$

$\left[\begin{array}{cccc|c}2 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 3 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 4 & 3 & 0\\0 & 0 & 1 & 2 & 5\end{array}\right]\xrightarrow{4h_4-h_3\to h_4}\left[\begin{array}{cccc|c}2 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 3 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 4 & 3 & 0\\0 & 0 & 0 & 5 & 20\end{array}\right]$ nên $\begin{cases}x=-1\\y=2\\z=-3\\t=4\end{cases}$

5 (18.t60) Cho hệ phương trình $\begin{cases}x+4y-2z=1\\x+7y-6z=6\\3y+qz=t\end{cases}$

a. Tìm q để hệ phương trình sau suy biến (tức là số trụ ít hơn số biến)?

b Với số q đó, tìm giá trị của t để hệ có vô số nghiệm và tìm nghiệm có $z=1$.

Giải:

$\left[A|b\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & -2 & 1\\1 & 7 & -6 & 6\\0 & 3 & q & t\end{array}\right]\xrightarrow{h_2-h_1\to h_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & -2 & 1\\0 & 3 & -4 & 5\\0 & 3 & q & t\end{array}\right]\xrightarrow{h_3-h_2\to h_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & -2 & 1\\0 & 3 & -4 & 5\\0 & 0 & q+4 & t-5\end{array}\right]$

a. hệ suy biến khi $q+4=0\Rightarrow q=-4$

b. với $q=-4$ hệ có dạng $\begin{cases}x+4y-2z=1\\3y-4z=5\\0z=t-5\end{cases}$. Để hệ có vsn thì $t-5=0\Rightarrow t=5$. Với z= 1 $\begin{cases}x=-9\\y=3\end{cases}$

6 (25.t73) Áp dụng phương pháp khử Gauss cho ma trận mở rộng $\left[A|\mathbf{b}\right]$ để chứng tỏ hệ sau vô nghiệm. Hãy thay số 6 thành một số khác để hệ sau có nghiệm, khi đó hãy tìm nghiệm.

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Giải:

a) Ma trận mở rộng

$$\left[A|b\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[h_3-3h_1\to h_3]{h_2-2h_1\to h_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[h_3-h_2\to h_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

Khôi phục hệ ta có $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ -y-2z=0 \\ 0z=3 \end{cases}$ nên hệ vô nghiệm.

b) Thay 6 bằng a ta có

$$\left[A|b\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & a \end{array}\right] \xrightarrow[h_3-3h_1\to h_3]{h_2-2h_1\to h_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & a-3 \end{array}\right] \xrightarrow[h_3-h_2\to h_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{array}\right]$$

Để hệ có nghiệm thì a – 3 = 0 khi đó biến x,y là biến trụ, z là biến tự do

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+z \\ y=-2z \\ \forall z\in\mathbb{R} \end{cases}$$

7. Giải hệ phương trình:

a. $\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3+3x_4-x_5=2 \\ x_1+2x_2-2x_3+2x_4+x_5=0 \\ 2x_1+4x_2-2x_3+3x_4+4x_5=1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x_1-5x_2+2x_3+4x_4=2 \\ 7x_1-4x_2+x_3+3x_4=5 \\ 5x_1+7x_2-4x_3-6x_4=4 \end{cases}$