Engenharia Fácil

www.engenhariafacil.weebly.com

Apostilas

Resumo com exercícios resolvidos do assunto:

- ***(I)*** ***Derivadas Parciais;***
- ***(II)*** ***Plano Tangente;***
- ***(III)*** ***Diferenciabilidade;***
- ***(IV)*** ***Regra da Cadeia.***

(I) Derivadas Parciais

Uma derivada parcial de uma função de várias variáveis é a sua derivada com respeito a uma daquelas variáveis, com as outras variáveis mantidas constantes. Para encontrar as derivadas parciais de uma função de duas variáveis F(x,y) ,por exemplo, primeiro derivamos em relação a x (considerando y uma constante), e depois derivamos em relação a y (considerando x uma constante).

Notação:

Derivada parcial de F(x,y) em relação a x : $F_x(x,y) = \frac{\partial f\,(x,y)}{\partial x}$

Derivada parcial de F(x,y) em relação a y : $F_y(x,y) = \frac{\partial f\,(x,y)}{\partial y}$

Exemplo 1:

Se $F(x,y) = x^2 + 2y^3 + x^3y^2$, encontre $F_x(2,1)$ e $F_y(2,1)$.

$$F_x(x,y) = 2x + 3x^2y^2 \;\; (pois\ consideramos\ y\ uma\ constante)$$

$$F_x(2,1) = 4 + 12 = 16$$

$$F_y(x, y) = 6y^2 + 2yx^3 \ \ (pois\ consideramos\ x\ uma\ constante)$$

$$F_y(2{,}1) = 6 + 16 = 22$$

Exemplo 2: Se $F(x, y) = x.sen(x^2y)$, encontre $F_x(x, y)\ e\ F_y(x, y)$.

Pela Regra da Cadeia, temos:

$$F_x(x, y) = sen(x^2y) + 2x^2ycos(x^2y)(\ pois\ consideramos\ y\ uma\ constante).$$

$$F_y(x, y) = x^3\cos(x^2y)\ (pois\ consideramos\ x\ uma\ constante).$$

Derivadas parciais de 2ª ordem:

São as segundas derivadas parciais de uma certa função com mais de uma variável , em relação a uma ou duas variáveis.Para funções com duas variáveis,existem quatro possibilidades de derivadas de segunda ordem, são elas:

- Derivar com relação a x duas vezes: $f_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$
- Derivar com relação a y duas vezes: $f_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
- Derivar primeiro com relação a x e depois com relação a y: $f_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$
- Derivar primeiro com relação a y e depois com relação a x: $f_{yx}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Exemplo:

Determine as derivadas parciais (1ª e 2ª ordens) de $F(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$.

1ª ordem:

$$F_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$$

$$F_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$$

2ª ordem:

$$F_{xx}(x, y) = 6x + 2y^3$$

$$F_{yy}(x, y) = 6yx^2 - 4$$

$$\left.\begin{array}{l} F_{xy}(x, y) = 6xy^2 \\ F_{yx}(x, y) = 6xy^2 \end{array}\right\} \textbf{\textit{Iguais}}$$

Observamos que no exemplo anterior:

$$F_{xy}(x, y) = F_{yx}(x, y)$$

Isso não é uma coincidência, e deve-se a um teorema.

Teorema de Clairaut

Se $F_{xy}(x,y)$ e $F_{yx}(x,y)$ existem e são funções contínuas, então:

$$\boxed{F_{xy}(x,y) = F_{yx}(x,y)}$$

Exemplo:

Mostre que não existe F(x,y) satisfazendo simultaneamente $F_x(x,y) = 2x + 3y$ e $F_y(x,y) = 4x + y$.

Pelo Teorema de Clairaut: Vamos supor que tal F(x,y) existe, então as derivadas parciais de 2ª ordem são contínuas, e as derivadas cruzadas devem ser iguais.

$$F_{xy}(x,y) = 3 \quad e \quad F_{yx}(x,y) = 4$$

Como encontramos derivadas cruzadas diferentes, vemos que não existe nenhuma função que satisfaça simultaneamente as duas condições iniciais.

Exercícios Recomendados:

1)(Stewart)A temperatura T (em °C) de uma localidade do Hemisfério Norte depende da longitude x, da latitude y e do tempo t, de modo que podemos escrever T=f(x,y,t).Vamos medir o tempo em horas a partir do início de janeiro.Qual o significado das derivadas parciais $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial T}{\partial y}$e $\frac{\partial T}{\partial t}$?

2)(Stewart) Se $f(x,y) = 16 - 4x^2 - y^2$, determine e $f_x(1,2)$.

3)(Stewart) Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função $f(x,y) = y^5 - 3xy$

4)(Stewart) Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função $f(x,y) = e^{-t}\cos(\pi x)$.

5)(Stewart) Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função $f(x,y) = \int_y^x \cos(e^t)dt$.

6)(Stewart) Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função $u = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}$.

7)(Stewart) Se $F(x,y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right), calcule\ F_x(3,4)$.

8)(Stewart) Verifique se é válida a conclusão do Teorema de Clairaut para $u = x^4y^3 - y^4$.

9)(Stewart) Determine as derivadas parciais indicadas:

$$f(x,y) = x^4y^2 - x^3y;\ f_{xxx}\ _e\ f_{xyx}$$

10)(Stewart) Determine as derivadas parciais indicadas: $u = e^{r\theta}sen(\theta)$; $\frac{\partial^3 u}{\partial r^2 \partial \theta}$

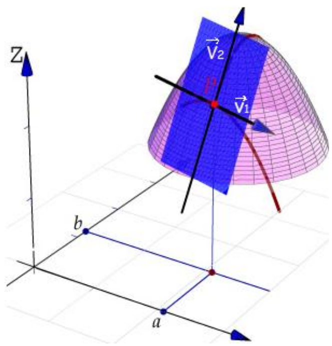
Gabarito: 1)A taxa de variação da temperatura quando a longitude varia, com a latitude e o tempo fixados; a taxa de variação quando apenas a latitude varia; a taxa de variação quando apenas o tempo varia.

2) -8 |**3)** -3y , $5y^4 - 3x$ |**4)** $-\pi e^{-t} sen\pi x$, $-e^{-t} cos\pi x$ |**5)** $\cos(e^x)$, - $\cos(e^y)$ |**6)**$\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{x_i}{\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}}$ |**7)**1/5 |**8)** É válida |**9)** 24xy²-6y , 24x²y-6x |**10)**$\theta e^{r\theta}(2sen\theta + \theta cos\theta + r\theta sen\theta)$

(II) Plano Tangente

Uma das maiores preocupações em Cálculo a respeito do gráfico de funções de duas variáveis é a determinação da equação do plano tangente ao gráfico daquela superfície em um determinado ponto. Felizmente, com as ferramentas que possuímos, essa tarefa não é uma das mais difíceis.Em primeiro lugar, precisamos enxergar o plano como uma equação. Dentre as várias equações do plano que temos disponíveis, uma das mais fáceis é aquela que nos permite determiná-lo através de um ponto e de um vetor normal.

Temos abaixo o plano tangente a um paraboloide no ponto f(x,y)=(a,b).



Temos como o declive de $\vec{v}_1$ igual a $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ e o declive de $\vec{v}_2$ igual a $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$.

→ O plano tangente é o plano "gerado" pelos vetores $\vec{v}_1$e $\vec{v}_2$.

Temos como equação do plano tangente no ponto (x_0, y_0):

$$Z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Exemplo 1: Sabendo que o plano tangente a f(x,y) no ponto (1,-1,2) é 3x-4y+2z=11.Quanto valem as derivadas parciais $F_x(1, -1)\ e\ F_y(1, -1)$?

Para resolver, devemos isolar o z, o que nos deixará algo muito parecido com a fórmula geral.

$$z = -\frac{3}{2}x + 2y + \frac{11}{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3}{2} \quad e \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2$$

Pois esses são os valores que na fórmula geral multiplicam x e y.

Exemplo 2:Calcule o plano tangente à superfície $z = 4x^2 - y^2 + 2y$ no ponto (-1,2,4)

Temos a equação do plano:

$$Z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Temos do ponto dado $f(x_0, y_0) = 4$, $x_0 = -1$ e $y_0 = 2$.

Calculando as derivadas parciais, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,2) = 8x = -8 \;\; e \;\; \frac{\partial f}{\partial y}(-1,2) = -2y + 2 = -2$$

Logo, a equação do plano tangente à curva é: $z = 4 - 8(x + 1) - 2(y - 2)$.

$$8x + 2y + z = 0$$

Obs:*O plano tangente também pode ser encontrado através do seu vetor normal, que é o produto vetorial das derivadas de duas curvas contidas na superfície que se interceptam num ponto.*

Exemplo: Suponha que você precisa saber uma equação do plano tangente à superfície S no ponto P(2,1,3). Você não tem uma equação para S, mas sabe que as curvas abaixo estão em S. Encontre uma equação para o plano tangente em P.

$$r_1(t) = (2 + 3t, 1 - t^2, 3 - 4t + t^2)$$

$$r_2(u) = (1 + u^2, 2u^3 - 1, 2u + 1)$$

Para que o ponto seja P(2,1,3), temos t=0 e u=1.

Agora derivamos r_1 e r_2 nesse ponto.

$\overrightarrow{r_1'}$ =(3,0,-4)

$\overrightarrow{r_2'}$ =(2,6,2)

Para achar o vetor normal ao plano tangente, fazemos o produto vetorial das derivadas (vetores diretores).

Temos :

$$\vec{n} = \vec{r_1}\, x\, \vec{r_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & -4 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 24i - 14j + 18k = (24, -14{,}18)$$

Neste caso, utilizamos a equação:

$$24(x - x_0) - 14(y - y_0) + 28(z - z_0) = 0$$

$$24(x - 2) - 14(y - 1) + 18(z - 3) = 0$$

$$z = -\frac{4}{3}x + \frac{7}{9}y + \frac{44}{9}$$

Aproximação Linear

Uma maneira diferente de se escrever uma equação nas proximidades de um ponto, se essa for a equação de uma superfície, a equação de seu plano tangente num ponto P será a aproximação linear para as proximidades desse ponto.

Exemplo: Verifique a aproximação linear.

$$\frac{2x + 3}{4y + 1} \cong 3 + 2x - 12y\ perto\ do\ ponto\ (0{,}0).$$

Primeiro, no ponto (0,0) o resultado das duas equações deve ser exatamente o mesmo, neste caso ambas são 3.

Depois, os coeficientes de x e y na aproximação linear devem ser as derivadas parciais com relação a x e com relação a y da equação original no ponto em questão.

$$F_x(0{,}0) = \frac{2(4y + 1)}{(4y + 1)^2} = \frac{2}{4y + 1} = 2$$

$$F_y(0{,}0) = \frac{4(2x + 3)}{(4y + 1)^2} = -12$$

Portanto, vemos que é uma aproximação linear válida para a equação original no ponto em questão.

(III) Diferenciabilidade

Apenas como conclusão de derivadas parciais, vamos rever o conceito de diferenciabilidade , só que com mais variáveis, que é dado “quando o erro da aproximação linear é bem pequeno”.

Teorema: Critério de Diferenciabilidade.

Se $\frac{\partial f\,(x_0, y_0)}{\partial x}$ e $\frac{\partial f\,(x_0, y_0)}{\partial y}$ existirem e $\frac{\partial f\,(x, y)}{\partial x}$ e $\frac{\partial f\,(x, y)}{\partial y}$ forem contínuas no ponto (x_0, y_0), então f(x,y) é diferenciável neste ponto.

Como visto em Cálculo I, temos:

- ✓ Polinômios são diferenciáveis em todo o $\mathbb{R}$.
- ✓ O produto entre duas funções diferenciáveis é uma função diferenciável no seu domínio.
- ✓ A composição de duas funções diferenciáveis é uma função diferenciável no seu domínio.

Exercícios Recomendados:

1)(UFRJ-2013.1)

Considere a superfície S formada pelos pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ satisfazendo a equação

$$xyz = e^{\beta x},$$

onde β é um número real.

(a) Escreva a equação do plano tangente a S no ponto $P_0 = \left(3, \frac{1}{3}, e^{3\beta}\right) \in S$.

(b) Encontre β de modo que o plano tangente a S no ponto P_0 contenha a origem.

2)(UFRJ-2012.2)

$$\text{Dada a função } f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x+y}{|x|+|y|}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) A função é contínua na origem? Justifique sua resposta.

(b) A função é diferenciável na origem? Justifique sua resposta.

3)(UFRJ-2014.1)

Considere as seguintes afirmações:

i) Se $f(x, y)$ é contínua no ponto (a, b) então $f(x, y)$ é diferenciável no ponto (a, b)

ii) Se $f(x, y)$ é diferenciável no ponto (a, b) então $f(x, y)$ é contínua no ponto (a, b)

iii) Se $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ existem no ponto (a, b) então $f(x, y)$ é diferenciável no ponto (a, b)

Gabarito: 1) a) $\left(-\beta e^{3\beta} + \frac{1}{3}e^{3\beta}\right)(x-3) + 3e^{3\beta}\left(y - \frac{1}{3}\right) + (z - e^{3\beta}) = 0$ **b)** 1 **|2)** a) Não. b)Não, pois não é contínua. **|3)** Falso. Verdadeiro. Falso

(IV) Regra da Cadeia

Suponha que z=f(x,y) seja uma função diferenciável de x e y, onde x=g(t) e y=h(t) são funções diferenciáveis de t. Então z(x,y) é uma função diferenciável de t e

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}}$$

Exemplo: $S: z = x^2y + 3xy^4$, onde x=sen(2t) e y=cos(t). Determine dz/dt quando t=0

Primeiro, devemos encontrar os valores de todas as variáveis no ponto dado, logo:

$$x = sen(0) = 0 \; e \;\; y = cos(0) = 1$$

Usando a regra da cadeia, temos:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + 3y^4, no\ ponto\ (0,1) = 3$$

$$\frac{dx}{dt} = 2.\cos(2t), em\ t = 0, temos\ \frac{dx}{dt} = 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 12xy^3, no\ ponto\ (0,1) = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = -sen(t), em\ t = 0, temos\ \frac{dy}{dt} = 0$$

Logo, $\frac{dz}{dt} = 3.2 + 0.0 = 6$

Outro caso de Regra da Cadeia:

Suponha que z=f(x,y) seja uma função diferenciável de x e y, onde x= g(s,t) e y =h(s,t) são funções diferenciáveis de s e t. Então:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \end{aligned}}$$

Nesse caso, encontramos as derivadas parciais de z em função de s e t.

Exemplo: Se $z = e^x seny$, onde x= st² e y=s²t determine as derivadas parciais $\frac{\partial z}{\partial s}$ e $\frac{\partial z}{\partial t}$.

Aplicando a Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

E temos:

$$\frac{dz}{dx} = e^x seny\, , como\ x = st^2\ e\ y = s^2t\, , \frac{dz}{dx} = e^{st^2} sen(s^2t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^x cosy = e^{st^2}\cos(s^2 t)$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = t^2 \; ; \; \frac{\partial x}{\partial t} = 2st \; ; \frac{\partial y}{\partial s} = 2st \; ; \; \frac{\partial y}{\partial t} = s^2$$

Logo, aplicando na formula, temos:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = e^{st^2} sen(s^2 t)t^2 + e^{st^2}\cos(s^2 t) \,.\, 2st = e^{st^2}(t^2 sen(s^2 t) + 2st. cos(s^2 t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = e^{st^2} sen(s^2 t). 2st + e^{st^2}\cos(s^2 t)s^2 = e^{st^2}(2st. sen(s^2 t) + s^2. \cos(s^2 t)$$

Percebemos então que é fácil utilizar a regra da cadeia, é bem similar ao que se utilizava no Cálculo I.No entanto, alguns exercícios podem ser confusos quanto ao uso de valores e variáveis, nesse caso deve-se sempre tomar **bastante** cuidado.

Exemplo: Suponha que F seja uma função diferenciável de x e y, e $g(u, v) = f(e^u + sen(v), e^u + \cos(v))$.Use a tabela abaixo para calcular $g_u(0,0) e \; g_v(0,0)$.

	f	g	F_x	F_y
(0.0)	3	6	4	8
(1.2)	6	3	2	5

Repare que $g(u, v) = f(x, y), x = e^u + sen(v) \, , y = e^u + \cos(v)$

Logo, podemos utilizar a regra da cadeia da seguinte forma:

$$f_u = g_u = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$f_v = g_v = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

No ponto em questão, temos g(0,0) com u=v=0

Logo,temos:

$$x = e^0 + sen(0) = 1$$

$$y = e^0 + \cos(0) = 2$$

Portanto, trata-se de f(1,2) e não f(0,0)! **Cuidado!**

$$g_u(0,0) = f_x(1,2). \frac{\partial x}{\partial u} + f_y(1,2). \frac{\partial y}{\partial u} = 2. \frac{\partial x}{\partial u} + 5. \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = e^u = e^0 = 1$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = e^u = e^0 = 1$$

Logo:

$$g_u(0,0) = 2.1 + 5.1 = 7$$

Já para calcular $g_v(0,0)$,temos:

$$g_v(0,0) = 2\frac{\partial x}{\partial v} + 5\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \cos(v) = \cos(0) = 1$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = -sen(v) = -sen(0) = 0$$

$$g_v(0,0) = 2\frac{\partial x}{\partial v} + 5\frac{\partial y}{\partial v} = 2.1 + 5.0 = 2$$

- ✓ Vemos que para resolver este problema é necessária muita atenção ao utilizar os valores da tabela.

Exercícios Recomendados:

1)(UFRJ-2013.2)

Seja $z = 4e^x \ln y$, onde

$$x = \ln(u\cos(v)) \quad \text{e} \quad y = u\,\text{sen}\,(v).$$

Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ quando $u = 2$ e $v = \pi/4$.

(a) $4\sqrt{2}(1 - \ln\sqrt{2})$
(b) $-4\sqrt{2}(1 + \ln\sqrt{2})$
(c) $4\sqrt{2}(1 + \ln\sqrt{2})$
(d) $\sqrt{2}(1 + \ln\sqrt{2})$
(e) Nenhuma das outras alternativas.

2)(UFRJ-2012.1)

Considere a função $g(x,y) = 2(x-2)^2y + y^2 + 1.$

Considere a função vetorial $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, tal que $\sigma(1) = (1,1)$ e $\sigma'(1) = (3,2)$. Se $F(t) = g(\sigma(t))$, então quanto é $F'(1)$?

3)(Stewart) Encontre $\frac{dw}{dt}$ $se\ w = x.e^{\frac{y}{z}}, x = t^2\ , y = 1 - t\ e\ z = 1 + 2t$

4)(Stewart) Sendo $w = xt + yz + zx\ , x = rcos\theta\ , = rsen\theta\ , z = r\theta$. Encontre $\frac{\partial w}{\partial r}$ e $\frac{\partial w}{\partial \theta}$ quando r= 2 e θ=$\frac{\pi}{2}$.

Gabarito: 1) A |2) -4 **|3)**$e^{\frac{y}{z}}[2t - \left(\frac{x}{z}\right) - \left(\frac{2xy}{z^2}\right)]$ **|4)**$2\pi, -2\pi$

Bons Estudos!!

Dúvidas?

Acesse o ***Solucionador*** na página www.engenhariafacil.weebly.com ou mande email para *contatoengenhariafacil@gmail.com* .