ポートフォリオ投資からの収益

ポートフォリオ投資の平均リターン(平均投資収益率)

$$\mu_p = w_1\mu_1 + w_2\mu_2$$

ポートフォリオ投資のリスク（投資収益率の分散）

$$\sigma_p^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_1^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_{1,2}$$

w_1 … 証券１の組み入れ比率
w_2 … 証券２の組み入れ比率

μ_1 … 証券１の予測収益率
μ_2 … 証券２の予測収益率

σ_1 … 証券１の分散
σ_2 … 証券１の分散
$\sigma_{1,2}$ … 証券１,2の共分散

リスク最小の2資産ポートフォリオ投資

リスク最小の条件

Min σ_p^2

s.t. $w_1 + w_2 = 1$

ラグランジュ未定乗数法により

ラグランジェアン

$$L = w_1^2\sigma_1^2 + w_1^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_{1,2} - \lambda(w_1 + w_2 - 1)$$

最適条件

$$\frac{\partial L}{\partial w_1} = 2w_1\sigma_1^2 + 2w_2\sigma_{1,2} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_2} = 2w_2\sigma_2^2 + 2w_1\sigma_{1,2} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(w_1 + w_2 - 1) = 0$$

リスク最小の2資産ポートフォリオ投資(続き)

最適条件は

$$2w_1\sigma_1^2 + 2w_2\sigma_{1,2} = \lambda = 2w_2\sigma_2^2 + 2w_1\sigma_{1,2}$$

$$w_2 = 1 - w_1$$

以上より

$$w_1\sigma_1^2 + (1 - w_1)\sigma_{1,2} = (1 - w_1)\sigma_2^2 + w_1\sigma_{1,2}$$

$$w_1\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_{1,2} - \sigma_{1,2}\right) = \sigma_2^2 - \sigma_{1,2}$$

$$w_1 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{1,2}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{1,2}}$$

$$w_2 = 1 - \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{1,2}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{1,2}}$$

$$= \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{1,2} - \sigma_2^2 + \sigma_{1,2}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{1,2}}$$

$$= \frac{\sigma_1^2 - \sigma_{1,2}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{1,2}}$$