

円周率

Tam

円周率とは？

円周の長さ / 円の直径 = 円周率
としています.

数学の日

今日3月14日は「数学の日」とのことですが、
これは、アインシュタインの誕生日が3月14日であることと、
円周率の近似値から
公益財団法人・日本数学検定協会が1997年（平成9年）に制定しました。

円周率の日

1. 3月14日

円周率の近似値より

2. 7月22日

$22/7 = 3.14\dots$

3. 12月21日

12月21日が1月1日から数えて 355日目であり、

$355/113 = 3.14159292\dots$

どうやって求めるの？

計測

古代エジプトなどでは実際に長さを測って近似値を求めています.

当時は近似値なのか正しい値なのかも分からず.

正多角形（アルキメデス）

アルキメデス（紀元前287～212年）が正96角形

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

$$3.14084507 < \pi < 3.142857142$$

正多角形 (Zu Chongzi)

紀元後429～500年に中国の数学者Zu Chongziが

$$\frac{355}{113} = 3.14159292\dots$$

ただし、求め方は現在不明。

正多角形（コーレン）

1600年にルドルフ・ファン・コーレンというドイツの数学者

正 2^{62} 角形 = 約50京角形

小数点第35桁まで正しい値を求める。

確率論（ビュフォン）

フランスの数学者ビュフォンの「ビュフォンの実験」

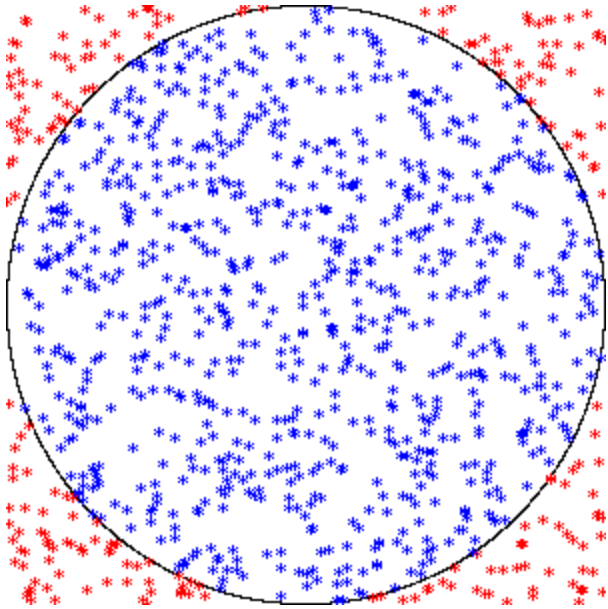
平行な線に線の間隔の半分の長さの針を投げ、投げた回数を線に交わった回数で割ると円周率が求まる

1. 一定の間隔の平行線を何本か引く.
2. 平行線の間隔の半分の長さの針を用意する.
3. 平行線に向かって針を何回か投げる.
4. 「投げた回数」を「平行線に交わった回数」で割る.

円周率 = 投げた回数 / 針が平行線に交わった回数

確率論（モンテカルロ法）

1. 正方形と、それに内接する円を描く.
2. 正方形の内部のランダムな位置に点を何個か打つ.
3. 「円の内部の点の数」 / 「打った点の数」 = $\pi/4$



円周率は本当に無限に続くの？

証明法：

$$\pi = \frac{q}{p}$$

として矛盾を導く.

1761年、ドイツの数学者ヨハン・ハインリッヒ・ランベルトによりほぼ証明される.

その後、フランスのアドリアン＝マリ・ルジャンドルが 1794年に厳密な証明を与え、円周率 π は有限小数でも循環小数でもないことが分かった.

無限桁の数

$\sqrt{2}$ なんかも無限に続く.

ただし, π は代数的数 (多項式の解となる数) でもない.

このような数を「超越数」と呼んでいます.

超越数

π だけではなく, e (ネイピア数) も超越数です.

e と π は別々の定義から出てきた超越数ですが,
オイラーの公式:

$$e^{\pi i} = -1$$

などで知られるように, とても関係の深い数です.

π の不思議

π の性質はだいぶ分かってきているものの、
未解決問題も多く、まだまだ謎に包まれています。

ex) π^π , $e + \pi$ は超越数なのか？（現在でもまだ分かってない。）など。

円周率の計算法

$\tan(\pi/4) = 1$ なので,

$$\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

が求まります.

グレゴリ・ライプニッツ級数:

$$\tan^{-1}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \dots$$

より,

$$\tan^{-1}(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

マチンの公式

$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)$$

$$\pi = A_1 \tan^{-1}(b_1) + A_2 \tan^{-1}(b_2)$$

となる公式は4つしか存在しないことが知られている.

マチンの公式はそのなかで最も収束（計算）が速い.

マチンの公式の計算

シャンクスがこの公式を使用して1874年に707桁まで手計算で求める.

ファーガソンが1945年に527桁までしか正しくないことを発見する.

ラマヌジャンとチュドノフスキーの公式

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103 + 26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}$$

Ramanujan

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)!(13591409 + 545140134k)}{(3k)!(k!)^3 640320^{3k+3/2}}$$

Chudnovsky brothers

計算機で計算するのにはとても適している

かつ、途中で計算が止まっても、途中から計算を再開できる！

→桁数が○兆桁に！

ここまでは10進数

円周率は 10進数だけではありません.

2進数で小数を表記できるので, もちろん円周率も表現できます.

2進数用の公式

BBP(Bailey-Borwein-Plouffe)の公式

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right)$$

収束はそれほど速くありませんが、
2進数での円周率の目的の桁を直接計算できる！

中国剰余定理で計算結果の検証ができる。

Fabrice Bellardの公式

LZEXE や ffmpeg の原作者として知られているフランスの人が考案した公式。

実際に、作者自身によって 2009年12月31日までに Core i7 メモリ6GB を使って、それまでの世界記録を更新し、2兆6999億9999万桁の計算を行った。

それまでの世界記録は筑波大学のスーパーコンピューターを使った2兆5769億8037万桁だった。