円周率

Tam

円周率とは？

円周の長さ / 円の直径 = 円周率

としています.

円周率πの語源はギリシャ語の「周り」を意味する「περιφερεια」の頭文字と思われるとのこと。

覚え方（英語圏）

Yes, I have a number.

数学の日

今日３月１４日は「数学の日」とのことですが,

これは、アインシュタインの誕生日が３月１４日であることと,

円周率の近似値から

公益財団法人・日本数学検定協会が1997年（平成9年）に制定しました.

円周率の日

1. ３月１４日
   円周率の近似値より
2. ７月２２日
   22/7 = 3.14...
3. １２月２１日
   12月21日が1月1日から数えて 355日目であり、
   355/133 = 3.14159292...

どうやって求めるの？

計測

古代エジプトなどでは実際に長さを測って近似値を求めていました.

当時は近似値なのか正しい値なのかも分からず.

正多角形（アルキメデス）

アルキメデス（紀元前287〜212年）が正96角形

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

$$3.14084507 < \pi < 3.142857142$$

正多角形（Zu Chongzi）

紀元後429〜500年に中国の数学者Zu Chongziが

$$\frac{355}{113} = 3.14159292...$$

ただし、求め方は現在不明。

正多角形（コーレン）

1600年にルドルフ・ファン・コーレンというドイツの数学者

正2^62角形 = 約50京角形

小数点第35桁まで正しい値を求める。

確率論（ビュフォン）

フランスの数学者ビュフォンの「ビュフォンの実験」

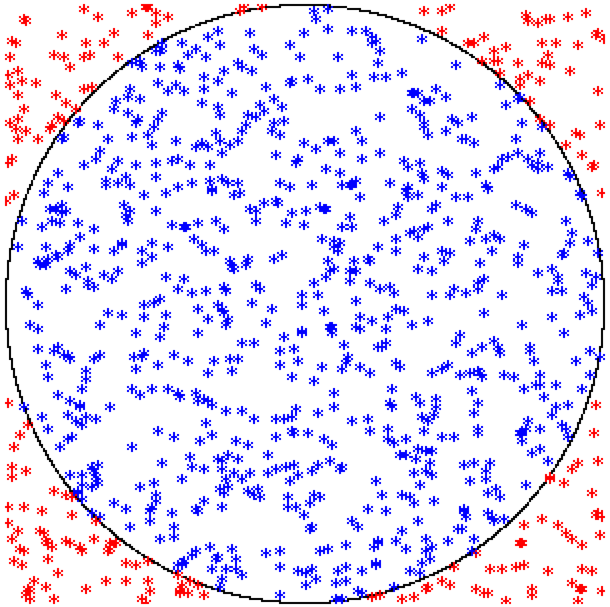
平行な線に線の間隔の半分の長さの針を投げ、投げた回数を線に交わった回数で割ると円周率が求まる

1. 一定の間隔の平行線を何本か引く.
2. 平行線の間隔の半分の長さの針を用意する.
3. 平行線に向かって針を何回か投げる.
4. 「投げた回数」を「平行線に交わった回数」で割る.

円周率 = 投げた回数 / 針が平行線に交わった回数

確率論（モンテカルロ法）

1. 正方形と、それに内接する円を描く.
2. 正方形の内部のランダムな位置に点を何個か打つ.
3. 「円の内部の点の数」/「打った点の数」= π/4



円周率は本当に無限に続くの？

証明法：

$$\pi = \frac{q}{p}$$

として矛盾を導く.

1761年、ドイツの数学者ヨハン・ハインリッヒ・ランベルトによりほぼ証明される.

その後, フランスのアドリアン＝マリ・ルジャンドルが 1794年に厳密な証明を与え,
円周率π は有限小数でも循環小数でもないことが分かった.

無限桁の数

$\sqrt{2}$ なんかも無限に続く.

ただし, π は代数的数（多項式の解となる数）でもない.

このような数を「超越数」と呼んでいます.

超越数

π だけではなく, e（ネイピア数）も超越数です.

e と π は別々の定義から出てきた超越数ですが,
オイラーの公式：

$$e^{\pi i} = -1$$

などで知られるように, とても関係の深い数です.

πの不思議

πの性質はだいぶ分かってきているものの,
未解決問題も多く, まだまだ謎に包まれています.

ex) π^π, e + π は超越数なのか？（現在でもまだ分かってない.）など.

円周率の計算法

tan(π/4) = 1 なので,

$$\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

が求まります.

グレゴリ・ライプニッツ級数：

$$tan^{-1}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - + \cdots$$

より,

$$tan^{-1}(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + - \cdots$$

マチンの公式

$$\frac{\pi}{4} = 4tan^{-1}(\frac{1}{5}) - tan^{-1}(\frac{1}{239})$$

$$\pi = A_1 tan^{-1}(b_1) + A_2 tan^{-1}(b_2)$$

となる公式は４つしか存在しないことが知られている.

マチンの公式はそのなかで最も収束（計算）が速い.

マチンの公式の計算

シャンクスがこの公式を使用して1874年に707桁まで手計算で求める.

ファーガソンが1945年に527桁までしか正しくないことを発見する.

ラマヌジャンとチュドノフスキーの公式

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{99^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \frac{26390n + 1103}{396^{4n}}$$

$$\frac{1}{\pi} = \frac{12}{\sqrt{C^3}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)!(A + Bk)}{(3k)!(k!)^3 C^{3k}} = \frac{12}{\sqrt{C^3}} \sum_{k=0}^{\infty} P_k$$

$$\begin{cases} A = 13591409 \\ B = 545140134 \\ C = 640320 \end{cases}$$

計算機で計算するのにはとても適している

かつ, 途中で計算が止まっても, 途中から計算を再開できる！

→桁数が○兆桁に！

ここまでは10進数

円周率は 10進数だけではありません.

2進数で小数を表記できるので, もちろん円周率も表現できます.

２進数用の公式

BBP(Bailey-Borwein-Plouffe)の公式

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right)$$

収束はそれほど速くありませんが,
2進数での円周率の目的の桁を直接計算できる！

　中国剰余定理で計算結果の検証ができる.

Fabrice Bellardの公式

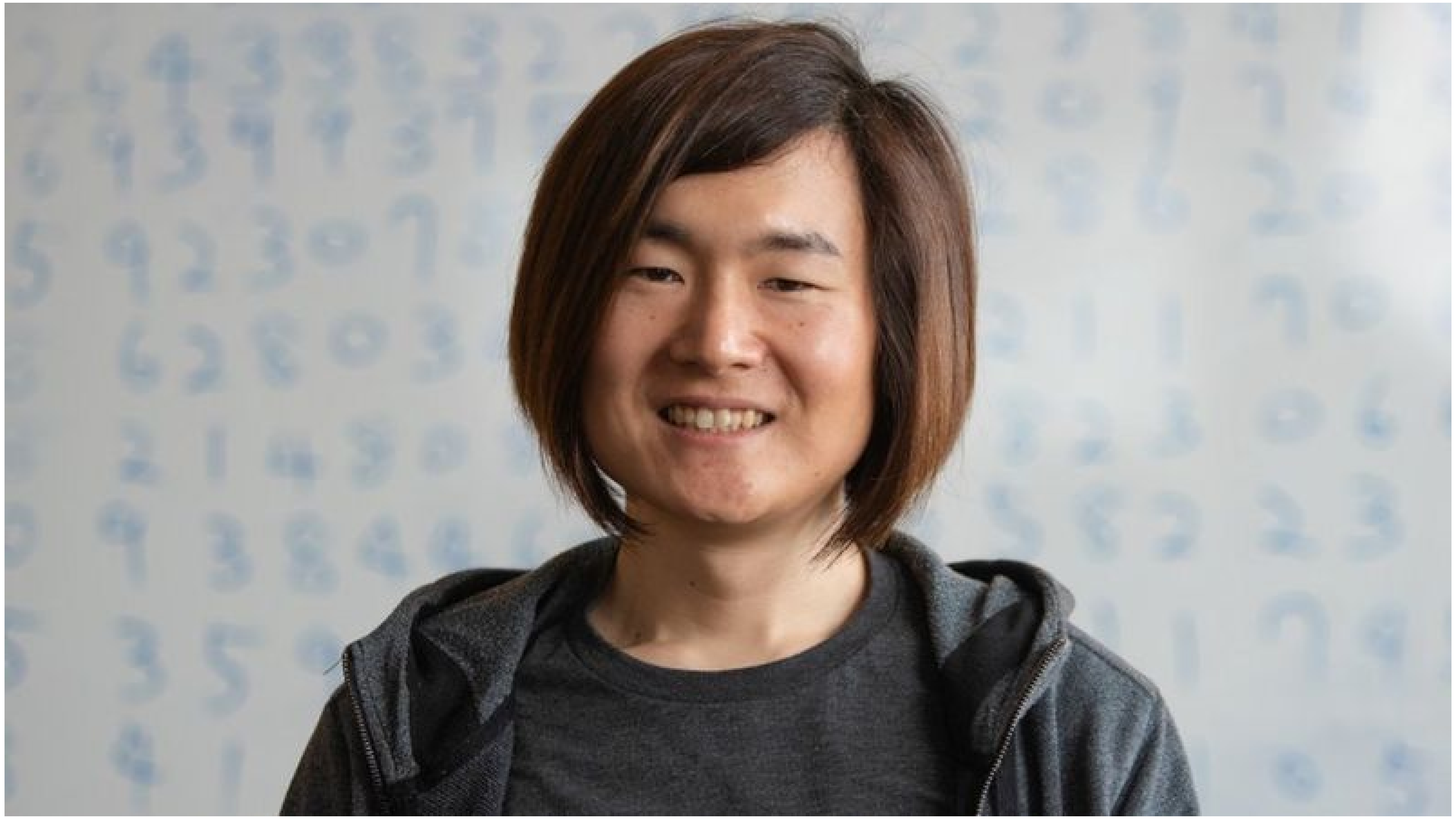
LZEXE や ffmpeg の原作者として知られているフランスの人が考案した公式。

実際に、作者自身によって 2009年12月31日までに Core i7 メモリ6GB を使って、
それまでの世界記録（筑波大学のスーパーコンピューターを使った2兆5769億8037万桁）を更新し、2兆6999億9999万桁の計算を行った。

2019年3月14日

Googleでエンジニアとして働く岩尾エマはるかさんが、
円周率を小数点以下約31兆4159億2653万5897桁まで計算。

GCP を利用。



円周率は 3.14... でいいのか？

一部の研究者により、現在の円周率 π に代わるべき数学定数として τ が提唱されている。

$\tau = 2 \times \pi$

メリット：三角関数の周期などと一致する。

ただし、現在の主要論文での τ の採用事例はとても少ない。

円周率のこれから

計算速度競争も続いていますが、数学的な性質でも未解明な部分が多く、
これからも謎の解明が待たれます。

ご清聴ありがとうございました。