הבינום

הגדרה: ביטויים מהסוג $\binom{n}{k}$ כאשר $0\le k\le n$
n,k שלמים

נקראים "מקדמים בינומיים".

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$ = מספר האפשרויות לבחור k מתוך n בלי לסדר.

א) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ (הוכחנו)

ב) $\binom{n}{0}=1$

הסבר אלגברי: כאשר $0!=1$ (עניין של הגדרה)

$$\binom{n}{0}=\frac{\cancel{n!}}{0!\cdot\cancel{n!}}=\frac{1}{0!}=\frac{1}{1}=1$$

הסבר קומבינטורי:

יש אפשרות אחת לבחור אפס מתוך n עצמים.

ג) $\binom{n}{1}=n$

הסבר אלגברי:

$$\binom{n}{1}=\frac{n!}{1!(n-1)!}=\frac{n!}{(n-1)!}=n$$

הסבר קומבינטורי:

יש n אפשרויות לבחור עצם אחד מתוך n עצמים.

משולש פסקל:

מכאן לאוצרין

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0}=1 & & & & \\
 & & & \binom{1}{0}=1 & & \binom{1}{1}=1 & & & \\
 & & \binom{2}{0}=1 & & \binom{2}{1}=2 & & \binom{2}{2}=1 & & \\
 & \binom{3}{0}=1 & & \binom{3}{1}=3 & & \binom{3}{2}=3 & & \binom{3}{3}=1 & \\
\binom{4}{0}=1 & & \binom{4}{1}=4 & & \binom{4}{2}=6 & & \binom{4}{3}=4 & & \binom{4}{4}=1
\end{array}$$

כל מקדם בינומי = הסכום של שני המקדמים שמעליו, מימין ומשמאל.

זאת התוצאה של הזהות הבאה (שכבר הוכחנו):

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

לדוגמא: $\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2}$

נוסחת הבינום:

אנו רוצים לדעת למה שווה $(a+b)^n$

כאשר a ו b כלשהם, n טבעי.

$$(a+b)^0 = 1 \qquad \binom{0}{0}=1$$

$$(a+b)^1 = 1\cdot a + 1\cdot b \qquad \binom{1}{0}=1 \quad \binom{1}{1}=1$$

$$(a+b)^2 = 1\cdot a^2 + 2\cdot ab + 1\cdot b^2 \qquad \binom{2}{0}=1 \quad \binom{2}{1}=2 \quad \binom{2}{2}=1$$

$$(a+b)^3 = 1\cdot a^3 + 3\cdot a^2b + 3\cdot b^2a + 1\cdot b^3 \qquad \binom{3}{0}=1 \quad \binom{3}{1}=3 \quad \binom{3}{2}=3 \quad \binom{3}{3}=1$$

$$(a+b)^4 = 1\cdot a^4 + 4\cdot a^3b^1 + 6\cdot a^2b^2 + 4\cdot ab^3 + 1\cdot b^4 \qquad \binom{4}{0}=1 \quad \binom{4}{1}=4 \quad \binom{4}{2}=6 \quad \binom{4}{3}=4 \quad \binom{4}{4}=1$$

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}\cdot a^4\cdot b^0 + \binom{4}{1}\cdot a^3\cdot b^1 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}a^1b^3 + \binom{4}{4}a^0\cdot b^4$$

עד כאן לבגר'

באופן כללי:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}\cdot b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}\cdot b^2 + \dots + \binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^k + \dots + \binom{n}{n}a^0\cdot b^n$$

פיתוח הבינום:

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}\cdot b^k}$$

נוכיח את נוסחת הבינום

מכאן לא צריך

נסביר ע"י דוגמא:

נסתכל על $(a+b)^5$

$$(a+b)^5=(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$$

אחרי שפותחים הביטוי,

מהו המקדם של a^2b^3?

כמה פעמים נקבל a^2b^3?

מתי מקבלים a^2b^3?

כאשר מתוך 3 סוגריים בחרנו b

ואז, מ 2 הסוגריים האחרים בחרנו a.

ברגע שהחלטנו מאילו 3 מתוך 5 הסוגריים נבחר b,

ממילא מהשניים האחרים נבחר a.

בכמה אפשרויות אפשר לבחור 3 מתוך 5 סוגריים? $\binom{5}{3}$

לכן המקדם של a^2b^3 הוא $\binom{5}{3}$

ובאופן כללי:

$$(a+b)^n=\underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{n\ \text{פעמים}}$$

מהו המקדם של $a^{n-k}b^k$?

בוחרים את k הסוגריים שמתוכם ניקח b (ומהשאר ניקח a)

לכן מדובר בבחירה של k מתוך n סוגריים: $\binom{n}{k}$

עד כאן לא צריך