??4=5

בואו ניתן תרגיל

$$16 - 36 = 25 - 45$$

1

$$16-36+\frac{81}{4}=25-45+\frac{81}{4}$$

2

$$4^2-2\cdot 4\cdot\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2=5^2-2\cdot 5\cdot\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2$$

3

$$\left(4-\frac{9}{2}\right)^2=\left(5-\frac{9}{2}\right)^2$$

ונסה לשחק איתו

4 $4-\frac{9}{2}=5-\frac{9}{2}$

5 $4=5$

????

???? $4 = 5$

ההנמקה ששימשה כדי להגיע למסקנה ש- **4=5** פתחה בטענה שהיא ללא ספק נכונה (האומרת ש- **16-36** ו- **25-45** שווים שניהם ל- **–20**) והסתיימה בטענה שהיא ללא ספק שיקרית (**4=5**).

מה השתבש?

הסבר

כל הצעדים בהנמקה נכונים למעט צעד המעבר ממשוואה (4) למשוואה (5):

$$\left(4-\frac{9}{2}\right)^2=\left(5-\frac{9}{2}\right)^2 \Rightarrow 4-\frac{9}{2}=5-\frac{9}{2}$$

הסבר

באופן כללי, $a^2 = b^2$ גורר $a = b$, או $a = -b$, כפי שמראה הנימוק האלגברי הבא:

$$a^2 = b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow (a-b)(a+b) = 0$$

$$\Rightarrow a - b = 0$$

או $a + b = 0$

$$\Rightarrow \ a = b$$

או $a = -b$

איפה זה תופס אותנו

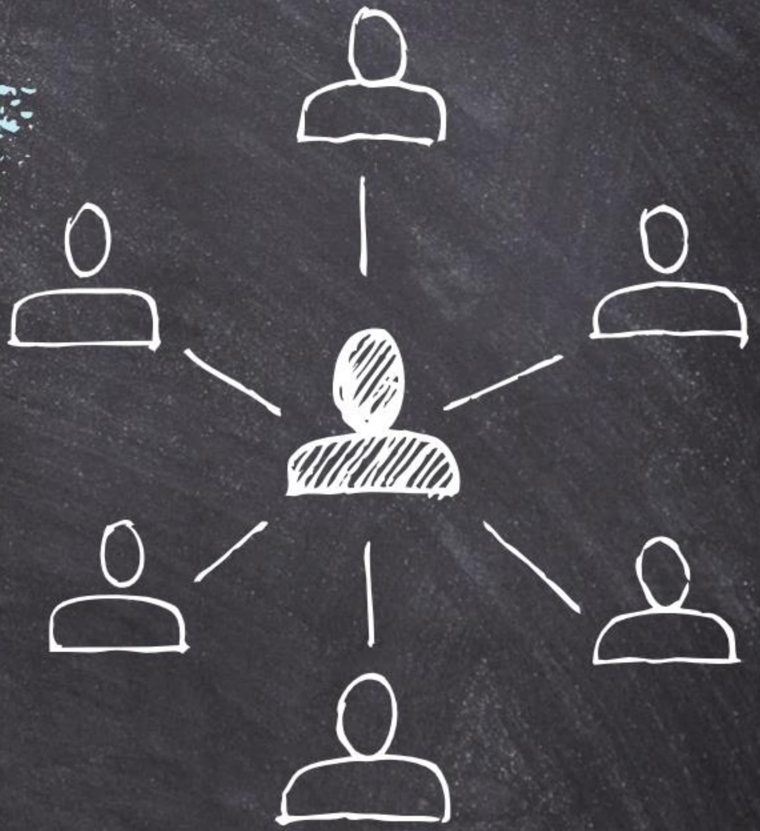
- נוסחאות אלו נלמדות בדרכ בכיתה ט

אצל תלמידים..

תלמידים לעיתים תכופות כותבים $\sqrt{x^2}=x$, וזהו המקור לבלבול הנגרם בפרדוקס זה. טענה נכונה היא $\sqrt{x^2}=|x|$, וזו הדרך שבה פונקציית הערך המוחלט לעיתים מוגדרת. הטענה השגויה $\sqrt{x^2}=x$ (שהיא שקרית אם x הוא שלילי), נכתבת לעיתים קרובות כ- $(x^2)^{1/2}=x$. כתיבת הטענה בדרך זו היא דוגמא לשימוש שגוי בכללי החזקות. נכון ש- $(a^m)^n=a^{mn}$ עבור ערכים שלמים של m ו- n ועבור כל ערך של a, הן שלילי והן חיובי. נכון גם ש- $(a^m)^n=a^{mn}$ אם a הוא חיובי ו- m ו- n הם ממשיים. אולם, טענה זו עשויה *שלא* להיות נכונה אם a הוא שלילי ו- m ו- n אינם מספרים שלמים.

אצל תלמידים..

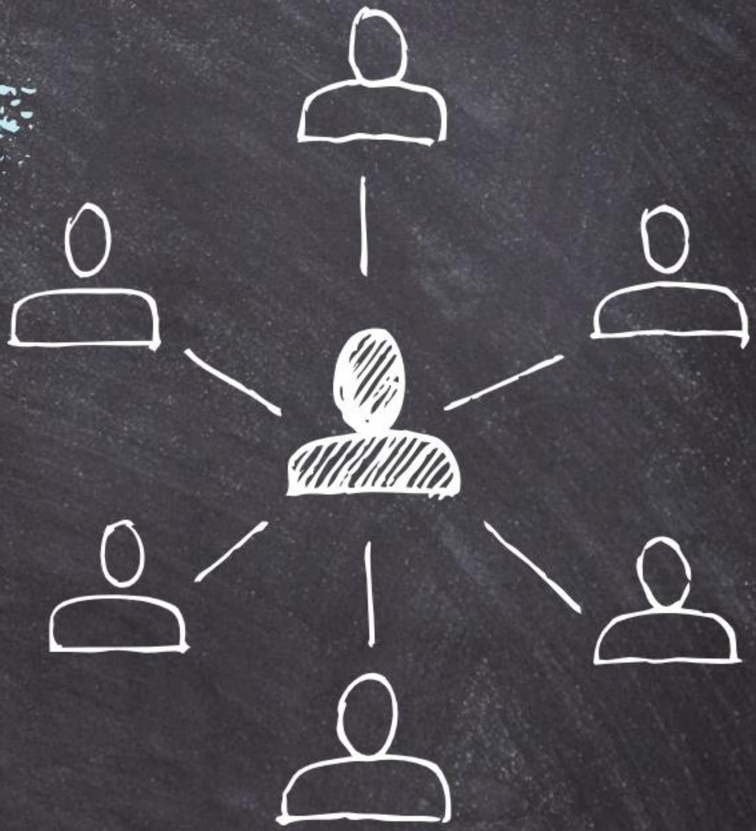
סימן השורש הריבועי ($\sqrt{\ }$) מקשה מעט על תלמידים. יש להדגיש ש- $\sqrt{a}$ מוגדר כשורש הריבועי החיובי של a והוא אינו דו-ערכי. כלומר, נכון לכתוב $\sqrt{9} = 3$ ו- $-\sqrt{9} = -3$, אך אין זה נכון לכתוב $\sqrt{9} = \pm 3$. (הכתיבה הנכונה היא $\pm\sqrt{9} = \pm 3$.)



אצל תלמידים..

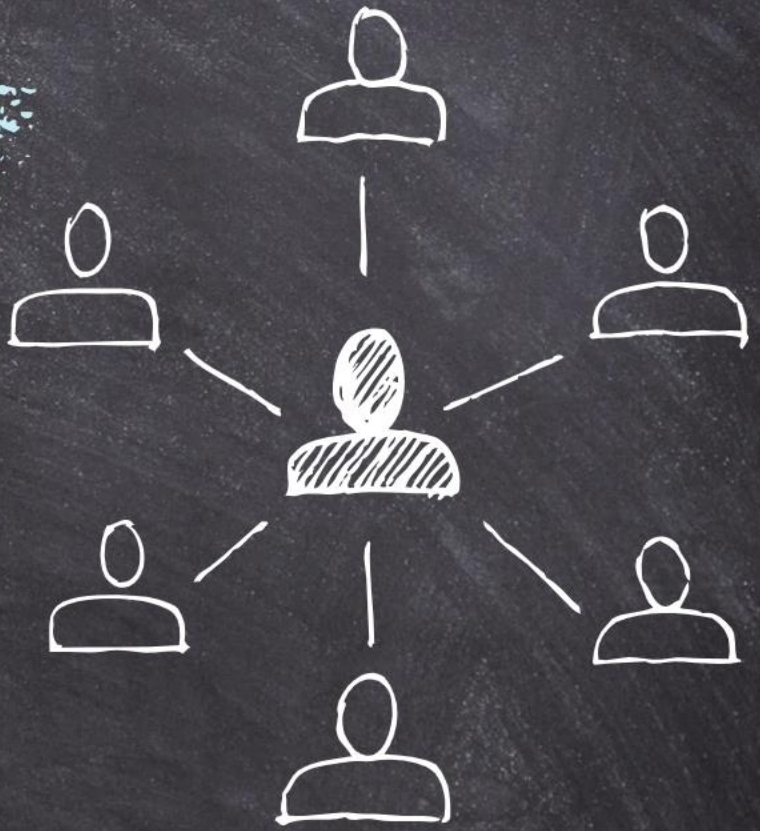
הבלבול סביב סימן השורש הריבועי נובע ככל הנראה מהשפה בה אנו משתמשים ביחס לסימון. נכון לטעון שלמספר 9 יש שני שורשים ריבועיים, $+3$ ו- -3, היות ואלה הם שני הפתרונות למשוואה $x^2 = 9$. אולם, למרות שאין זה נכון לכתוב $\sqrt{9} = -3$, לעיתים קרובות מתייחסים אל הסימן $\sqrt{9}$ כאל "השורש הריבועי של 9" או פשוט "שורש 9", ביטוי אותו יש המחליפים לעיתים קרובות עם ההצהרה ש- -3 הוא שורש ריבועי של 9.

הערות דומות מתייחסות לסימון $9^{1/2}$, אשר פירושו זהה בדיוק לזה של $\sqrt{9}$.



אצל תלמידים..

באותו הקשר, מעניין שיש תלמידים הכותבים $\sqrt{9}=\pm 3$, אך מתייחסים ל- $\sqrt{2}$ כאל מספר חיובי, ולא כאל זוג מספרים. בנוסף, הבלבול של תלמידים ביחס למשמעות סימן השורש הריבועי מקבל כנראה חיזוק על-ידי הביטוי $\pm\sqrt{b^2-4ac}$, אשר מופיע בנוסחה לפתרון המשוואה הריבועית.



חומר

אצל תלמידים..

ניתן להכליל את ה״הוכחה״ ש- $5 = 4$ כדי ״להוכיח״ ש- $x = x + 1$ עבור כל x:

נצא מ- $x^2 - x(2x+1) = (x+1)^2 - (x+1)(2x+1)$ (שוויון אמת משום ששני האגפים שווים ל- $-x^2 - x$). נשלים לריבוע שלם בשני האגפים על ידי הוספת $\left[\frac{1}{2}(2x+1)\right]^2$:

$$x^2 - x(2x+1) + \left[\frac{1}{2}(2x+1)\right]^2 = (x+1)^2 - (x+1)(2x+1) + \left[\frac{1}{2}(2x+1)\right]^2$$

$$\Rightarrow \quad \left[x - \frac{1}{2}(2x+1)\right]^2 = \left[(x+1) - \frac{1}{2}(2x+1)\right]^2$$

$$\Rightarrow \quad \left[x - \frac{1}{2}(2x+1)\right] = (x+1) - \frac{1}{2}(2x+1)$$

$$\Rightarrow \quad x = x + 1$$

לגבי ערכים שלמים של x, טיעון זה מוכיח לכאורה שכל שני מספרים שלמים עוקבים הם שווים!

חומר