ベクトル

渡邉　陽平

2024 年 4 月 1 日

1 ベクトル

平面上で図形の平行移動は、向きを持つ線分で表現できる。線分につけた矢印の向きで移動する向きを、線分の長さで移動距離を表現する。

A 有効線分とベクトル

向きをつけた線分を有向線分という。有向線分 AB では、A を始点、B を終点と呼び、その向きは A から B へと向かっているとする。また、線分 AB の長さを、有向線分 AB の大きさまたは長さと言う。

平面上で図形を平行移動する場合, 平行移動を表す線分はいくらでも図示できるが、位置が違うだけで長さ、向きは等しい。

有向線分の違いを無視して、その向き、長さのみに着目したものをベクトルという。

例として、物理で習った速度や力は向きと大きさを持つ量であり、ベクトルと言える。

B ベクトルの表記

有向線分 AB が表すベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ で表す。また、ベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{a}}$ $\overrightarrow{\mathrm{b}}$ と表すこともある。

ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{a}}$ の大きさはそれぞれ $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$, $|\overrightarrow{\mathrm{a}}|$ で表す。このとき、$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ は有向線分 AB の長さに等しい。

向き、大きさが同じの 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{a}}$,$\overrightarrow{\mathrm{b}}$ は等しいといい、$\overrightarrow{\mathrm{a}} = \overrightarrow{\mathrm{b}}$ と書く。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ のとき、有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を平行移動して有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ と重ね合わせることができる。

ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{a}}$ と大きさが等しく、向きが反対のベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{a}}$ の逆ベクトルといい、$-\overrightarrow{\mathrm{a}}$ で表す。

$\overrightarrow{\mathrm{a}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$ である。
すなわち $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

2 ベクトルの演算

A ベクトルの加法

ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{a}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{b}}$ に対して、$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{b}}$ となる点 C を取る。

このようにして定まるベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の和といい、$\vec{a}+\vec{b}$ と書く。
次が成り立つ。

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

ベクトルの加法について、次のことが成り立つ。

ベクトルの加法の性質

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (交換法則) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (結合法則)

B 零ベクトル

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のとき、$-\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ であるから、
$\vec{a}+(-\vec{a})=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{AA}}$
となる。
ここで、$\overrightarrow{\mathrm{AA}}$ は始点と終点が一致した有向線分のベクトルと考え、その大きさは 0 であるとする。
大きさが 0 のベクトルを零ベクトルまたはゼロベクトルといい、$\vec{0}$ で表す。
零ベクトルに関して、次が成り立つ。

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$$
$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$$

C ベクトルの減法

ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対して、$\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$ を満たすベクトル $\vec{c}$ を、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の差といい、$\vec{a}-\vec{b}$ と書く。
一般に、$\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であるから、次が成り立つ。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$$

同様に、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より、次が成り立つ。

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

ベクトルの減法について、次が成り立つ。

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\vec{b}$$
$$\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$$