'(レポート (ベクトル 計算) (対象 lisper))

渡邉　陽平

2024 年 4 月 1 日

ベクトルの成分

ベクトルの成分表示

x 軸、y 軸の正の向きと同じ向きの長さが 1 のベクトルを基本ベクトルといい、それぞれ $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ と表す。
ベクトルを x と y の増加量で書くと次のようになる。
$\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$
a_1, a_2 をそれぞれ $\overrightarrow{a}$ の x 成分、y成分と言う。まとめて成分とも言う。
２つのベクトルについて次が成り立つ。
$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$ であれば $a_1 = b_1, a_2 = b_2$ また、ベクトルの大きさは次のように求められる。

$\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$ のとき、$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_1^2}$

ベクトルの成分表示は common lisp の cons セルを用いて以下のように表せる。

```
(x . y)
```

ベクトルの大きさを求める関数を common lisp で書くと、

```
(defun size (vector)
  (sqrt (+
    (expt (car vector) 2)
    (expt (cdr vector) 2))))
```

和, 差, 実数倍の成分表示

ベクトルの和、差、実数倍は次のことが言える。

$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$
$(a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$
$k(a_1, a_2) = (ka_1, ka_2)$

要はそれぞれの成分同士を足したり引いたり、それぞれの成分にかけてやれば良い。

ベクトルの和、差、実数倍を求める関数は

```
(defun wa (firstvector secondvector)
  (cons
    (+ (car firstvector) (car secondvector))
    (+ (cdr firstvector) (cdr secondvector))))

(defun sa (firstvector secondvector)
  (cons
    (- (car firstvector) (car secondvector))
    (- (cdr firstvector) (cdr secondvector))))

(defun zissuubai (vector number)
  (cons
    (* (car vector) number)
    (* (cdr vector) number)))
```

座標平面上の点とベクトル

座標平面上に 2 点 $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)$ がある時,$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$
$(a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$
以上から次が言える。

二点 $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)$ について $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$
$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{(a_1 - b_1, a_2 - b_2)}$

上は差を求める関数を使えばよいので lisp のコードは書かない。

ベクトルの内積

ベクトルの内積

大きさが 0 ではない 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{a}}, \overrightarrow{\mathrm{b}}$ について、適当な点 O から伸ばした先を A,B とする。$\angle$AOB の優角でない方を $\overrightarrow{\mathrm{a}}, \overrightarrow{\mathrm{b}}$ のなす角という。

$|\overrightarrow{\mathrm{a}}||\overrightarrow{\mathrm{b}}|\cos\theta$ を内積という。$\overrightarrow{\mathrm{a}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{b}}$ と書く。

成分による内積の表示

ベクトルの内積は成分表示を用いて次のように表すことができる。

$$\overrightarrow{\mathrm{a}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{b}} = a_1b_1 + a_2b_2$$

内積を求める関数は

```
(defun naiseki (firstvector secondvector)
  (+ (* (car firstvector) (car secondvector))
     (* (cdr firstvector) (cdr secondvector))))
```

なす角を求める関数は

```
(defun nasukaku (firstvector secondvector)
  (acos (/
    (naiseki firstvector secondvector)
      (* (size firstvector) (size secondvector)))))
```

なす角が 90° のときは内積は 0 になる。$\cos 90°$ は 0 だからである。仕方ないね。

内積の性質

次が成り立つ。

$$\overrightarrow{\mathrm{a}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{a}} = |\overrightarrow{\mathrm{a}}|^2$$
$$\overrightarrow{\mathrm{a}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{b}} = \overrightarrow{\mathrm{b}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{a}}$$
$$(\overrightarrow{\mathrm{a}} + \overrightarrow{\mathrm{b}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{c}} = \overrightarrow{\mathrm{a}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{c}} + \overrightarrow{\mathrm{b}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{c}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{a}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{b}} + \overrightarrow{\mathrm{c}}) = \overrightarrow{\mathrm{a}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{c}} + \overrightarrow{\mathrm{b}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{c}}$$
$$(k\overrightarrow{\mathrm{a}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{b}} = \overrightarrow{\mathrm{a}} \cdot (k\overrightarrow{\mathrm{b}}) = k(\overrightarrow{\mathrm{a}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{b}})$$

位置ベクトル

位置ベクトル

平面上で点 O を決めておくとどんな点 P でもベクトル $\overrightarrow{\mathrm{p}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ によって決まる。
これを位置ベクトルと呼び、上の例では $P(\overrightarrow{\mathrm{p}})$ で表す。
二点 A,B に対して、$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{b}} - \overrightarrow{\mathrm{a}}$ が言える。

内分点、外分点の位置ベクトル

2 点 $A(\overrightarrow{\mathrm{a}}), B(\overrightarrow{\mathrm{b}})$ にたいして、線分 AB を m:n に内分, 外分する点の位置ベクトルは次のようになる。

内分:
$\frac{n\overrightarrow{\mathrm{a}}+m\overrightarrow{\mathrm{b}}}{m+n}$
外分:
$\frac{-n\overrightarrow{\mathrm{a}}+m\overrightarrow{\mathrm{b}}}{m-n}$

内分、外分する位置ベクトルを求める関数は

```
(defun naibun (firstvector secondvector m n)
  (/
    (+ (zissubai firstvector n) (zissubai secondvector m))
    (+ m n)))

(defun naibun (firstvector secondvector m n)
  (/
    (+ (- 0 (zissubai firstvector n)) (zissubai secondvector m))
    (- m n)))
```

三角形の重心の位置ベクトル

三角形の重心の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{g}}$ を求める。位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{g}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{g}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{a}}+\overrightarrow{\mathrm{b}}+\overrightarrow{\mathrm{c}}}{3}$

重心を求める関数は

```
(defun zyuusin (firstvector secondvector thirdvector)
  (/ (wa firstvector (wa secondvector thirdvector)) 3))
```