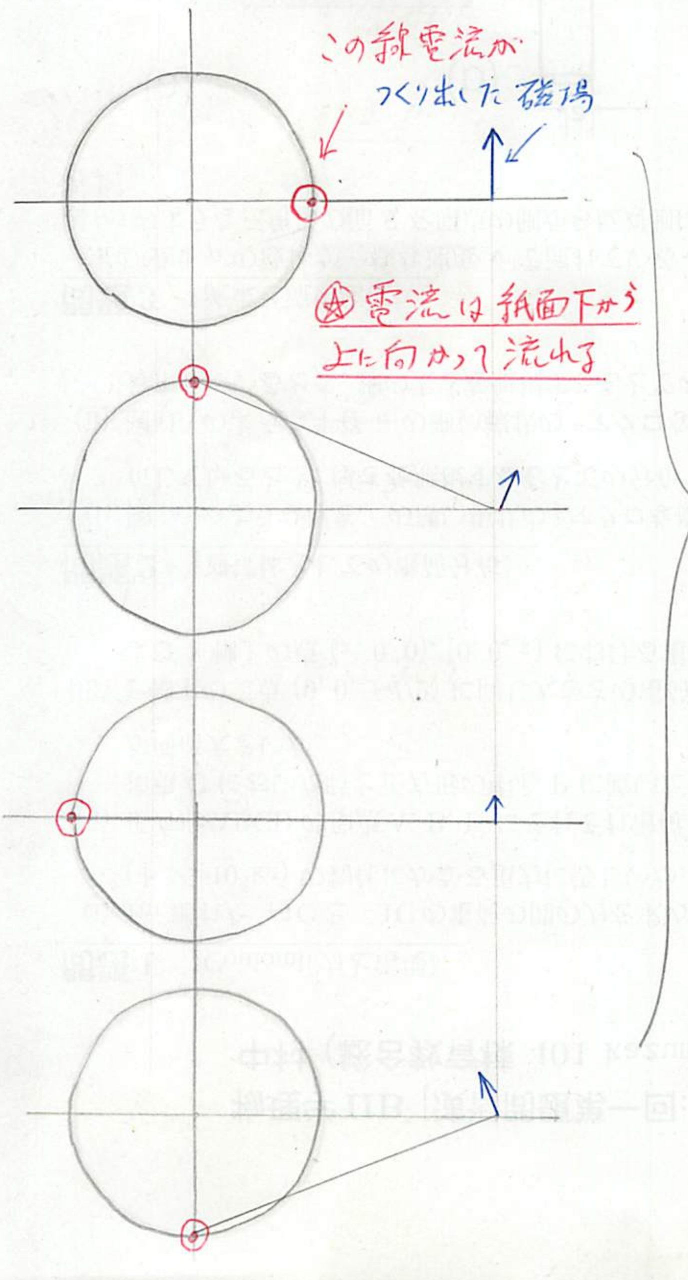
2016年度 物理学IIB 期末試験解答

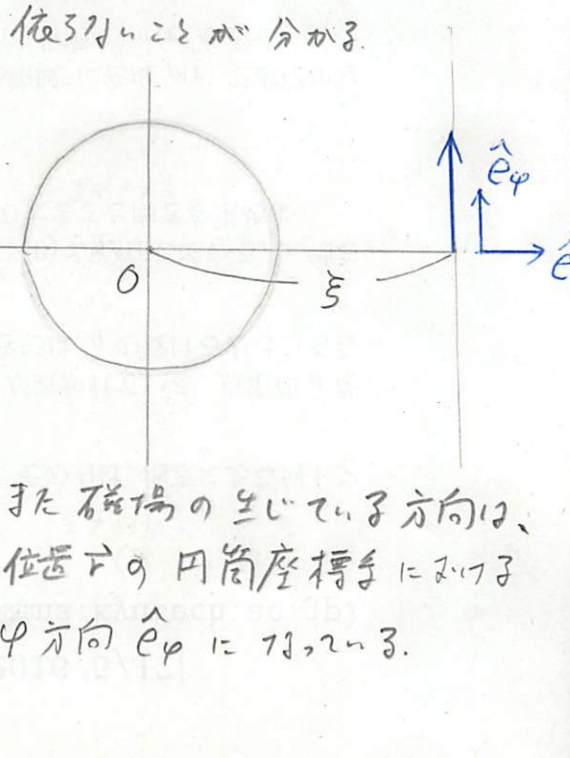
問題1: アンペールの法則

(i) 題から円柱状導体を流れる電流は、直線電流の束として考えることができる。直線電流によって生じる磁場は、その電流を囲むように生じるが、いまは、円柱状導体を考えているので、各線電流が作り出す磁場の重ね合わせに基づいて考察する。

下図は、円柱を上から見た図であり、簡単のため、円柱の外に磁場の観測地点 r をとった。



・重ね合わせると、結局、位置 r の円柱軸からのキョリ ξ のみにしか依らないことが分かる。



・また磁場の生じている方向は、位置 r の円筒座標系における φ 方向 $\hat{e}_\varphi$ になっている。

この状況は、円柱状導体の電流が一様であるため、円柱を中心軸のまわりに回転しても不変である。

つまり、円筒座標系を用いて、磁場を表わすかぎり、任意の位置 $\vec{r}$ に対して、磁場の大きさは、中心軸からのきょり ρ にのみ依存し、方向は、$\hat{e}_\varphi$ 方向である。

$$\therefore \quad \vec{H}(\vec{r}) = H(\rho)\,\hat{e}_\varphi \quad \text{for } \forall \vec{r} \qquad \text{——— (1)}$$

(ii) アンペールの法則は以下のとおり。

$$\oint_C \vec{H}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_S \vec{j}(\vec{r})\cdot d\vec{S} \qquad \text{——— (2)}$$

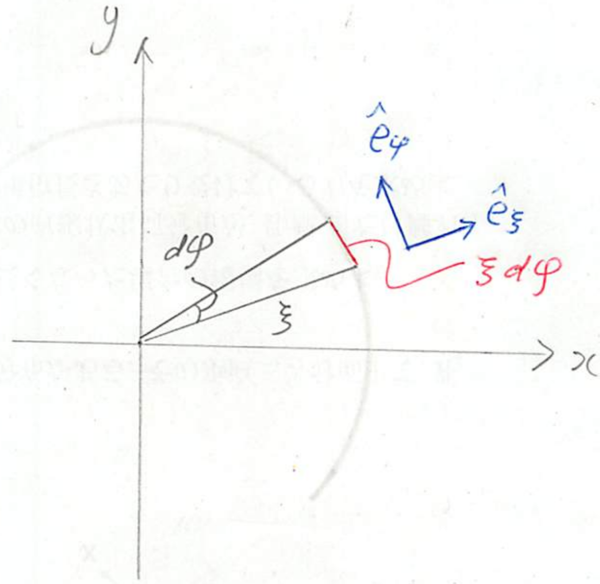
・左辺は、磁場 $\vec{H}(\vec{r})$ の閉曲線 C に沿った周回線積分であり、右辺は、閉曲線 C をふちとする曲線 S を貫く電流密度の面積分である。

・アンペールの法則では、閉曲線 C は自由にとってよいので、この問題を解くのにもっとも都合のよい C を考える。

・(i) より、円柱のまわりの磁場には、中心軸のまわりに回転対称性があるので、中心軸を囲む円を選ぶのが都合がよい。

・また、円柱内部か外部かで、場合分けがあるので、この点に注意して、アンペールの法則の式を計算する。

(A) $\xi > a$ の場合について



(2)の左辺 $= \oint_C \vec{H}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$

$$= \oint_C \underbrace{H(\xi)\hat{e}_\varphi}_{\leftrightarrow (1)式} \cdot d\vec{r}$$

$$= \oint_C H(\xi)\hat{e}_\varphi \cdot \underbrace{\left(\xi d\varphi \hat{e}_\varphi\right)}_{\leftrightarrow 右図}$$

$$= \oint_C H(\xi)\xi d\varphi \underbrace{(\hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_\varphi)}_{=1}$$

$$= \oint_{半径\xiの円経路} H(\xi)\xi d\varphi = H(\xi)\xi \underbrace{\oint d\varphi}_{=2\pi} = 2\pi\xi H(\xi) \quad \text{——(3)}$$

(2)の右辺 $= \int_S \vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$

$$= \int_S \underbrace{j\hat{e}_z}_{\leftrightarrow 題あるいは問題文の図から} \cdot d\vec{S}$$

$$= \int_S j\hat{e}_z \cdot \underbrace{dS\hat{e}_z}_{\leftrightarrow 円柱に垂直な面をとっているから}$$

$$= \int_S j dS \underbrace{(\hat{e}_z \cdot \hat{e}_z)}_{=1} = \int_{半径\xiの円の面} j dS = \int_{半径aの円の面} j dS = j\int_0^a \int_0^{2\pi} d\xi \xi d\varphi$$

(∵電流が流れているのは円柱の中だけだから)

$$= j\int_0^a \xi d\xi \int_0^{2\pi} d\varphi = j\left(\frac{1}{2}a^2\right)(2\pi) = \pi a^2 j \quad \text{——(4)}$$

∴ (2)(3)(4)より $2\cancel{\pi}\xi H(\xi) = \cancel{\pi} a^2 j$

$$∴ \ H(\xi) = \frac{a^2 j}{2\xi} \quad \text{——(5)}$$

(B) $\xi < a$ の場合について

この場合(2)の左辺については、先の(A)の場合と同じである。
一方、(2)の右辺の方は、途中まで一緒だが、この場合は、円経路の中を、電流がすべて貫いているので、この部分が違う。

$$(2)\text{の右辺} = \int_S \vec{j}(\vec{r})\cdot d\vec{S}$$

$$= \int_{\text{半径}\xi\text{の円の面}} j\,dS = j\int_0^{\xi}\int_0^{2\pi} d\xi\,\xi\,d\varphi = j\int_0^{\xi}\xi\,d\xi\int_0^{2\pi}d\varphi$$

$$= j\left(\frac{1}{2}\xi^2\right)(2\pi) = \pi\xi^2 j \quad \text{——}(6)$$

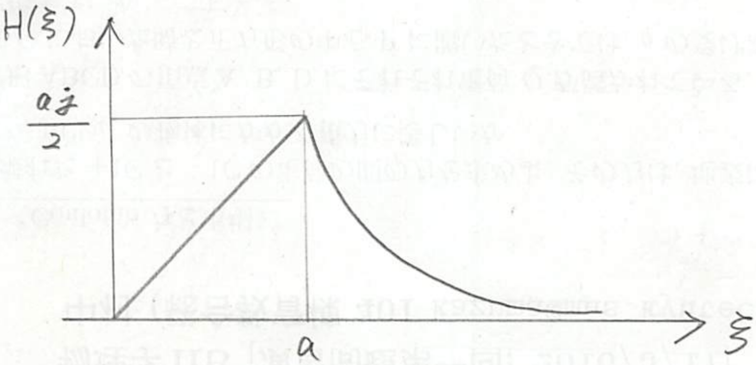
(2)(3)(6)より
$$\cancel{2\pi}\,\cancel{\xi}\,H(\xi) = \cancel{\pi}\,\xi^{\cancel{2}} j$$

$$\therefore\ H(\xi) = \frac{j\xi}{2} \quad \text{——}(7)$$

∴ (1)(5)(7)より

$$\vec{H}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{j\xi}{2}\hat{e}_\varphi & (\xi < a) \\[2ex] \dfrac{a^2 j}{2\xi}\hat{e}_\varphi & (\xi \geq a) \end{cases} \quad \text{——}(8)$$

また磁場の強さ $H(\xi)$ の概形は以下である



問題2: 円電流のつくる磁場

・題に与えられている設定でビオサバール磁場 $d\vec{H}(\vec{r})$ を計算する.

・このとき注意すべきは、計算したい磁場を表現する座標系が、位置 $\vec{r}$ の円筒座標系である、という点である. (位置 $\vec{r}'$ ではなく!)

・上に注意し、問題文 図2 に記されている $\hat{e}_\xi$, $\hat{e}_\varphi$, $\hat{e}_z$ を参照すると、ビオサバール磁場 $d\vec{H}(\vec{r})$ の計算に必要な各ベクトルは以下のように書かれる.

$$\vec{r} = 0\,\hat{e}_\xi + 0\,\hat{e}_\varphi + z\,\hat{e}_z = (0,\ 0,\ z)_{cyl} \quad \text{——(1)}$$

$$\vec{r}' = a\,\hat{e}_\xi + 0\,\hat{e}_\varphi + 0\,\hat{e}_z = (a,\ 0,\ 0)_{cyl} \quad \text{——(2)}$$

$$I d\vec{r}' = I\left(0\,\hat{e}_\xi + a\,d\varphi\,\hat{e}_\varphi + 0\,\hat{e}_z\right) = (0,\ Ia\,d\varphi,\ 0)_{cyl} \quad \text{——(3)}$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = (0, 0, z)_{cyl} - (a, 0, 0)_{cyl}$$

$$= (-a,\ 0,\ z)_{cyl} \quad \text{——(4)}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = (a^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{——(5)}$$

$$\therefore\quad d\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{I d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\left[I d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')\right] \quad \text{——(6)}$$

位置 $\vec{r}$ の円筒座標系のもとで (6) の外積部分を計算する.

$$I d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = \begin{vmatrix} \hat{e}_\xi & \hat{e}_\varphi & \hat{e}_z \\ 0 & Ia\,d\varphi & 0 \\ -a & 0 & z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} Ia\,d\varphi & 0 \\ 0 & z \end{vmatrix} \hat{e}_\xi - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -a & z \end{vmatrix} \hat{e}_\varphi + \begin{vmatrix} 0 & Ia\,d\varphi \\ -a & 0 \end{vmatrix} \hat{e}_z$$

$$= Ia\,d\varphi\, z\, \hat{e}_\xi + I a^2 d\varphi\, \hat{e}_z \quad \text{—— (7)}$$

(6) に (7) を代入すると、

$$d\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi (a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \left[Iaz\,d\varphi\, \hat{e}_\xi + I a^2 d\varphi\, \hat{e}_z \right] \quad \text{—— (8)}$$

(ii) 電流の経路（半径aの円）に沿って、ビオサバール磁場［(8)式］を線積分する。

$$\vec{H}(\vec{r}) = \oint_{C\,(\text{半径}a\text{の円})} d\vec{H}(\vec{r})$$

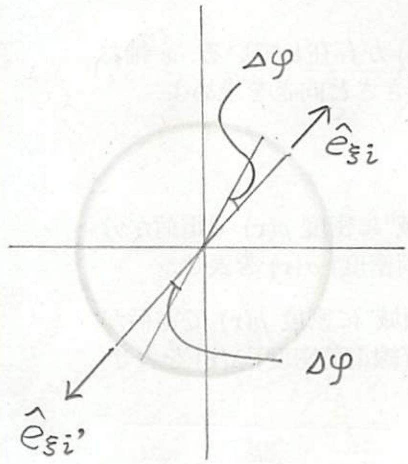
$$= \oint_C \frac{I}{4\pi (a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \left(az\,d\varphi\, \hat{e}_\xi + a^2 d\varphi\, \hat{e}_z \right)$$

$$= \oint_C \frac{Iaz\,d\varphi\,\hat{e}_\xi}{4\pi (a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \oint_C \frac{I a^2 d\varphi\, \hat{e}_z}{4\pi (a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{—— (9)}$$

㊟ この線積分を実行するとき注意すべきは、経路によって値をかえるものと、かえないものがあるという点である。例えば、$\hat{e}_\xi$ は、経路上の位置 $\vec{r}'$ によるので積分の外に出せない。一方で $\hat{e}_z$ は、経路上の位置すべてで共通なので積分の外に出せる。

この点に注意して(9)を整理すると以下である.

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{Iaz}{4\pi(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\underbrace{\oint_C \hat{e}_\xi d\varphi}_{=0\,(\text{下参照})} + \frac{Ia^2\hat{e}_z}{4\pi(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\underbrace{\oint d\varphi}_{=2\pi}$$



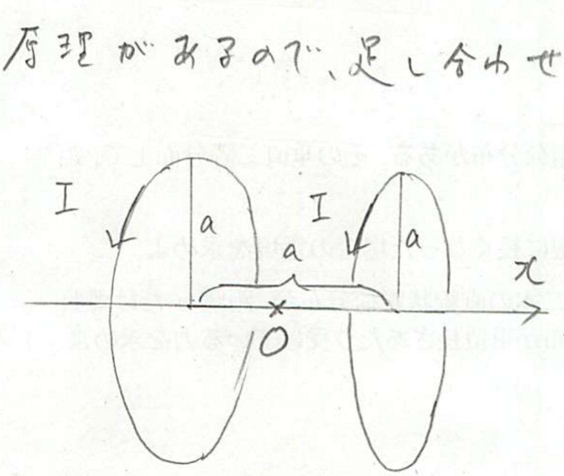
$$\oint_C \hat{e}_\xi d\varphi \cong \sum_i \hat{e}_{\xi i}\Delta\varphi$$

$$= \sum_i^{\text{半分}}\left(\hat{e}_{\xi i}\Delta\varphi + \hat{e}_{\xi i'}\Delta\varphi\right)$$

$$= \sum_i^{\text{半分}}\underbrace{\left(\hat{e}_{\xi i}\Delta\varphi - \hat{e}_{\xi i}\Delta\varphi\right)}_{=0} = \vec{0}$$

①
$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{Ia^2\hat{e}_z}{2(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{——} (10)$$

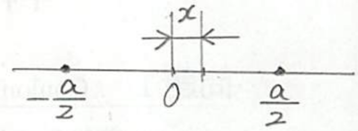
(iii) ・(ii)で円電流が中心軸上につくる磁場が求まった。この問題では、2つの円電流を並べたときに、中心軸上に生ずる磁場を考えるわけだが、磁場には重ね合わせの原理があるので、足し合わせればよい。



・いま2つのコイルの中点を原点にとり、x軸をコイルに垂直な軸にとる。

・そうすると2つのコイルの中心は $x=-\frac{a}{2}$ と $x=\frac{a}{2}$ ということになる

・いま、題から中心からわずかにずれた位置 x での磁場を考えるわけだが、この磁場を $\overrightarrow{H}(x)$ とかく。



・$\overrightarrow{H}(x)$ は 2つのコイル(左 or 右のコイルとかくことにする)がつくる磁場の重ね合わせであるから、(ii)で求めた(10)式を利用して、$\overrightarrow{H}(x)$ を求めると以下のようになる。

$$\overrightarrow{H}(x) = \underbrace{\frac{Ia^2\,\hat{e}_x}{2\left(a^2+\left(\frac{a}{2}+x\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}}_{\text{左のコイルが与える磁場}} + \underbrace{\frac{Ia^2\,\hat{e}_x}{2\left(a^2+\left(-\frac{a}{2}+x\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}}_{\text{右のコイルが与える磁場}} \quad \text{―― (11)}$$

・上式を x が小さいとしてテイラー展開すれば、中心付近の磁場の様子が計算できる。

・いま、式の中に $\frac{a}{2}$ という量があると計算がハンザツになるので $b=\frac{a}{2}$ としておく。あらためて(11)をかき直すと

$$\overrightarrow{H}(x) = \frac{Ia^2\hat{e}_x}{2}\left[\left(a^2+(b+x)^2\right)^{-\frac{3}{2}} + \left(a^2+(b-x)^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{Ia^2\hat{e}_x}{2}\left(f(x)+g(x)\right) \quad \text{―― (12)}$$

ここで $f(x) = \left(a^2+(b+x)^2\right)^{-\frac{3}{2}}$, ―― (13)

$$g(x) = \left(a^2+(b-x)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \quad \text{―― (14)}$$

$f(x)$ を x の2次までテイラー展開する

$$f(x) = \left(a^2 + (b+x)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \longrightarrow f(0) = \left(a^2 + b^2\right)^{-\frac{3}{2}} \text{ ——— } (15)$$

$$f'(x) = -\frac{3}{\cancel{2}}\left(a^2 + (b+x)^2\right)^{-\frac{5}{2}} \cdot \cancel{2}(b+x) \longrightarrow f'(0) = -3\left(a^2+b^2\right)^{-\frac{5}{2}} \cdot b$$

$$\text{——— } (16)$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left[-3\left(a^2 + (b+x)^2\right)^{-\frac{5}{2}}(b+x)\right]$$

$$= -3\frac{d}{dx}\left[\left(a^2 + (b+x)^2\right)^{-\frac{5}{2}}(b+x)\right]$$

$$= -3\left[-\frac{5}{\cancel{2}}\left(a^2 + (b+x)^2\right)^{-\frac{7}{2}} \cdot \cancel{2}(b+x)^2 + \left(a^2 + (b+x)^2\right)^{-\frac{5}{2}} \cdot\right]$$

$$= 15\left(a^2 + (b+x)^2\right)^{-\frac{7}{2}}(b+x)^2 - 3\left(a^2 + (b+x)^2\right)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f''(0) = 15\left(a^2+b^2\right)^{-\frac{7}{2}}b^2 - 3\left(a^2+b^2\right)^{-\frac{5}{2}} \text{ ——— } (17)$$

① $$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$$

$$= \left(a^2+b^2\right)^{-\frac{3}{2}} - 3\left(a^2+b^2\right)^{-\frac{5}{2}}bx + \frac{15\left(a^2+b^2\right)^{-\frac{7}{2}}b^2 - 3\left(a^2+b^2\right)^{-\frac{5}{2}}}{2}x^2$$

$$\text{——— } (18)$$

同様に (14) の $g(x)$ についても x の2次までテイラー展開すると

$$g(x) = \left(a^2+b^2\right)^{-\frac{3}{2}} + 3\left(a^2+b^2\right)^{-\frac{5}{2}}bx + \frac{15\left(a^2+b^2\right)^{-\frac{7}{2}}b^2 - 3\left(a^2+b^2\right)^{-\frac{5}{2}}}{2}x^2$$

$$\text{——— } (19)$$

(12) に (18)(19) を代入すると

$$\vec{H}(x) = \frac{Ia^2\hat{e}_x}{2}\left[\begin{array}{l}(a^2+b^2)^{-\frac{3}{2}} \cancel{-3(a^2+b^2)^{-\frac{5}{2}}bx} + \dfrac{15(a^2+b^2)^{-\frac{7}{2}}b^2 - 3(a^2+b^2)^{-\frac{5}{2}}}{2}x^2 \\ +(a^2+b^2)^{-\frac{3}{2}} \cancel{+3(a^2+b^2)^{-\frac{5}{2}}bx} + \dfrac{15(a^2+b^2)^{-\frac{7}{2}}b^2 - 3(a^2+b^2)^{-\frac{5}{2}}}{2}x^2\end{array}\right]$$

$$= \frac{Ia^2\hat{e}_x}{2}\left[2(a^2+b^2)^{-\frac{3}{2}} + \left\{15(a^2+b^2)^{-\frac{7}{2}}b^2 - 3(a^2+b^2)^{-\frac{5}{2}}\right\}x^2\right]$$

$$= \frac{Ia^2\hat{e}_x}{2}\left[2(a^2+b^2)^{-\frac{3}{2}} + 3(a^2+b^2)^{-\frac{5}{2}}\left\{5(a^2+b^2)^{-1}\cdot b^2 - 1\right\}x^2\right]$$

$$= \frac{Ia^2\hat{e}_x}{2}\left[2(a^2+b^2)^{-\frac{3}{2}} + 3(a^2+b^2)^{-\frac{5}{2}}\left\{\frac{5b^2}{a^2+b^2} - 1\right\}x^2\right]$$

$$= \frac{Ia^2\hat{e}_x}{2}\left[2(a^2+b^2)^{-\frac{3}{2}} + 3(a^2+b^2)^{-\frac{5}{2}}\left\{\frac{5b^2-a^2-b^2}{a^2+b^2}\right\}x^2\right]$$

$$= \frac{Ia^2\hat{e}_x}{2}\left[2(a^2+b^2)^{-\frac{3}{2}} + 3(a^2+b^2)^{-\frac{5}{2}}\frac{\boxed{4b^2-a^2}^{\,=0}}{a^2+b^2}x^2\right]$$

$$4b^2 - a^2 = 4\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 - a^2 = 4\cdot\frac{a^2}{4} - a^2 = 0$$

$$\vec{H}(x) = \frac{Ia^2\hat{e}_x}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{with} \quad b = \frac{a}{2} \qquad (20)$$

(20) は、中心付近の磁場が、中心からのずれの位置 x に依らず、一定値を示すことを表わしている。