平成29年度　PBL課題

課題1（ 連成振動とフーリエ解析：２次元）

質量1 の質点が図２のように２つのばねによって接合されている。2つのばねの自然長は１０、ばね係数は1 になっている。一つのばねの両端は原点と質点につながれており、もう一つのばねの両端は座標(１０,０)と質点につながれている。ばねは直線的に伸び縮みをするものとする。

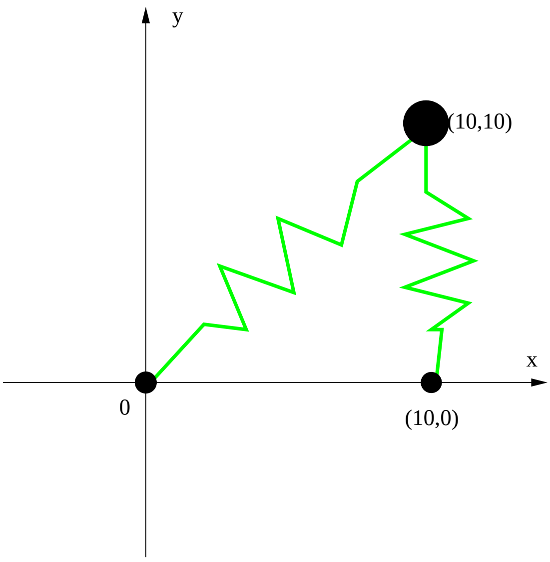

図 1: ２ 次元振動

ミッション1

質点を $\vec{r} = (10, 10)$ にして、速度0 でそっと放した。その後の運動をオイラー法で調べよ。　x 座標を時間の関数としてグラフにする。y 座標も同様にグラフ化する。x-y グラフも描く。

ミッション2

同様に、質点を $\vec{r} = (10, 20)$ にして、速度0 でそっと放した。その後の運動をオイラー法で調べよ。

ミッション3

固有振動をフーリエ解析で調べよ。(Moodle のテキストを参照)

課題2 (雨滴の問題)

雨滴の落下運動について考える。空気中を落下するために、抵抗力 f がはたらく。雨滴の形は球を仮定し、落下している間の質量変化を無視する。その半径 r の大きさによって、その抵抗力は落下速度 v に比例する場合と二乗 v^2 に比例する場合がある。すなわち、半径が 0.1mm 以下では (ケース1)、

$$f = kv \tag{1}$$

で与えられ、k は Stokes の抵抗法則より

$$k = 6\pi\mu r \tag{2}$$

によって計算できる。ただし、μ は空気の分子粘性係数で、気温が15℃として、1.8×10^{-5}〔N· sec/m^2〕である。一方、半径が 0.7mm から 30mm の間では (ケース2)、

$$f = \kappa v^2 \tag{3}$$

で与えられ、更に κ は空気の動粘性係数 $\nu = 0.15 \times 10^{-4}$〔$m^2$/sec〕とで、

$$\kappa = 0.235\frac{\mu\pi r^2}{\nu} \tag{4}$$

で計算される。

ミッション1

ケース1 の場合とケース2 の場合について、それぞれ終端速度 v_t を計算し、グラフで表しなさい。ただし、範囲をケース1 は、$0 < r < 0.1$ mm とし、ケース2 は $0.7 < r < 30$mm とする。重力加速度は 9.8〔m/sec^2〕とする。

ミッション2

$0.1 < r < 0.7$ の範囲の計算は、単純ではない。しかし、その場合は、現象論的に抵抗力を

$$f = Kv^d \tag{5}$$

として、さらに定数 K は

$$K = Cr^d \tag{6}$$

としてみよう。この場合、終端速度は $r^{\frac{3}{d}-1}$ に比例する。条件として $r = 0.1$mm のケース1 と $r = 0.7$mm のケース2 の終端速度に連続的につながるようなパラメータ C と d を選べば、うまくいきそうである。それらを決定せよ。

ミッション3

$r = 0.05$mm、$r = 0.3$mm および $r = 1.0.$mm の場合について、それぞれ速度を時間 t の関数としてもとめ、グラフで表しなさい。終端速度もグラフに明記すること。

課題3 (輪ゴムの5円吊るし)

輪ゴムを図の様に5 つないだ紐を用意する。下に 5 円玉を１０個束ねて吊るした。その時、元の長さかより１０ cm 輪ゴムが伸びたとする。

ミッション1

一つの輪ゴムが5 cm とすれば輪ゴムの紐の長さを２５ cm になる。輪ゴムのバネ定数はいくらと考えられるか。

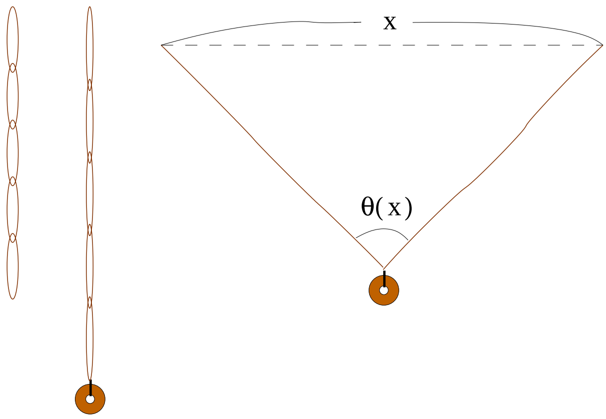

図 2: 5 円玉吊るし

ミッション2

次に、図の様に紐の真ん中に 5 円玉1 0 個を通して、両端を同じ高さに保つ。
この時、図に示した角度 θ を紐の両端間の距離 x の関数 $\theta(x)$ として表すことを考える。
$x = 0$ のときは、当然 $\theta = 0$ である。　この時の輪ゴムの伸びはいくらか。

ミッション3

$\theta(x)$ のグラフを作成しなさい。

ミッション4

5 円玉 10 個の位置を紐の左端から y の距離に固定した後、x を適当に吊るした場合の角度 $\theta(x, y)$ はどのようになるか。この場合、紐が伸びるので 5 円玉の位置がずれて y よりも大きくなる。
$\theta(x, y)$ のグラフを作成しなさい。

ミッション5

紐の両端間隔 x を適当に吊るした後に 5 円玉 10 個の位置を紐の左から z の位置になるようにした場合の角度 $\theta(x,z)$ について考える。

$\theta(x,z)$ のグラフを作成しなさい。

課題4（ 慣性モーメント ）

次の図形（ 図 3) の重心と慣性モーメントを計算する。

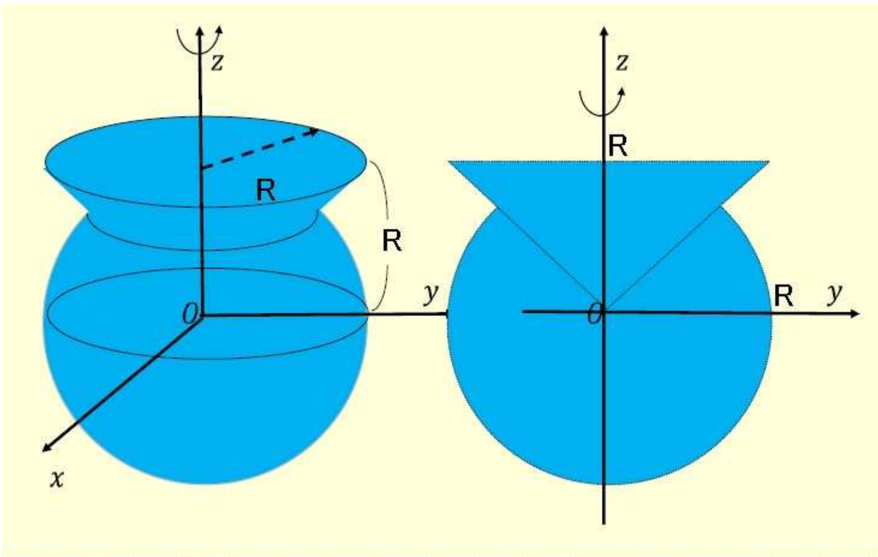

図 3: 半径 R の球と、半径 R の円を底面にもつ高さ R の円錐を重ねた図形

ミッション 1

密度が一様として、体積と重心を求めよ。

ミッション 2

z 軸を回転軸にする場合の慣性モーメント I_z を求めよ。

ミッション 3

x 軸を回転軸にする場合の慣性モーメント I_x を求めよ。

ミッション4

次の方程式で表せる直線を回転軸にする慣性モーメント I_s を求めよ。

$$z - x = 0, y = 0. \tag{7}$$

課題5（ 最短時間のレール設計）

図に示すように、高さが等しい 2m 離れた 2 点間にレールがしかれている。できるだけ時間をかけずに重力だけで移動したい。水平方向を x 軸、鉛直上向きに y 軸をとるとき、x と y の関係をもとめたい。

ミッション 1

レールの形を

$$y = ax^2 - a \tag{8}$$

を仮定した場合、最も時間がかからない a をもとめよ。

ミッション 2

レールの形を

$$y = -a\left(\frac{\cos(bx) - \cos b}{1 - \cos b}\right) \tag{9}$$

を仮定した場合、最も時間がかからない a、b をもとめよ
(ヒント)

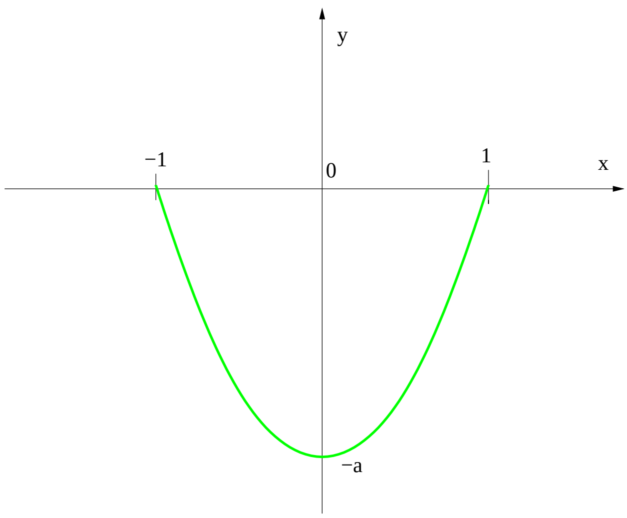

図 4: 最小時間経路

y=0 で全力学的エネルギー E=0 である。したがって、

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 + V(y) \tag{10}$$

となるから、位置エネルギー $V(y)$ が与えられれば、その位置の速度 $v(y)$ の大きさが求まる。一方、

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (1 + (\frac{dy}{dx})^2)(\frac{dx}{dt})^2 \tag{11}$$

この微分方程式は、x と t だけの変数でかける。

課題6（ バランス：鎖が 6 個の場合）

図 5 のように 6 つの鎖の輪を繋いで天井から吊り下げた。もっとも安定な形を求めよ．鎖の接合部分はなめらかで、接合部分から次の接合部分までの長さはどれも 1 とする。AB 間の距離 x に対して最下位 C までの距離 y を求めよ。

ミッション 1

1. $x = 0$ の時、y はいくらか。
2. $x = 6$ の時、y はいくらか。

ミッション 2

任意の $0 < x < 6$ の時、y はいくらか。
xy の関係をグラフに示しなさい。

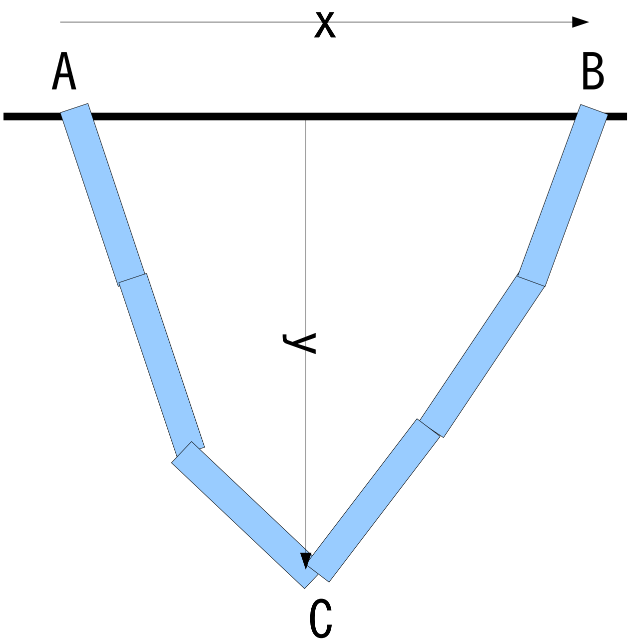

図 5:　 6 つの鎖

課題7（ 表面積最小問題）

図6の様に2つの同じ半径1 の円環(A,B)を用意し、(1.)それぞれの中心を通る直線に垂直になるように置く。この時、中心と中心との距離をxとする。(2.)これらの円環と別に半径rの円環C_1を2 つの円環の間に、同様に設置する。($r < 1$) これらの円環の表面積を計算する。

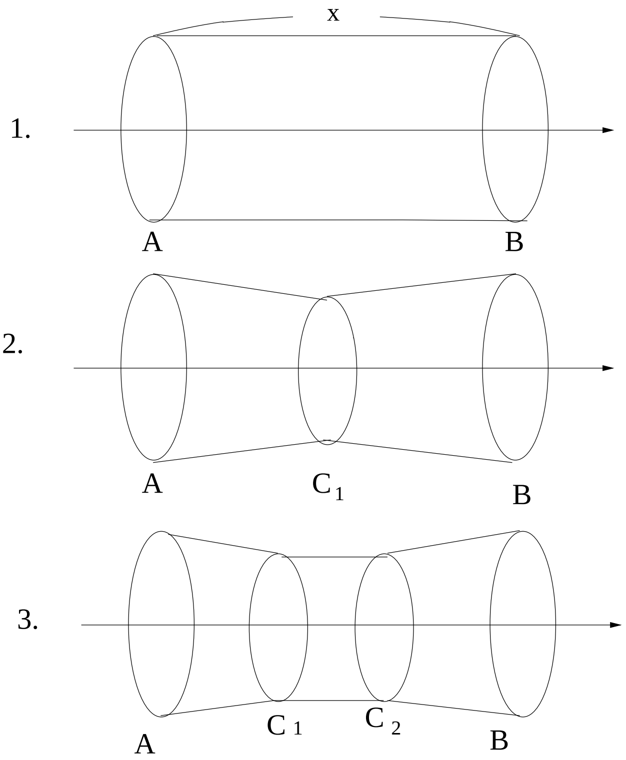

図 6: 表面積最小問題

ミッション1

(1.) C_1を2 つの円環の真中($x/2$)に置く。この場合の表面積Sを xとrの関数として求めよ。

ミッション2

(2.) r を調整して、表面積 S が最小になるようにする。その S を x の関数としてもとめ、$x - S$ のグラフを描け。

ミッション3

(3.) C_1 と同じ円環 C_2 を用意し、A,B の間に挟む。図**??** これらの円環全体の作る図形の表面積S が最小になる r を選ぶ。その S を x の関数としてもとめ、$x - S$ のグラフを描け。

ミッション4

これを繰り返してゆき、多くの円環 C（ $C_1, C_2, C_3, C_4, \cdots, C_n$) を使って、表面積をどんどん小さくしていく。ただし、それぞれの円環の半径は自由に選ぶことができるものとする。表面積 S を n の関数としてプロットせよ。また、典型的な x のいくつかについて、表面積の様子をグラフに表せ。（ 横軸に x を固定した場合の側面母線を描く）

課題8 （ 特殊な振り子問題）

図のように2 つの円筒の間に、軽い糸で結ばれている振り子を考える。2 つの円筒の中心線は平行で、水平面内にある。糸の一端は、円筒の接触線の一点に固定されており、他端にはおもりがつけてある。糸は振れると、円筒の側面に接しながら振動を繰り返す。振動は、図のように円筒の中心線に垂直な平面内で起こる。いろいろな糸の長さ l といろいろな最初の角度 θ_0（ 図参照 $0 \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$）に対する振り子の周期を調べよ。おもりの大きさを無視せよ。

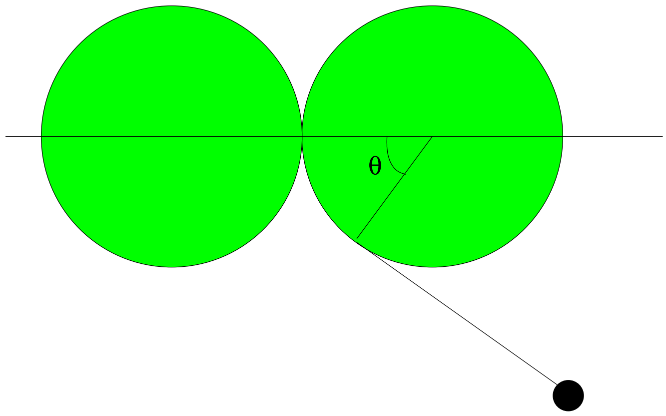

図 7: 特殊な振り子問題：円筒の中心線に垂直な面を図示。

ミッション1

普通の単振り子（ 質量 m=1kg, 糸の長さ l=1m、重力加速度 g=9.8m/s^2）の数値計算を行い、解析解と比較しなさい。振れ角が大きい場合、周期がどのように変化していくかを調べよ。

ミッション2

課題の振り子（ 質量 m=1kg, 糸の長さ l=1m，円筒の半径 r=0.3m, 重力加速度 g=9.8m/s^2）について、運動方程式が

$$(l - r\theta)\frac{d^2\theta}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + g\sin\theta = 0 \tag{12}$$

になることを示せ。

ミッション3

ミッション1 同様に数値計算を行い、円筒の半径rと最大振れ角θ_0によって、周期がどのように変化するかを調べよ。

課題9（理想気体のPV図・ST図）

1molの理想気体が収縮可能な容器に入れられ、容器の内部にある発熱器や冷却器によって自由に熱の出し入れをすることができ、温度調整ができる。圧力pと容器の体積Vとの関係は、

$$\text{圧力}:\ p(V) = p_0 \left\{ 4\left(\frac{V}{V_0}\right) - \left(\frac{V}{V_0}\right)^3 \right\} \tag{13}$$

で与えられているものとする。ここで、V_0,p_0はそれぞれ、２２．４リットル、$\frac{1}{3}$気圧である。容器の外の圧力や発熱器や冷却器を用いて、体積VをV_0から$\frac{3}{2}V_0$に増加させた。

$$V_0 \le V \le \frac{3}{2}V_0 \tag{14}$$

変化は準静的で、常に理想気体の状態方程式が成り立つことを仮定する。また、$V = V_0$の時、絶対温度Tは２７３ Kであったとする。

ミッション1

$p - V$図を作成せよ。（Vが横軸、pが縦軸）
pの最大値はいくらか。

ミッション2

気体が得る仕事Wを計算し、$W - V$図を作成せよ。（Vが横軸、Wが縦軸）$V = V_0$の時、仕事Wは0 [J]であったとする。

ミッション3

気体が得た熱量Qを計算し、$Q-V$図を作成せよ。(Vが横軸、Qが縦軸) $V=V_0$の時、熱量Qは0 [J]であったとする。

ミッション4

気体のエントロピーSを計算し、$S-V$図を作成せよ。(Vが横軸、Sが縦軸) $V=V_0$の時、エントロピーSは0 [J/K]であったとする。変化は可逆過程とする。

ミッション5

気体のエントロピーSを計算し、$S-T$図を作成せよ。(Tが横軸、Sが縦軸) $V=V_0$の時、エントロピーSは0 [J/K]であったとする。変化は可逆過程とする。

ミッション6

$T-S$図を作成せよ。(Sが横軸、Tが縦軸)

$$Q' = \int T dS \tag{15}$$

の積分を用いて$V=\frac{3}{2}V_0$の時の熱量Q'をもとめ、ミッション3の時に得られた熱量Qと比較しなさい。

課題10 (気体分子のガウス分布)

気体分子の速さを測定したとき、速さがvと$v+\Delta v$の間にある確率は、マクスウェルの理論から、

$$Nv^2 \exp\left(\frac{-mv^2}{2kT}\right)\Delta v, \quad N=\sqrt{\frac{2m^3}{\pi k^3 T^3}} \tag{16}$$

になることを学んだ。このことを乱数を用いて、検証してみたい。

分子と分子は、衝突をした後、衝突をする前とでは2 つの分子の全運動量が変わらないことと、運動エネルギーも保存される。ここでは、運動エネルギーの保存を用いることになる。衝突前の i 番目の分子の速度を v_i とし、$j(\neq i)$ 番目の分子の速度を v_j とし、衝突後のそれらをそれぞれ v'_i,v'_j とすれば、

$$f_{ij} = v_i^2 + v_j^2 = {v'_i}^2 + {v'_j}^2 \tag{17}$$

は、分子の質量が同じである場合、運動エネルギーの保存則を表す。(完全弾性衝突)

次のアルゴリズムで計算機実験を行う。

- 手順1： 1000 個程度の分子の速度の2 乗 v_i^2 を配列として設定する。
- 手順2： T の値を決めて、すべての速度 2 乗 v_i^2 を $T/1000$ にする。

次に、次の手順3 から手順6 までを適当に繰り返えす。

- 手順3： 2 つの数 i と $j(\neq i)$ を０から９９９の中からランダムに選ぶ。
- 手順4： $f_{ij} = v_i^2 + v_j^2$ を計算する。
- 手順5： $0.0 \leq P \leq 1.0$ の範囲で実数乱数を発生させる。
- 手順6： ${v'_i}^2 = f_{ij}P,\ \ {v'_j}^2 = f_{ij}(1.0 - P)$ を衝突後の新しい速度 2 乗にする。
- 手順7： ΔV を適当に決める。$V_k = k\Delta V$ とし、v_i^2 が V_k^2 から V_{k+1}^2 の範囲にある場合の分子の個数 n_k を数える。
- 手順8： V_k を横軸に、n_k/V_k を縦軸にしてグラフを描く。

ミッション1

上述の手順にしたがって、プログラムを作成し、手順8 のグラフを描け。それがガウス分布になっていることを確かめよ。

$$\text{ガウス分布: } \exp\left(-v^2/f\right) \tag{18}$$

f は適当な定数 $(2kT/m)$。

ミッション２

ノルム N を計算する。

$$N = \Delta V \sum_{k=0} n_k \tag{19}$$

平均速度 $\sqrt{< v^2 >}$ の計算を行う。

$$< v^2 >= \frac{\Delta V}{N} \sum_{k=0} n_k V_k^2 \tag{20}$$

ミッション３

手順2 で決めた T（これは実は絶対温度）を変化させて、それに対する $< v^2 >$ の値が、比例関係

$$< v^2 >= \alpha\, T \tag{21}$$

になることを確かめよ。（T に対する $< v^2 >$ をプロットする。）α は T によらない比例定数 $(3k/m)$。

課題の割り当て

くじで行う。

課題1　（ 連成振動とフーリエ解析：2次元）

課題2　（ 雨滴の落下運動）

課題3　（ 輪ゴムの5円吊るし）

課題4　（ 慣性モーメント）

課題5　（ 最短時間のレール設計）

課題6　（ バランス：鎖が6個の場合）

課題7　（ 表面積最小問題）

課題8　（ 特殊な振り子問題）

課題9　（ 理想気体のPV図・ST図）

課題10　（ 気体分子のガウス分布）

計　10　課題