計算数理工学PBL 課題 (第3期)

総合教育棟 402　鎌田裕之

平成29 年12 月5 日

課題１：クーロンの法則１

図１は水分子の模型を表している。酸素原子、水素原子をそれぞれ半径 0.14nm, 0.12nm の球形を仮定して、それぞれの中心の距離は 0.1nm としている。

ミッション 1

酸素の中心と水素の中心を結ぶ２つの線が xy 平面内にあるように設定する。この水分子の周り（xy 平面内）の電位をプロットせよ。但し, 酸素の総電荷は、水素１個の２倍で負である。水素は正の電荷である。球形の内部に一様に電荷が分布しているものと仮定する。

ミッション2

同様に、平面上の電場を求めよ。

ミッション3

遠方からこの図形を見たら１つの双極子に見える。その大きさと方向を求めよ。（電気双極子モーメントベクトルを求めなさい）

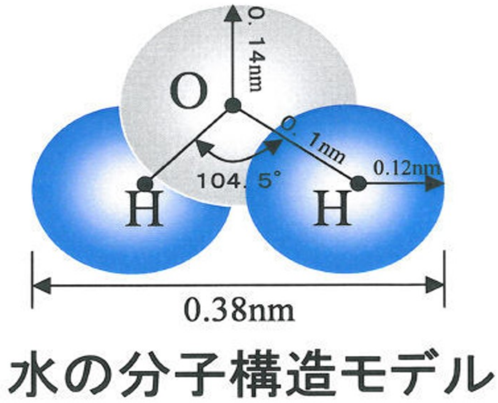

図 1: 水分子模型

課題２：クーロンの法則２

図２はトーラスの形を表している。このトーラス内部には一様に電荷が分布している。内径 r0.5 とし、外径（中心からトーラス内径の中心までの距離）R を１とする。真空の誘電率も１とする。

ミッション 1

トーラスの式は、次のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
x &= (R + r\cos\theta)\cos\phi,\\
y &= (R + r\cos\theta)\sin\phi,\\
z &= r\sin\phi
\end{aligned}
\tag{1}
$$

全体の電荷を１とした場合、

ミッション２

xy 平面上の電位を求めよ。(プロットせよ）

ミッション3

xz 平面上の電位を求めよ。（プロットせよ）

ミッション4

原点にー１の電荷を置いたとき、その点が安定な点であることを示せ。

ミッション5

原点に置いた電荷に z 軸方向に速度与えるとき、振動運動を始める。その周期をもとめよ。また、その速度がある限界を越えると、戻ってこなくなる。その速度（脱出速度）を求めよ。

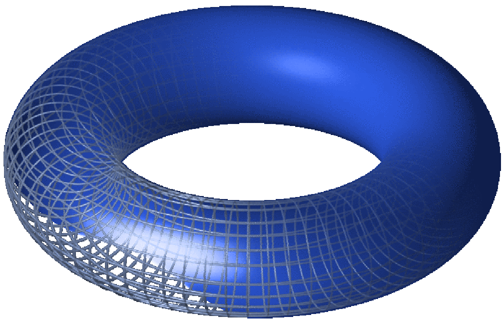

図 2: トーラス（ドーナツ型）

課題３：球面に広がる電子

金属球帯電させると電荷は球の表面に現れる。電荷は金属内を自由に移動し、やがて安定な位置で静止する。このとき、電荷が球面に一様に広がることを示したい。

ミッション１

任意の電荷を球面におくために、球面の座標を極座標に選びなさい。(θ と ϕ の２つの変数で電荷の位置を指定する)

最初に設定した複数の電荷の分布を横軸に $\cos\theta$ 軸, 縦軸に ϕ 軸をとって、マッピングを作成せよ。

ミッション２

乱数を発生させ、次の条件の下でそれぞれの電荷を移動させることを考える。

１. 新しく移動させる場所を元の位置付近で決める。

２．その新しい場所での位置エネルギーを計算し、元のところでの位置エネルギーとを比較する。

３．新しい場所に移動した方が、より安定な場合、その電荷を新しい場所に移動させる。

４．以上を繰り返して電荷が動かなくなったら止める。

ミッション３

ミッション１で作図したように、動かなくなった電荷の分布を図示する。

ミッション４

表面を同じ面積になるように適当に分割する。それぞれの面内にある電荷の数を数え、それが一定になったかばらつきが生じたかを調べる。

ミッション5

球の半径の 2 倍の距離に点電荷を置いた。この場合の電荷分布を調べよ。ただし、その点電荷の大きさは、球に帯電している電荷と同じとする。

ミッション6

点電荷の符号が逆の場合を調べよ。

課題４：ガウスの法則（１）

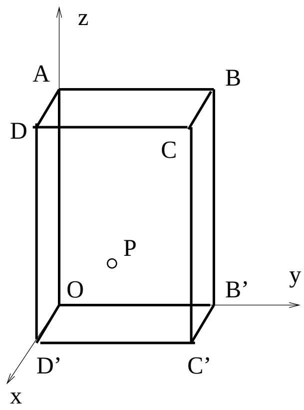

図 3: 直方体

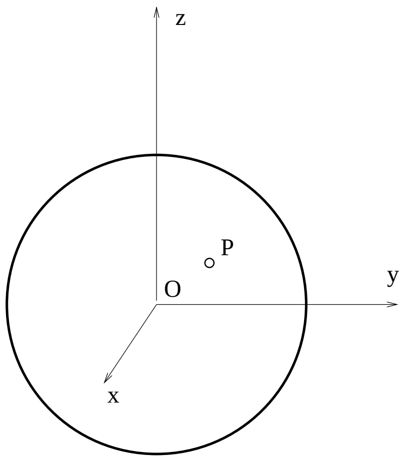

図 4: 球体

3 図のような直方体 ABCDOB'C'D' がある。C の座標は C(1,2,3) である。点 P(0.5,1,1) に 1[C] の電荷を置いた。この直方体の表面において面積分を行うことによって、ガウスの法則を示せ。

ミッション１

直方体の表面を分割してそれぞれの中心に働く電場を計算せよ。

ミッション２

それぞれの分割された面の面ベクトルと電場ベクトルの内積をもとめ、ガウス積分を行え。

ミッション３

点電荷が直方体の外、例えば、Q(1,2,5) にある場合はガウス積分はいくらになるか。

課題５：ガウスの法則（２）

ガウス面が原点に中心がある半径２の球 (４図) について、課題５と同様に計算をせよ。電荷の位置Ｐ点とＱ点は変わらない。P(0.5,1,1)、Q(1,2,5)

課題６：ラプラス方程式

5 図の様な形凸 ABCDEFGH の内部の電位をもとめよ。但し、それぞれの境界の電圧は与えられている。AB 間=0V、BC 間=2V、CD 間=4V、DE 間=5V、EF 間=4V、FG 間=2V、GH 間=0V、HA 間=2V とせよ。各辺の長さは AB=BC=CD=DE=EF=1、FG=AH=2、GH=3 とせよ。

ミッション１

電位をラプラスの方程式を数値的に解くことによってもとめよ。また、その等高線の図を描け。

ミッション２

電場をもとめよ。

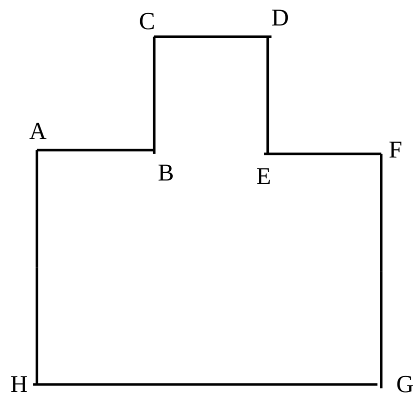

図 5: 凸図形

課題７：ビオ・サバールの法則

図６のように xy 平面内にコイルとして置かれている。

$$|y| = ax^2 - a \tag{2}$$

x の範囲は $-1 < x < 1$ である。一定の電流 (1[A]) をこの導線に右回りに流す時、xy 平面内の磁場ベクトルを求めることを考える。

ミッション１

$x^2 + y^2 = 1$ の円電流 (1[A]) を流す場合、xy 平面内の磁場ベクトルをもとめよ。(解析解と数値解)

ミッション２

上述式（2）のコイルで $a = 1$ の場合についてミッション１同様、xy 平面内の磁場ベクトルをもとめよ。円電流の場合と比較せよ。

ミッション３

上述式（2）のコイル $a = 2$ の場合にについて xy 平面内、xz 平面内および yz 平面内の磁場ベクトルをもとめよ。

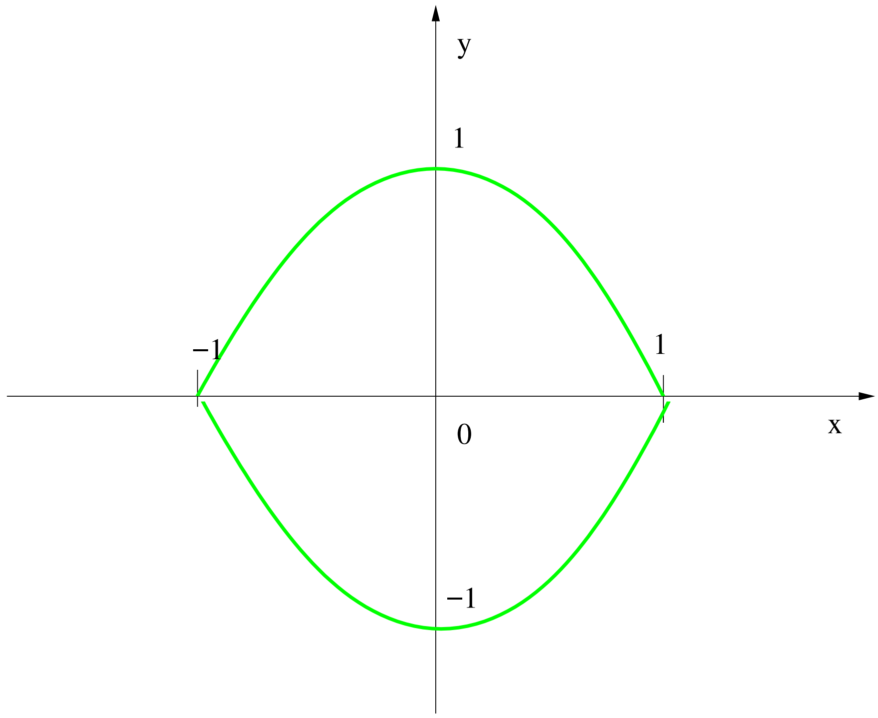

図 6: コイルの様子

課題８：電気抵抗

立体の形をした抵抗器の抵抗を求める問題である。

ミッション１

抵抗率 ρ の金属で図 7 のような円錐台形抵抗器がある。電流は軸方向に一様に流れるものとして、この抵抗器の電気抵抗が、

$$R = \frac{\rho}{\pi}\frac{h}{ab} \tag{3}$$

で与えられることを示なさい。

（考え方）

具体的に、$a = 5, b = 3, h = 10, \rho = 1$ の場合を考える。

回転対称軸の方向に x 軸をおく。

（１）軸に垂直な面で抵抗器をスライスする。下面を $x = 0$ とし、任意の高さ x から $x + \Delta x$ の円板の上下を流れる電流を I とすれば、その間の電位差 ΔV は、抵抗率 ρ, a, b, x および Δx で用いて表すことができる。

（２）その電位差 ΔV を集積（積分）すれば、抵抗器の上面と下面の間の電位差 V が求められる。

（３）従って、全体の抵抗 R は $R = \frac{V}{I}$ によって求まる。

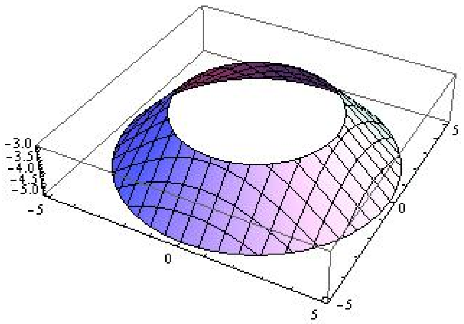

図 7: 円錐台形のイメージ

ミッション２

図８に示した導体の抵抗をもとめよ。ただし、円柱型をした導体は、絶縁体によってくり抜かれている。抵抗率 ρ は１とする。導体は高さ１５・直径５の円柱（緑）で、直径２．５の円柱型の絶縁体（赤）がそれぞれの軸が垂直に交わっている。

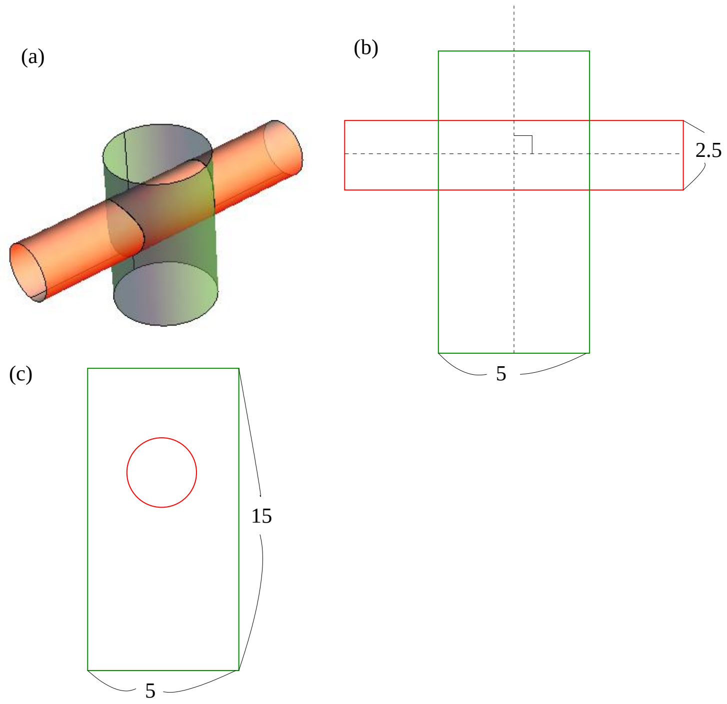

図 8: 交わった円柱：(a) 見取り図、(b)(c) は横から見た図

課題９：フラウンフォーハー（Fraunhofer) 回折現象

入射光線が幅 D のスリットに垂直に入射すると、光が直進するならば、θ ＝0 以外の方向以外に光は回折しないはずであるが、実際は θ ＝0 の方向でも光の強度 I(θ) は０にならない。すなわち、光は回折をする。入射光が波長 λ の単色光の場合、スリットから遠く離れたスクリーン上での光の強さは、

$$I(\theta) = (\text{定数})\frac{\sin^2\left(\frac{\pi D}{\lambda}\sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda}\sin\theta\right)^2} \tag{4}$$

となる。9 図のスリットを N 個に分割し，それぞれの窓に番号 (k = 0, . . . , N － 1) を与える。スリットからスクリーンへの距離の差は、次のように与えることができる。 後で N を無限大に極限をとる。

それぞれの光路差は、

$$d_k = (D\sin\theta)\frac{k}{N} \tag{5}$$

となるから、位相は波長 λ で割って、

$$\delta_k = (D\sin\theta)\frac{k}{N\lambda} \tag{6}$$

である。これらの位相差をもった N 個の光の合成波を計算し、

$$y(t) = \sum_k \frac{A}{N}\sin(\delta_k + \omega t) \tag{7}$$

スクリーンに映し出される回折パターンを計算する。

ミッション１

具体的にこの計算を行いなさい。　（k の和と $y^2(t)$ の時間平均）

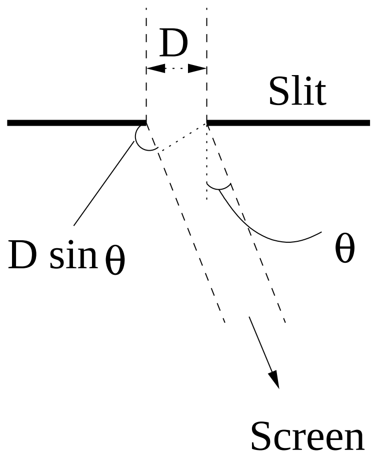

図 9: フラウンフォーハー回折

ミッション２

スクリーンまでの距離 x が有限である場合を考えると、光路差 d_k の (5) 式は正確ではない。修正した光路差で計算を行いなさい。比較したグラフを描け。（x が大きい場合と小さい場合の比較）

課題１０：熱伝導

第３期のテキスト第３章の熱伝導を理解する。

ミッション１

テキストの（３．１０）式を理解し、オイラー法で材料の分布を時間的に調べる。材料として鉄の棒を考える。棒の長さ L を５０ cm とし、次の境界条件で求めよ。

$$\begin{aligned} &\mathcal{T}(t, x=0) = \mathcal{T}(t, x=L) = 0 \\ &\mathcal{T}(t=0, x) = 100\ ℃ \end{aligned} \tag{8}$$

また、鉄材料の定数は、

$$\begin{aligned} &C_v = C \times \rho, \\ &C = 0.113\mathrm{cal}/(\mathrm{g}\ ℃), \quad \rho = 7.8\mathrm{g/cc}, \quad \lambda = 0.12\mathrm{cal}/(秒\ \mathrm{cm}\ ℃) \end{aligned} \tag{9}$$

である。

ミッション２

時間の関数で求めた温度を３Ｄプロットせよ。３Ｄプロットについては、moodle テキストを参照しなさい。

ミッション３

式 (8) の境界条件・初期条件ではなく、

$$\mathcal{T}(t=0, x) = 100 \sin(\frac{\pi}{L}x)\ ℃ \tag{10}$$

として、時間の関数で求めた温度を３Ｄプロットせよ。

ミッション４

解析解と比較せよ。

ミッション5

ミッション３の条件 (10) の下で，棒が純粋な鉄ではなく、場所によって熱伝導率が変わる場合を考えよう。

$$\lambda(x) = 0.12 + 0.008 \times x \ [\mathrm{cal}/(\text{秒}\,\mathrm{cm}\,℃)] \tag{11}$$

これを３Ｄプロットせよ。