しまうと，有意でないパラメータの影響で必要以上に小さなモデルが選択されてしまう場合もある．しかしながら，マクロ経済データ間の影響は比較的ゆっくり伝達することが多く，そのような影響を捉えるためには，ある程度の次数が必要となる．したがって，目的に応じては，情報量規準に頼らず経験的に次数を定めることもある．また，マクロ経済データは観測値数が少ない場合が多いので，モデルのパラメータ数と標本数を比較しながら一定の推定精度を確保しつつ，できるだけ大きなラグ次数を選択する場合もある．

最後に，VMA モデルや VARMA モデルについて，少しだけ触れておく．VMA モデルや VARMA モデルも同様に定義されるが，応用上ほとんど利用されることはない．これは，VMA モデルや VARMA モデルは推定が困難であるということと，VAR モデルのパラメータの数の多さから想像がつくように，VAR モデルだけでもかなり複雑なモデルを記述できることに起因している．

VAR 解析においては，グレンジャー因果性，インパルス応答関数，分散分解（予測誤差分散分解）という 3 つのツールが重要な役割を果たす．大まかにいうと，グレンジャー因果性はある変数（群）が他の変数（群）の予測の向上に役立つかどうかを判定するものであり，インパルス応答関数はある変数に対するショックがその変数やその他の変数の値に与える影響を分析するものである．また，分散分解は各変数の不確実性において，各変数が寄与する割合を計算するものである．もう少し具体的にいうと，例えば，国際株式市場において，アメリカやイギリスの株式市場が，日本の株式市場の予測に役立つかどうかを判断するものがグレンジャー因果性であり，日本の株式市場に，他国の株式市場がどのような影響を，どのような大きさで与えるかを判断するのに用いられるのがインパルス応答関数である．さらに，日本の株式市場における予測できない変動において，各国の株式市場がどの程度の役割を果たしているのかを明らかにするものが分散分解である．以下では，これらのツールについて順に述べていく．

4.3 グレンジャー因果性

経済分析の目的の 1 つは経済変数間の因果性の有無を判断することである．そこで，変数間の因果性の有無をどのように判断するかということが問題になる．一般的に，因果関係の有無をデータだけから判断するのは難しく，何らか

の経済・ファイナンス理論に基づくことが多い．しかしながら，時系列分析の1つの利点は，背後に明確な理論を必要とせずに，データを中心に分析できることである．したがって，データだけから因果性の有無を判断できる概念があれば便利である．そのような考えを基に，Granger (1969) は何の理論にも基づかない予測を基準とする因果性を提案した．

定義 4.1 (グレンジャー因果性) 現在と過去の x の値だけに基づいた将来の x の予測と，現在と過去の x と y の値に基づいた将来の x の予測を比較して，後者の MSE のほうが小さくなる場合，y_t から x_t への**グレンジャー因果性** (Granger causality) が存在するといわれる．

この定義から明らかなように，グレンジャー因果性は現在と過去の y の値が，将来の x に関して，x の現在と過去の値以上の情報を有しているかどうかを基準としている．また，グレンジャー因果性は，複数の変数が存在する一般的な場合にも簡単に拡張できる．

定義 4.2 (一般的なグレンジャー因果性) $\mathbf{x}_t$ と $\mathbf{y}_t$ をベクトル過程とする．また，$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の現在と過去の値を含む，時点 t において利用可能な情報の集合を Ω_t とし，Ω_t から現在と過去の $\mathbf{y}$ を取り除いたものを $\tilde{\Omega}_t$ とする．このとき，$\tilde{\Omega}_t$ に基づいた将来の $\mathbf{x}$ の予測と，Ω_t に基づいた将来の $\mathbf{x}$ の予測を比較して，後者の MSE のほうが小さくなる場合，$\mathbf{y}_t$ から $\mathbf{x}_t$ へのグレンジャー因果性が存在するといわれる．ここで，MSE の大小は行列の意味での大小であることに注意されたい．

グレンジャー因果性が頻繁に用いられるようになった1つの理由は，VAR の枠組みではグレンジャー因果性の有無が，比較的簡単に明確な形で検証できるからである．ここでは，2変量 VAR(2) モデルを用いて説明することにしよう．2変量 VAR(2) モデルを具体的に書き表すと，

$$\begin{cases} y_{1t} = c_1 + \phi_{11}^{(1)} y_{1,t-1} + \phi_{12}^{(1)} y_{2,t-1} + \phi_{11}^{(2)} y_{1,t-2} + \phi_{12}^{(2)} y_{2,t-2} + \varepsilon_{1t} \\ y_{2t} = c_2 + \phi_{21}^{(1)} y_{1,t-1} + \phi_{22}^{(1)} y_{2,t-1} + \phi_{21}^{(2)} y_{1,t-2} + \phi_{22}^{(2)} y_{2,t-2} + \varepsilon_{2t} \end{cases} \tag{4.4}$$

となる．このとき，y_{2t} から y_{1t} へのグレンジャー因果性が存在しないということは，$\phi_{12}^{(1)} = \phi_{12}^{(2)} = 0$ ということと同値になる．一般的に，y_{2t} から y_{1t} へのグ

レンジャー因果性が存在しないということは，VAR の y_1 の式において y_2 に関連する係数がすべて 0 になることと同値になる．したがって，VAR の枠組みでは，F 検定を用いてグレンジャー因果性を検定することができるのである．その具体的な手順を以下で説明しよう．

グレンジャー因果性を検定するためには，$H_0 : \phi_{12}^{(1)} = \phi_{12}^{(2)} = 0$ を検定すればよいので，まず

$$y_{1t} = c_1 + \phi_{11}^{(1)} y_{1,t-1} + \phi_{12}^{(1)} y_{2,t-1} + \phi_{11}^{(2)} y_{1,t-2} + \phi_{12}^{(2)} y_{2,t-2} + \varepsilon_{1t}$$

を OLS で推定し，その残差平方和を SSR_1 とする．次に，制約を課したモデル

$$y_{1t} = c_1 + \phi_{11}^{(1)} y_{1,t-1} + \phi_{11}^{(2)} y_{1,t-2} + \varepsilon_{1t}$$

を OLS で推定し，その残差平方和を SSR_0 とする．このとき，F 統計量は

$$F \equiv \frac{(\mathrm{SSR}_0 - \mathrm{SSR}_1)/2}{\mathrm{SSR}_1/(T-5)} \tag{4.5}$$

で定義され，$2F$ は漸近的に $\chi^2(2)$ に従うことが知られている[*1]．したがって，$2F$ の値を $\chi^2(2)$ の 95%点と比較して，$2F$ のほうが大きければ，y_{2t} から y_{1t} へのグレンジャー因果性が存在しないという帰無仮説を棄却し，y_{2t} は y_{1t} の将来を予測するのに有用であると結論するのである．

より一般的に，n 変量 VAR(p) モデルにおいてある変数 (群) から y_{kt} へのグレンジャー因果性が存在するかどうかの検定の手順をまとめると次のようになる．

n 変量 VAR(p) モデルにおけるグレンジャー因果性検定の手順

(1) VAR モデルにおける y_{kt} のモデルを OLS で推定し，その残差平方和を SSR_1 とする．

(2) VAR モデルにおける y_{kt} のモデルに制約を課したモデルを OLS で推定し，その残差平方和を SSR_0 とする．

(3) F 統計量を

$$F \equiv \frac{(\mathrm{SSR}_0 - \mathrm{SSR}_1)/r}{\mathrm{SSR}_1/(T-np-1)}$$

[*1] 通常の回帰モデルでは，ε_{1t} が正規分布に従う場合，F 統計量 (4.5) は正確に自由度 $(2, T-5)$ の F 分布に従う．しかしながら，VAR モデルの場合は説明変数に過去の被説明変数が含まれているので，F 統計量が正確に F 分布に従うことはなく，F 検定は漸近的にのみ正当化されることに注意されたい．

で計算する．ここで，r はグレンジャー因果性検定に必要な制約の数である．

(4) rF を $\chi^2(r)$ の 95%点と比較し，rF のほうが大きければ，ある変数(群) から y_{kt} へのグレンジャー因果性は存在し，小さければグレンジャー因果性は存在しないと結論する．

また，グレンジャー因果性を理解する上で，Sims (1972) による分布ラグモデルからの解釈も重要である．ある時系列 y_t が別の時系列 x_t と期待値 0 の誤差項 ε_t を用いて

$$y_t = c + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x_{t-k} + \varepsilon_t, \quad \mathrm{Cov}(x_t, \varepsilon_s) = 0, \quad \forall t, s$$

という形で表現できるとき，y_t は x_t の**分布ラグモデル** (distributed lag model) に従うといわれる．ここで，$\forall t, s$ は任意の t と s を表す．この分布ラグモデルの特徴は，説明変数である x_t がどの時点 s を考えても誤差項 ε_s と無相関であることである．したがって，y_t において，x に関する情報が含まれる部分は，完全に現在と過去の x で記述されることになる．言い換えれば，y_t は将来の x に関して現在と過去の x がもつ以上の情報はもたないことになる．ゆえに，y_t が x_t の分布ラグモデルに従う場合，y_t から x_t へのグレンジャー因果性は存在しないのである．逆に，y_t から x_t へのグレンジャー因果性が存在しない場合，y_t が x_t の分布ラグモデルで表現できることも示すことができる．つまり，y_t から x_t へのグレンジャー因果性が存在しないための必要十分条件は，y_t が x_t の分布ラグモデルで表現できることなのである．

例 4.3 (国際株式市場間のグレンジャー因果性分析) この例では，実際のデータを用いた分析例を見てみよう．この解析は，日本 (JP)，イギリス (UK)，アメリカ (US) の株式収益率を用いて，国際株式市場の関係を分析したもので，以下のインパルス応答関数や分散分解の例でも使用する．分析に用いたデータは，2003 年 1 月から 2008 年 4 月までの日次 MSCI データであり[*2)]，対数差分を用いて株式収益率 (%) を計算した．まず，y_1 を日本の株式収益率，y_2 をイギリス

*2) MSCI データは Morgan Stanley Capital International が作成している株式指数であり，カバーしている国と産業の多さから，ファイナンスの分野では，非常によく用いられる株式指数となっている．

表 4.1 国際株式市場データを用いたグレンジャー因果性検定の結果

帰無仮説	UK → JP	US → JP	JP → UK	US → UK	JP → US	UK → US
検定統計量	36.0	160.1	2.27	215.7	0.66	1.79
P 値	0.000	0.000	0.519	0.000	0.882	0.617

の株式収益率，y_3 をアメリカの株式収益率として 10 期までの VAR モデルを推定し，AIC でモデル選択を行ったところ，VAR(3) モデルが選択された．そこで，VAR(3) モデルを用いてグレンジャー因果性検定を行い，検定統計量 $3F$ の値とともに，その P 値をまとめたものが表 4.1 である．

まず，他国から日本へのグレンジャー因果性の結果を見てみると，イギリスとアメリカの両国の P 値はともに 0 であり，0.05 より小さくなっているので，イギリスとアメリカの各国から日本へのグレンジャー因果性が存在していることがわかる．つまり，イギリスとアメリカの株式市場は日本の株式市場の予測に有用なのである．次に，イギリスへのグレンジャー因果性の検定を見てみると，日本の P 値は 0.52 で 0.05 より大きくなっているのに対して，アメリカの P 値は 0 となっている．したがって，アメリカからイギリスへのグレンジャー因果性は存在するが，日本からイギリスへのグレンジャー因果性は存在しないという結果が出ている．つまり，アメリカ市場はイギリス市場の予測に有用であるが，日本市場は有用でないのである．最後に，アメリカ市場へのグレンジャー因果性の結果を見てみると，どちらの国からもアメリカ市場へのグレンジャー因果性が存在しないことがわかる．つまり，イギリスや日本の市場はアメリカ市場の予測に有用ではないのである．以上の結果は，アメリカ株式市場の独立性を強く示唆しており，規模や取引量から考えると自然な結果である．また，日本の株式市場は時価総額ではアメリカについで 2 位であるものの，予測という観点からすると，イギリスより独立性は低いことがわかる．

最後に，グレンジャー因果性の長所と短所について簡単にまとめておこう．グレンジャー因果性の長所としては，定義が非常に明確であることと，データを用いて容易に検定できることが挙げられるであろう．それに対して，短所としては，まずグレンジャー因果性が通常の因果性とは異なることが挙げられる．実際，グレンジャー因果性は通常の因果性が存在する必要条件ではあるが，十分条件ではない．また，グレンジャー因果性の方向と通常の因果性の方向が同

じになるとは限らない．極端な例を挙げると，通常の因果性は x から y の方向にあるにもかかわらず，グレンジャー因果性は y から x の方向にだけ存在することもありうる．したがって，グレンジャー因果性の結果を解釈する際には，経済理論などにより因果関係の方向がはっきりしている場合を除いては，定義どおりに予測に有用かどうかという観点で解釈するのがよいであろう．さらに，グレンジャー因果性は定性的概念であり，関係の強さが測れないことも短所の1つである．このような問題を補ってくれるのが，以下で述べるインパルス応答関数や分散分解である．

4.4　インパルス応答関数

上で述べたように，グレンジャー因果性の1つの問題点は，定量的な解析ができないことである．それを補う1つのツールが**インパルス応答関数** (IRF; impulse response function) であり，ある変数に対するショックがその変数やその他の変数の値に与える影響を分析することができる．ここで，注意しなければならないことは，一般的に，VAR モデルにおいては，ショックの識別の仕方によって，複数のインパルス応答関数が存在することである．以下では，まず非直交化インパルス応答関数について説明した後，その問題点を述べる．そして，その問題を改善した直交化インパルス応答関数について述べる．

4.4.1　非直交化インパルス応答関数

一般的な n 変量 VAR(p) モデル

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{c} + \mathbf{\Phi}_1\mathbf{y}_{t-1} + \cdots + \mathbf{\Phi}_p\mathbf{y}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \mathrm{W.N.}(\mathbf{\Sigma})$$

を考え，$\mathbf{\Sigma}$ は対角行列ではないとしよう．このとき，非直交化インパルス応答関数は次のように定義される．

定義 4.3 (非直交化インパルス応答関数)　y_{jt} の撹乱項 ε_{jt} だけに1単位 (または1標準偏差) のショックを与えたときの $y_{i,t+k}$ の値の変化は，y_j のショックに対する y_i の k 期後の**非直交化インパルス応答**と呼ばれる．また，それを k の関数としてみたものは，y_j のショックに対する y_i の**非直交化インパルス応答関数**といわれる．