2021年2月13日

#### リスク管理勉強会

# モンテカルロ法

## モンテカルロ法の概要と計算ステップ

【モンテカルロ法の流れ】

1. 乱数項（誤差項）を含む統計モデルを作成．
2. 乱数を発生し，モデルの乱数項（誤差項）を代入．
3. 統計モデルのアウトプットを計算し，将来の市場指標やリスクファクターの変動を示すシナリオを作成．
4. シナリオに従って，現在のポートフォリオに対する将来の損益を計算する．
5. 乱数発生と計算を十分な回数だけ繰り返す．
6. 得られたアウトプットを集計し評価を行う．

【VaRを計算する場合のモンテカルロ法】

1. 市場変動モデルの作成．
2. 初期値の代入と乱数の発生．
3. 損益の計算．
4. シミュレーションの繰り返し．
5. 集計作業とVaRの計算．

**市場変動モデルの作成**

モンテカルロ法は各資産に市場特性を表現した統計モデルを挿入することが出来るため，モデル製作者がそれなりの工夫をしていることが多い．

【一般的なモデル例】

1. 市場変動モデルは3つのサブモデルから構成される．

* 為替レートや主要金利指標，株式指数等を表現する主要指標変動モデル．
* 為替オプション価格，金利オプションなどの派生的指標を主指標から算出するモデル．
* 個別銘柄の変動を指標の変動と連動して説明する個別モデル．

1. 主要指数変動モデルは，多変量時系列モデルが用いられることが多い．

* ARMAモデル，GARCHモデル．

1. 派生指標の算出モデルにつき，それぞれの特性に配慮した計算式が用いられる．

* 派生指標と現資産の指標との過去データによる非線形回帰．
* ブラックショールズモデルなどの派生商品に関する価格理論を内包したモデル．

1. 個別銘柄の変動に関するモデルは，主要指標系列を説明変数とした回帰モデルが一般的．

* シングルインデックスモデル．

**初期値の代入と乱数の発生**

【将来の各指標や個別銘柄を計算】

⇒初期値，乱数発生プログラムから得られた数値を代入．

⇒重要なポイントは，市場変動モデルの仮定にあった乱数を発生できるか．

⇒乱数間の相関係数の取り扱いが，VaRの計算結果に与える影響が大きいため，相関関係の存在する乱数を発生させる方法が不可欠である．（コレスキー分解）

**収益率の計算**

得られた変動モデル，初期値，乱数をもとに，モデルのアウトプット（将来の指標，個別銘柄の価格）を算出．

**シミュレーションの繰り返し**

通常のVaRモデルの計算では，1万回～10万回程度のシミュレーションで十分であるらしい．

⇒時系列モデルが限られたデータから推測しているため，数万回のレベル以上になると，繰り返し回数の少ないことになる推定誤差よりも，市場モデルの乱数発生のステップの影響が大きくなる．

**集計作業とVaRの計算**

## モンテカルロ法の成否のポイント

## モンテカルロ法の市場変動モデル（固定分散モデル）

【ARMA()モデル】

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.39) |

ただし，はホワイトノイズである．つまり，以下の性質を満たす．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.40) |

ARMAモデルのパラメータ推計には**最尤法**が用いられる．

ARMAモデルは，誤差の分布に独立な正規分布を仮定しているため，モデルの推定におけるボラティリティは，**観測期間の中では同一**である．

## モンテカルロ法の市場変動モデル（可変分散モデル）

可変分散モデルでは，ある金融資産の期の収益率をとしてた時，次のように定義されたモデルを前提としている．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.39) |

に従うと仮定すると，という積過程で書くことが出来る，この条件付き分散 の設定によって多くのモデルが存在する．

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **モデル名** | **モデル式** | | **補足** |
| ARCHモデル |  | (3.42) | 【定常条件】 |
| GARCHモデル |  | (3.43) | 【定常条件】 |
| PGARCHモデル |  | (3.45) | GARCHモデルのに関する項を，対象成分と非対象成分に分割．は非対称性の程度を表す． |
| EGARCH[[1]](#footnote-2)モデル |  | (3.46) | PGARCHが対数軸上を変動するイメージ．対数変換を行っているので，他のモデルと異なり，係数の非負条件がない． |
| TGARCHモデル |  | (3.47) | ダミー変数によって非対称性を示す． |
| GJRモデル |  | (3.48) | TGARCHモデルにおけるとしたもの． |

【MEANモデル】

上記のモデルは，条件付き分散に関するモデルであるが，MEANモデルはもともとの変数に関するモデル．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.49) |

収益率の平均に，という誤差の条件付き標準偏差に関する項を付け足すことで，可変分散モデルとして拡張している．ただし，通常はを用いる．

【多変量GARCHモデル】

多変量GARCHモデルは，ある個の金融資産の期の収益率ベクトルをとし，次のようにモデル化したものである．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.50) |

ただし，，または誤差項であり，単変量の場合と同様に積過程で表現できる．

ただし，(の単位行列)，は条件付き共分散であり，をいかに定義するかによって多変量GARCHモデルのバリエーションが生まれる．

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **モデル名** | **モデル式** | | | **補足** |
| DVECモデル |  | (3.52) | はアダマール積（各要素ごとの積）．は単変量GARCHモデルにおけるに該当する． | |
| BEKKモデル |  | (3.53) | 各係数行列のそれぞれに対して転置行列が組になって積をなしていることから，は対称性のある変量として定義される． | |
| DVEC.Y.Zモデル  （Diagonal） |  | (3.54) | ()と()の2つの係数が行列，ベクトル，スカラーのバリエーションを持つため，合計9通りのパターンが考えられる． | |
| CCCモデル |  | (3.55) | 多変量時系列の条件付き相関行列．    を時間に依存しないと変動要素に分解したものである． | |
| DIAGモデル |  | (3.56) | CCCモデルをさらに単純化したモデルであるが，単純化によって必要な要素も抜ける可能性が高い． | |

## 相関のある乱数列の作り方

多変量時系列モデルでは，一般に誤差項の間に相関がある．しかし，モンテカルロ法のシミュレーションにおいて，独立とみなして乱数を発生させると正確な結果を算出できなくなる．

⇒誤差項間の相関係数に従った乱数を発生させる最も一般的な方法は，**コレスキー分解**と呼ばれる．

コレスキー分解による誤差項間の関連付けは，その関係の**線形成分のみ表現**できる．つまり，誤差項間に非線形の関係が顕著である場合は，コレスキー分解は適さない．

**誤差項が2つの場合**

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.57) |

ただし，である互いに独立な乱数．

(3.57)式のような1次変換を行うことで， かつ相関係数である乱数となる．

**誤差項が３つ以上の場合**

を独立な正規乱数とし，以下の1次変換を行う．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.58) |

ただし，行列の行列成分をとすると，は，

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.59) |

となる下三角行列である．このとき，の成分は平均ベクトル0，または以下の相関行列を持つ正規乱数となる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.60) |

## シミュレーション回数と収束制度

モンテカルロ法の誤差は，以下で表現される．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.58) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ： | モンテカルロ法による統計量 |
|  | ： | 求める値の収束値（モデルの真値） |
|  | ： | シミュレーション回数 |
|  | ： | モンテカルロ法の収束関数 |

**準乱数法[[2]](#footnote-3)**

ランダムに乱数を与えるのではなく，ある一定の規則に従って作られた乱数を発生させることにより，シミュレーション回数の少なさによる誤差を防ぐ．

この方法による，モンテカルロシミュレーションの収束測度は，以下の通り．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.62) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ： | モデルの次元（ランダム変数の数） |

(3.62)式から分かる通り，収束のオーダーは悪くなっているものの，次元が小さい場合には大きな成果を発揮する．

**調整乱数法**

乱数列のいくつかは実際にランダムに発生させるが，一部の乱数列では一定の規則によって計算された結果を使う方法．

|  |  |
| --- | --- |
| **対称変量法** | 乱数を作るたびに符号を反転させてもう1つの乱数を作る方法．平均や歪度などの奇数時のモーメントを0にすることが出来る．正規乱数などの歪度が0という条件が重要な場合に利用される． |
| **モーメントマッチング法** | 目的の個数分の乱数を発生させてから，乱数系列全体の総計量を計算し，その分の補正を加える．  **2次サンプリング法**…分散（標準偏差）を完全に一致させることが出来，前述の対象変量法と併用することで，平均・分散の一致を達成することが出来る． |

1. 為替のモデルなどで，使われることがある．対数をとっているので，裾野が厚いことがよかったりする． [↑](#footnote-ref-2)
2. 一様乱数ではなく，一様分布列を使用する方法を準調整法（準モンテカルロ法）という．乱数を利用するよりも収束が早くなる場合がある．ただし，純粋にランダムな方法ではないので，正解を得られる可能性が確率論的に低下する場合がある． [↑](#footnote-ref-3)