ARMA過程

# 定常性

定常性には弱定常性と強定常性が存在する

弱定常性(過程の期待値と自己共分散が時間を通して一定)

任意のに対して、  
が成立する場合、過程は弱定常と呼ばれる。

強定常性

任意のに対して、の同時分布が同一となる場合、過程は強定常と呼ばれる。

ここで、強定常は弱定常より強い概念であり、一般に弱定常過程が強定常過程とは限らないが、正規過程に関しては弱定常性ならば強定常性となる。  
この本では定常性は弱定常性のことを指す。

# ホワイトノイズ

iid系列(最も基礎的な強定常過程)

各時点のデータが互いに独立でかつ同一の分布に従う系列はiid系列と呼ばれる。

ホワイトノイズ

すべての時点において、  
が成立するとき、はホワイトノイズと呼ばれる。また、が分散のホワイトノイズに従うとき、とする。

# ARMA過程

ARMA過程=MA過程＋AR過程

## MA過程(移動平均過程)

MA過程の定義

MA(1)過程は以下のようにホワイトノイズを線形和の形にした過程であり、とにという共通項を持っていることで、との間に相関があるモデルとなっている。

MA(1)過程の特徴

* が大きくなるに従ってグラフが滑らかになる。これは０でない自己相関を持つことに起因している。  
  MA(1)過程の１次自己相関を見ると、  
  となり、の場合、の値が大きくなるほど自己相関が大きくなるため、滑らかなグラフになる。

*MA(q)*過程の性質

MA(q)過程の問題点

q次数の自己相関をモデル化するためには、qこのパラメータが必要となる。そのため、長期間に渡る自己相関をモデル化するためには、多くのパラメータが必要となり、パラメータをデータから推定することを考えるとあまり望ましくはない。また、観測不能なホワイトノイズを増やすことで解釈性を落としてしまう問題もある。これらを回避するために次のAR過程を用いる。

## AR過程(自己回帰過程)

AR過程の定義

AR(1)過程は以下のように過程が自身の過去に回帰された形で表現されており、が含まれていることでとの間に相関があるモデルとなっている。

AR(1)過程の特徴

* AR過程には初期値()が存在し、一般的には以下のように決めることが多い。  
  の条件なし分布が決まっている場合はその分布に従う確率変数(深堀り)  
  の分布が定まっていない場合は何らかの定数
* AR過程はMA過程とは違いモデルが定常かどうかはパラメータに依存する。
* AR(1)過程の自己相関を計算すると、  
  というユール・ウォーカー方程式が得られる。このユール・ウォーカー方程式は、AR過程の自己相関が、に従うAR過程と同一の係数を持つ差分方程式に従うことを示すものである。  
  また、の場合、AR(1)過程の自己相関の絶対値は指数的に減衰していく。
* AR(2)過程は多様な自己相関構造を表現することができ、循環する自己相関構造も記述することができる。さらに、AR(p)過程はさらに多様な循環構造を表現することができ、経済データが循環的な変動を示すことがあることを踏まえると、AR過程は非常に魅力的である。

AR(ｐ)過程の性質

## ARMA過程(自己回帰移動平均過程)

ARMA過程の定義

ARMA過程は自己回帰項と移動平均項を両方含んだ過程である。

ARMA過程はAR過程とMA過程の性質を併せもっており、両過程の性質のうち強いほうがARMA過程の性質となる。

ARMA過程(p,q)の性質

# ARMA過程の定常性と反転可能性

## AR過程の定常性

AR(p)過程の定常条件

AR(p)過程の定常条件は以下の方程式のすべての解の絶対値が１より大きいとき、AR過程は定常となる。

この方程式をAR特性方程式と呼び、特性方程式の左辺の多項式をAR多項式と呼ぶ。

定常AR過程とMA過程

定常AR過程はMA()過程で書き直すことが可能である。言い換えると、AR過程が定常であることと、AR過程をMA過程に書き直すことは同値である。

## MA過程の反転可能性

MA過程には同一の期待値と自己相関構造を持つ異なるMA過程が複数存在するため、どのMA過程を用いるか決める必要がある。そこで、１つの基準となるのが、MA過程の反転可能性である。

MA過程の反転可能性

MA過程がAR()過程に書き直せるとき、MA過程は反転可能と言われる。

MA過程が反転可能のとき、撹乱項は過去のの関数として表現でき、さらに過去のを用いてを予測したときの予測誤差として解釈できる。このため、反転可能表現に伴うをの本源的な撹乱項と呼ぶ。

MA過程の反転可能条件

MA(q)過程の反転可能条件は以下の方程式のすべての解の絶対値が１より大きいときである。

この方程式をMA特性方程式とよぶ。

## ARMA過程の定常・反転可能性

AR過程が定常かつMA過程が反転可能であれば、ARMA過程は定常かつ反転可能である。